Conteste todas las preguntas en el espacio asignado para las mismas. Si le falta espacio use la parte de atrás de la hoja.

Nombre completo: ____________________

1. Suponga que w es una función de ponderación que toma valores positivos en el intervalo $[a, b]$. Definimos el producto interno entre dos funciones f y g como $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$. Definimos la normal de f como $||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Sea $\{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ una secuencia ortogonal de polinomios en $[a, b]$, tales que $\langle P_i, P_j\rangle = 0$ cuando $i \neq j$. Entonces toda función f con normal finita se puede expresar como $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i$, donde $a_i \in \mathcal{R}$.

   (a) (10 puntos) Demuestre que $a_i = \langle f, P_i\rangle$

   (b) (10 puntos) Para aproximar funciones se suele truncar la serie hasta un n finito. Suponga que utilizamos los polinomios de Legendre, definidos en el intervalo $[-1, 1]$, tales que $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, \ldots, (n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$. Verifique que los los 5 primeros polinomios $(\{P_0, \ldots, P_4\})$ obtenidos de este manera son ortogonales

   (c) (10 puntos) Deseamos aproximar la función $f(x) = \sqrt{x + 1}$ usando $\sum_{i=0}^{4} a_i P_i(x)$. Encuentre los coeficientes $\{a_0, \ldots, a_4\}$

(d) (10 puntos) Utilice los coeficientes encontrados para aproximar la raíz de 1.5

2. (20 puntos) Con cuadratura gaussiana se puede aproximar un integral como $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$, donde x_i son las raíces del polinomio de Hermite $H_n(x)$ y $w_i = \frac{2^{n-1}n!\sqrt{\pi}}{n^2(H_{n-1}(x_i))^2}$. Emplee esta aproximación con $n = 2$ para evaluar el valor esperado $E(X^2)$, donde X tiene distribución normal con media 0 y varianza 4. Recuerde que $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2$.

3. Para los siguientes modelos de regresión, emplee la reducción de Householder para estimar los coeficientes y la suma cuadrática del error.

   (a) (10 puntos) $y_i = \beta_0 + \varepsilon_i$

   (b) (10 puntos) $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$