Escuela Superior Politécnica del Litoral
Instituto de Ciencias Matemáticas

SOLUCIÓN Y RÚBRICA
Examen de la Segunda Evaluación de ALGEBRA LINEAL
30 de Agosto de 2012

Rúbrica para todos los temas:

Deficiente	Cuando el estudiante deja vacío, escribe incoherencias o califica sin justificar una proposición a ser analizada.	0-1
Regular	El estudiante demuestra tener una idea de cómo debe resolver el problema o como debe plantearlo, sin embargo tiene serias falencias conceptuales.	2-5
Bueno	El estudiante demuestra manejar bien los conceptos o los procedimientos pero falta la formalización o comete errores de cálculos	6-8
Excelente	Tanto el planteamiento como el procedimiento son correctos aunque se pueden presentar faltas despreciables.	9-10

Ponderaciones:

	P1	P2	P3		P4	P5		P6	Total
			a	b		a	b		
puntos:	10	10	5	5	10	10	10	10	70

1. (10 pts) Demuestre utilizando inducción matemática el siguiente teorema:

Sea T una transformación lineal del espacio V en el espacio W sobre el campo K, entonces

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$$

SOLUCIÓN:

Se probará por inducción que:

$$T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2) \wedge T(\alpha v) = \alpha T(v) \Rightarrow T(\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1)+\ldots+\alpha_n T(v_n)$$

Para $n = 1$, se tiene $T(\alpha_1 v_1) = \alpha_1 T(v_1)$ por la primera parte del antecedente de la implicación.

Suponemos que el consecuente se cumple para $n = k$,

$\Rightarrow T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_k T(v_k)$

Consideremos el caso donde $n = k + 1$. Por la primera parte del atecedente de la implicación se tiene,

$\Rightarrow T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) + T(\alpha_{k+1} v_{k+1})$

Por el supuesto de inducción:

$T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_k T(v_k) + T(\alpha_{k+1} v_{k+1})$

y por la segunda proposición del antecedente de la implicación, se tiene que:

$T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_k T(v_k) + \alpha_{k+1} T(v_{k+1})$ ■

2. (10 puntos) Rectifique o ratifique la siguiente **DEFINICIÓN**:

Definición	Rectificación ó Ratificación
Una matriz A es ortogonal si y solo si los vectores columnas de A son ortogonales.	**Rectificación:** Se dice que una matriz inversible A es una matriz ortogonal si $A^{-1} = A^T$

3. (10 puntos) Califique cada una de las siguientes proposiciones como VERDADERA o FALSA y justifique formalmente su calificación.

   a) La matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable para todo valor real k.

   SOLUCIÓN:

Se puede observar que los valores propios de la matriz son: k y 3. Realizamos el análisis en el valor $k = 3$, ya que sería la situación del valor propio repetido. Para los otros valores de k, es diagonalizable. Para el valor $k = 3$, la multiplicidad geométrica es 1, por lo que la matriz no es diagonalizable para $k = 3$, por lo tanto la proposición es **FALSA**.

b) La función $f : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(p(x), q(x)) = p(1)q(1)$ es un producto interno real.

SOLUCIÓN:

Se debería cumplir que si $p(x) = ax^2 + bx + c$, $f(p, p) = 0 \Leftrightarrow p = 0_{\mathcal{P}_2}$, pero si $a = 0$ y $b = -c$, se tiene $p(x) = -cx + c$ y entonces $f(-cx + c, -cx + c) = (0)(0) = 0$. Por lo tanto la proposición es **FALSA**.

4. (10 puntos) Sea T un operador lineal en $\mathbb{R}^3$ definido como:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + 2c \\ b \\ b + 3c \end{pmatrix}$$

Determine si T^2 es diagonalizable.

SOLUCIÓN:

Sea la matriz de la transformación lineal $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $A_{T^2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ cuyos valores propios son: $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 2 y $\lambda = 9$. Haciendo el análisis del valor propio repetido se obtienen los vectores propios $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, por lo tanto es diagonalizable.

5. (20 puntos) Sea $T : V \to V$ un operador lineal definido en V. Sean $\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\beta_2 = \{v_1 + 2v_2, v_2 + v_3, v_1 - v_3\}$ dos bases de V.

a) Si A es la matriz asociada a T con respecto a β_1 y B es la matriz asociada a T con respecto a β_2, demuestre que existe una matriz inversible P tal que $A = P^{-1}BP$.

SOLUCIÓN:

$\forall x \in V$, $[T(x)]_{\beta_1} = A[x]_{\beta_1}$ **(1)**

$\forall x \in V$, $[T(x)]_{\beta_2} = B[x]_{\beta_2}$ **(2)**

$\forall x \in V$, $[x]_{\beta_2} = P[x]_{\beta_1}$ **(3)**

$\forall x \in V$, $[T(x)]_{\beta_2} = P[T(x)]_{\beta_1}$ **(4)**

Reemplazando **(4)** en **(2)**

$\forall x \in V$, $P[T(x)]_{\beta_1} = B[x]_{\beta_2}$ **(5)**

Reemplazando **(1)** en **(5)**

$\forall x \in V$, $PA[x]_{\beta_1} = B[x]_{\beta_2}$ **(6)**

Reemplazando **(3)** en **(6)**

$\forall x \in V$, $PA[x]_{\beta_1} = BP[x]_{\beta_1}$ **(7)**

Por lo que: $PA = BP$

Dado que P es invertible debido a que es la matriz de transición de β_1 a β_2, se tiene que $A = P^{-1}BP$.

b) A partir de lo anterior, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, determine la matriz B.

SOLUCIÓN:

La matriz P^{-1} es la matriz de transición de β_2 a β_1:

$$P^{-1} = ([v_1 + 2v_2]_{\beta_1} \mid [v_2 + v_3]_{\beta_1} \mid [v_1 - v_3]_{\beta_1})$$

Entonces $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y por lo tanto $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Se tiene por el literal anterior que $B = PAP^{-1}$, entonces:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -8 & 4 & -6 \\ -5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

6. (10 puntos) Sea el espacio vectorial $V = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ y sean $T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, $T_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. Demuestre que $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ es una base de $\mathcal{L}$.

SOLUCIÓN:

Se probará que el conjunto $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ genera a $\mathcal{L}$ y además es linealmente independiente.

Toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ puede representarse de la forma:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x + \alpha_2 y \\ \alpha_3 x + \alpha_4 y \end{pmatrix}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha_1 T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha_2 T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha_3 T_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha_4 T_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \alpha_1\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 x + \alpha_2 y \\ \alpha_3 x + \alpha_4 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se ha probado entonces que $gen\{T_1, T_2, T_3, T_4\} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

Para probar la independencia, la única solución de

$$\alpha_1 T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha_2 T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha_3 T_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha_4 T_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{L}}$$

debe ser $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, donde $0_{\mathcal{L}}$ es la transformación Cero de $\mathcal{L}$, entonces:

$$\alpha_1\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x + \alpha_2 y \\ \alpha_3 x + \alpha_4 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La única forma que la ecuación anterior se cumpla para todo x y y es que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

Por lo tanto el conjunto $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ es linealmente independiente. $\blacksquare$

Otra alternativa de solución:

Sea $\beta_1 = \beta_2 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$,

$$[T_1]_{\beta_1\beta_2} = \left[[T_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\beta_2} \middle| [T_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_{\beta_2} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_2]_{\beta_1\beta_2} = \left[[T_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\beta_2} \middle| [T_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_{\beta_2} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_3]_{\beta_1\beta_2} = \left[[T_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\beta_2} \middle| [T_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_{\beta_2} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_4]_{\beta_1\beta_2} = \left[[T_4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\beta_2} \middle| [T_4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_{\beta_2} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces, el conjunto de matrices $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$ forman la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}$, y como se sabe que la función $F : \underset{T}{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)} \underset{\longmapsto}{\to} \underset{F(T)=[T]_{\beta_1\beta_2}}{\mathcal{M}_{2\times 2}}$ es un isomorfismo del espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ al espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}$ entonces el conjunto $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ es una base de $\mathcal{L}$. $\blacksquare$