Escuela Superior Politécnica del Litoral

Examen del Segundo Parcial de Optimización Combinatoria y Grafos

2 de septiembre de 2011

Profesor: Xavier Cabezas

Nombre: ____

1. Responda las siguientes preguntas:

   a) ¿Por qué todo problema P es NP?.

   b) Considere los siguientes teoremas:
   Thm 1: Un grafo G es euleriano y sin vértices aislados $\Leftrightarrow$ es conexo y el grado de todos sus vértices es par.
   Thm 2: Un grafo G contiene un camino euleriano $\Leftrightarrow$ es conexo y tiene como máximo dos vértices de grado impar.
   Considere además el siguiente problema: El problema de los puentes de Königsberg, también llamado más específicamente problema de los siete puentes de Königsberg, es un célebre problema matemático, resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dio origen a la teoría de grafos. Esta ciudad es atravesada por el río Pregolya, el cual se bifurca para rodear con sus brazos a la isla Kneiphof, dividiendo el terreno en cuatro regiones distintas, las que entonces estaban unidas mediante siete puentes llamados Puente del herrero, Puente conector, Puente verde, Puente del mercado, Puente de madera, Puente alto y Puente de la miel, ver Figura 1. El problema fue formulado en el siglo $XVIII$ y consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad, pasando sólo una vez por cada uno de los puentes, y regresando al mismo punto de inicio.

      1) ¿Es posible hacer dicho recorrido?
      2) ¿Es posible encontrar un camino euleriano?
      3) De un ejemplo de un grafo donde sí se pueda encontrar un camino euleriano y especifique el recorrido.

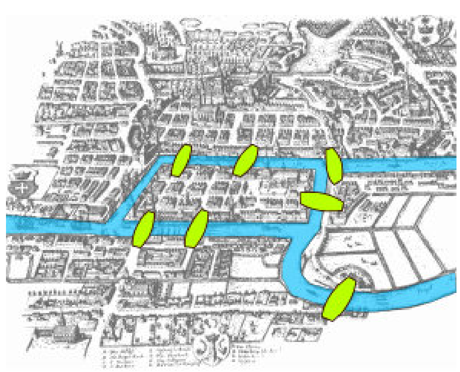

Figura 1: Puentes de Königsberg

2. Sean E un conjunto finito con $n = |E|$ y sean $k \leq 2^n$ y $c : E \to \mathbb{R}$.
(PR): ¿Existen k subconjuntos E' de E tal que:

$$c(E') = \sum_{e \in E'} c(e) \leq a$$

para a dado?

   a) Formule un ejemplo pequeño del problema **(PR)**.
   b) ¿Es este problema **(PR)** un problema NP?. ¿Por qué?

3. Resolver:

   a) Demuestre que en cualquier par de soluciones primal y dual factibles, el valor objetivo en el problema de maximización es siempre menor o igual al valor objetivo en el problema de minimización.

   b) Considere el siguiente problema primal:

$$Minimizar \quad z = 3x_1 + 4x_2 - 5x_3$$

   $sujeto \quad a:$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 10$$
$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

      1) Escriba el dual de este problema primal.
      2) Sea el siguiente par de soluciones: $(x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{10}{3}, 0)$ y $(y_1, y_2) = (\frac{4}{3}, 0)$. ¿Son óptimas estas soluciones para ambos problemas?.
      3) Sea el siguiente par de soluciones: $(x_1, x_2, x_3) = (5, 0, 0)$ y $(y_1, y_2) = (1, 0)$. ¿Son óptimas estas soluciones para ambos problemas?. Verifique además que se cumple el teorema del literal (a).

4. Sean los siguientes modelos de transporte, donde a y b son ofertas y demandas respectivamente:

   a) $a_1 = 10, a_2 = 5, a_3 = 4, a_4 = 6$
   $b_1 = 10, b_2 = 5, b_3 = 7, b_4 = 3$

   b) $a_1 = 1, a_2 = 16, a_3 = 7, a_4 = 8$
   $b_1 = 3, b_2 = 4, b_3 = 5, b_4 = 2, b_5 = 8$

      1) Encuentre una solución básica inicial cada uno de estos problemas. ¿Cuántas variables básicas espera obtener en cada problema?
      2) Muestra graficamente que estas soluciones factibles son arboles generadores del grafo de transporte.
      3) Muestre que una restrición del problema (a) es redundante.
      4) Para las ramas no básicas del problema (a), encuentre (si es posible) la rama que entrará a la solución de acuerdo con la condición de optimalidad del método simplex para redes capacitadas. Considere además que todos los costos sobre los arcos son $(5, 10, 5, 10, 5, 10, 5, 10, 5, 10, 5, 10, 5, 10, 5, 10)$ para $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{31}, c_{32}, \ldots, c_{43}, c_{44}$ respectivamente. (*Hint: calcule los* $z_{ij} - c_{ij}$)

5. Dé una explicación sobre el por qué las cotas inferiores de las variables en un problema de programación lineal no son críticas en el método simplex, y dónde intervienen el método de las cotas superiores en un Problema de Flujo de Costo Mínimo.