**“USO DE TECNICAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL EN ESTIMACIONES ESTADISTICAS”**

Fernando Sandoya1, Rinna López Aguirre2

1 Matemático, Escuela Politécnica Nacional 1994, M.Sc. en Investigación de Operaciones y Logística 2003, email fsandoya@espol.edu.ec

2Ing. En Estadística e Informática 2004; email rinna\_lopez@hotmail.com

**SUMMARY**

*This investigation has as purpose to demonstrate that the Optimization Techniques such as: linear programming constitutes an alternative method to find linear estimators, similar to ordinary least squares method. For prove the results was used the PIB data and exportations data from 1990s first trimester until 2000s fourth trimester, in this study is used the Lindo program. Along this work a brief presentation of the Optimization Techniques is given, it is also shown information of topics related with linear regression and the limitations that it is necessary to consider for its use.*

**RESUMEN**

*El propósito de esta investigación es demostrar que las técnicas de optimización como la programación lineal constituyen un método alternativo para encontrar estimadores lineales, similares al método de mínimos cuadrados ordinarios. Para probar los resultados se utilizó los datos del pib y las exportaciones del primer trimestre de 1990 hasta el cuarto trimestre del 2000, y se hizo uso del software Lindo. A lo largo de este trabajo se hace una presentación de lo que son las técnicas de optimización, además se muestra información de de temas relacionados con la regresión lineal y las limitaciones que hay que considerar para su uso.*

1. **INTRODUCCIÓN**

La programación lineal puede ser aplicada como un procedimiento para resolver problemas de regresión lineal en los mismos casos en los que se usa el método de los mínimos cuadrados. La estimación clásica de mínimos cuadrados encuentra la fórmula de predicción que minimiza la suma cuadrática entre la observación y la predicción. De esta manera se pueden encontrar varios “modelos de regresión lineal”, la programación lineal es aplicable porque además de minimizar la suma cuadrática del error se realiza lo siguiente:

* La Minimización de la suma de los errores absolutos,
* La Minimización del máximo error absoluto o
* La Minimización del error en la predicción al ordenar los datos. Llamado también Regresión Ordinal.

La Programación lineal es una técnica de modelado matemático, diseñada para optimizar el uso de recursos limitados, trata acerca de la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo; esto es el resultado que mejor alcance la meta especificada entre todas las alternativas de solución. El método simplex se utiliza para resolver estos problemas.

Los elementos básicos para construir un modelo de programación lineal son: variables

de decisión, función objetivo y restricciones

**2. FORMA ESTÁNDAR DEL MODELO LINEAL.**

El modelo consiste en elegir valores de x1, x2, ......... xn para maximizar Z(x) sujeta a ciertas restricciones Ax ≤ b donde Z : es la función objetivo, A es una matriz de dimensión mxn de los coeficientes del sistema, b es un vector de las restricciones.

Z(x) = c1x1 + c2 x2 +..............+ cnxn

Sujeta a las restricciones:

a11x1 + a12x2 + .............. a1nxn ≤  b1

a21x1 + a22x2 + .............. a2nxn ≤  b2

a31x1 + a32x2 + .............. a3nxn ≤  b3

.

.

am11 + am2x2 + .............. a12xn ≤  bm

x1 ≥ 0, x2 ≥ 0, .............. xn ≥ 0

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Recursos** | **Consumo de recursos por unidad** **de actividad** | **Cantidad** **de****recursos** **disponibles** |
| **Actividad** |
|  1 2 3 …. J…. n |
| 1 | a11 | a12 | a13… | a1j… | a1n | b1 |
| 2 | a21 | a22 | a23… | a2j… | a2n | b2 |
| . | . | . | … | … | . | . |
| . | . | . | … | … | . | . |
| . | . | . | … | … | . | . |
| M | am1 | am2 | am3… | amj… | amn | bm |
| Contribución a Z por unidad De actividad | c1 | c2 | c3 | cj | cn |  |

## 3. ANÁLISIS DE DUALIDAD

Las variables y las restricciones del problema dual se pueden construir simétricamente a partir del problema primal. Hay que tener las siguientes consideraciones:

1.- Una variable dual se define para cada una de las m ecuaciones de la restricción primal.

2.- Una restricción dual se define para cada primal de las n variables primales.

3.- Los coeficientes del lado izquierdo de la restricción dual, son iguales a los coeficientes de la restricción (columna) de la variable primal asociada. Su lado derecho es igual al coeficiente del objetivo de la misma variable primal.

**Tabla 2**

**Descripción de la construcción**

 **Del modelo Dual a partir del primal**

4.- Los coeficientes de la función objetivo de la dual son iguales al lado derecho de las ecuaciones de la restricción primal.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Variables** **Duales** | **Variables Primales** |  |
| X1 | x2 | x3.... | a1j.... | xn |
| C1 | c2 | c3.... | cj..... | cn |
| Y1 | A11 | a12 | a13... | a1j.... | A1n | b1 |
| Y2 | A21 | a22 | a23... | a2j.... | A2n | b2 |
|  | . | . | . ...... | . ...... | . | . |
| . | . | . | . ...... | . ...... | . | . |
| . | . | . | . ...... | . ...... | . | . |
| ym | am1 | am2 | am3... | amj.... | amn | bm |
|  |  |  |  | RestricciónDual a la j | Objetivo Dual  |

La tabla 2 representa gráficamente esta información donde y1, y2 ........ym representan las variables duales.

**Tabla 1**

**Datos necesarios para un modelo**

 **de programación lineal de asignación**

 **de recursos a actividades**

Dada la siguiente función objetivo con sus respectivas restricciones

Maximizar:

F(x) = c1x1 + c2x2 + ............... + cnxn

Sujeta a las restricciones:

a11x1 + a12x2 + ................ a1nxn = b1

a21x1 + a22x2 + ................ a2nxn = b2

a31x1 + a32x2 + ................ a3nxn = b3

 .

 .

 .

am1x1 + am2x2 + .............. amnxn = bm

 

Aplicando el método dual se obtiene lo siguiente:

Minimizar

w = b1y1 + b2y2 + ..... bmym

Sujeta a:

a11y1 + a21x2 +................ am1ym > c1

a12y1 + a22x2 +................ am2ym > c2

a13y1 + a23x2 +................ am3ym > c3

 . .

 . .

a1ny1 + a2ny2 + ........... + amnym > cn

## 4. REGRESIÓN LINEAL

El análisis de regresión, es una técnica estadística para modelar e investigar la relación entre dos o más variables. Puede usarse un análisis de regresión, para construir un modelo que sea óptimo y permita hacer predicciones.

 El científico inglés Sir Francis Galton (1822-1911), fue quien desarrolló el análisis de regresión, sus primeros experimentos con regresión comenzaron con un intento de analizar los patrones de crecimiento hereditarios de los guisantes. Animado por los resultados Sir Francis Galton extendió para incluir los patrones hereditarios de la estatura de las personas adultas. Descubrió que los niños que tienen padres altos o bajos tendían a regresar a la estatura promedio de la población adulta.

En la regresión lineal simple se establece que Y es una función de solo una variable independiente, con frecuencia se denomina regresión bivariada porque solo hay dos variables una dependiente y una independiente.

, es conocido como modelo de regresión lineal simple, porque solo tiene una variable independiente, regresor o predictor x, y una variable dependiente o variable respuesta Y.

Las estimaciones de  deberán dar como resultado una recta que es “el mejor ajuste” para los datos. El científico alemán Karl Gauss propuso estimar los parámetros  a fin de minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales, utilizando el método de mínimos cuadrados, como se observa en el gráfico 1.



**Gráfico 1**

**Desviaciones de los datos del modelo de Regresión estimado**

**5. DETERMINACIÓN DEL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL SIMPLE**

Dadas n observaciones de la muestra, se pueden expresar como:

 = 

Por lo tanto si tenemos que la ecuación

 = xi predice el i-ésimo valor de y (Cuando x=xi), la desviación del valor observado de Y a partir de la recta  , conocido también como error es (yi -i), la suma de los cuadrados de las desviaciones que deben minimizar es la siguiente:

SCE=

 

 

donde SCE también es llamado la suma de los cuadrados de los errores. Por tanto,  y son los valores que minimizan SCE, así, se debe resolver el problema de programación no lineal sin restricciones.

Para resolver esto se deriva parcialmente y luego se iguala a cero.







 Igualando a cero obtenemos el siguiente resultado.



Realizamos el mismo procedimiento para encontrar el valor de β1





Igualando a cero esta ecuación obtenemos el siguiente resultado de β0.



**6. LIMITACIONES DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN**

 Se debe poner atención en la selección de las variables, así como en la determinación de la forma del modelo, es posible desarrollar relaciones estadísticas entre variables que no tienen ninguna relación en un sentido práctico, es posible que se observe una fuerte asociación entre variables, eso no implica que exista una relación causal entre las mismas.

Las relaciones de regresión, son válidas para los valores de las variables de regresión que se encuentran en el rango de los datos originales, es decir cuando se usan valores de X fuera de ese rango, disminuye la certeza acerca de la validez del modelo supuesto.



**Gráfico 2**

**Serie temporal del pib y eportaciones del primer trimestre de 1990 hasta el cuarto trimestre del 2000**

En el gráfico 2 podemos observar que en la serie del pib el máximo valor se presenta en el año 97 en el cuarto trimestre el y el valor mínimo se da en el primer trimestre del año 90. En cambio en las exportaciones el valor máximo ocurre en el año 97 tercer trimestre y el valor mínimo en el año 90 primer trimestre, en la tabla 3 se presentan los valores correspondientes.

**Tabla 3**

**Valor máximo y mínimo de la serie del pib y las exportaciones**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Pib** | **Exportaciones** |
| **Max** | 57279000 | 20896000 |
| **Min** | 44153000 | 11741000 |

***Fuente: Banco Central del Ecuador***

El valor máximo de la serie del pib es de cincuenta y siete millones doscientos setenta y nueve mil sucres, mientras que de las exportaciones es veinte millones ochocientos noventa y seis mil sucres. El valor mínimo de la serie del pib es de cuarenta y cuatro millones ciento cincuenta y tres mil sucres y de las exportaciones es once millones setecientos cuarenta y un mil sucres, según tabla 3.



**Gráfico 3**

**Gráfico de dispersión del pib y exportaciones del primer trimestre de 1990 hasta el cuarto trimestre del 2000**

El gráfico 3 muestra el diagrama de dispersión, que representan las observaciones por pares de los datos de las exportaciones y del pib, la figura sugiere una relación positiva y lineal, es positiva porque X y Y se mueven en la misma dirección, a medida que X aumenta, Y aumenta y a medida que X disminuye Y disminuye; lineal porque la relación puede identificarse mediante una línea recta.

## 7. ESTIMACIÓN DE LAS MÍNIMAS DESVIACIONES ABSOLUTAS (LAD)

Consiste en minimizar la suma de los valores absolutos del error, esto es minimizar , al realizar está regresión el modelo se ve menos afectado por los valores extremos, es conveniente utilizarla cuando en un conjunto de observaciones se tiene pocos datos con estas características, la programación lineal puede ser aplicada si se utiliza el supuesto , lo cual es una restricción de signo, la programación lineal se diseña para variables no negativas, El modelo a utilizar es el siguiente:

Minimizar: 

Sujeta a: 

con restricción en signo,

El modelo de optimización a utilizar es el siguiente:

Min

u1+v1+u2+v2+u3+v3+u4+v4+u5+v5+u6+v6+u7+v7+u8+v8+u9+v9+u10+v10+u11+v11+u12+v12+u13+v13+u14+v14+u15+v15+u16+v16+u17+v17+u18+v18+u19+v19+u20+v20+u21+v21+u22+v22+u23+v23+u24+v24+u25+v25+u26+v26+u27+v27+u28+v28+u29+v29+u30+v30+u31+v31+u32+v32+u33+v33+u34+v34+u35+v35+u36+v36+u37+v37+u38+v38+u39+v39+u40+v40+u41+v41+u42+v42+u43+v43+u44+v44

subject to

u1-v1+b0+11741b1=44153

u2-v2+b0+13419b1=45310

u3-v3+b0+12799b1=45446

u4-v4+b0+13200b1=46622

u5-v5+b0+13584b1=46488

u6-v6+b0+13901b1=47688

u7-v7+b0+14388b1=48217

u8-v8+b0+14652b1=48245

u9-v9+b0+15264b1=48989

u10-v10+b0+15663b1=49604

u11-v11+b0+15405b1=49500

u12-v12+b0+15608b1=49343

u13-v13+b0+15559b1=49972

u14-v14+b0+16028b1=50075

u15-v15+b0+16568b1=50762

u16-v16+b0+16397b1=50638

u17-v17+b0+16860b1=51293

u18-v18+b0+16746b1=51612

u19-v19+b0+19122b1=53409

u20-v20+b0+17412b1=53836

u21-v21+b0+18091b1=52945

u22-v22+b0+18560b1=54444

u23-v23+b0+18211b1=53782

u24-v24+b0+18767b1=53903

u25-v25+b0+19030b1=54206

u26-v26+b0+18989b1=54327

u27-v27+b0+19216b1=55011

u28-v28+b0+19055b1=55791

u29-v29+b0+18958b1=55788

u30-v30+b0+19561b1=56597

u31-v31+b0+20896b1=57085

u32-v32+b0+20150b1=57279

u33-v33+b0+19507b1=56653

u34-v34+b0+19194b1=56699

u35-v35+b0+18682b1=57125

u36-v36+b0+19662b1=57201

u37-v37+b0+18777b1=53628

u38-v38+b0+19436b1=52632

u39-v39+b0+19675b1=52590

u40-v40+b0+18841b1=52280

u41-v41+b0+19245b1=52424

u42-v42+b0+19241b1=53704

u43-v43+b0+19465b1=54486

u44-v44+b0+18631b1=55442

END

Utilizando el software Lindo al modelo propuesto la función objetivo obtiene el valor óptimo de treinta y seis mil ochocientos tres con veintisiete centésimas, en sesenta y nueve iteraciones.

La ecuación resultante es:



Es decir que por cada incremento de las exportaciones en una unidad el pib aumentará en uno con cuarenta y tres unidades; el intercepto es veintisiete mil doscientos doce con cuarenta y seis centavos y tiene una pendiente positiva.

Calculando el R2 obtenemos: 

Esto significa que el 71% del cambio en el valor del pib se explica mediante un cambio en las exportaciones.

**8. REGRESIÓN MÍNIMA DE LA MÁXIMA DESVIACIÓN (LMAX)**

La regresión LMAX es lo opuesto del método de regresión LAD, LMAX minimiza el peor error de predicción que se presenta en las observaciones, Aquí, una observación extrema puede tener en este caso un efecto muy grande,

La forma general para un modelo de programación lineal para una regresión LMAX seria la siguiente:

Minimizar: 

Sujeta a:

  restricción de signo

para i=1,2,,,,,,,,n

para k=1,2,,,,,,,n

El modelo de optimización a utilizar es el siguiente:

Min z

subject to

b0-y0+11741b1+u1-v1=44153

b0-y0+13419b1+u2-v2=45310

b0-y0+12799b1+u3-v3=45446

b0-y0+13200b1+u4-v4=46622

b0-y0+13584b1+u5-v5=46488

b0-y0+13901b1+u6-v6=47688

b0-y0+14388b1+u7-v7=48217

b0-y0+14652b1+u8-v8=48245

b0-y0+15264b1+u9-v9=48989

b0-y0+15663b1+u10-v10=49604

b0-y0+15405b1+u11-v11=49500

b0-y0+15608b1+u12-v12=49343

b0-y0+15559b1+u13-v13=49972

b0-y0+16028b1+u14-v14=50075

b0-y0+16568b1+u15-v15=50762

b0-y0+16397b1+u16-v16=50638

b0-y0+16860b1+u17-v17=51293

b0-y0+16746b1+u18-v18=51612

b0-y0+19122b1+u19-v19=53409

b0-y0+17412b1+u20-v20=53836

b0-y0+18091b1+u21-v21=52945

b0-y0+18560b1+u22-v22=54444

b0-y0+18211b1+u23-v23=53782

b0-y0+18767b1+u24-v24=53903

b0-y0+19030b1+u25-v25=54206

b0-y0+18989b1+u26-v26=54327

b0-y0+19216b1+u27-v27=55011

b0-y0+19055b1+u28-v28=55791

b0-y0+18958b1+u29-v29=55788

b0-y0+19561b1+u30-v30=56597

b0-y0+20896b1+u31-v31=57085

b0-y0+20150b1+u32-v32=57279

b0-y0+19507b1+u33-v33=56653

b0-y0+19194b1+u34-v34=56699

b0-y0+18682b1+u35-v35=57125

b0-y0+19662b1+u36-v36=57201

b0-y0+18777b1+u37-v37=53628

b0-y0+19436b1+u38-v38=52632

b0-y0+19675b1+u39-v39=52590

b0-y0+18841b1+u40-v40=52280

b0-y0+19245b1+u41-v41=52424

b0-y0+19241b1+u42-v42=53704

b0-y0+19465b1+u43-v43=54486

b0-y0+18631b1+u44-v44=55442

z-u1-v1>=0

z-u2-v2>=0

z-u3-v3>=0

z-u4-v4>=0

z-u5-v5>=0

z-u6-v6>=0

z-u7-v7>=0

z-u8-v8>=0

z-u9-v9>=0

z-u10-v10>=0

z-u11-v11>=0

z-u12-v12>=0

z-u13-v13>=0

z-u14-v14>=0

z-u15-v15>=0

z-u16-v16>=0

z-u17-v17>=0

z-u18-v18>=0

z-u19-v19>=0

z-u20-v20>=0

z-u21-v21>=0

z-u22-v22>=0

z-u23-v23>=0

z-u24-v24>=0

z-u25-v25>=0

z-u26-v26>=0

z-u27-v27>=0

z-u28-v28>=0

z-u29-v29>=0

z-u30-v30>=0

z-u31-v31>=0

z-u32-v32>=0

z-u33-v33>=0

z-u34-v34>=0

z-u35-v35>=0

z-u36-v36>=0

z-u37-v37>=0

z-u38-v38>=0

z-u39-v39>=0

z-u40-v40>=0

z-u41-v41>=0

z-u42-v42>=0

z-u43-v43>=0

z-u44-v44>=0

end

Utilizando el Software Lindo, el valor óptimo es encontrado en ciento treinta y dos iteraciones, z= 2845,269. La ecuación encontrada es la siguiente:



De la ecuación encontrada podemos concluir que por cada incremento de las exportaciones en una unidad el pib aumentará en un entero con dieciséis unidades; tiene una pendiente positiva y el intercepto es treinta y dos mil quinientos treinta y nueve con ocho décimas.

### 9. MEDIDA DE LA BONDAD DE AJUSTE PARA LMAX

Se define r que es igual al rango de las  es decir max{} - min{},  se calcula de la siguiente forma para el LMAX:



 r= Rango()

 r= 57279 – 44153= 13126



Podemos concluir que el 78% del cambio en el valor del pib se explica mediante un cambio en las exportaciones

#### 10. MÉTODO DUAL APLICADO AL LAD

El modelo que ser utiliza para maximizar aplicando el dual es:

Maximizar:

Sujeta a:



Se define el siguiente artificio:

 o 

El modelo a utilizar es el siguiente:

Maximizar 

Sujeta a:

 

#### Modelo de optimización para utilizar en el software lindo

Max

44153L1+45310L2+45446L3+46622L4+46488L5+47688L6+48217L7+48245L8+48989L9+49604L10+49500L11+49343L12+49972L13+50075L14+50762L15+50638L16+51293L17+51612L18+53409L19+53836L20+52945L21+54444L22+53782L23+53903L24+54206L25+54327L26+55011L27+55791L28+55788L29+56597L30+57085L31+57279L32+56653L33+56699L34+57125L35+57201L36+53628L37+52632L38+52590L39+52280L40+52424L41+53704L42+54486L43+55442L44

SUBJECT TO

L1+L2+L3+L4+L5+L6+L7+L8+L9+L10+L11+L12+L13+L14+L15+L16+L17+L18+L19+L20+L21+L22+L23+L24+L25+L26+L27+L28+L29+L30+L31+L32+L33+L34+L35+L36+L36+L37+L38+L39+L41+L41+L42+L43+L44<=44

11741L1+13419L2+12799L3+13200L4+13584L5+13901L6+14388L7+14652L8+15264L9+15663L10+15405L11+15608L12+15559L13+16028L14+16568L15+16397L16+16860L17+16746L18+19122L19+17412L20+18091L21+18560L22+18211L23+18767L24+19030L25+18989L26+19216L27+19055L28+18958L29+19561L30+20896L31+20150L32+19507L33+19194L34+18682L35+19662L36+18777L37+19436L38+19,675L39+18841L40+19245L41+19241L42+19465L43+18631L44<=764156

L1<=2

L2<=2

L3<=2

L4<=2

L5<=2

L6<=2

L7<=2

L8<=2

L9<=2

L10<=2

L11<=2

L12<=2

L13<=2

L14<=2

L15<=2

L16<=2

L17<=2

L18<=2

L19<=2

L20<=2

L21<=2

L22<=2

L23<=2

L24<=2

L25<=2

L26<=2

L27<=2

L28<=2

L29<=2

L30<=2

L31<=2

L32<=2

L33<=2

L34<=2

L35<=2

L36<=2

L37<=2

L38<=2

L39<=2

L40<=2

L41<=2

L42<=2

L43<=2

L44<=2

Resultados Obtenidos:

Después de cincuenta y tres iteraciones se encuentra el valor óptimo, la función objetivo toma el valor de f(x) = 2431656.



Del modelo resultante se puede concluir que por cada incremento de las exportaciones en una unidad el pib aumentará en uno con cuarenta y tres unidades; tiene una pendiente positiva y el intercepto es veintisiete mil doscientos doce con cuarenta y seis centésimas.

#### 11. MÉTODO DUAL PARA EL LMAX

El modelo dual que se utiliza para encontrar el LMAX se describe a continuación:

Maximizar:

Sujeta a : 

 

 

 

  tiene restricción de signo

Es conveniente utilizar el siguiente cambio de variable, a través de las nuevas variables:





Sustituyendo en el modelo dual planteado obtenemos lo siguiente:

Maximizar: 

Sujeta a: 







El modelo de optimización es el siguiente:

Max

44153g1-44153h1+45310g2-5310h2+45446g3-45446h3+46622g4-46622h4+46488g5-46488h5+47688g6-47688h6+48217g7+8217h7+48245g8-48245h8+48989g9-48989h9+49604g10-9604h10+49500g11-9500h11+49343g12-49343h12+49972g13-49972h13+

50075g14-50075h14+50762g15-50762h15+50638g16-50638h16+51293g17-51293h17+51612g18-51612h18+53409g19-53409h19+53836g20-53836h20+52945g21-52945h21+54444g22-54444h22+53782g23-53782h23+53903g24-53903h24+54206g25-54206h25+54327g26-54327h26+55011g27-55011h27+55791g28-55791h28+55788g29-55788h29+56597g30-56597h30+57085g31-57085h31+57279g32-57279h32+56653g33-56653h33+56699g34-56699h34+57125g35-57125h35+57201g36-57201h36+53628g37-53628h37+52632g38-52632h38+52590g39-52590h39+52280g40-52280h40+52424g41-52424h41+53704g42-53704h42+54486g43-54486h43+55442g44-55442h44

subject to

g1-h1+g2-h2+g3-h3+g4-h4+g5-h5+g6-h6+

g7-h7+g8-h8+g9-h9+g10-10+g11-h11+

g12-h12+g13-h13+g14-h14+g15-h15+

g16-h16+g17-h17+g18-h18+g19-h19+

g20-h20+g21-h21+g22-h22+g23-h23+

g24-h24+g25-h25+g26-h26+g27-h27+

g28-h28+g29-h29+g30-h30+g31-h31+

g32-h32+g33-h33+g34-h34+g35-h35+

g36-h36+g37-h37+g38-h38+g39-h39+

g40-h40+g41-h41+g42-h42+g43-h43+

g44-h44=0

11741g1-11741h1+13419g2-13419h2+12799g3+2799h3+13200g4+

13200h4+13584g5-13584h5+13901g6-13901h6+14388g7-14388h7+14652g8-4652h8+15264g9-15264h9+15663g10-15663h10+15405g11-15405h11+15608g12-15608h12+15559g13-15559h13+16028g14- 16028h14+16568g15-16568h15+16397g16-16397h16+16860g17-16860h17+16746g18-16746h18+19122g19-19122h19+17412g20-17412h20+18091g21-18091h21+18560g22-18560h22+18211g23-18211h23+18767g24-18767h24+19030g25-19030h25+18989g26-

18989h26+19216g27-19216h27+19055g28-19055h28+18958g29-18958h29+19561g30-19561h30+20896g31-20896h31+20150g32-20150h32+19507g33-19507h33+19194g34-19194h34+18682g35-18682h35+19662g36-19662h36+18777g37-18777h37+19436g38-19436h38+19675g39-19675h39+18841g40-18841h40+19245g41-19245h41+19241g42-19241h42+19465g43-19465h43+18631g44-18631h44=0

g1+h1+g2+h2+g3+h3+g4+h4+g5+h5+g6+h6+g7+h7+g8+h8+g9+h9+g10+h10+g11+h11+g12+h12+g13+h13+g14+h14+g15+h15+g16+h16+g17+h17+g18+h18+g19+h19+g20+h20+g21+h21+g22+h22+g23+h23+g24+h24+g25+h25+g26+h26+g27+h27+g28+h28+g29+h29+g30+h30+g31+h31+g32+h32+g33+h33+g34+h34+g35+h35+g36+h36+g37+h37+g38+h38+g39+h39+g40+h40+g41+h41+g42+h42+g43+h43+g44+h44<=1

En cinco iteraciones es encontrado el valor óptimo.

La ecuación encontrada es:



De la ecuación encontrada podemos concluir que por cada incremento de las exportaciones en una unidad el pib aumentará en uno con dieciséis unidades; tiene una pendiente positiva y el intercepto es treinta y dos mil quinientos treinta y nueve con ocho décimas.

**12. CONCLUSIONES**

* A lo largo de toda está investigación, se ha podido determinar que existe una gran interrelación entre la estadística (fundamentalmente de tipo inferencial) y la teoría de optimización (lineal y no lineal)
* En los ejercicios prácticos, se ha empleado elSOFTWARE de Optimización LINDO el mismo que ha demostrado su eficiencia en este tipo de análisis, por ser interactivo, de fácil utilización en los datos al ingresar los modelos, obteniendo los resultados en forma rápida, además tiene una gran precisión numérica,
* Se puede usar eficientemente la teoría de la dualidad de la programación lineal en la solución del modelo de Regresión lineal; así al resolver el modelo LAD la solución es encontrada en sesenta y nueve iteraciones, el modelo LMAX en ciento treinta y dos iteraciones se obtiene el valor óptimo; pero aplicando el método dual al LAD la solución es encontrada en cincuenta y tres iteraciones, mientras que LMAX, se encuentra la solución en cinco iteraciones,
* Se ha podido observar que existen métodos alternativos al de mínimos cuadrados que permiten resolver el problema de la regresión lineal mediante técnicas de optimización,
* El avance que ha tenido la informática en los últimos años ha ocasionado que actualmente dispongamos de programas que resuelven muchos problemas matemáticos, en este trabajo se uso en particular el programa LINDO, que es especializado en la resolución de problemas de programación lineal y no lineal, y lo hemos utilizado en la resolución de problemas de Regresión lineal.

**13. REFERENCIAS**

1. R López, “Uso de Técnicas de Programación Lineal y Entera en Estimaciones Estadísticas”(Tesis, Instituto de Ciencias Matemáticas, Escuela Superior Politecnica del Litoral, 2004)
2. **Mendehall William**, Estadística Matemática con Aplicaciones (Segunda Edición, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994), pp. 363-397
3. **Linus Schrage**, Optimization Modeling with Lindo (Quinta Edición, International Thomson Editores, California, USA 1997), pp. 352-361.
4. **Allen L. Webster**, Estadística Aplicada a los Negocios y la Economía (Tercera Edición, Mc Graw Hill Interamericana S.A., Colombia, 2003), pp.324-349