Conteste todas las preguntas en el espacio asignado para las mismas. Si le falta espacio use la parte de atrás de la hoja.

Nombre completo: ____________________

1. Suponga que X_1 y X_2 son variables aleatorias normales con media 0 y varianza 1, y que la covarianza entre ellas es 0.9.

   (a) (10 puntos) Encuentre el valor esperado condicional de X_2 dado X_1

   (b) (10 puntos) Encuentre una transformación lineal de X_1 y X_2 que resulte en dos variables Z_1 y Z_2 con media 0, vairanza 1 y covarianza 0

(c) (10 puntos) Si Z_1 y Z_2 tienen media 0, varianza 1 y covarianza 0, encuentre una tranformación lineal de Z_1 y Z_2 que tenga la misma distribución que X_1 y X_2

(d) (10 puntos) Encuentre el primer componente principal de estas dos variables. ¿Qué porcentaje de la varianza total explica este componente?

(e) (10 puntos) Suponga que la varianza de X_2 es 10. Encuentre el primer componente principal. ¿Qué porcentaje de la varianza total explica este componente? Comente sobre las diferencias entre este componente y el del literal anterior

2. (25 puntos) Suponga que $X_i = \lambda_{i1} f_1 + \lambda_{i2} f_2 + u_i, i = 1, \ldots, p$, donde $f \sim N(0,1)$, $u_i \sim N(0, \Psi_i)$ y $u_1, \ldots, u_p, f_1, f_2$ son independientes. Defina la matriz de rotación

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Demuestre que al multiplicar el vector de factores $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ por la matriz de rotación $\boldsymbol{R}$ la matriz de varianzas y covarianzas de $X_1, \ldots, X_n$ permaneces invariante para cualquier valos de θ.

3. (25 puntos) Suponga que tenemos el modelo de factores $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Lambda f} + \boldsymbol{u}$. demuestre que la matriz de covarianzas entre $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{f}$ es $cov(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{\Lambda}$.