Solución y Rúbrica 2da Evaluación de Algebra Lineal

1.- Corrija o confirme las siguientes definiciones:

|  |  |
| --- | --- |
| Definición Propuesta | Criterio del Estudiante |
| **Operador Diagonalizable**.- Sea T:V→V un operador lineal. Se dice que T es diagonalizable si y solo si existe una base B de V tal que la representación matricial de T respecto a B es una matriz diagonal. | Esta Correcta |
| **Producto interno real** **en V**.- Es una función de f: VxV→ R tal que:   1. ∀v ∈ V , f(v,v)≥0 2. ∀v1,v2 ∈ V , f(v1,v2)=f(v2,v1) 3. ∀α ∈ R, ∀v1,v2 ∈ V, f(αv1,v2)=αf(v1,v2) 4. ∀v1,v2,v3 ∈ V, f(v1,v2+v3)=f(v1,v2)+f(v1,v3) | Falta en la condición 1 que el product interno de un vector consigo mismo es cero solo cuando el vector es el neutron aditivo de V. |
| **Valor propio de un operador T:V→V**.- Si λ ∈ K es un escalar para el que existe un v∈V tal que T(v)= λv, entonces λ es un valor propio de T. | Falta especificar que el vector v tiene que ser diferente del neutro aditivo de V. |
| **Espacios Isomorfos.-** Dos espacios V y W son isomorfos si y solo si toda función de V en W es un isomorfismo. | En vez del cuantificador universal debe decir que es posible construir un isomorfismo de V en W. |

Para cada defición:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Excelente** |
| Califica o corrige incorrectamente | Añade condiciones innecesarias o escribe algo erroneo. | Hace las puntualizaciones y correcciones correctas. |
| **0** | **1-2** | **3** |

2.- Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas. Justifique formalmente su calificación.

a) Sea una transformación lineal. Si es un valor propio de , entonces es inversible.

**Solución:**

Sea A la matriz asociada a la transformación lineal T. La ecuación característica es:

Como el valor propio de T es igual a cero, entonces det A es igual a cero, por lo tanto A no es inversible y esto implica también que T no lo es. La proposición es FALSA. También podemos concluir que la nulidad de A (y de T) no es cero por lo que T no es inyectiva , no es biyectiva y por lo tanto no es inversible.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , solo califica o deja el espacio vacío | Asocia el hecho de que una transformación lineal tiene asociada una matriz, pero no plantea la ecuación característica. | Plantea la ecuación característica, utiliza el valor de , pero concluye equivocadamente . | Califica y prueba correctamente. |
| **0** | **1-3** | **4-6** | **7** |

b) Si A ∈ M2x2 entonces el polinomio característico de A es:

p(λ) =λ2- (traza de A)λ + det(A)

**Solución:**

Sea A una matriz de M2x2 :

Luego, el polinomio característico es:

Realizando las operaciones indicadas: . Finalmente:

Por lo tanto la proposición es VERDADERA.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , solo califica o deja el espacio vacío | Plantea una matriz cuadrada de 2x2 y escribe el polinomio característico correspondiente. | Realiza las operaciones necesarias pero no compara o concluye equivocadamente | Califica y prueba correctamente. |
| **0** | **1-3** | **4-6** | **7** |

c) Sea V un espacio vectorial con producto interno (,). Si para todo v ∈ V se tiene que (v,u)=0 entonces u es el vector neutro aditivo de V.

**Solución:** Como vale para todo v en V también vale para u , por lo que (u,u)= 0 y por definición de producto interno esto implica que u es el neutro aditivo de V.

Por lo tanto, la proposición es VERDADERA.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , solo califica o deja el espacio vacío | Asocia el hecho de que u pertenece al complemento ortogonal de V. | Analiza la propiedad de que u deba ser ortogonal a todos los vectores de V | Califica y prueba correctamente. |
| **0** | **1-3** | **4-6** | **7** |

d) Es posible construir un operador lineal T: P2 → P2 tal que:

T(x+1)=x T(x2-1)= 2x y (T ° T)(x2+x)=0

**Solución:** Se escribe el vector: .

Aplicando la transformación lineal T, queda:

Se observa que los vectores: x+1, x2-1 y 3x forman una base de P2, por ello:

De donde obtenemos:

Por ello, aplicando la transformación lineal T:

También a partir de los datos se puede determinar que T(x)=0, T(1)=x y T(x2)=3x y obtener la regla de correspondecia.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes , solo califica o deja el espacio vacío | Escribe el vector x2+x como combinación lineal de los vectores x+1 y x2-1. Y aplica la transformación lineal al resultado obteniendo T(x2+x). | Observa que se ha obtenido una base para P2 y trata de escribir la combinación lineal del vector típico sin resolver el sistema de ecuaciones correspondiente. | Califica y prueba correctamente. |
| **0** | **1-3** | **4-6** | **7** |

Tema 3

**Sea A una matriz simétrica de nxn con componentes reales. Si  es un valor propio de A, entonces  es un número real.**

Demostración

*Premisas:*

Sea A una matriz simétrica

Sea  un valor propio de A

Sea X un vector propio de A asociado al valor propio 

Supóngase que 

Se debe demostrar que b=0





Pero  por ser X vector propio, entonces





También puede emplearse otra demostración equivalente.

Rúbrica:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Utiliza como premisas la definición de vector propio y la aplicación del producto interno, y no continua con la demostración. También puede intentarlo con otros métodos válidos, pero sin concluir | Además de lo anterior, se apoya en las propiedades de una matriz simétrica y las correspondientes al producto interno sobre el vector propio, pero no concluye respecto a la componente imaginaria del valor propio. | Demuestra correctamente basándose en definición y propiedades de vectores propios, matriz simétrica y producto interno u otras pertinentes |
| **0** | **1 - 5** | **6 - 9** | **10** |

**TEMA 4**

Sea un operador lineal definido por una matriz ortogonal Q tal que . Considerando el producto interno estándar de pruebe que:

a.-

b.-

Prueba:

a.-

Ya que , tenemos:

; ya que Q es Ortogonal

b.-

Por otro lado:

Por lo tanto:

a.-

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes, deja el espacio vacío o solo intenta realizar la demostración. | Determina la norma de pero no aplica la isometría correspondiente. | Determina la norma de y aplica la isometría correspondiente pero comete algún error o no usa la definición de matriz ortogonal. | Demostración correcta. |
| **0** | **1** | **2 - 3** | **4** |

b.-

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes, deja el espacio vacío o solo intenta realizar la demostración | Determina la norma al cuadrado de pero no aplica la isometría correspondiente. | Determina la norma al cuadrado de y aplica la isometría correspondiente pero comete algún error o no usa la definición de matriz ortogonal. | Demostración correcta |
| **0 - 1** | **2 - 3** | **4 - 5** | **6** |

Tema 5

Se desea bosquejar el gráfico del conjunto solución de la siguiente ecuación de segundo orden

1. Determine la forma cuadrática correspondiente:
2. La matriz asociada a la forma cuadrática con respecto a la base canónica está dada por:

El polinomio característico de está dado por:

Por lo tanto los valores propios de son:

A partir de aquí se tiene los espacios asociados a cada uno de los valores propios.

Los vectores propios asociados a cada uno de los valores propios.

La matriz que diagonaliza ortogonalmente a está dada por:

, por lo tanto se tiene que:

y , obteniendo que

Dado que:

Entonces:

;

reemplazando las relaciones dadas se tiene la ecuación transformada a los nuevos ejes.

La misma que representa gráficamente a una parábola.



Y(+)

X(+)

X’(+)

Y’(+)

Rúbrica:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Desempeño** | | | |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Determina la forma cuadrática correspondiente y diagonaliza ortogonalmente la matriz asociada a la forma cuadrática. | Además de lo anterior, determina la medida del ángulo de rotación así como transforma la ecuación dada a los nuevos ejes | Además de todo lo anterior, identifica la cónica y lo grafica pertinentemente. |
| **0** | **1 - 4** | **5 -7** | **8-10** |