ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS
ANALISIS NUMERICO

PRIMERA EVALUACION GUAYAQUIL, 5 DE JULIO DE 2011

Nombre: . . . . .Paralelo: . . . .

1) Determine de ser posible, el valor del parámetro $\alpha > 0$, tal que $\int_{\alpha}^{2\alpha} xe^x dx = 10$.

a) Justifique la existencia del parámetro α.

$$\int_a^{2a} xe^x dx = 10 \Rightarrow \left[xe^x - e^x\right]_a^{2a} = 10 \Rightarrow 2ae^{2a} - e^{2a} - ae^a + e^a = 10$$

$$f(a) = 2ae^{2a} - e^{2a} - ae^a + e^a - 10 = (2a-1)e^{2a} - (a-1)e^a - 10 = 0$$

$$f(0) = -10$$

$$f(1) = -2.6109$$

$$f(2) = 146.4054$$

Por el teorema de Bolzano, existe una solución en el intervalo [1, 2]

b) En caso de existir el parámetro α, aplicar el método de Newton para aproximar el valor de α, con una tolerancia de 10^{-4}.

$$a_{i+1} = a_i - \frac{f(a_i)}{f'(a_i)} = a_i - \frac{(2a_i - 1)e^{2a_i} - (a_i - 1)e^{a_i} - 10}{2e^{2a_i} - e^{a_i} + 2(2a_i - 1)e^{2a_i} - (a_i - 1)e^{a_i}}$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1.0973$$

$$a_2 = 1.0853$$

$$a_3 = 1.0851$$

$$a_4 = 1.0851$$

2) Una empresa compra tres materiales A, B, C en cantidades en kg. como se indica en el cuadro. Se dispone de dos facturas en las que consta el total pagado en dólares. Se desconoce el total pagado en la segunda factura:

Factura	A	B	C	Total
1	2	5	4	35
2	3	9	8	k
3	2	3	1	17

a) Construya el modelo matemático para resolver este problema

Sean x_1, x_2, x_3 variables que representan al precio unitario de cada producto. Entonces, se puede escribir:

$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 35$$

$$3x_1 + 9x_2 + 8x_3 = k$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 17$$

b) Con el método de Gauss-Jordan encuentre la solución en función de **k**

$$A\,|\,B=\begin{bmatrix}2 & 5 & 4 & 35\\ 3 & 9 & 8 & k\\ 2 & 3 & 1 & 17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5/2 & 2 & 35/2\\ 0 & 3/2 & 2 & k-105/2\\ 0 & -2 & -3 & -18\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & -4/3 & 105-5k/3\\ 0 & 1 & 4/3 & 2k/3-35\\ 0 & 0 & -1/3 & 4k/3-88\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 457-7k\\ 0 & 1 & 0 & 6k-387\\ 0 & 0 & 1 & 264-4k\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}457-7k\\ 6k-387\\ 264-4k\end{bmatrix}$$

c) Luego de resolver el sistema nos comunican que el valor pagado en la **segunda factura** es **65** dólares. Sustituya en la solución anterior y encuentre la solución exacta.

$$X=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

d) Para verificar que la solución es confiable, en la matriz de coeficientes sustituya **5** por **5.1** y obtenga nuevamente la solución con el método anterior con **k=65**. Compare con la solución anterior y comente el resultado obtenido.

$$A\,|\,B=\begin{bmatrix}2 & 51/10 & 4 & 35\\ 3 & 9 & 8 & 65\\ 2 & 3 & 1 & 17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 51/20 & 2 & 35/2\\ 0 & 27/20 & 2 & 25/2\\ 0 & -21/10 & -3 & -18\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & -16/9 & -55/9\\ 0 & 1 & 40/27 & 250/27\\ 0 & 0 & 1/9 & 13/9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 17\\ 0 & 1 & 0 & -10\\ 0 & 0 & 1 & 13\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}17\\ -10\\ 13\end{bmatrix}$$

El error de 0.1 en un coeficiente, distorsionó completamente la solución, por lo tanto la solución no es confiable.

e) Encuentre el error relativo de la solución y compare con el error relativo de la matriz Comente acerca del tipo de sistema.

$$e_x=\frac{\|X-X'\|}{\|X\|}=3.75=375\%,\qquad e_A=\frac{\|A-A'\|}{\|A\|}=0.005=0.5\%$$

0.5% de distorsión en la matriz produjo una distorsión de 375% en la solución. Estos resultados confirman que el sistema es muy sensible a cambios o errores en los datos. Los errores son amplificados al calcular la solución. Se concluye que es un sistema mal condicionado.

3) Suponga que se tiene un automóvil viajando a lo largo de un camino recto. En diferentes puntos de su recorrido se mide lo siguiente:

Tiempo [s]	0	3	5	8	13
Distancia [m]	0	69	117	190	303
Velocidad [m/s]	22.9	23.5	24.4	22.6	21.9

Usando interpolación de Lagrange aproxime el valor de la velocidad del automóvil en t=10 segundos.

$$p_4(x) = f_0L_0(x) + f_1L_1(x) + f_2L_2(x) + f_3L_3(x) + f_4L_4(x)$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_4)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_4)}, \quad i=0,1,2,3,4$$

$$L_0(10) = \frac{(10-3)(10-5)(10-8)(10-13)}{(0-3)(0-5)(0-8)(0-13)} = -0.1346$$

$$L_1(10) = \frac{(10-0)(10-5)(10-8)(10-13)}{(3-0)(3-5)(3-8)(3-13)} = 1$$

$$L_2(10) = \frac{(10-0)(10-3)(10-8)(10-13)}{(5-0)(5-3)(5-8)(5-13)} = -1.7500$$

$$L_3(10) = \frac{(10-0)(10-3)(10-5)(10-13)}{(8-0)(8-3)(8-5)(8-13)} = 1.7500$$

$$L_4(10) = \frac{(10-0)(10-3)(10-5)(10-8)}{(13-0)(13-3)(13-5)(13-8)} = 0.1346$$

$$p_4(10) = 22.9(-0.1346) + 23.5(1) + 24.4(-1.75) + 22.6(1.75) + 21.9(0.1346)$$
$$=20.2154$$

Fuera del desarrollo del tema. Se observa que este es un ejemplo para el cual el polinomio de interpolación (línea continua) no es un modelo adecuado pues no sigue apropiadamente la tendencia de los datos. Si se coloca el trazador cúbico natural (línea con puntos) con la formulación de este curso, se obtiene una mejor representación