**FACULTAD DE INGENIERIA EN ELECTRICIDAD Y COMPUTACION**

**EXAMEN DE TEORIA ELECTROMAGNETICA I: PRIMERA EVALUACIÓN**

NOMBRE:

Paralelo: ____ Profesor: __________________________ 06 de Julio del 2011

**TEMA # 1**

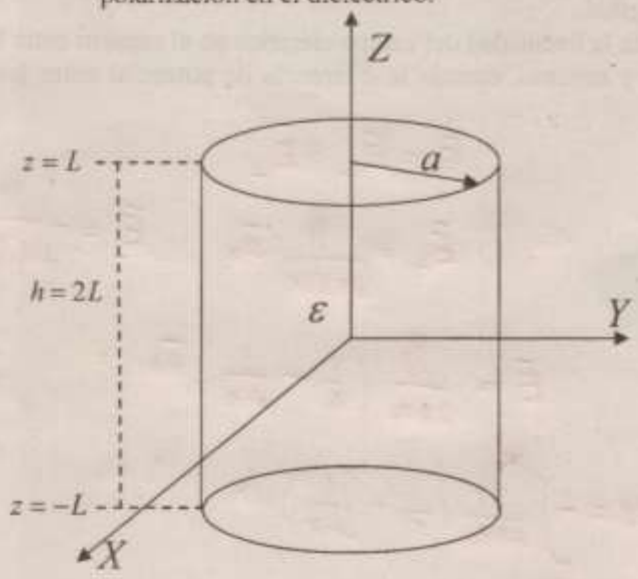
33/33

Un cilindro dieléctrico de permitividad **ε**, de radio **a** y de altura **2L** tiene la siguiente polarización:

$$\bar{P} = \frac{P_o Z}{L}\bar{a}_z$$

**a)** Encuentre el campo eléctrico y el vector de desplazamiento (D) a lo largo del eje Z.

**b)** Encuentre las densidades de cargas de polarización (superficiales y volumétricas) y la carga total de polarización en el dieléctrico.




$$\nabla S = \frac{\partial S}{\partial r}\mu_r + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \phi}\mu_\phi + \frac{\partial S}{\partial z}\mu_z$$

$$\nabla . F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r F_r) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 S = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$$

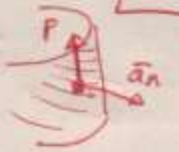
a) $\bar{P} = \frac{P_o z}{L}\bar{a}_z = (\epsilon - \epsilon_o)\bar{E}$

$\boxed{\bar{E} = \frac{P_o}{(\epsilon - \epsilon_o)L} z\,\bar{a}_z}$ $\qquad \bar{D} = \epsilon\bar{E}$

$\boxed{\bar{D} = \frac{\epsilon P_o}{(\epsilon - \epsilon_o)L} z\,\bar{a}_z}$

b) $\rho_{sp} = \bar{P}\cdot\bar{a}_n$

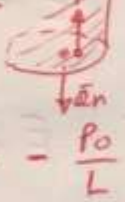
Area lateral: $\boxed{\rho_{sp} = 0}$




$Z = L$


$\rho_{sp}\big|_{Z=L} = |P| = \frac{P_o L}{L} = +P_o$ coul/m²

$Z = -L$




$\rho_{sp}\big|_{Z=-L} = -|P| = +P_o$ coul/m²

$\rho_p = -\nabla . P = -\frac{d}{dz}P_z = -\frac{d}{dz}\frac{P_o z}{L} = -\frac{P_o}{L}$ coul/m³

$Q_{pol} = P_o(\pi a^2) + P_o(\pi a^2) - \frac{P_o}{L}(\pi a^2 2L) = 0$

## TEMA # 2

Se tiene dos conductores cilíndricos de radio **a**, muy largos y paralelos, separados de eje a eje una distancia **d**, como se muestra la figura.

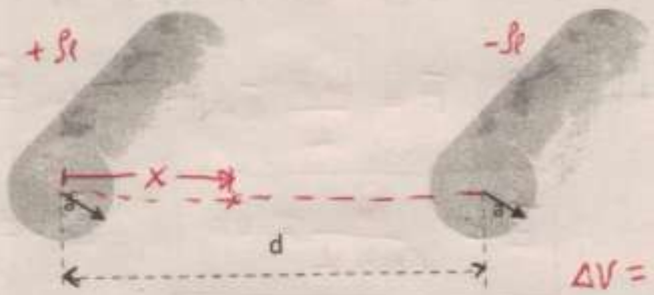
a) Calcular la capacitancia por unidad de longitud.

b) Si a =1 cm, d = 20 cm, grafique como varía la intensidad del campo eléctrico en el espacio entre los conductores, indicando su valor máximo y mínimo, cuando la diferencia de potencial entre los 2 cables es 13800 voltios .

33/33

$$E = \bar{E}_+ + \bar{E}_-$$

$$\bar{E}_+ = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 x}\bar{a}_x \qquad \bar{E}_- = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0(d-x)}(-\bar{a}_x)$$




$$\bar{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\bar{a}_x$$

$$\Delta V = -\int_{d-a}^{a} \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)dx$$

$$\Delta V = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln x - \ln(d-x)\Big]_{d-a}^{a}$$

$$\Delta V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-x}{x}\Big|_{d-a}^{a}$$

$$\Delta V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\frac{d-a}{a} - \ln\frac{d-d+a}{d-a}\right]$$

$$\Delta V = \frac{\rho_l}{\cancel{2}\pi\varepsilon_0}\cancel{2}\ln\frac{d-a}{a} = \frac{\rho_l}{C_l}$$

$$\boxed{C_l = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d-a}{a}}}$$

$$\bar{E} = \frac{C_l\,\Delta V}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\bar{a}_x$$

$$\bar{E} = \frac{\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d-a}{a}}\Delta V}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\bar{a}_x$$

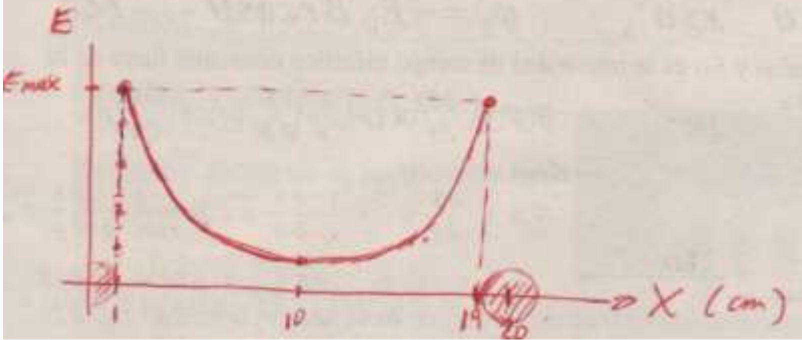
$$\bar{E} = \frac{\Delta V}{2\ln\frac{d-a}{a}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\bar{a}_x$$

$$\bar{E} = \frac{\Delta V}{2\ln\frac{d-a}{a}}\,\frac{d}{x(d-x)}\,\bar{a}_x$$

$$\bar{E} = \frac{13800}{2\ln 19}\,\frac{0.20}{x(d-x)}\,\bar{a}_x$$

$$\bar{E} = \frac{468.68}{x(d-x)}\,\bar{a}_x = \frac{468.68}{x(0.20-x)}\,\bar{a}_x$$

| | X (cm) | $\bar{E}$ volt/m |
|---|---|---|
| max → | 1 | 246673.68 |
| ↘ | 19 | 246673.68 |
| min → | 10 | 46868. |
| | 5 | 62490.66 |
| | 15 | 62490.66 |



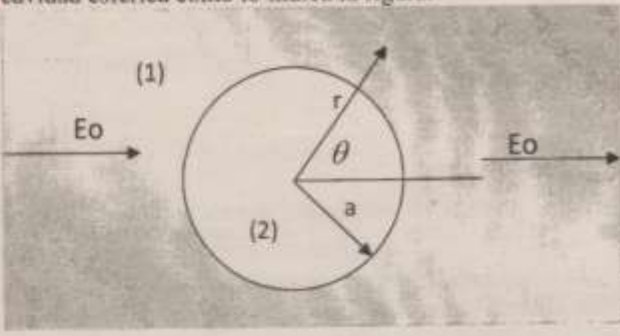

34/34

**TEMA # 3**

La función de Potencial en un medio dieléctrico (constante dieléctrica $K = \varepsilon / \varepsilon_0$) está dada por:

$$\varphi_1 = -E_0\left(r + Aa^3/r^2\right)\cos\theta \quad r>a\ , \qquad \varphi_2 = -E_0\,B\,r\cos\theta \qquad r<a$$

Donde A y B son constantes desconocidas y Eo es la intensidad de campo eléctrico constante fuera de la cavidad esférica como lo indica la figura.




Grad.

$$\nabla S = \frac{\partial S}{\partial r}\bar{\mu}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \theta}\bar{\mu}_\theta + \frac{1}{r\,sen\,\phi}\frac{\partial S}{\partial \phi}\bar{\mu}_\phi$$

Calcule la intensidad de campo eléctrico dentro de la cavidad esférica de radio **a**, solo en función de ***K*** y el vector Eo.

Para calcular A y B, evaluar en cond. frontera.

$$\varphi_1\big|_{r=a} = \varphi_2\big|_{r=a}$$

$$-\cancel{E_0}\left(a + \frac{Aa^3}{a^2}\right)\cancel{\cos\theta} = -\cancel{E_0}\,Ba\,\cancel{\cos\theta}$$

$$a + Aa = Ba \Rightarrow 1 + A = B$$

$$A = B - 1$$

$$D_{1n} = D_{2n} \qquad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \qquad E = -\nabla\varphi$$

$$\varepsilon\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_0\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \qquad (E_n = E_r)$$

$$\varepsilon\left[E_0\cos\theta\left(1 + \frac{Aa^3(-2r)}{r^4}\right)\right] = \varepsilon_0 E_0 B\cos\theta$$

$$\varepsilon\,(1 - 2A) = \varepsilon_0 B \qquad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}(1-2A) = B$$

$$K[1 - 2(B-1)] = B \qquad K[3 - 2B] = B \qquad 3K - 2KB - B = 0$$

$$3K - B(2K+1) = 0 \qquad \boxed{B = \frac{3K}{2K+1}}$$

$$\boxed{\varphi_2 = -E_0\,\frac{3K}{2K+1}\,r\cos\theta} \qquad \bar{E}_2 = -\nabla\varphi_2 = -\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\bar{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\bar{a}_\theta\right]$$

$$E_2 = E_0\,\frac{3K}{2K+1}\cos\theta\,\bar{a}_r - \frac{1}{r}\left(-E_0\,\frac{3K}{2K+1}\,r\right)(-\operatorname{Sen}\theta)\,\bar{a}_\theta$$

$$\boxed{\bar{E}_2 = E_0\,\frac{3K}{2K+1}\left(\cos\theta\,\bar{a}_r - \operatorname{Sen}\theta\,\bar{a}_\theta\right)}$$