Escuela Superior Politécnica del Litoral

Instituto de Ciencias Matemáticas

Primera evaluación de Álgebra Lineal - Diciembre 1, 2011

Nombre y Appellido: ______________________ Paralelo: _____ Firma:

Tema	1	2	3	4	5	Total:
Puntos	9	10	11	20	20	70
Calificación						

Tema 1 (9 puntos)

Dé la definición de:

(a) (3 puntos) Subespacio vectorial

Solución: Sea W un subconjunto de un espacio vectorial $(V, \bigoplus, \bigodot)$. W es un subespacio vectorial de V si y sólo si $(W, \bigoplus_W, \bigodot_W)$, con $\bigoplus_W$ y $\bigodot_W$ siendo las restricciones de $\bigoplus$ y $\bigodot$ a W, es un espacio vectorial.

Deficiente	No contesta o lo que escribe no tiene mucha relación con lo que se pregunta	0-2
Regular	Presenta algunas características del concepto pero no lo completa	3-5
Bueno	Se confunde con el teorema o los pone ambos	6-8
Excelente	Definición completa	9-10

(b) (3 puntos) Dependencia lineal de un conjunto de vectores

Solución: Sean $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ una familia de n vectores de un espacio vectorial V. $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ son linealmente dependientes si y sólo si existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ no todos iguales a cero tales que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V$.

Deficiente	No contesta o lo que escribe no tiene mucha relación con lo que se pregunta	0-2
Regular	Considera la combinación lineal de los vectores pero no establece la condición correcta	3-5
Bueno	Es casi correcta la definición pero falta alguno elemento	6-8
Excelente	Definición completa	9-10

(c) (3 puntos) Transformación lineal

Solución: Sea f una función de un espacio vectorial V en un espacio vectorial W. f es una transformación lineal si y sólo si:

- Para cualesquiera v_1 y v_2 de V, $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$,
- Para cualquier v de V y cualquier λ de $\mathbb{R}$, $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Deficiente	No contesta o lo que escribe no tiene mucha relación con lo que se pregunta	0-2
Regular	Presenta algunas caractersticas del concepto pero no lo completa	3-5
Bueno	Falta algún detalle para completar la definición	6-8
Excelente	Definición completa	9-10

Tema 2 (10 puntos)

Demuestre el siguiente teorema:

Sean H y W dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Si $H \cup W$ es un subespacio vectorial de V, entonces $H \subset W$ o $W \subset H$.

Solución: Demostramos la proposición equivalente: Si $H \cup W$ es un subespacio vectorial de V y si $H \not\subset W$, entonces $W \subset H$:

Se supone que $H \cup W$ es un subespacio vectorial de V y que $H \not\subset W$. Escogemos un elemento arbitrario de W, y demostramos que ese elemento tiene que pertenecer a H: Sea $v \in W$. Como $H \not\subset W$, existe un v_H tal que $v_H \in H$ y $v_H \notin W$. Consideramos el vector $u = v + v_H$. Como, por suposición, $H \cup W$ es un subespacio vectorial, $u \in H \cup W$. Si $u \in W$, entonces $v_H = u - v \in W$, lo que es una contradicción con la definición de v_H. Por lo tanto, necesariamente $u \in H$, lo que implique que $v = u - v_H$ esté en H.

Deficiente	No contesta o lo que escribe no tiene mucha relación con lo que se pregunta	0-2
Regular	Planteamiento correcto con alguna proposición equivalente	3-5
Bueno	Demostración incompleta.	6-8
Excelente	Demostración correcta y completa	9-10

Tema 3 (11 puntos)

Dado los siguientes subespacios vectoriales del espacio vectorial P_3 de los polinómios de grado menor o igual a 3: $H = gen\{2-x, x^2+4x^3\}$ y $W = \{2k - kx + mx^2 + mx^3 \ / \ k, m \in \mathbb{R}\}$:

(a) (4 puntos) Sea $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Determine condiciones sobre a, b, c y d para que $p \in H \cap W$, y condiciones para que $p \in H + W$.

Solución:

- Se denota que $W = gen\{2 - x, x^2 + x^3\}$. Sea u un vector de $H \cap W$. Entonces u es una combicación lineal de $\{2 - x, x^2 + 4x^3\}$ y también una combinación lineal de $\{2 - x, x^2 + x^3\}$: $u = \lambda_1(2 - x) + \lambda_2(x^2 + 4x^3) = \mu_1(2 - x) + \mu_2(x^2 + x^3)$. Al igualar los coeficientes de los polinomios de ambos lados, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 & & -2\mu_1 & & = 0 \\ -\lambda_1 & & +\mu_1 & & = 0 \\ & \lambda_2 & & -\mu_2 & = 0 \\ & 4\lambda_2 & & -\mu_2 & = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $\{(\lambda_1 = t, \lambda_2 = 0, \mu_1 = t, \mu_2 = 0)/t \in \mathbb{R}\}$. Entonces u se escribe $u = t(2 - x)$. Por lo tanto, los vectores de $H \cap W$ son generados por el vector $2 - x$, es decir $H \cap W = gen\{2 - x\}$. Entonces para que

$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ pertenezca a $H \cap W$, se necesita que $c = 0$, $d = 0$ y $a = -2b$.

- Como $W = gen\{2 - x, x^2 + x^3\}$ y $H = gen\{2 - x, x^2 + 4x^3\}$, entonces $H + W = gen\{2 - x, x^2 + x^3, x^2 + 4x^3\}$. Para que $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ pertenezca a $H + W$, se necesita que p sea una combinación lineal de $2 - x$, $x^2 + x^3$, $x^2 + 4x^3$, es decir que existan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que $a + bx + cx^2 + dx^3 = \lambda_1(2 - x) + \lambda_2(x^2 + x^3) + \lambda_3(x^2 + 4x^3)$ lo que se escribe en forma de sistema, cuya matriz aumentada es: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & a \\ -1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 4 & d \end{array}\right)$. Al realizar la eliminación de Gauss, se obtiene la matriz reducida equivalente: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{d-c}{3} \\ 0 & 0 & 0 & b + \frac{a}{2} \end{array}\right)$.
Para que exsitan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, se necesita que el sistema tenga una solución, es decir se necesita que $b + \frac{a}{2} = 0$, lo que define la condición para que p pertenezca a $H + W$.

Deficiente	No contesta o lo que escribe no tiene mucha relación con lo que se pregunta	0-2
Regular	Especificacin correcta de condiciones o de los conjuntos generadores	3-5
Bueno	Procedimiento correcto con errores de cálculo	6-8
Excelente	Caracterizacin completa y correcta de los dos subespacios	9-10

(b) (4 puntos) Determine una base y la dimensión de $H \cap W$ y de $H + W$.

Solución:

- $H \cap W = gen\{2 - x\}$ entonces $\{2 - x\}$ es una base de $H \cap W$ y $dim(H \cap W) = 1$.

- $H + W = gen\{2 - x, x^2 + x^3, x^2 + 4x^3\}$. Desmostramos que $(2 - x, x^2 + x^3, x^2 + 4x^3)$ es una familia de vectores linealmente independientes: Sean λ_1, λ_2 y λ_3 tales que $\lambda_1(2 - x) + \lambda_2(x^2 + x^3) + \lambda_3(x^2 + 4x^3) = 0$. Al reagrupar las potencias de x, se obtiene el sistema siguiente:
$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2\lambda_1 & & & = 0 \\ -\lambda_1 & & & = 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & +4\lambda_3 & = 0 \end{array}\right.$$
cuya única solución es la solución trivial: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Entonces como $(2 - x, x^2 + x^3, x^2 + 4x^3)$ generan a $H + W$ y son linealmente independientes, forman una base de $H + W$. Lo que implica que $dim(H + W) = 3$.

Deficiente	No contesta o lo que escribe no tiene mucha relación con lo que se pregunta	0-2
Regular	Presenta resultados parciales de bases o dimensiones	3-5
Bueno	Procedimiento correcto con errores de cálculo	6-8
Excelente	Bases y dimensiones correctas	9-10

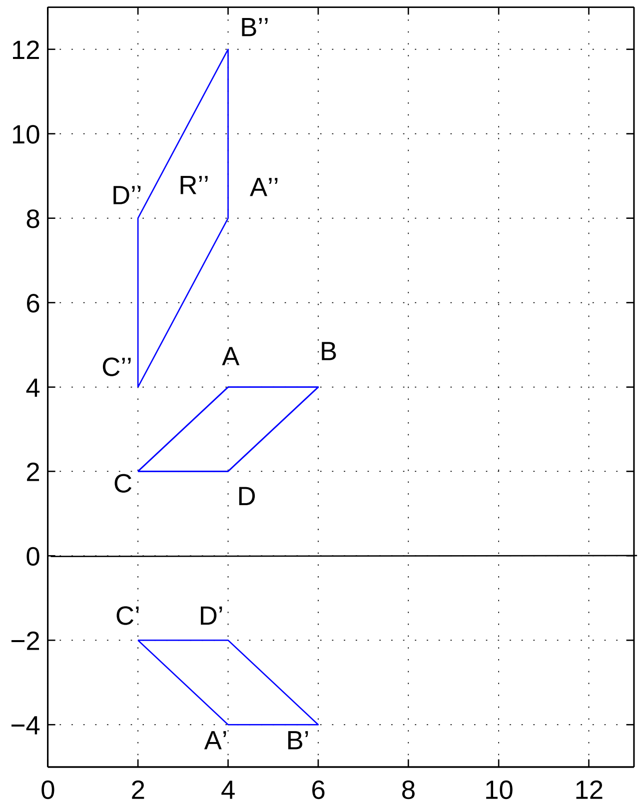
(c) (3 puntos) ¿Es $H \cup W$ un subespacio vectorial de P_3?

Solución: Como el vector $x^2 + x^3$ de W no pertenece a H, y como el vector $x^2 + 4x^3$ de H no pertenece a W, $H \not\subset W$ y $W \not\subset H$. Entonces, por el teorema del tema 2 (la contrapositiva), $H \cup W$ no es un subespacio vectorial de P_3.

Deficiente	No contesta o lo que escribe no tiene mucha relación con lo que se pregunta	0-2
Regular	Presenta resultados parciales sobre la contenencia de los subespacios	3-5
Bueno	Procedimiento correcto con errores de cálculo	6-8
Excelente	Utilización correcta del teorema	9-10

Tema 4 (20 puntos)

Se considera los conjuntos de vectores R y R', cuyas coordenadas se asocian a los puntos que forman los siguientes rombos $ABCD$ y $A'B'C'D'$.



(a) (7 puntos) Si se define $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $T_2(x, y) = (-y, 2x)$, grafique $R'' = T_2(R')$.

Solución:

Deficiente	No contesta o lo que escribe no tiene mucha relación con lo que se pregunta	0-2
Regular	Intenta calcular la transformada de algunos vectores	3-5
Bueno	Procedimiento correcto pero errores de cálculo	6-8
Excelente	Gráfico completo y correcto	9-10

(b) (7 puntos) Demuestre que T_2 es una transformación lineal.

Solución:

- Sean $u = (x, y)$ y $v = (x', y')$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$. Se calcula $T_2(u + v) = T_2((x, y)+(x'+y')) = T_2(x+x', y+y') = (-y-y', 2(x+x')) = (-y, 2x) + (-y', 2x') = T_2(u) + T_2(v)$.
- Sean $u = (x, y)$ un vector de $\mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se calcula $T_2(\lambda u) = T_2(\lambda(x, y)) = T_2(\lambda x, \lambda y) = (-\lambda y, 2\lambda x) = \lambda(-y, 2x) = \lambda T_2(u)$.

Entonces T_2 es una tranformación lineal.

Deficiente	No contesta o lo que escribe no tiene mucha relación con lo que se pregunta	0-2
Regular	Trabaja solo con ejemplos o falla en la definicin	3-5
Bueno	Procedimiento correcto pero cálculos errados	6-8
Excelente	Demostración correcta completa	9-10

(c) (6 puntos) Determine de ser posible una transformación lineal tal que $T_3(R'') = R$.

Solución: Sea T_1 la transformación lineal que transforma R en R'. Según la gráfica, se puede ver que la regla de correspondencia de T_1 es: $T_1(x, y) = (x, -y)$. Como $T_1(R) = R'$ y $T_2(R') = R''$, T_2 o $T_1(R) = R''$. Lo que impliqua que $T_3 = (T_2 \text{ o } T_1)^{-1}$. Como T_2 o $T_1(x, y) = T_2(x, -y) = (y, 2x)$, entonces $T_3(x, y) = (y/2, x)$.

Deficiente	No contesta o lo que escribe no tiene mucha relación con lo que se pregunta	0-2
Regular	Intenta relacionar los puntos de R'' con los de R	3-5
Bueno	Procedimiento que envuelve los conceptos de linealidad y composición pero fallos en cuentas	6-8
Excelente	Regla de correspondencia correcta	9-10

Tema 5 (20 puntos)

Califique como verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y justifique formalmente su calificación:

(a) (5 puntos) Sea V un espacio vectorial, v_1, v_2, v_3 tres vectores de V. Si $W = gen\{v_1, v_2, v_3\}$ y $H = gen\{v_1 - v_2, v_2 + v_3, 5v_2\}$, entonces $W \neq H$.

Solución: Falso.

- Sea $u \in H$. Como $H = gen\{v_1 - v_2, v_2 + v_3, 5v_2\}$, u es una combinación lineal de los vectores $v_1 - v_2$, $v_2 + v_3$ y $5v_2$. Entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que $u = \lambda_1(v_1 - v_2) + \lambda_2(v_2 + v_3) + 5\lambda_3 v_2$, lo que se puede escribir $u = \lambda_1 v_1 + (-\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3)v_2 + \lambda_2 v_3$. Entonces u es una combinación lineal de (v_1, v_2, v_3) y $u \in W$. Por lo tanto $H \subset W$.

- Sea $u \in W$. Entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, lo que se puede escribir $u = \lambda_1(v_1 - v_2) + \lambda_3(v_2 + v_3) + \frac{1}{5}(\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_1)5v_2$. Entonces $u \in H$ y por lo tanto $W \subset H$.

Conclusión: $W = H$.

Deficiente	No contesta o califica incorrectamente o sin justificar	0-2
Regular	Intenta trabajar con los elementos de los subespacios para determinar contenencia	3-5
Bueno	El procedimiento es correcto pero incompleto	6-8
Excelente	Demuestra igualdad entre los subespacios y califica la proposición como falsa	9-10

(b) (5 puntos) Sea A un matriz cuadrada $n \times n$ inversible. Entonces para cualquier matriz B con n filas, el espacio columna de la matriz A es igual al espacio columna de la matriz aumentada $(A|B)$.

Solución: Verdadero. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$.

Como A es inversible, el sistema $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene como única solución la solución trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Entonces los vectores columnas de A son linealmente independientes, y por lo tanto la dimensión del espacio columna de A es igual a n. Lo que significa que el espacio columna de A es el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Entonces se puede añadir cualesquiera vectores columnas $\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_{1m} \\ \vdots \\ b_{nm} \end{pmatrix}$ a los vectores $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$, el espacio generado sigue siendo igual a $\mathbb{R}^n$.

Deficiente	No contesta o califica incorrectamente o sin justificar	0-2
Regular	Presenta ejemplos o establece resultados parciales correctos	3-5
Bueno	Relaciona correctamente la capacidad de las columnas de A de generar a todo R^n pero falta concluir	6-8
Excelente	Calificación de verdadera y justificación correcta	9-10

(c) (5 puntos) Sea V un espacio vectorial de dimensión igual a n, y B una base cualquiera de V. Sean v_1, v_2, v_3 vectores de V y sean $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^n$ los vectores coordenadas de v_1, v_2, v_3 en la base B. La proposición es: si X_1, X_2, X_3 son linealmente independientes entonces v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes.

Solución: Verdadero. Se supone que $B = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, que $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$, $X_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} x_{13} \\ \vdots \\ x_{n3} \end{pmatrix}$, y que X_1, X_2 y X_3 son linealmente independientes.

Demostramos que v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_V$. Esa ecuación se puede escribir $\lambda_1(x_{11}w_1 + \ldots + x_{n1}w_n) + \lambda_2(x_{12}w_1 + \ldots + x_{n2}w_n) + \lambda_3(x_{13}w_1 + \ldots + x_{n3}w_n) = 0_V$. Al reagrupar los coefficientes de los vectores $w_1, \ldots, w_n$ se obtiene $(\lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12} + \lambda_3 x_{13})w_1 + \ldots + (\lambda_1 x_{1n} + \lambda_2 x_{1n} + \lambda_3 x_{1n})w_n = 0_V$. Lo que implica que $(\lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12} + \lambda_3 x_{13}) = 0, \ldots, (\lambda_1 x_{1n} + \lambda_2 x_{1n} + \lambda_3 x_{1n}) = 0$, es decir que $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0_{\mathbb{R}^n}$. Como por suposición X_1, X_2, X_3 son linealmente independientes, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tienen que ser nulos. Lo que demuestra que v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes.

Deficiente	No contesta o califica incorrectamente o sin justificar	0-2
Regular	Establece correctamente las ecuaciones vectoriales para la independencia lineal	3-5
Bueno	Procedimiento correcto de utilizar la independencia de un conjunto para la independencia del otro pero falta concluir	6-8
Excelente	Demostración correcta y completa	9-10

(d) (5 puntos) Si H es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{B}^3$ entonces el número de vectores de H es distinto de 7.

Solución: Verdadero. El espacio vectorial $\mathbb{B}^3$ contiene 8 vectores. Se supone por contradicción que existe H un subespacio vectorial de $\mathbb{B}^3$ que contenga 7 vectores. Sea $u = (a, b, c)$ el vector de $\mathbb{B}^3$ que no pertenece a H. Si definimos $w_1 = (1, b+1, c)$ y $w_2 = (a+1, 1, 0)$ entonces $w_1 \neq u$, $w_2 \neq u$, lo que implica que $w_1 \in H$ y $w_2 \in H$. Pero como $w_1 + w_2 = (1 + a + 1, b + 1 + 1, c + 0) = (a + 0, b + 0, c) = (a, b, c) = u$ y como H es un subespacio vectorial, entonces u tiene que pertenecer a H: contradicción.

Deficiente	No contesta o califica incorrectamente o sin justificar	0-2
Regular	Propone ejemplos de subespacios de $\mathbb{B}^3$ con diferentes tamaños	3-5
Bueno	Identifica la necesidad de probar la cerradura de la suma pero no analiza todos los subconjuntos posibles	6-8
Excelente	Califica como falsa y justifica apropiadamente	9-10