FACULTAD DE INGENIERIA EN ELECTRICIDAD Y COMPUTACION

EXAMEN DE TEORIA ELECTROMAGNETICA I: SEGUNDA EVALUACIÓN

NOMBRE: ______________________

34

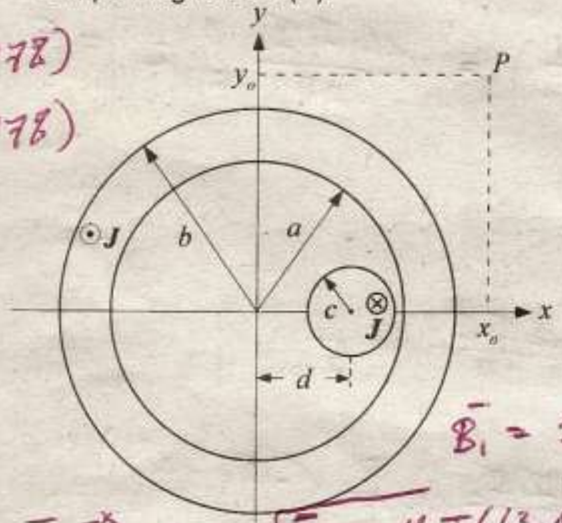
Paralelo: ____ Profesor: ______________________ 31 Agosto de 2010

TEMA # 1

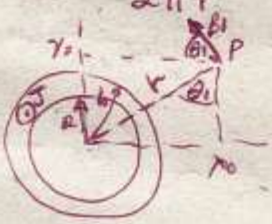
Un cilindro conductor, hueco e infinitamente largo, tiene un radio interior "a" y un radio exterior "b". Un cilindro macizo conductor de radio "c", es colocado en el interior del cilindro hueco antes mencionado, tal como se muestra en la figura. Los dos cilindros son paralelos y sus centros se encuentran separados por una distancia "d". Asumiendo que J es la densidad de corriente en cada cilindro y que es uniforme, calcular la densidad de campo magnético B(P).

B_1 (178)

B_2 (178)



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$



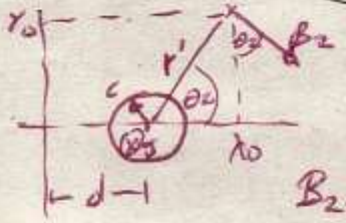
$$B_1 = \frac{\mu_0 J \pi (b^2 - a^2)}{2\pi r} (\bar{a}_\phi)$$

$$\operatorname{Sen}\theta_1 = \frac{x_0}{r} \qquad \operatorname{Cos}\theta_1 = \frac{y_0}{r}$$

$$\bar{B}_1 = B_1 \operatorname{Cos}\theta_1 (-\bar{a}_x) + B_1 \operatorname{Sen}\theta_1 (\bar{a}_y)$$

$$\bar{B}_1 = \frac{\mu_0 J (b^2 - a^2)}{r} \frac{y_0}{r} (-\bar{a}_x) + \frac{\mu_0 J (b^2 - a^2)}{2r} \frac{x_0}{r} (\bar{a}_y)$$

$$\boxed{\bar{B}_1 = \frac{\mu_0 J (b^2 - a^2) y_0}{2(x_0^2 + y_0^2)} (-\bar{a}_x) + \frac{\mu_0 J (b^2 - a^2) x_0}{2(x_0^2 + y_0^2)} (\bar{a}_y)}$$



$$B_2 = \frac{\mu_0 J \pi c^2}{2\pi r'} (-\bar{a}_\phi) = \frac{\mu_0 J c^2}{2r'} \operatorname{Sen}\theta_2 (\bar{a}_x) + \frac{\mu_0 J c^2}{2r'} \operatorname{Cos}\theta_2 (-\bar{a}_y)$$

$$r' = \sqrt{(x_0 - d)^2 + y_0^2} \qquad \operatorname{Sen}\theta_2 = \frac{y_0}{r'} \qquad \operatorname{Cos}\theta_2 = \frac{x_0 - d}{r'}$$

$$\boxed{\bar{B}_2 = \frac{\mu_0 J c^2 y_0}{2[(x_0 - d)^2 + y_0^2]} (\bar{a}_x) + \frac{\mu_0 J c^2 (x_0 - d)}{2[(x_0 - d)^2 + y_0^2]} (-\bar{a}_y)}$$

$$\bar{B}_T = \bar{B}_1 + \bar{B}_2$$

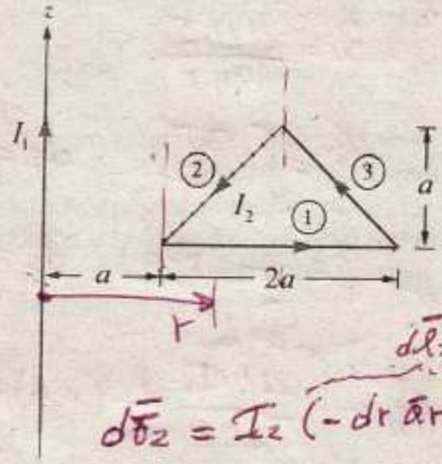
$$\boxed{B_T = \frac{\mu_0 J}{2} \left[\frac{c^2 y_0}{[(x_0 - d)^2 + y_0^2]} - \frac{(b^2 - a^2) y_0}{(x_0^2 + y_0^2)} \right] \bar{a}_x + \frac{\mu_0 J}{2} \left[\frac{(b^2 - a^2) x_0}{(x_0^2 + y_0^2)} - \frac{c^2 (x_0 - d)}{[(x_0 - d)^2 + y_0^2]} \right] \bar{a}_y}$$

(33)

TEMA # 2

Un lazo conductor triangular, que transporta una corriente I2, se encuentra ubicado muy próximo a un conductor recto e infinitamente largo que transporta una corriente de I1, tal como se muestra en la figura. Calcular: a) la fuerza ejercida sobre el lado 1 del lazo triangular; y, b) la fuerza total ejercida sobre el lazo triangular.

$F_1 (-118)$
$F_2 (118)$
$F_3 (118)$



$d\bar{F} = I\,d\bar{l}\times\bar{B} \qquad \bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\bar{a}_\phi$

$d\bar{F}_1 = I_2 \underbrace{(dr\,\bar{a}_r)}_{d\bar{l}_1} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}(\bar{a}_\phi) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{dr}{r}(\bar{a}_z)$

$$\boxed{\bar{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_a^{3a}\frac{dr}{r}(\bar{a}_z) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln 3\,(\bar{a}_z)}$$

$d\bar{F}_2 = I_2 \overbrace{(-dr\,\bar{a}_r - dz\,\bar{a}_z)}^{d\bar{l}_2} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}(\bar{a}_\phi) \qquad tg45 = \frac{dz}{dr} = 1$

$dr = dz$

$d\bar{F}_2 = \frac{I_2 \mu_0 I_1}{2\pi}\frac{dr}{r}(-\bar{a}_z) + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{\overset{=dr}{dz}}{r}(\bar{a}_r)$

$\bar{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_a^{2a}\frac{dr}{r}(-\bar{a}_z) + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_a^{2a}\frac{dr}{r}(\bar{a}_r)$

$$\boxed{\bar{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left[\ln 2\,\bar{a}_r - \ln 2\,\bar{a}_z\right] = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln 2\,(\bar{a}_r - \bar{a}_z)}$$

$d\bar{F}_3 = I_2 \overbrace{(-dr\,\bar{a}_r + dz\,\bar{a}_z)}^{d\bar{l}_3} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}(\bar{a}_\phi) \qquad tg45 = \frac{dz}{dr} = 1 \qquad dr = dz$

$d\bar{F}_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{dr}{r}(-\bar{a}_z) + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{\overset{=dr}{dz}}{r}(-\bar{a}_r)$

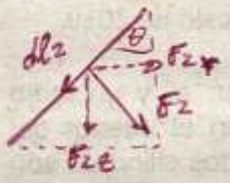
$$\boxed{\bar{F}_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left[\int_{2a}^{3a}\frac{dr}{r}(-\bar{a}_r) - \int_{2a}^{3a}\frac{dr}{r}\,\bar{a}_z\right] = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{3}{2}(-\bar{a}_r - \bar{a}_z)}$$

$\bar{F}_T = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left(\ln 2 - \ln\frac{3}{2}\right)\bar{a}_r + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\cancel{\left(\ln 3 - \ln 2 - \ln\frac{3}{2}\right)}\bar{a}_z$

$$\boxed{\bar{F}_T = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{4}{3}\,\bar{a}_r}$$

2) Otro método para $\bar{F}_2$ y $\bar{F}_3$

$d\bar{F}_2 = I_2\, d\bar{l}_2 \times \bar{B}_1 \qquad |d\bar{F}_2| = I_2\, dl_2\, B_1 \qquad |dF_2| = I_2 \sqrt{2}\, dr\, B_1$



$\text{Sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{dr}{dl} \Rightarrow dl = \sqrt{2}\, dr$

$|dF_2| = \sqrt{2}\, I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\, dr \qquad |F_2| = \sqrt{2}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_a^{2a}\frac{dr}{r}$

$|F_2| = \frac{\sqrt{2}\,\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln 2 \qquad \bar{F}_2 = F_{2(r)}\,\bar{a}_r + F_{2(z)}(-\bar{a}_z)$

$F_{2(r)} = F_2 \cos 45° = \frac{\sqrt{2}\,\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln 2 = F_{2(z)}$

$\bar{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln 2\,(\bar{a}_r - \bar{a}_z)$

$|F_3| = \sqrt{2}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{2a}^{3a}\frac{dr}{r} = \sqrt{2}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{3}{2}$

$\bar{F}_3 = F_{3(r)}(-\bar{a}_r) + F_{3(z)}(-\bar{a}_z) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{3}{2}\,(-\bar{a}_r - \bar{a}_z)$

33

TEMA # 3

La sección transversal de un núcleo toroidal de permeabilidad μ tiene forma triangular. Sobre una parte del núcleo, se devana una bobina de N_1 espiras; sobre otra parte del mismo núcleo, se devana una bobina de N_2 espiras, tal como se muestra en la siguiente figura. Determinar la inductancia propia de cada bobina del toroide y la inductancia mutua del sistema de bobinas.

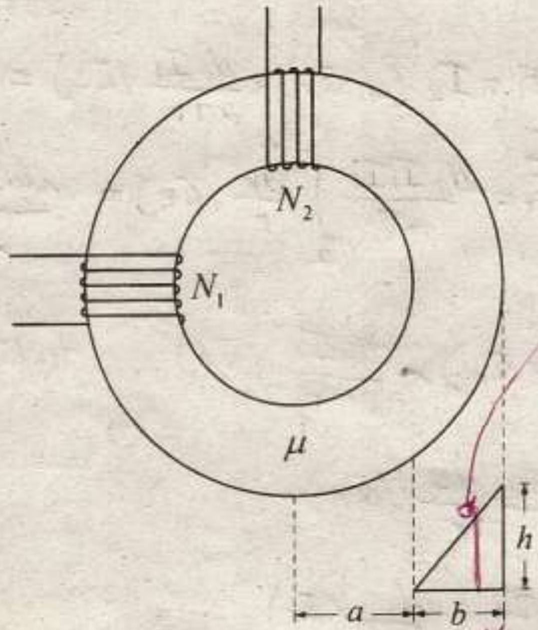
ϕ (21%)
L_1 (4%)
L_2 (4%)
M (4%)

$$B_1 = \frac{\mu N_1 I_1}{2\pi r}$$

$$\phi_{11} = \int \bar{B}_1 \cdot \bar{ds}_1 \qquad ds = y\,dr$$

$$y = \frac{h}{b}(r-a) \qquad ds = \frac{h}{b}(r-a)\,dr$$

$$\phi_{11} = \int_a^{a+b} \frac{\mu N_1 I_1}{2\pi r}\,\frac{h}{b}(r-a)\,dr$$



Sección transversal del núcleo toroidal

$$\phi_{11} = \frac{\mu N_1 I_1 h}{2\pi b}\left[\int_a^{a+b} dr - a\int_a^{a+b}\frac{dr}{r}\right] = \frac{\mu N_1 I_1 h}{2\pi b}\left[b - a\ln\frac{a+b}{a}\right]$$

$$\lambda_{11} = N_1\phi_{11} = \frac{\mu N_1^2 I_1 h}{2\pi}\left(1 - \frac{a}{b}\ln\frac{a+b}{a}\right) = L_{11} I_1$$

$$\boxed{L_{11} = \frac{\mu N_1^2 h}{2\pi}\left(1 - \frac{a}{b}\ln\frac{a+b}{a}\right)}$$

$$\boxed{L_{22} = \frac{\mu N_2^2 h}{2\pi}\left(1 - \frac{a}{b}\ln\frac{a+b}{a}\right)}$$

$$\lambda_{12} = N_2\phi_{11} \Rightarrow \boxed{M = \frac{\mu N_1 N_2 h}{2\pi}\left(1 - \frac{a}{b}\ln\frac{a+b}{a}\right)}.$$