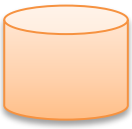
EVALUACION FINAL DE MATEMATICAS I
Versión 1

NOMBRE:
FECHA: 30 DE ENERO DE 2012

1. (10 puntos). Se quiere construir un recipiente cilíndrico metálico de base circular y de 81 cm³ de volumen. Hallar las dimensiones que debe tener para que la cantidad de metal (área total) sea mínima, en el caso en que el recipiente sea abierto.

Nota: $V_{cil} = \pi r^2 h \qquad A_{cil} = 2\pi rh$



$$81 = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{81}{\pi r^2}$$

$$A = A_{cil} + A_{fondo} = 2\pi rh + \pi r^2$$

Reemplazando h en la expresión del área, tenemos: $A = 2\pi r\left(\frac{81}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 = \frac{162}{r} + \pi r^2$

Para obtener el mínimo derivamos la expresión con respecto a r e igualamos a cero:

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{162}{r^2} + 2\pi r \rightarrow -\frac{162}{r^2} + 2\pi r = 0$$

$$\frac{-162 + 2\pi r^3}{r^2} = 0 \rightarrow 2\pi r^3 - 162 = 0$$

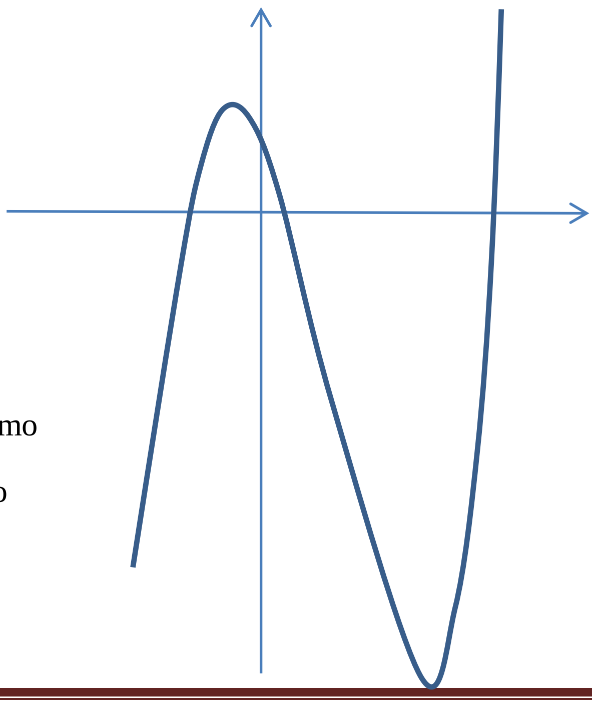
$$r = \sqrt[3]{\frac{162}{2\pi}} = 2{,}95cm$$

$$h = \frac{81}{\pi r^2} = \frac{81}{\pi (2{,}95)^2} = 2{,}95cm$$

2. (10 puntos). Encuentre las coordenadas de los puntos MÁXIMOS, MÍNIMOS e INFLEXIÓN de la siguiente función:

$$y = x^3 - 8x^2 - 12x + 3$$

Haga una gráfica a mano alzada de la función y ubique los puntos encontrados.



$$y' = 3x^2 - 16x - 12$$

$$0 = (x-6)(2x+3) \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -\frac{2}{3}; y_1 = 7{,}148 \text{ máximo} \\ x_2 = 6; y_2 = -141 \text{ mínimo} \end{array}$$

Punto de inflexión:

$$y'' = 6x - 16 \rightarrow 0 = 3x - 8 \rightarrow x = \frac{8}{3}; y = -66{,}92$$

3. (10 puntos). Resuelva la siguiente integral indefinida por el método de descomposición en fracciones:

$$\int\left(\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\right)dx=\int\left(\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\right)dx$$

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{3x+5}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$=\frac{A(x+1)+B(x^2-1)+C(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{(B+C)x^2+(A-2C)x+(A-B+C)}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$\begin{array}{lllll} B+C=0 & & C=-B & & B=-\frac{1}{2} \\ A-2C=3 & \rightarrow & A=3+2C & \rightarrow & A=4 \\ A-B+C=5 & & 3+2C+C+C=5 & & C=\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\int\left(\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\right)dx=4\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=-\frac{4}{x-1}-\frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x+1)+c=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{4}{x-1}+c$$

4. (5 puntos cada una). Resuelva las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos x)\,dx$$

1. por identidades trigonometricas:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{4}\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)-\left[-\frac{1}{4}\cos(2\times 0)\right]=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

2. integración por partes:

$$u=\sin x\rightarrow du=\cos x dx$$

$$\int dv=\int\cos x dx\rightarrow v=\sin x$$

$$\rightarrow\int\sin x\cos x dx=\sin^2 x-\int\sin x\cos x dx$$

$$2\int\sin x\cos x dx=\sin^2 x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx=\left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$\int_{-2}^{-1}(x-1)^{-3}dx=-\left.\frac{(x-1)^{-2}}{2}\right|_{-2}^{-1}$$

$$=-\left.\frac{1}{2(x-1)^2}\right|_{-2}^{-1}$$

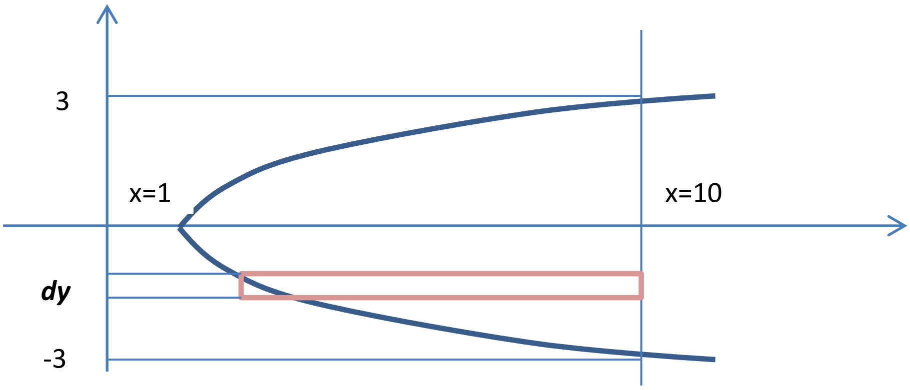
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-2)^2}-\frac{1}{(-3)^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right]$$

$$=-\frac{5}{72}$$

5. (10 puntos). Hallar el área delimitada por la siguiente curva y recta:

$y=\sqrt{x-1}$; $x=10$ **(Haga una grafica a mano alzada del área)**



$$y=\sqrt{x-1}\rightarrow x=y^2+1\ ;\ x=10$$

$$A=\int_{-3}^{3}\left[10-\left(y^2+1\right)\right]dy$$

$$A=\int_{-3}^{3}\left(10-y^2-1\right)dy=\int_{-3}^{3}\left(9-y^2\right)dy$$

$$A=\left[9y-\frac{y^3}{3}\right]_{-3}^{3}=\left(27-9\right)-\left(-27+9\right)=36u^2$$