Escuela Superior Politécnica del Litoral
Instituto de Ciencias Matemáticas

Examen de la Segunda Evaluación de ALGEBRA LINEAL

30 de Agosto de 2012

Nombre: ________________________________ **Paralelo:** _____ **Firma:** ____________________

1. (10 pts) Demuestre utilizando inducción matemática el siguiente teorema:

   Sea T una transformación lineal del espacio V en el espacio W sobre el campo K, entonces

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$$

2. (10 puntos) Rectifique o ratifique la siguiente **DEFINICIÓN**:

Definición	Rectificación ó Ratificación
Una matriz A es ortogonal si y solo si los vectores columnas de A son ortogonales.	

3. (10 puntos) Califique cada una de las siguientes proposiciones como VERDADERA o FALSA y justifique formalmente su calificación.

   a) La matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable para todo valor real k.

b) La función $f : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(p(x), q(x)) = p(1)q(1)$ es un producto interno real.

4. (10 puntos) Sea T un operador lineal en $\mathbb{R}^3$ definido como:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+2c \\ b \\ b+3c \end{pmatrix}$$

Determine si T^2 es diagonalizable.

5. (20 puntos) Sea $T : V \to V$ un operador lineal definido en V. Sean $\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\beta_2 = \{v_1 + 2v_2, v_2 + v_3, v_1 - v_3\}$ dos bases de V.

   a) Si A es la matriz asociada a T con respecto a β_1 y B es la matriz asociada a T con respecto a β_2, demuestre que existe una matriz inversible P tal que $A = P^{-1}BP$

b) A partir de lo anterior, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, determine la matriz B.

6. (10 puntos) Sea el espacio vectorial $V = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ y sean $T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, $T_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. Demuestre que $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ es una base de $\mathcal{L}$