ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL
PROGRAMA DE TECNOLOGIA EN MECANICA
EXAMEN DE MEJORAMIENTO DE MATEMATICAS I
Versión 1

FECHA: 18 DE FEBRERO DE 2011 **PARALELO: 2**

1. (10 puntos c/u) Hallar la integral indefinida de:

a)

$$\int\left(\frac{2x+1}{x^2+x-3}\right)dx$$

Método de solución: cambio de variable.

$$u=x^2+x-3 \quad\to\quad du=(2x+1)dx$$

$$\int\frac{du}{u}=\ln u+c$$

Regresando a la variable original

$$\int\left(\frac{2x+1}{x^2+x-3}\right)dx=\ln\left(x^2+x-3\right)+c$$

b)

$$\int(2x\ln x)dx=2\int(x\ln x)dx$$

Resolución por el método de integración por partes.

$$u=\ln x \quad\to\quad du=\frac{dx}{x}$$

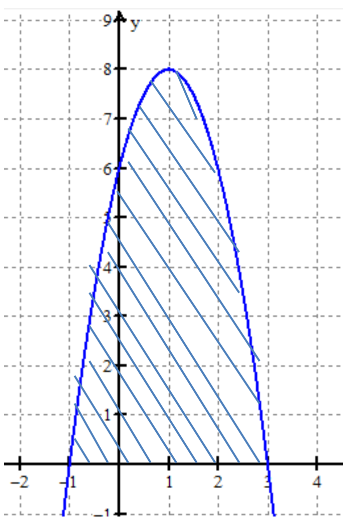
$$dv=xdx \quad\to\quad v=\int xdx=\frac{x^2}{2}$$

$$\int udv=uv-\int vdu=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{dx}{x}\right)$$

$$=2\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx\right)=2\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)+c$$

$$=2\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2\right)+c=x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2+c$$

2. (20 puntos) Hallar el área comprendida entre la parábola $y=6+4x-2x^2$ y la recta $y=0$
Nota: Haga un gráfico en el plano cartesiano.



$$A=\int f(x)dx$$

$$A=\int_{-1}^{3}\left(6+4x-2x^2\right)dx=6\int_{-1}^{3}dx+4\int_{-1}^{3}xdx-2\int_{-1}^{3}x^2dx$$

$$A=6x\Big|_{-1}^{3}+4\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{3}-2\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3}=6[3-(-1)]+2\left[3^2-(-1)^2\right]-\frac{2}{3}\left[3^3-(-1)^3\right]$$

$$A=24+16-\frac{56}{3}=\frac{64}{3}=21\tfrac{1}{3}$$

3. (10 puntos) Despejar x de la siguiente ecuación logarítmica: $\log(x)-\log(3x+1)=1$

$$\log(x)-\log(3x+1)=1$$

$$\log\left(\frac{x}{3x+1}\right)=1 \ \rightarrow \ 10^{\log\left(\frac{x}{3x+1}\right)}=10^1$$

$$\frac{x}{3x+1}=10 \ \rightarrow \ x=10(3x+1)$$

$$x=30x+10 \quad \rightarrow \quad 29x=-10$$

$$x=-\frac{10}{29}$$

4. (10 puntos) Despejar ***x*** de la siguiente ecuación exponencial: $e^x-16e^{-x}-2=0$

$$e^x-16e^{-x}-2=0$$

$$e^x-\frac{16}{e^x}-2=0 \quad \rightarrow \quad \frac{e^{2x}-16-2e^x}{e^x}=0 \quad \rightarrow \quad e^{2x}-2e^x-16=0$$

Haciendo cambio de variable $e^x=u$

$$u^2-2u-16=0$$

$$u_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-16)}}{2(1)}$$

$$u_1=5.123; \quad u_2=-3.123$$

Regresando a la variable original:

$$e^x=5.123 \quad \rightarrow \quad x=\ln(5.123)=1.633$$

$e^x=-3.123 \quad \rightarrow x=\ln(-3.123)$ no tiene solución.

5. (10 puntos) Calcular el límite de la siguiente función: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2+5x+1}{3x^2-5x-2}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2+5x+1}{3x^2-5x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6+\cancel{\frac{5}{x}}^{0}+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0}}{3-\cancel{\frac{5}{x}}^{0}-\cancel{\frac{2}{x^2}}^{0}}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2+5x+1}{3x^2-5x-2}\right)=2$$

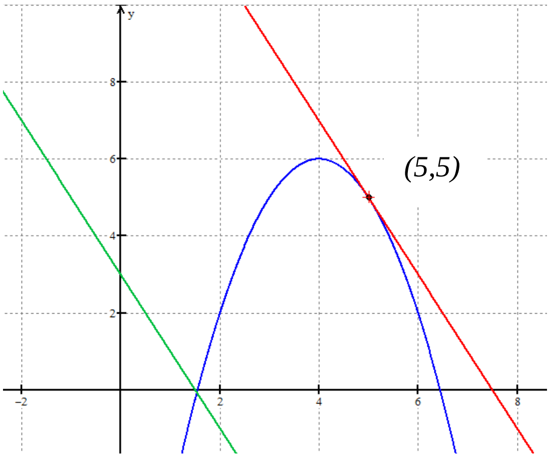
6. (10 puntos) Encuentre la derivada de la siguiente función: $y=\dfrac{\sqrt{5x-1}}{x}$

$$y=\frac{\sqrt{5x-1}}{x}=\frac{(5x-1)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$y'=\frac{x\left(\frac{1}{2}\right)(5x-1)^{-\frac{1}{2}}(5)-(5x-1)^{\frac{1}{2}}}{x^2}=\frac{\frac{5x}{2\sqrt{5x-1}}-\sqrt{5x-1}}{x^2}$$

$$y'=\frac{5}{2x\sqrt{5x-1}}-\frac{\sqrt{5x-1}}{x^2}$$

7. (10 puntos) Calcular un punto de la curva $y = 8x-x^2-10$, en el que la tangente es paralela a la recta $y = 3-2x$



$y=-10+8x-x^2$

$y'=8-2x$

La derivada de la función en un valor de x es la tangente de la recta que pasa por dicho punto:

$y'=-2 \quad \rightarrow \quad -2=8-2x \rightarrow \quad 2x=10 \quad \rightarrow \quad x=5$

$y(5)=-10+8(5)-5^2=5$

El punto de la parábola cuya tangente es paralela a la recta $y=3-2x$ tiene coordenadas $(5,5)$

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(5,5)$ es:

$5=-2(5)+b \rightarrow b=5+10=15$

$y=-2x+15$

8. (10 puntos) Encuentre la derivada de la siguiente función: $y=\dfrac{1}{3}\tan^3(x+2)$

$$y=\frac{1}{3}\tan^3(x+2)$$

$$y'=\frac{3}{3}\tan^2(x+2)\sec^2(x+2)=\tan^2(x+2)\sec^2(x+2)$$

Opcional :

$$y'=\frac{\sin^2(x+2)}{\cos^4(x+2)}$$

1. $\int \frac{d}{dx}[f(x)]\,dx = f(x) + C$

2. $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$

3. $\int au\,dx = a\int u\,dx$, siendo a una constante

4. $\int u^m\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1$

5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

6. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$

7. $\int e^u\,du = e^u + C$

8. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

9. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

10. $\int \operatorname{tag} u\,du = \ln|\sec u| + C$

11. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

12. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tag} u| + C$

13. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

14. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tag} u + C$

15. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

16. $\int \sec u \operatorname{tag} u\,du = \sec u + C$

FORMULAS DE DERIVACION. En las fórmulas siguientes u, v y w son funciones derivables de x.

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$, siendo c una constante

2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$

3. $\frac{d}{dx}(u+v+\cdots) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) + \cdots$

4. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$

5. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$

6. $\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{d}{dx}(w) + uw\frac{d}{dx}(v) + vw\frac{d}{dx}(u)$

7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c}\cdot\frac{d}{dx}(u), \quad c \neq 0$

8. $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right) = c\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{c}{u^2}\cdot\frac{d}{dx}(u)$, $u \neq 0$

9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}, \quad v \neq 0$

10. $\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$

11. $\frac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$