ANÁLISIS NUMÉRICO
PRIMERA EVALUACIÓN
3 DE JULIO DE 2012

Tema 1. (30%). Determine de ser posible, los puntos de la curva $y=ln(x)$; $x>0$, más cercanos al origen de coordenadas.

a) Plantee la ecuación que permita resolver matemáticamente el problema.
b) Determine de ser posible un intervalo de la solución a la ecuación planteada en a).
c) Aproxime la solución numérica de la ecuación planteada, empleando el método de Newton-Raphson con tolerancia de 10^{-6}. Mostrar la tabla de resultados respectiva.
d) Escriba las coordenadas del punto.

a) Se debe calcular la distancia mínima de un punto de la curva dada al origen de coordenadas. Por la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(\ln(x)-0)^2}=\sqrt{x^2+(\ln(x))^2}\ ;\ x>0$$

$$d'=\frac{2x+\frac{2\ln(x)}{x}}{2\sqrt{x^2+(\ln(x))^2}}=\frac{x+\frac{\ln(x)}{x}}{\sqrt{x^2+(\ln(x))^2}}$$

Para que exista un mínimo relativo debe cumplirse que **d'=0**, por lo cual debe resolverse la ecuación

f(x) = $x+\frac{\ln(x)}{x}=0,\quad x>0$.   (equivalente a: $f(x) = \exp(-x^2) - x=0,\ x>0$)

b) **f** es contínua para x>0
f(0.1)<0
f(1)>0
Un posible intervalo de la solución es **(0, 1]**, pues cumple con el teorema de Bolzano.

c) Fórmula de Newton: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i+\frac{\ln(x_i)}{x_i}}{1+\frac{1}{x_i^2}-\frac{\ln(x_i)}{x_i^2}}$;

Tabla de resultados con $x_0=0.5$

$x_1 = 0.614028$
$x_2 = 0.650474$
$x_3 = 0.652909$
$x_4 = 0.652918$
$x_5 = 0.652918$

Solución aproximada: **0.652918**

e) Coordenadas del punto más cercano al origen de la curva **y=ln(x)**: **(0.652918, -0,426302)**

Tema 2. (20%) Dado el siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4\\
4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6\\
8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12\\
3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6
\end{aligned}
$$

a) Resolver el sistema con un método directo

Método de eliminación de Gauss:

$$
A|b = \begin{matrix}
1.0000 & 0.6250 & -0.3750 & 0.5000 & 1.5000\\
0 & 0.5000 & 0.5000 & 0 & 0\\
0 & 0.7500 & -0.2500 & 0 & 1.0000\\
0 & 1.1250 & -0.8750 & 0.5000 & 1.5000
\end{matrix}
$$

$$
A|b = \begin{matrix}
1.0000 & 0.6250 & -0.3750 & 0.5000 & 1.5000\\
0 & 1.0000 & -0.7778 & 0.4444 & 1.3333\\
0 & 0 & 0.3333 & -0.3333 & 0\\
0 & 0 & 0.8889 & -0.2222 & -0.6667
\end{matrix}
$$

$$
A|b = \begin{matrix}
1.0000 & 0.6250 & -0.3750 & 0.5000 & 1.5000\\
0 & 1.0000 & -0.7778 & 0.4444 & 1.3333\\
0 & 0 & 1.0000 & -0.2500 & -0.7500\\
0 & 0 & 0 & -0.2500 & 0.2500
\end{matrix}
$$

$$
A|b = \begin{matrix}
1.0000 & 0.6250 & -0.3750 & 0.5000 & 1.5000\\
0 & 1.0000 & -0.7778 & 0.4444 & 1.3333\\
0 & 0 & 1.0000 & -0.2500 & -0.7500\\
0 & 0 & 0 & 1.0000 & -1.0000
\end{matrix}
$$

$$
x = \begin{matrix}
1.0000\\
1.0000\\
-1.0000\\
-1.0000
\end{matrix}
$$

b) ¿Es posible resolver este sistema con el método iterativo de Jacobi?

Si su respuesta es afirmativa, resuélvalo con una tolerancia de 10^{-2}, con $\mathbf{X^{(0)} = 0}$
Si su respuesta es negativa, justifique su conclusión

Matriz de transición:

$T=D^{-1}(L+U)=$

$$
\begin{matrix}
0 & 1.0000 & -0.5000 & 0.5000\\
1.3333 & 0 & -0.3333 & 0.6667\\
-2.6667 & -1.6667 & 0 & -1.3333\\
1.5000 & 1.5000 & -1.0000 & 0
\end{matrix}
$$

$||T||_\infty = 5.6666$

El método de Jacobi no garantiza la convergencia

Más estrictamente:

$||\rho(T)||_\infty = 3.0458$

Ningún método iterativo converge

Tema 3. (20%) Se conocen los valores de una función en los siguientes puntos

$f(1) = 0.75$
$f(1.5) = 1.34375$
$f(2) = 2.5$
$f(2.25) = 3.34765625$
$f(2.5) = 4.40625$
$f(3) = 7.25$

Aproximar con el método de Lagrange, $p_3(x)$

Se deben elegir cuatro puntos alrededor del valor a interpolar:

$x = [1, 1.5, 2, 2.25]$
$f = [0.75, 1.34375, 2.5, 3.34765625]$
$p_3(1.75) = 1.8398$

$x = [2, 2.25, 2.5, 3];$
$f = [2.5, 3.34765625, 4.40625, 7.25];$

$p_3(2.4) = 3.9560$

$p_3(2.75) = 5.6992$