Conteste todas las preguntas en el espacio asignado para las mismas. Si le falta espacio use la parte de atrás de la hoja.

Nombre completo: ______________________________

1. Suponga que $\boldsymbol{A}$ es una matriz simétrica definida positiva.
   (a) (10 puntos) Si la descomposición de Cholesky de esta matriz está dada por $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T}$, donde $\boldsymbol{T}$ es una matriz triangular, demuestre que $|\boldsymbol{T}| = \sqrt{|\boldsymbol{A}|}$

   (b) (10 puntos) Demuestre que todos los elementos de la diagonal de $\boldsymbol{A}$ son positivos.

   (c) (10 puntos) Demuestre que $|a_{ij}| < \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$

2. (20 puntos) Suponga que $\boldsymbol{y}$ es un vector aleatorio con vector media $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Encuentre tres combinaciones lineales $x_1 = a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3$, $x_2 = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$ y $x_3 = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$ tales que x_1, x_2 y x_3 tengan todos la misma varianza y la covarianza entre ellos sea 0.

3. Suponga que $\boldsymbol{y}$ es un vector aleatorio p-variado, no necesariamente normal, tal que $\mathrm{E}[\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{\mu}$ y $\mathrm{var}[\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{\Sigma}$.
   (a) (10 puntos) Demuestre que $\mathrm{E}[(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})] = p$.

   (b) (10 puntos) Demuestre que si $\boldsymbol{y}$ es normal multivariado, entonces $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})$ es χ^2_p (ji cuadrado con p grados de libertad).