

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS CÁLCULO DIFERENCIAL SEGUNDA EVALUACIÓN 16 de Septiembre de 2011 Nombre: #Matrícula:..... Firma:..... Paralelo:.....	CALIFICACIÓN	
	TEMA 1	
	TEMA 2	
	TEMA 3	
	TEMA 4	
	BONUS	
	TOTAL EXAMEN	
	DEBERES Y LECCIONES	
	TOTAL	

TEMA 1 (15 puntos)

- a) Determine la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ en el punto (1, 3).
(VALOR 8 puntos)

CRITERIOS	PUNTAJE
Determinar la pendiente de la recta buscada.	5
Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.	3

- b) Usando el polinomio de Taylor de primer orden, calcule $\sqrt[3]{1.02}$. **(VALOR 7 puntos)**

CRITERIOS	PUNTAJE
Escribir la expresión para el polinomio de Taylor de primer orden.	3
Usar un punto conveniente alrededor del cual se obtenga la aproximación buscada y reemplazar la información necesaria en el polinomio de Taylor para obtener el valor buscado.	4

TEMA 2 (15 puntos)

- a) Sea $g : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ una función. Se dice que $p \in (a, b)$ es un *punto fijo* de la función g si $g(p) = p$. Suponga que la función g es derivable en (a, b) y además $|g'(x)| < 1, \forall x \in (a, b)$. Demuestre, usando el Teorema del Valor Medio de Lagrange, que g solo puede tener como máximo un punto fijo en (a, b) . **(VALOR 8 puntos)**

CRITERIOS	PUNTAJE
Suponer que existe más de un punto fijo en el intervalo (a, b) .	2
Verificar las hipótesis del Teorema del Valor Medio de Lagrange en el intervalo cerrado cuyos extremos son los puntos fijos.	3
Usar la conclusión del Teorema del Valor Medio de Lagrange y las hipótesis del problema para llegar a una contradicción.	3

- b) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}. \quad \text{(VALOR 7 puntos)}$$

CRITERIOS	PUNTAJE
Usar la expresión de la función exponencial \exp para escribir la función a la que se va calcular el límite de una forma equivalente.	2
Aplicar en varias ocasiones la regla de L'Hôpital si ese fuera el caso hasta obtener la respuesta correcta del problema.	5

Obs: Si algún estudiante ha optado por otro método de solución y el procedimiento y la respuesta son correctos, su calificación corresponderá a 7 puntos.

TEMA 3 (15 puntos)

- a) De todos los rectángulos con área 10 cm^2 , determinar las dimensiones del rectángulo de menor perímetro. **(VALOR 8 puntos)**

CRITERIOS	PUNTAJE
Escribir la restricción del problema asociada al área del rectángulo.	1
Escribir la expresión para el perímetro del rectángulo como función de una sola variable independiente.	3
Encontrar los puntos críticos de la función perímetro $p(x)$.	1
Estudiar el punto de mínimo global de la función p en $(0, +\infty)$.	2
Obtener las dimensiones del rectángulo buscado.	1

- b) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Encuentre $f'(0)$ usando la definición de derivada. **(VALOR 7 puntos)**

CRITERIOS	PUNTAJE
Escribir la definición de la derivada de f en el punto $x = 0$.	1
Reemplazar en la expresión obtenida anteriormente el valor de $f(h)$ cuando $h \neq 0$.	2
Calcular correctamente el límite de $\frac{f(h)}{h}$, cuando $h \rightarrow 0$.	4

TEMA 4 (15 puntos)

- a) Una aficionada a la aviación observa un aeroplano volar a una altura constante de 4000 pies hacia un punto que se encuentra directamente sobre ella. Ella observa que cuando el ángulo de elevación es 0.5 *radianes*, éste aumenta a una velocidad de $0.1 \frac{\text{radián}}{\text{seg}}$. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano?. (VALOR 8 puntos)

CRITERIOS	PUNTAJE
Usar las funciones trigonométricas para obtener la distancia horizontal $x(t)$ desde el aeroplano hasta el punto sobre la aficionada en el instante t .	3
Obtener la derivada de la función $x(t)$.	3
Reemplazar los datos suministrados para obtener correctamente la velocidad del aeroplano.	2

- b) Sean $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ funciones dos veces derivables en \mathbb{R} .
Sea $y(x) := (f \circ g)(x) = f(g(x)), \forall x \in \mathbb{R}$. Encuentre $\frac{d^2y}{dx^2}$. (VALOR 7 puntos)

CRITERIOS	PUNTAJE
Usar la regla de la cadena para encontrar $\frac{dy}{dx}$.	3
Usar la derivada de un producto y la regla de la cadena de nuevo para calcular correctamente $\frac{d^2y}{dx^2}$.	4