Escuela Superior Politécnica del Litoral

Examen del Primer Parcial de Procesos Estocásticos

7 de julio de 2010

Profesor: Xavier Cabezas

Nombre: ______________________________

1. (Urnas de Ehrenfest) Se tienen dos urnas, con 5 bolas repartidas dentro de ellas, y en cada etapa se escoge una bola al azar y se cambia de urna. La cadena X_n representa el número de bolas de una de las urnas tras n etapas.

   Escriba la matriz de transición de un paso de esta cadena de markov.

2. (Random Walk) Un jugador comienza con \$2 en el bolsillo y participa en un juego donde apuesta \$1 dólar. Gana con probabilidad p y pierde el juego con probabilidad $(1-p)=q$. Su meta es aumentar su capital hasta \$4 y tan pronto lo logre se saldrá del juego a no ser que caiga en la ruina, es decir que su capital sea \$0.

   a) Defina los estados de este proceso estocástico y escriba la matriz de transición.

   b) Dibuje el diagrama de transición de estados.

   c) Escriba las clases de equivalencia (relación de equivalencia $\leftrightarrow$) y los estados absorbentes, transitorios y recurrentes del proceso cuando $0<p<1$.

   d) Escriba las clases de equivalencia cuando $p=0$ e indique cuáles de estas clases son cerradas y cuáles estados son absorbentes.

3. Para efectos de una investigación, en un determinado país, una familia puede clasificarse como habitante de zona urbana, rural o suburbana. Se ha estimado que durante un año cualquiera, el 15 % de todas las familias urbanas se cambian a zona suburbana y el 5 % a zona rural. El 6 % de las familias suburbanas pasan a zona urbana y el 4 % a zona rural. El 4 % de las familias rurales pasan a zona urbana y el 6 % a zona suburbana.

   a) Defina los estados de este proceso estocástico y escriba la matriz de transición.

   Suponga que al inicio de la investigación, el 35 % de la población vivía en áreas urbanas, el 45 % en áreas suburbanas y el resto en el área rural.

   b) Si inicialmente una familia vive en un área rural, cuál es la probabilidad de que 3 años después esta familia viva en área urbana?.

   c) (Probabilidad de un camino). Cuál es la probabilidad que una familia viva en el área urbana y que además en el siguiente año viva en el área suburbana y además luego de eso al siguiente año viva en el área rural.

   d) Cúal es la probabilidad de que 3 años después de iniciada la investigación una familia viva en el área urbana?.

4. Asmuniendo estacionariedad y con la ayuda de

$$r_k = \frac{\sum_{i=k+1}^{n}(x_i - \overline{x})(x_{i-k} - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

a) Encontrar las autocorrelaciones de orden $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ para la siguiente serie $X = [2, 3, 5, 1, 5, 2]$, donde x_j es un elemento del vector en la posición j, $j = 1, \ldots, n$ y bosquejar la gráfica de la función de autocorrelación (ACF).

b) Si las bandas de confianza del gráfico ACF están dadas por $\pm z_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}}$, ¿es posible decir que con 95 % ($1 - \alpha = 0{,}95$) puede rechazarse la hipótesis de que todas las autocorrelaciones son cero?.

5. Responda las siguientes preguntas:

   a) Sean i y j estados de una Cadena de Markov estacionaria. Dé una interpretación a la expresión $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$.

   b) Sea $X(t)$ un proceso estocástico estrictamente estacionario, con función de autocorrelación $R_X(\tau) = E[X(t_1)X(t_2)]$, donde $\tau = t_2 - t_1$. Entonces, cuál es función de $R_Y(\tau)$ del proceso:

$$Y(t) := \frac{1}{\epsilon}(X(t+\epsilon) - X(t)), \qquad \epsilon \in \mathbb{R}$$