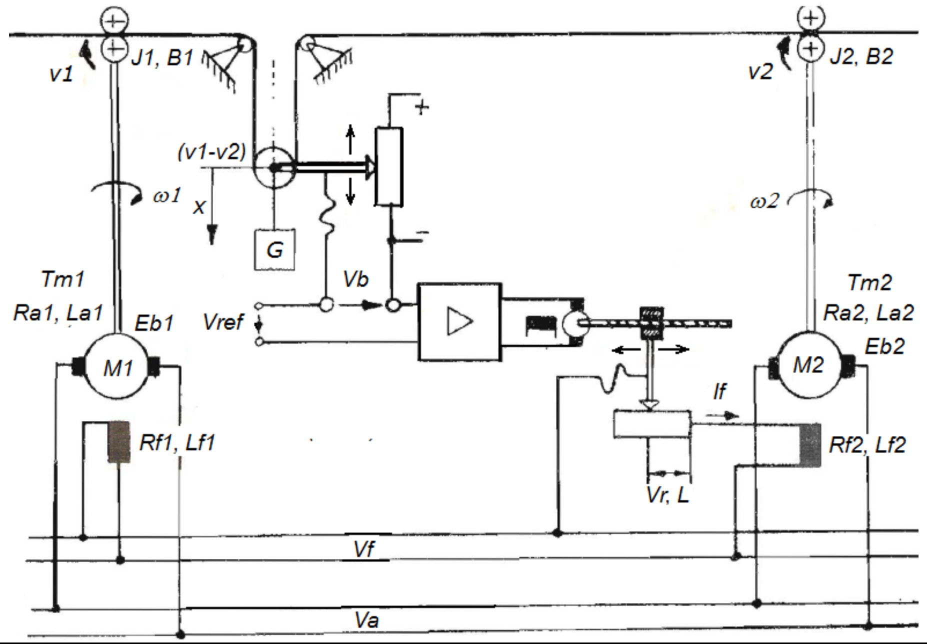
EXAMEN DE CONTROL AUTOMÁTICO
PRIMER PARCIAL
JULIO 3 DE 2012

PRIMER TEMA: 30 puntos

- Obtenga el Diagrama Funcional del siguiente sistema en el que se desea controlar la velocidad del papel observando el desplazamiento “x”.
- En cada Bloque Funcional muestre su correspondiente Respuesta al Escalón.
- Considere que “vf” como “va” pueden ser perturbados.
- Recuerde que:
  $T_m = f(i_a, i_f)$,
  $E_b = f(i_f, w)$,
  $V_r = f(L, i_f)$



SEGUNDO TEMA: 35 puntos

Para el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s^2+4s+13)} \quad ; \quad H(s) = 1$$

a. (15) Bosqueje con todos los detalles posibles el Lugar Geométrico de las Raíces cuando: 0 < K < inf.

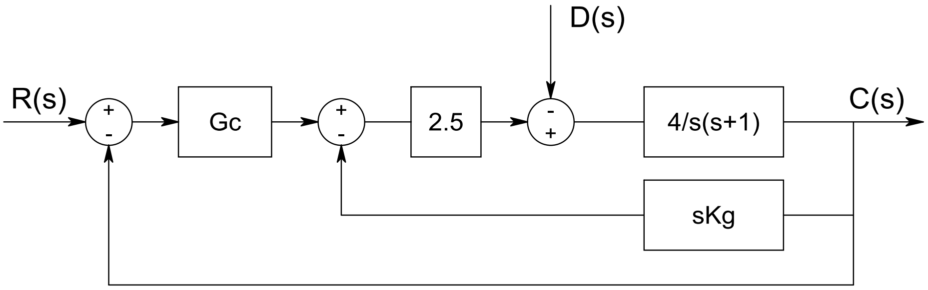
Si dos de sus raíces están ubicadas en -0.3 ± 1.0j

b. (10) ¿Cuál será el valor de K que ubica las raíces de lazo cerrado en ese lugar?
c. (5) Para ese valor de K, dónde se encuentran las otras raíces?
d. (5) ¿Existe dominancia de Segundo Orden? Justifique su afirmación.

TERCER TEMA: 35 puntos

Para el sistema mostrado en la figura:

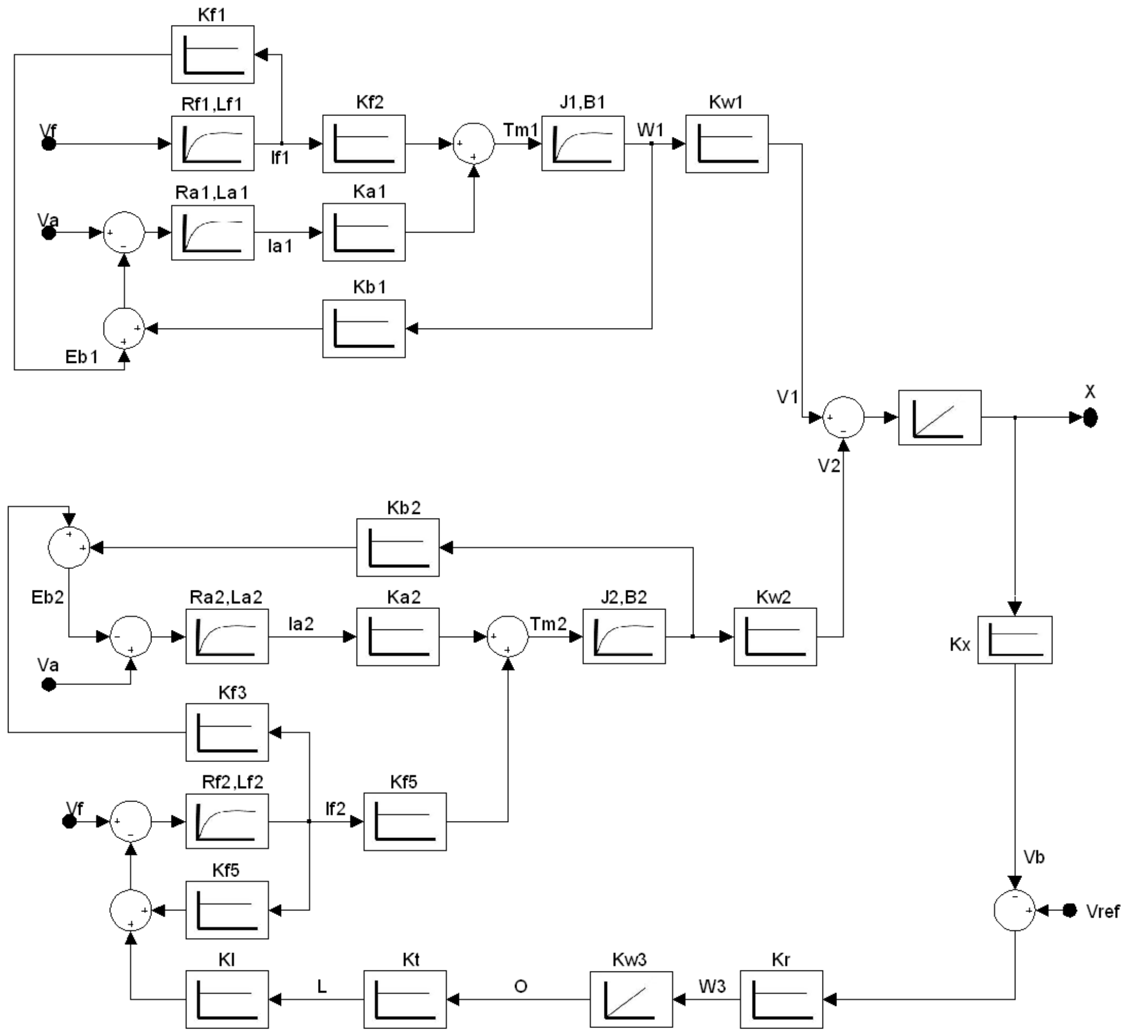
a. (10) Si Gc = Kc, encuentre Kg y Kc para obtener una Relación de Amortiguación del sistema de 0.5 y un Error de Estado Estacionario del 5%para una entrada escalón unitario en D(s).
b. (5) ¿Afecta Kg al valor del Error de Estado Estacionario?
c. (10) Si Gc(s) = Kc + Ki/s, (control PI), encuentre el Error de Estado Estacionario del sistema para una entrada escalón unitario en D(s).
d. (10) Escriba la ecuación Característica para los valores de Kc y Kg encontrados en a) y usando el criterio de Routh-Hurwitz determine el valor límite de Ki para estabilidad.



SOLUCION:

Primer Tema.

$$T_{m1} = K_{f2}.I_{f1} + K_{a1}.I_{a1}$$
$$E_{b1} = K_{b1}.W_1 + K_{f1}.I_{f1}$$
$$V_r = K_{f4}.I_{f2} + K_l.L$$
$$V_f = R_{a1}.I_{f1} + L_{f1}.\frac{dI_{f1}}{dt}$$
$$V_a = R_{a1}.I_{a1} + L_{a1}.\frac{dI_{a1}}{dt} + E_{b1}$$
$$T_{m1} = J_1\frac{dW_1}{dt} + B_1.W_1$$
$$V_f = V_r + R_{f2}.I_{f2} + L_{f2}.\frac{dI_{f2}}{dt}$$
$$V_r = K_{f4}.I_{f2} + K_l.L$$



Segundo Tema.

LITERAL A)

$1 + KF(S) = 0$; $F(S) = \frac{1}{s(s+1)(s^2+4s+13)}$ Es un sistema de tipo 1 de 4º orden

$$F(S) = \frac{1}{s(s+1)(s-2+3j)(s-2-3j)}$$

n: numero de polos= 4
m: numero de ceros=0 → 4 ceros están en el infinito

Centroide:

$$\sigma_a = \frac{\sum p - \sum z}{n-m} = \frac{0 + (-1) + (-2) + (-2) - 0}{4} = -1.25$$

Asintota:

$$\phi_a = \frac{(2q+1).180º}{n-m}; \quad q = n - m - 1 = 3$$

$$\phi_a = \begin{cases} q = 0 \rightarrow \phi_a = 45º \\ q = 1 \rightarrow \phi_a = 135º \\ q = 2 \rightarrow \phi_a = 225º \\ q = 3 \rightarrow \phi_a = 315º \end{cases}$$

Puntos de salida – llegada por el método de la derivada:

$$1 + KF(S) = 0 \Rightarrow K = -\frac{1}{F(S)} \Rightarrow K = -\frac{1}{\frac{1}{s(s+1)(s^2+4s+13)}}$$

$$\Rightarrow K = -[s(s+1)(s^2+4s+13)] \Rightarrow K = -s^4 - 5s^3 - 17s^2 - 13s$$

Para encontrar puntos de salida tenemos que $s = \sigma \pm jw$ y $jw = 0 \Rightarrow s = \sigma$

$$\Rightarrow K = -\sigma^4 - 5\sigma^3 - 17\sigma^2 - 13\sigma$$

$$\frac{dK}{d\sigma} = -4\sigma^3 - 15\sigma^2 - 34\sigma - 13 = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_{e1} = -0.46 \\ \sigma_{e1} = -1.64 + 2.06 \\ \sigma_{e1} = -1.64 - 2.06 \end{cases}$$ → Escogemos σ_{e1} como punto de choque ya que es el único que pasa por el lugar geométrico

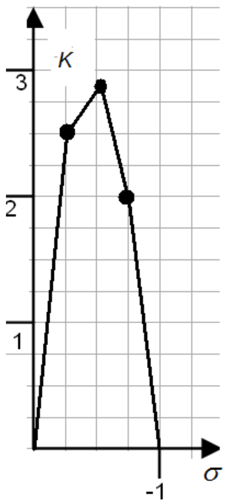
$$K(\sigma_{e1}) = -(-1.46)^4 - 5(-1.46)^3 - 17(-1.46)^2 - 13(-1.46)$$

$\Rightarrow K(\sigma_{e1}) = 2.82$ → valor de K para el punto de salida del lugar geométrico

Puntos de salida – llegada por el método grafico:

$$K = -\sigma^4 - 5\sigma^3 - 17\sigma^2 - 13\sigma$$

σ	K
0	0
-0.25	2.26
-0.5	2.81
-0.75	1.98
-1	0

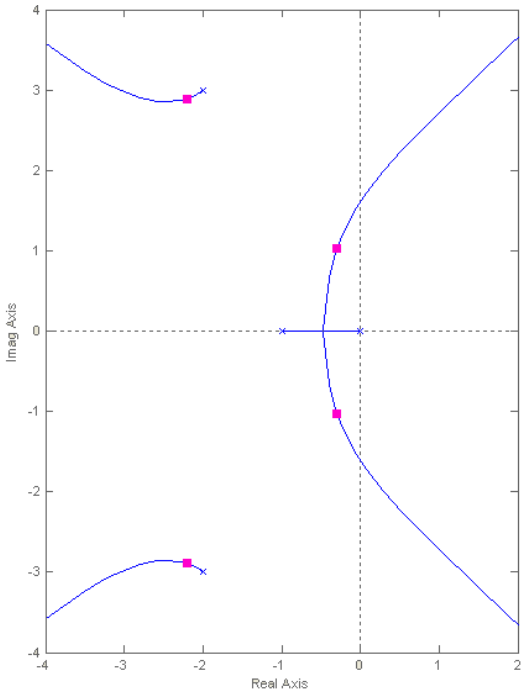


Angulo de salida:

$\measuredangle_{zeros} - \measuredangle_{polos} = \pm 180$

$-[{}_{p} + 90 + 135 + 153.43] = -180$

$\Longrightarrow {}_{p} = 180 - 378.43 \Longrightarrow {}_{p} = -198.43$



Calculamos Kcrit mediante el método de Routh- Hourwitz:

Ec. Característica: $s^4 + 5s^3 + 17s^2 + 13s + K = 0$

s^4	1	17	K
s^3	5	13	
s^2	14.4	K	
s^1	A		
s^0	K		

$$A = \frac{14.4(13) - 5K}{14.4}$$

$$14.4(13) - 5K = 0 \Longrightarrow K_{crit} = \frac{187.2}{5} \Longrightarrow K_{crit} = 37.44$$

Ec. Auxiliar: $14.4s^2 + K = 0 \Longrightarrow 14.4s^2 + 37.44 = 0 \Longrightarrow w_o = \pm 1.61$

Calculamos Kcrit mediante el criterio de magnitud:

$$K = -\frac{1}{F(S)} \Longrightarrow K = -(s)(s+1)(s^2 + 4s + 13) \dashrightarrow s = jw$$

$$K = -(jw)^4 - 5(jw)^3 - 17(jw)^2 + 13jw$$

$$K = -w^4 + 5jw^3 + 17w^2 + 13jw \Longrightarrow K = (-w^4 + 17w^2) + (5w^3 + 13w)j$$

$$Im\left\{-\frac{1}{F(jw)}\right\}_{w=wo} = 0$$

$$\Longrightarrow 5w_o^3 + 13w_o = 0 \Longrightarrow w_o = \pm 1.61j$$

$$Re\left\{-\frac{1}{F(jw)}\right\}_{w=wo} = Kcrit$$

$$-w_o^4 + 17w_o^2 = Kcrit \implies -(1.61)^4 + 17(1.61)^2 = Kcrit$$

$$Kcrit = 37.34$$

LITERAL B)

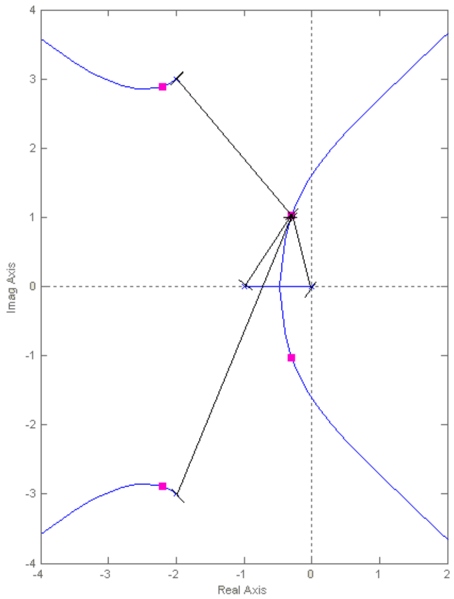
Por el criterio de magnitud: $|F(S)| = \frac{1}{K}$

$$\left|\frac{1}{s(s+1)(s-2+3j)(s-2-3j)}\right| = \frac{1}{K} \implies K = |s|.|(s+1)|.|(s-2+3j)|.|(s-2-3j)|$$

$$\implies K = \left(\sqrt{0.3^2+1^2}\right)\left(\sqrt{(1-0.3)^2+1^2}\right)\left(\sqrt{(3-1)^2+(2-0.3)^2}\right)\left(\sqrt{(3+1)^2+(2-0.3)^2}\right)$$

$$\implies K = (1.044)(1.220)(2.62)(4.346)$$

$$\implies K = 14.502$$



LITERAL C)
Con el valor de K encontrado en el literal C) K=14.5, tenemos 4 raíces, de las cuales conocemos 2 de ellas: $-0.3 \pm 1j$ entonces dividimos nuestra Ec. Característica para esos 2 polos.

Ec. Característica: $s^4 + 5s^3 + 17s^2 + 13s + 14.5 = 0$

Multiplico los dos polos que conozco:
$(s-0.3+j)(s-0.3-j) = s^2 - 0.6s + 1.09$

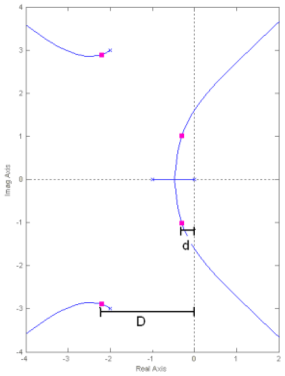
$$\begin{array}{llllll|l}
+s^4 & +5s^3 & +17s^2 & +13s & +14.5 & & s^2-0.6s+1.09 \\ \hline
-s^4 & +0.6s^3 & -1.09s^2 & & & & s^2+5.6s+19.27 \\
\hline
 & +5.6s^3 & +15.91s^2 & +13s & & & \\
 & -5.6s^3 & +3.36s^2 & -6.1s & & & \\
\hline
 & & +19.27s^2 & +6.9s & +14.5 & &
\end{array}$$

Entonces nuestros polos quedan en :

$$\begin{Bmatrix} (-0.3+j) \\ (-0.3-j) \\ (-2.4+3j) \\ (-2.4-3j) \end{Bmatrix}$$

LITERAL D)

SI existe dominancia de segundo orden ya que D>5d
$\Longrightarrow$ 2.4>5(0.3)



Tercer tema.

a.

$Gc = Kc;\ \zeta = 0.5;\ e_{ss} = 5\%;\ D(s) = \frac{1}{s}$
$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s);\ E(s) = R(s) - C(s);\ R(s) = 0 \ \rightarrow\ E(s) = -C(s);\ C(s) = T_d(s)\, D(s) \rightarrow E(s) = -\,T_d(s)\, D(s)$
Aplicando_Mason
Caminos_directos 1
Lazos 2
Lazos_distintos 0

$$T_d(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = -\frac{P_1 . 1}{1 + L1 + L2} = -\frac{\frac{4}{S(S+1)}}{1 + \frac{S\, 10\, Kg)}{S(S+1)} + \frac{10\, Gc}{S(S+1)}} = -\frac{4}{S(S+1) + 10KgS + 10\, Gc} = -\frac{4}{S^2 + (1+10Kg)S + 10\, Gc}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{4}{S^2 + (1+10Kg)S + 10\, Gc}\right)\frac{1}{S}\ ;\ Gc = Kc$$

$$e_{ss} = \frac{4}{10\ Kc} = 0.05\ \rightarrow Kc = 8$$

Por comparación de un sistema de segundo Orden:

$$\begin{cases} E.C.\ \ S^2 + (1+10Kg)S + 10\ Gc = 0 \\ \qquad S^2 + 2\zeta\omega nS + \omega n^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.\quad 1 + 10Kg = 2\zeta\omega n\ \rightarrow Kg = \frac{2\zeta\omega n - 1}{10} \rightarrow Kg = \frac{2(0.5)(8.94) - 1}{10} = 0.794 \\ 2.\qquad 10Kc = \omega n^2\ \ \rightarrow\ Wn = 8.94 \end{cases}$$

b.

No afecta ya que es independiente de Kg.

c.

$$Gc = Kc + \frac{Ki}{S}$$

$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s);\ E(s) = R(s) - C(s);\ R(s) = 0 \ \rightarrow\ E(s) = -C(s);\ C(s) = T_d(s)\, D(s) \rightarrow E(s) = -\,T_d(s)\, D(s)$

$$T_d(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = -\frac{4}{S^2 + (1+10Kg)S + 10\ Gc}\ ;\ Gc = Kc + \frac{Ki}{S}$$

$$T_d(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = -\frac{4}{S^2 + (1+10Kg)S + 10\left(Kc + \frac{Ki}{S}\right)} = -\frac{4S}{S^3 + (1+10Kg)S^2 + 10KcS + 10Ki}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{4S}{S^3 + (1+10Kg)S^2 + 10KcS + 10Ki}\right)\frac{1}{S} = 0$$

d.

El sistema es “Condicionalmente estable”
Su ecuación Característica es:

$S^3 + (1+10Kg)S^2 + 10KcS + 10Ki = 0$
$S^3 + 8.94S^2 + 80S + 10Ki = 0$

Usando el Criterio de Routh-Hurwitz

S^3	1	80
S^2	8.94	10ki
S^1	$\frac{715.2 - 10Ki}{8{,}94}$	
S^0	10Ki	

a. $715.2 - 10Ki = 0\ \rightarrow Ki = 71.52 = Kcritica$

El rango de estabilidad $0 < K \leq Kcrit$
$0 < K \leq 71.52$

Ecuación auxiliar:

b. $8.94S^2 + 10Ki = 0\ \rightarrow\ S^2 = -\frac{10(71.52)}{8.94} \rightarrow S^2 = -80$

$S_{1,2} = \pm j8.94\ = Wo$