Escuela Superior Politécnica del Litoral
Instituto de Ciencias Matemáticas

SOLUCIÓN Y RÚBRICA
Examen de la Tercera Evaluación de ÁLGEBRA LINEAL
13 de Septiembre de 2012

Rúbrica para todos los temas:

Deficiente	Cuando el estudiante deja vacío, escribe incoherencias o califica sin justificar una proposición a ser analizada.	0-1
Regular	El estudiante demuestra tener una idea de cómo debe resolver el problema o como debe plantearlo, sin embargo tiene serias falencias conceptuales.	2-5
Bueno	El estudiante demuestra manejar bien los conceptos o los procedimientos pero falta la formalización o comete errores de cálculos	6-8
Excelente	Tanto el planteamiento como el procedimiento son correctos aunque se pueden presentar faltas despreciables.	9-10

Ponderaciones:

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	Total
puntos:	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100

1. (10 puntos) Defina Espacio Vectorial sobre el campo K.

SOLUCIÓN:

Un espacio vectorial sobre un campo K es un conjunto no vacío V en el cual están definidas dos operaciones:

$$\oplus : \underset{(v_1,v_2)}{V \times V} \underset{\longmapsto}{\to} \underset{v_1+v_2}{V}$$

$$\odot : \underset{(k,v)}{K \times V} \underset{\longmapsto}{\to} \underset{kv}{V}$$

llamadas **suma** y **producto por escalar** respectivamente las cuales satisfacen las siguientes propiedades:

1) $u \oplus v = v \oplus u$, $\forall u, v \in V$

2) $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$, $\forall u, v, w \in V$

3) Existe un elemento $0_V \in V$ llamado **cero de** V con la propiedad $u \oplus 0_V = u$, $\forall u \in V$

4) Para cada $v \in V$, existe un elemento $v' \in V$, llamado el **inverso aditivo de** V con la propiedad $v \oplus v' = 0_V$

5) $k \odot (u \oplus v) = (k \odot u) \oplus (k \odot v)$, $\forall k \in K$, $\forall u, v \in V$

6) $(k_1 + k_2) \odot v = (k_1 \odot v) \oplus (k_2 \odot v)$, $\forall k_1, k_2 \in K$, $\forall v \in V$

7) $(k_1 k_2) \odot v = k_1 \odot (k_2 \odot v)$, $\forall k_1, k_2 \in K$, $\forall v \in V$

8) $1_K \odot v = v$, $\forall v \in V$ y donde 1_K es el neutro multiplicativo del campo K

2. (10 puntos) Sea $V = C[0,1]$ y $H = \{f \in V \mid f^2(0) = f^2(1)\}$. Determine si H es un subespacio de V.

SOLUCIÓN:

Por demostrar: $(f+g)(x) \in H$

Debería cumplirse entonces que $(f+g)^2(0) - (f+g)^2(1) = 0$

$\Rightarrow \cancel{f^2(0)} + 2f(0)g(0) + \cancel{g^2(0)} - \cancel{f^2(1)} - 2f(1)g(1) - \cancel{g^2(1)} = 0$

$\Rightarrow 2f(0)g(0) - 2f(1)g(1) = 0$

$\Rightarrow f(0)g(0) = f(1)g(1)$, pero esto no siempre es cierto. Por ejemplo:

Si $f(x) = x^2 - 3x + 1$ y $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$, se tiene $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ y $g(0) = 1$ y $g(1) = 1$, por lo tanto f y g pertenecen a H, pero $(f+g)(x) = 3x^2 - 5x + 2$, $(f+g)(0) = 2$ y $(f+g)(1) = 0$, entonces $(f+g)(x) \notin H$, porque no se cumple la condición para que un vector sea elemento de H. Por lo tanto H no es subespacio de V.

Sí se cumple que $(kf)(x) \in H$, porque $(kf)^2(0) = (kf)^2(1) \Rightarrow (kf(0))^2 = (kf(1))^2 \Rightarrow k^2 f^2(0) = k^2 f^2(1) \Rightarrow f^2(0) = f^2(1)$.

3. (10 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformación lineal definida por:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ y + z \\ x - y + 3z \end{pmatrix}$$

Detemine si T y T^2 son isomorfismos.

SOLUCIÓN:

Por demostrar: T y T^2 son ambas inyectivas y sobreyectivas a la vez.

T puede expresarse como $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Reduciendo la matriz que representa a T se obtiene: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, lo que implica que $Nu(T) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, y por lo tanto T es inyectiva. Además es sobreyectiva, porque $\rho(T) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Nu(T)) = 3 - 0 = 3$.

También, como la composición de 2 isomorfismos de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ es también un isomorfismo, entonces T^2 es también un isomorfismo.

4. (10 puntos) Construya de ser posible, una Transformación Lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que transforme todo vector de $\mathbb{R}^2$ en un vector que pertenezca a la recta $y = 2x$.

SOLUCIÓN:

Si $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ toda T de la forma $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 2a_1 & 2a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, cumple con la condición exigida.

5. (10 puntos) Sea $V = C[0,1]$ y $f, g \in V$. Demuestre que si el conjunto $\{f, g\}$ es linealmente dependiente entonces:

$$W = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN:

Si $\{f, g\}$ es un conjunto linealmente dependiente, entonces se puede expresar g como múltiplo de f,

$\Rightarrow W = \begin{vmatrix} f(x) & kf(x) \\ f'(x) & kf'(x) \end{vmatrix} = kf(x)f'(x) - kf(x)f'(x) = 0$

6. (10 puntos) Sean A y B matrices cuadradas. Demuestre que si A es semejante a B, entonces B es semejante a A.

SOLUCIÓN:

Como A y B son semejantes, entonces existe una matriz inversible P tal que $A = P^{-1}BP$ y por lo tanto $B = PAP^{-1}$. Si $P = Q^{-1}$, entonces $B = Q^{-1}A(Q^{-1})^{-1}$, por lo tanto existe una matriz inversible Q, tal que $B = Q^{-1}AQ$, lo que implica que B es semejante a A.

7. (10 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -8 & k \end{pmatrix}$, determine los valores de k para que la nulidad de A sea cero.

SOLUCIÓN:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -8 & k \end{pmatrix}$

Reduciendo la matriz A se obtiene: $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -8 & k \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$

Si $k + 1 \neq 0$ entonces $\nu(A) = 0$, por lo tanto $k \neq -1$.

8. (10 puntos) Sean $u, v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores pertenecientes al espacio euclidiano V. Demuestre que si u es ortogonal a $v_1, v_2, \ldots, v_n$, entonces u es ortogonal a todo vector de $gen\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

SOLUCIÓN:

Si u es ortogonal a $v_1, v_2, \ldots, v_n \Rightarrow \langle u, v_i \rangle = 0$, $\forall i \in 1, \ldots, n$

Sea $v \in gen\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$\Rightarrow v = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle u, k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n \rangle \\ &= k_1\cancel{\langle u, v_1 \rangle} + k_2\cancel{\langle u, v_2 \rangle} + \cdots + k_n\cancel{\langle u, v_n \rangle} \\ &= 0 \end{aligned}$$

9. (10 puntos) Sean $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dos vectores del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$. Exprese al vector u como la suma de dos vectores p y q tal que p es paralelo a v y q es ortogonal a v.

SOLUCIÓN:

Alternativa 1:

$$p = proy_v u = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{6-5}{9+1+1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/11 \\ -1/11 \\ 1/11 \end{pmatrix}$$

Entonces, $q = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - proy_v u = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/11 \\ -1/11 \\ 1/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/11 \\ 56/11 \\ -1/11 \end{pmatrix}$

Alternativa 2:

$p = \begin{pmatrix} 3k \\ -k \\ k \end{pmatrix}$,

$q = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, tal que $3a - b + c = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k + a \\ -k + b \\ k + c \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} 3k & + & a & = & 2 \\ -k & + & b & = & 5 \\ k & + & c & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 2-3k \\ b & = & 5+k \\ c & = & -k \end{array} \right.$

$\Rightarrow 3(2-3k) - (5+k) - k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{11}$ y $a = \frac{19}{11}$, $b = \frac{56}{11}$ y $a = -\frac{1}{11}$

$\therefore p = \begin{pmatrix} 3/11 \\ -1/11 \\ 1/11 \end{pmatrix}$ y $q = \begin{pmatrix} 19/11 \\ 56/11 \\ -1/11 \end{pmatrix}$

10. (10 puntos) Grafique la curva descrita por la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}x - 2 = 0$

SOLUCIÓN:

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ ó $\lambda = 0$

$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2x'$

Calculando $Nu(A - \lambda I)$ para $\lambda = 2$ y $\lambda = 0$, se obtiene:

$$E_{\lambda=2} = \{\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow Base_{E_{\lambda=2}} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$E_{\lambda=0} = \{\begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow Base_{E_{\lambda=0}} = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'/\sqrt{2} - y'/\sqrt{2} \\ x'/\sqrt{2} + y'/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2x'^2 - 4\sqrt{2}\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) = 2 \Rightarrow 2(x'-1)^2 + 4y' = 4 \Rightarrow \frac{(x'-1)^2}{2} + y' = 1 \Rightarrow y' - 1 = -\frac{(x'-1)^2}{2}$$