Algebra Lineal – Tercera Evaluación 2do Semestre 2011-2012 – Solución y rúbrica

Tema 1

1. : Se supone que . Sea un vector de . Como , entonces . Ahora demostramos que . Sea . Entonces , con . Como , y como es un subespacio vectorial, entonces . Por lo tanto , y entonces .

: Se supone que Como , entonces y por tanto . Pero no se puede demostrar que . Contraejemplo: en el espacio vectorial , si y , pero . Entonces la propiedad es falsa.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | No contesta o lo que escribe no está relacionado con el tema | 0-1 |
| Insuficiente | Califica como verdadero pero demuestra correctamente el reciproco | 2-5 |
| Regular | Califica como falso dando se cuenta que la implicación directa no puede ser verdadera, pero no lo demuestra formalmente(no da un contraejemplo) | 6-8 |
| Excelente | Califica como falso dando la justificación y un contraejemplo adecuado. | 9-10 |

1. Demostramos la doble inclusión:

: Sea . Entonces existe tal que . Como , entonces se escribe como una combinación líneal: . Entonces por linealidad de T. Por lo tanto , y entonces

: Sea . Entonces w se escribe como una combinación lineal: . Por lo tanto , entonces .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | No contesta o lo que escribe no está relacionado con el tema | 0-1 |
| Insuficiente | Solo demuestra una de las dos inclusiones | 2-5 |
| Regular | Demuestra las dos inclusiones pero con imprecisiones | 6-8 |
| Excelente | Demuestra las dos inclusiones rigurosamente | 9-10 |

1. Sea . Calculamos :

.

Sabemos que , entonces se descompone como la suma de un vector de y un vector de , el vector de siendo la proyección de v sobre . Entonces , con . Como es un subespacio vectorial, entonces , y por lo tanto . Entonces .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | No conteste o lo que escribe no está relacionado con el tema | 0-1 |
| Insuficiente | Trata de calcular pero no demuestra que y son ortogonales | 2-5 |
| Regular | Demuestra la propiedad pero con imprecisiones | 6-8 |
| Excelente | Demuestra la propiedad rigurosamente | 9-10 |

Tema 2

1. No necesita solución…

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | No contesta o lo que escribe no está relacionado con el tema | 0-1 |
| Insuficiente | Demuestra la propiedad pero con imprecisiones | 2-5 |
| Regular | Demuestra la propiedad a partir de la definición | 6-8 |
| Excelente | Demuestra la propiedad a partir del teorema de caracterización | 9-10 |

1. Para demostrar que es inyectiva, demostramos que , porque T es una transformación lineal. Sea . Entonces )=. Como forman una base de , son linealmente independientes. Por lo tanto y .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | No contesta o lo que escribe no está relacionado con el tema | 0-1 |
| Insuficiente | Trata de demostrar que el núcleo contiene solamente el cero vector pero no utiliza la independencia lineal de | 2-5 |
| Regular | Demuestra la propiedad pero con imprecisiones | 6-8 |
| Excelente | Demuestra la propiedad rigurosamente | 9-10 |

1. Como y como es inyectiva, entonces por teorema es biyectiva.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | No contesta o lo que escribe no está relacionado con el tema | 0-1 |
| Insuficiente | Trata de aplicar el teorema sobre isomorfismos o el teorema de la dimensión pero no concluye | 2-5 |
| Regular | Demuestra la propiedad pero con imprecisiones | 6-8 |
| Excelente | Demuestra la propiedad rigurosamente | 9-10 |

Tema 3

1. Se puede denotar que los polinomios , y son linealmente independientes, entonces forman una base de , porque la dimensión de es igual a 3.

Sea un polinomio de . Descomponemos sobre la base , es decir escribimos como una combinación lineal de , y :

Esta ecuación nos da el sistema siguiente, siendo las incógnitas:

Al resolver este sistema se obtiene , , .

Entonces

.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | Denota que , y forman una base de | 0-1 |
| Insuficiente | Tratan de descomponer un polinomio típico sobre esta base pero no concluye y no trata de aplicar la transformación T al polinomio obtenido. | 2-5 |
| Regular | Desarrolle el procedimiento correcto pero se equivoca en los cálculos | 6-8 |
| Excelente | Obtiene la regla de correspondencia con una demostración rigurosa | 9-10 |

1. A partir de la regla de correspondencia de , se obtiene la representación matricial de con respecto a la base canónica: . Se puede verificar que es una matriz simétrica.

Calculamos los valores propios de . El polinomio característico es igual a

. Entonces los valores propios de son y .

Para el valor propio , se obtiene que el espacio propio asociado es .

Para el valor propio , el espacio propio asociado es .

Para el valor propio , el espacio propio asociado es .

Los vectores y siendo vectores propios asociados a valores propios diferentes de una matriz simétrica, son ortogonales. Entonces sólo necesitamos normalizarlos para obtener una base ortonormal:

El vector normalizado da el vector , el vector normalizado da el vector , y el vector normalizado da el vector .

Por lo tanto una matriz ortogonal que diagonaliza ortogonalmente es la matriz .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | Verifica que la matriz obtenida es una matriz simétrica. | 0-1 |
| Insuficiente | Encuentra los valores propios y los vectores propios de | 2-5 |
| Regular | Ortonormaliza con el proceso de Gram-Schmidt los vectores propios sin darse cuenta que los vectores propios ya son ortogonales, y obtiene la matriz | 6-8 |
| Excelente | Solo normaliza los vectores propios y obtiene una matriz ortogonal | 9-10 |

1. A partir de la definición de dada en el enunciado, se puede denotar que , y . Por lo tanto, la representación matricial de con respecto a la base es la matriz diagonal .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | No contesta o lo que escribe no está relacionado con el tema | 0-1 |
| Insuficiente | No se da cuenta que puede obtener directamente la base a partir de la definición de T, trata de utilizar el resultado del literal anterior, pero no concluye | 2-5 |
| Regular | Utiliza el resultado del literal anterior, y obtiene la base. | 6-8 |
| Excelente | Obtiene la base directamente a partir de la definición de T | 9-10 |

Tema 4

1. A partir de la definición de , se puede denotar que si y sólo si , es decir si y sólo si . Por lo tanto , y entonces .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | No contesta o lo que escribe no está relacionado con el tema | 0-1 |
| Insuficiente | Trata de encontrar una base de H pero no obtiene el complemento | 2-5 |
| Regular | Denota que es un hiperplano, obtiene el resultado pero con imprecisiones en la demostración. | 6-8 |
| Excelente | Obtiene el complemento ortogonal rigurosamente | 9-10 |

1. Calculamos la proyección del vector sobre primero. Sabemos que . Normalizamos el vector para que sea mas cómodo calcular la proyección sobre . entonces . Entonces la proyección de sobre es igual a .

Entonces el vector se escribe como la suma , con el vector que pertenece a y el vector que pertenece a .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | No contesta o lo que escribe no está relacionado con el tema | 0-1 |
| Insuficiente | Encuentra una base ortonormal adaptada a y pero no concluye | 2-5 |
| Regular | Se equivoca en los cálculos, o no justifica rigurosamente los resultados. | 6-8 |
| Excelente | Obtiene el resultado y justifica cada etapa de su demostración | 9-10 |

1. A partir del resultado anterior se obtiene que la proyección ortogonal del vector sobre es el vector .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | No contesta o lo que escribe no está relacionado con el tema | 0-1 |
| Insuficiente | Trata de aplicar otro procedimiento, pero no alcanza. | 2-5 |
| Regular | Obtiene el resultado correcto pero no a partir del literal anterior, o le falta justificar el resultado | 6-8 |
| Excelente | Obtiene el resultado correcto y justifica su respuesta | 9-10 |

1. Para aplicar la propiedad dada, primero se necesita definir la matriz . Si , entonces , es decir que se puede escribir de la forma , entonces los vectores y forman una base de , y por lo tanto .

Calculamos

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | Halla la matriz A | 0-1 |
| Insuficiente | No se equivoca en el planteamiento del cálculo, y calcula | 2-5 |
| Regular | Procedimiento correcto pero se equivoca en los calculos | 6-8 |
| Excelente | Obtiene el resultado correcto, detallando los cálculos. | 9-10 |

Tema 5

1. Para que la matriz pertenezca al espacio generado por y , esa matriz tiene que escribirse como una combinación lineal de y , es decir que la ecuación tiene que tener una solución, los reales y siendo las incognitas. Para que se cumpla esa ecuación, tiene que ser igual a (por el coeficiente de la segunda fila y de la primera columna), entonces tiene que ser igual a , y por lo tanto, al calcular el coeficiente de la tercera fila y de la tercera columna, tiene que ser igual a . Recíprocamente, si , se puede verificar que la matriz si pertenece al espacio generado por y .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | Escriba la combinación lineal de I y M igual a la matriz dada | 0-1 |
| Insuficiente | Trata de despejar los coeficientes pero no alcanza | 2-5 |
| Regular | Termina el procedimiento pero se equivoca en los cálculos | 6-8 |
| Excelente | Obtiene el resultado correcto, justificando su demostración | 9-10 |

1. Se denota que , entonces es un subespacio vectorial.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | Escriba la definición o el teorema de caracterización de un subespacio vectorial | 0-1 |
| Insuficiente | Trata de demostrar que E satisface las condiciones de la definición o del teorema de caracterización pero no alcanza | 2-5 |
| Regular | Demuestra correctamente por la definición o el teorema de caracterización | 6-8 |
| Excelente | Denota que E es un subespacio generado y concluye directamente | 9-10 |

1. Calculamos . Por el resultado del literal (a), no pertenece al espacio generado por y , entonces, como y son linealmente independientes, , y son linealmente independientes. Como la dimensión de es igual a .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | No obtiene el resultado correcto | 0-1 |
| Insuficiente | Obtiene el resultado correcto pero solo justifica una de las dos propiedades (LI o generador) | 2-5 |
| Regular | Demuestra las 2 propriedades pero con imprecisiones | 6-8 |
| Excelente | Demuestra el resultado rigurosamente | 9-10 |

1. Sean y dos polinomios de . Calculamos

Sea . Calculamos .

Entonces es una transformación lineal.

Se denota que . Entonces para demostrar que es biyectiva, por el teorema sobre isomorfismos, solo se necesita demostrar que es inyectiva. Demostramos que . Sea tal que . Entonces . Pero como , y son linealmente independientes, entonces necesariamente , es decir tiene que ser igual al polinomio cero. Por lo tanto es inyectiva.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Deficiente | Demuestra la linealidad parcialmente | 0-1 |
| Insuficiente | Demuestra la linealidad y plantea correctamente la demostración de la biyectividad | 2-5 |
| Regular | Demuestra la biyectividad pero con algunas imprecisiones en la demostración | 6-8 |
| Excelente | Demuestra el resultado rigurosamente | 9-10 |