ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL
PROGRAMA DE TECNOLOGIA EN MECANICA
EVALUACION FINAL DE MATEMATICAS I
Versión 2

FECHA: 4 DE FEBRERO DE 2011 **PARALELO: 2**

1. (10 puntos) Encuentre las coordenadas de los puntos MÁXIMOS, MÍNIMOS e INFLEXIÓN de la siguiente función. Haga un bosquejo de la función en el plano cartesiano

$$y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$

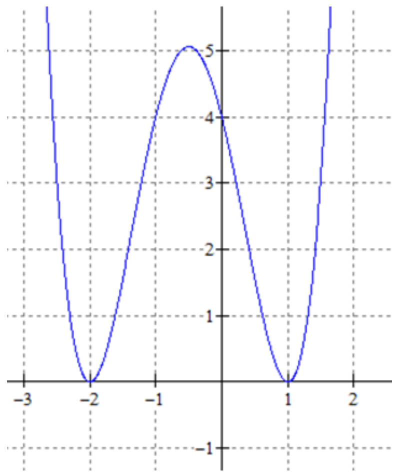
$y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

condición para máximos y minimos, que existan valores de x donde $y' = 0$

$y' = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4$

$0 = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4$

$$0 = 2(x-1)(x+2)(2x+1) \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 & \rightarrow \quad y = 0 \\ x_2 = -\frac{1}{2} & \rightarrow \quad y = \frac{81}{16} \\ x_3 = -2 & \rightarrow \quad y = 0 \end{cases}$$



segunda derivada $y'' = 12x^2 + 12x - 6 = 6(2x^2 + 2x - 1)$

$y''(1) = +22 \rightarrow$ signo positivo entonces es un minimo.

$y''(-\frac{1}{2}) = -18 \rightarrow$ signo negativo entonces es un máximo

$y''(-2) = +18 \rightarrow$ signo positivo entonces es un minimo.

los valores en x donde hay inflexión con la condición $y'' = 0$

$0 = 6(2x^2 + 2x - 1) \rightarrow 0 = 2x^2 + 2x - 1$

$$x_{4,5} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{3(4)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$x_4 = 0.366025 \rightarrow y = \frac{9}{4} = 2.25$

$x_5 = -1.366025 \rightarrow y = \frac{9}{4} = 2.25$

2. (10 puntos) El desplazamiento recorrido por un móvil en línea recta viene dado por la ecuación
   $\boldsymbol{s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4}$ (ley del movimiento).
   a) Determinar el tiempo en que la velocidad se hace cero.
   b) Determinar la aceleración en el tiempo antes indicado.

$s' = 3t^2 - 12t + 9$

Para calcular el tiempo en que la velocidad se hace cero, igualamos la primera derivada a cero:

$0 = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t-3)(t-1)$

$t_1 = 1 \qquad t_2 = 3$

La aceleración es la primera derivada de la velocidad:

$a = v' = s'' = 6t - 12$

$a(1) = 6(1) - 12 = -6$

$a(3) = 6(3) - 12 = 6$

3. (10 puntos) Encuentre la derivada de la siguiente función:

$$y = \frac{1}{3x}\left[Sen^3(3x+2)\right]$$

Se puede utilizar la derivada de la multiplicación de dos funciones:

$$y = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)\left(Sen^3\left(3x+2\right)\right)$$

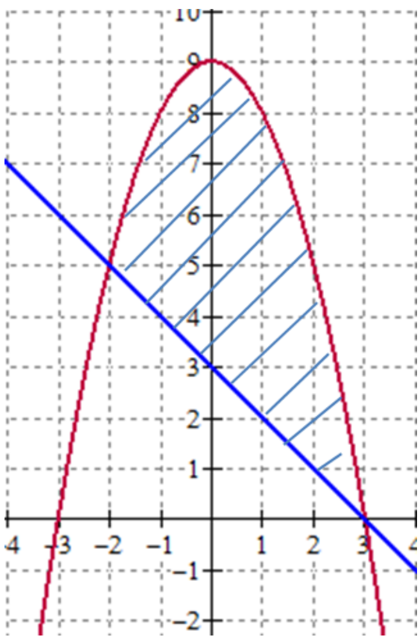
$$y' = \frac{3Sen^2\left(3x+2\right)Cos\left(3x+2\right)(3)}{3x} + \frac{1}{3}Sen^3\left(3x+2\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y' = \frac{3Sen^2\left(3x+2\right)Cos(3x+2)}{x} - \frac{Sen^3\left(3x+2\right)}{3x^2}$$

$$= \frac{Sen^2\left(3x+2\right)}{x}\left(3Cos\left(3x+2\right) - \frac{Sen(3x+2)}{3x}\right)$$

4. (10 puntos) Calcular el área limitada por la curva y recta siguiente:

$$y = 9 - x^2, y = 3 - x$$



Puntos en los que se intersecctan las dos funciones:

$$9 - x^2 = 3 - x$$

$$0 = x^2 - x - 6$$

$$0 = (x-3)(x+2)$$

$$x = 3 \rightarrow y = 0$$

$$x = -2 \rightarrow y = 5$$

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_{-2}^{3}\left[\left(9 - x^2\right) - \left(3 - x\right)\right]dx$$

$$A = \int_{-2}^{3}\left(6 + x - x^2\right)dx = \int_{-2}^{3} 6dx + \int_{-2}^{3} xdx - \int_{-2}^{3} x^2dx$$

$$A = 6x\Big|_{-2}^{3} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{3} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{3} = 30 + \frac{5}{2} - \frac{27+8}{3} = \frac{125}{6} = 20\tfrac{5}{6}$$

5. (10 puntos c/u) Hallar la integral indefinida de:

a) $$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\ dx$$

$$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\ dx$$

$$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\ dx = \int\left(x+5-\frac{4}{x^2}\right)dx = \int xdx + 5\int dx - 4\int x^{-2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}+5x-\frac{4}{-1}x^{-1}+c = \frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+c$$

b) $$\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx$$

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx$$

$$u = 1-2x^2 \rightarrow du = -4xdx \rightarrow -\frac{du}{4} = xdx$$

$$3\int\sqrt{u}\left(-\frac{du}{4}\right) = -\frac{3}{4}\int u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{3}{4}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)$$

$$= -\frac{3}{4}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}+c$$

Sustituyendo la variable u por x, tenemos:

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx = -\frac{1}{2}\left(1-2x^2\right)^{\frac{3}{2}}+c = -\frac{1}{2}\sqrt{\left(1-2x^2\right)^3}+c$$

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \operatorname{tag}^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
4. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
5. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
6. $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$
7. $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)]$
8. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$
9. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$
10. $1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x$
11. $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x$
12. $1 \pm \operatorname{sen} x = 1 \pm \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$

1. $\displaystyle\int \frac{d}{dx}[f(x)]\,dx = f(x) + C$
2. $\displaystyle\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
3. $\displaystyle\int au\,dx = a\int u\,dx$, siendo a una constante
4. $\displaystyle\int u^m\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1$
5. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$
7. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$
8. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
9. $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
10. $\displaystyle\int \operatorname{tag} u\,du = \ln|\sec u| + C$
11. $\displaystyle\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
12. $\displaystyle\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tag} u| + C$
13. $\displaystyle\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
14. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tag} u + C$
15. $\displaystyle\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
16. $\displaystyle\int \sec u \operatorname{tag} u\,du = \sec u + C$
17. $\displaystyle\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
18. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$
19. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tag}\frac{u}{a} + C$
20. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\frac{u}{a} + C$
21. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
22. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$
23. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2+a^2}) + C$
24. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2-a^2}| + C$
25. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$
26. $\displaystyle\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln(u + \sqrt{u^2+a^2}) + C$
27. $\displaystyle\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2\ln|u + \sqrt{u^2-a^2}| + C$