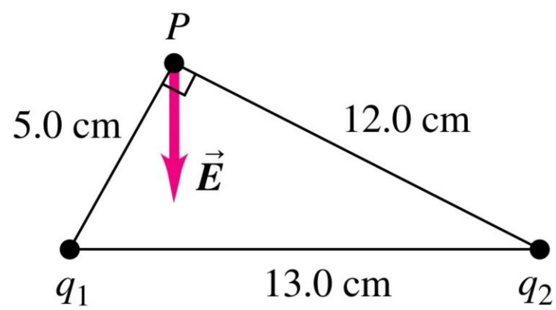
ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS
I TÉRMINO 2012-2013
FÍSICA C
Primera evaluación

SOLUCIÓN

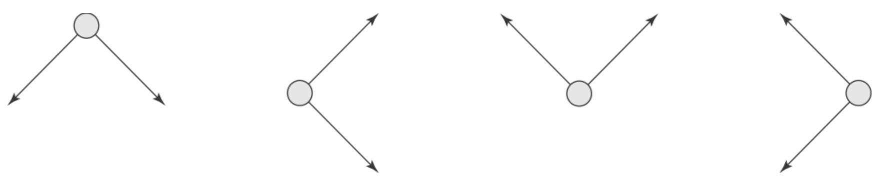
Problema 1 (8 puntos)

Se colocan dos cargas como se muestra en la figura. La magnitud de q_1 es de 3.00 μC, pero se desconocen su signo y el valor de la carga q_2. La dirección del campo eléctrico neto $\vec{E}$ en el punto P es enteramente en la dirección y negativa.



a) Deduzca los signos de q_1 y q_2, explicando claramente su procedimiento. (3 puntos)

Los cuatro diagramas posibles son:



El primer diagrama es el único en el que el campo eléctrico debe apuntar en la dirección *y* negativa.

De donde, $q_1 = -3.00\ \mu C$, y $q_2 < 0$.

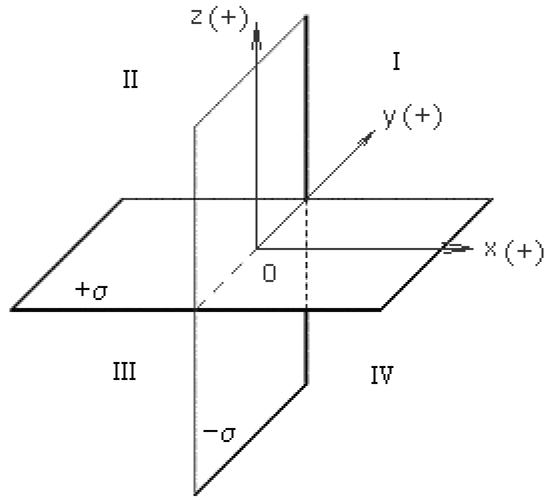
b) Halle la magnitud de $\vec{E}$ (5 puntos)

$$E_x = 0 = \frac{kq_1}{(0.050\ m)^2}\frac{5}{13} - \frac{kq_2}{(0.120\ m)^2}\frac{12}{13} \Rightarrow \frac{kq_2}{(0.120\ m)^2} = \frac{kq_1}{(0.050\ m)^2}\frac{5}{12}$$

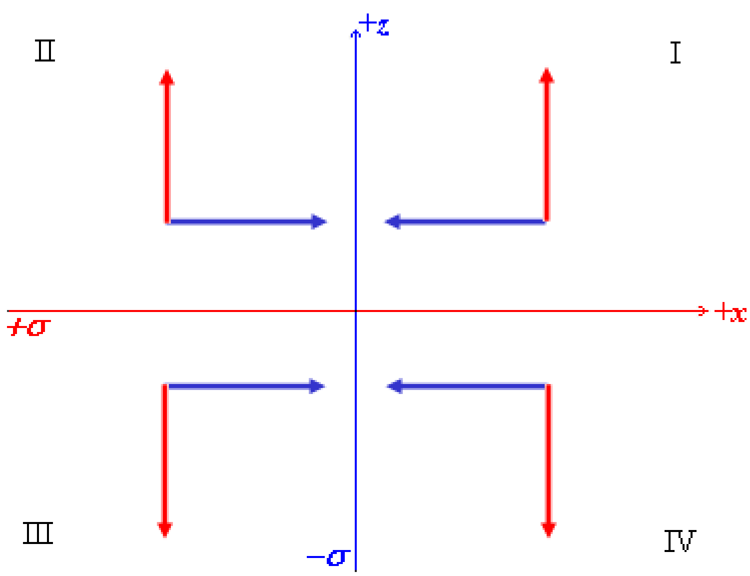
$$E = E_y = \frac{kq_1}{(0.050\ m)^2}\frac{12}{13} + \frac{kq_2}{(0.120\ m)^2}\frac{5}{13} = \frac{kq_1}{(0.050\ m)^2}\left(\frac{12}{13} + \left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{5}{13}\right)\right)$$

$$\Rightarrow E = E_y = 1.17 \times 10^7\ N/C$$

Problema 2 (6 puntos)
Una lámina no conductora infinita con carga positiva por unidad de área $+\sigma$ yace en el plano *xy*. Una segunda lámina no conductora infinita con carga negativa por unidad de área $-\sigma$ yace en el plano *yz*. Halle el campo eléctrico en las cuatro regiones mostradas en la figura. Exprese su respuesta en términos de los vectores unitarios



Las láminas no conductoras infinitas generan campos eléctricos uniformes, de magnitud $\sigma/2\varepsilon_0$, perpendiculares a la misma, saliendo de ellas con $+\sigma$ y hacia ellas con $-\sigma$.



$$\mathbf{E}_{\mathbf{I}} = \sigma/2\varepsilon_0(-\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

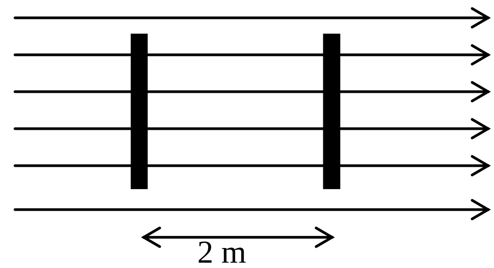
$$\mathbf{E}_{\mathbf{II}} = \sigma/2\varepsilon_0(\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{III}} = \sigma/2\varepsilon_0(\mathbf{i} - \mathbf{k})$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{IV}} = \sigma/2\varepsilon_0(-\mathbf{i} - \mathbf{k})$$

Problema 3 (6 puntos)

Una barra aislante que tiene una densidad de carga lineal $\lambda = 30 \times 10^{-6}$ C/m y densidad de masa lineal $\mu = 0.2$ kg/m se suelta desde el reposo en un campo eléctrico uniforme E = 200 V/m y cuya dirección es perpendicular a la barra. Determine la rapidez de la barra después de que ésta se ha desplazado 2 m.



$$\Delta V = Ed$$

$$W = q\Delta V = \lambda l(\mathrm{Ed})$$

$$\mathrm{W} = \mathrm{K_f} - \mathrm{K_i} = \frac{1}{2}\mathrm{m}v^2$$

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}(\mu\mathrm{l})v^2$$

$$\lambda l(\mathrm{Ed}) = \frac{1}{2}(\mu\mathrm{l})v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2\lambda\mathrm{Ed}}{\mu}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(30 \times 10^{-6})(200)(2)}{0.2}}$$

$$v = 0.35\, m/s$$

Problema 4 (8 puntos)
Una esfera aislante sólida de radio R tiene una densidad de carga no uniforme que varía con r de acuerdo con la expresión:

$\rho(r) = \alpha$ con $r \leq R/2$

$\rho(r) = 2\alpha(1 - r/R)$ con $R/2 \leq r \leq R$

donde α es una constante positiva, medida en C/m^3, y r se mide desde el centro de la esfera.

a) Determine la carga total de la esfera (6 puntos)

$$Q = \int_0^R \rho dV = \int_0^{R/2} \alpha dV + \int_{R/2}^{R} 2\alpha(1 - r/R)4\pi r^2 \, dr$$

$$Q = \alpha \frac{4\pi(R/2)^3}{3} + 8\pi\alpha \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right)_{R/2}^{R}$$

$$Q = \frac{5\alpha\pi R^3}{8}$$

b) ¿Cuál es el flujo neto a través de la esfera? (2 puntos)

De acuerdo a la ley de Gauss:

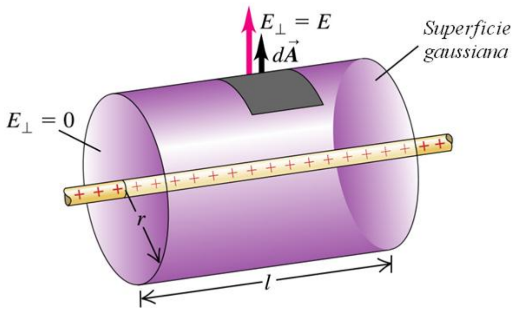
$$\phi_{neto} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_{neto} = \frac{5\alpha\pi R^3}{8\varepsilon_0}$$

Problema 5 (10 puntos)
Un alambre delgado muy largo y recto lleva una densidad de carga lineal uniforme λ.

a) Encuentre el campo eléctrico $\vec{E}$ a una distancia r del alambre. (5 puntos)

Al ser un alambre muy largo se puede aplicar la ley de Gauss. El campo eléctrico es radial, por lo que al considerar una superficie gaussiana cilíndrica, solo hay flujo eléctrico en las paredes laterales



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$E \int dA_{lateral} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$E 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

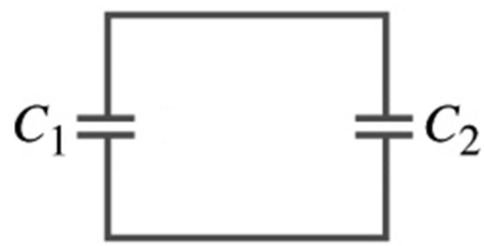
b) Obtenga una expresión para la diferencia de potencial entre $r = r_1$ y $r = r_2$. (5 puntos)

$$\Delta V = -\int_{r_2}^{r_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr$$

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln(r_2/r_1)$$

Problema 6 (8 puntos)

Dos capacitores idénticos de placas paralelas de 10 μF reciben cargas iguales de 100 μC cada uno y luego se separan de la fuente. Mediante un cable se conectan sus placas positivas y mediante otro sus placas negativas. Un dieléctrico de constante κ = 3.2 se inserta entre las placas de uno de los capacitores de tal modo que llena por completo la región entre las placas.



a) ¿Cuál es la carga final sobre cada capacitor? (5 puntos)

Al introducir un dieléctrico, se producirá una redistribución de la carga hasta lograr igualar los potenciales en ambos capacitores.

Sea q_1: la carga final en el primer capacitor y q_2: la carga final en el segundo capacitor

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

$$\frac{q_1}{\kappa C_2} = \frac{q_2}{C_2}$$

$$q_1 = 3.2q_2$$

pero

$$q_1 + q_2 = 200\ \mu C$$

resolviendo las dos últimas ecuaciones tenemos:

$$q_1 = 152.4\ \mu C \qquad\qquad q_2 = 47.6\ \mu C$$

b) ¿Cuál es la energía final almacenada del sistema? (3 puntos)

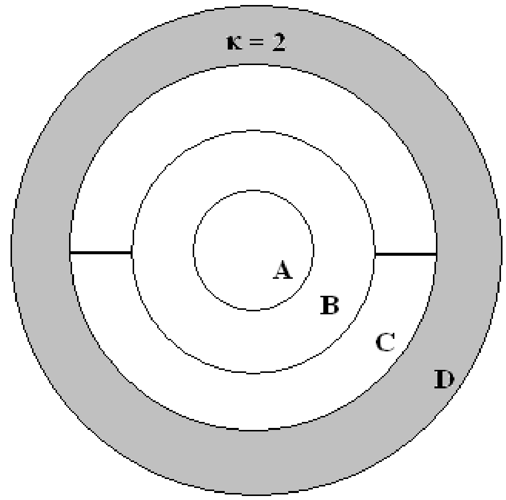
$$U_1 = \frac{q_1^2}{2C_1} = \frac{(152.4)^2}{2(3.2)(10)} = 362.9\ \mu J$$

$$U_2 = \frac{q_2^2}{2C_2} = \frac{(47.6)^2}{2(10)} = 113.3\ \mu J$$

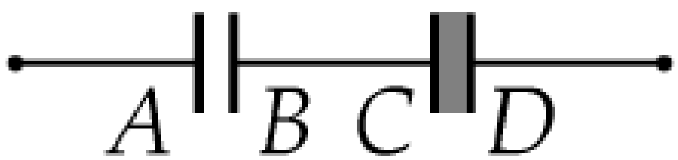
$$U_{total} = U_1 + U_2 = 476.2\ \mu J$$

Problema 7 (8 puntos)

La figura muestra cuatro esferas conductoras concéntricas A, B, C y D, que tienen radios R, 2R, 3R, y 4R, respectivamente. Las esferas B y C están conectadas mediante un alambre conductor, y entre las esferas C y D se ha colocado un dieléctrico de constante $\kappa = 2$. Determine la capacitancia equivalente del sistema.



Carga positiva sobre A inducirá una carga igual negativa sobre B y D, y carga igual positiva sobre C. Las esferas de anidación forman dos capacitores en serie.



$$C_{AB} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R(2R)}{2R - R} = 8\pi\varepsilon_0 R$$

$$C_{CD} = \frac{4\pi\varepsilon_0 \kappa(3R)(4R)}{4R - 3R} = 96\pi\varepsilon_0 R$$

$$C_{eq} = \frac{C_{AB}C_{CD}}{C_{AB} + C_{CD}} = \frac{8\pi\varepsilon_0 R \times 96\pi\varepsilon_0 R}{8\pi\varepsilon_0 R + 96\pi\varepsilon_0 R}$$

$$C_{eq} = \frac{96}{13}\pi\varepsilon_0 R$$

Problema 8 (6 puntos)
Una barra de material semiconductor de longitud L y área de sección transversal A yace a lo largo del eje de las x entre $x = 0$ y $x = L$. El material obedece la ley de Ohm, y su resistividad varía a lo largo de la barra de acuerdo con $\rho(x) = \rho_0 e^{-x/L}$, donde es una constante positiva. Halle la resistencia total de la barra.

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

$$dR = \frac{\rho dx}{A} = \frac{\rho_0 e^{-x/L} dx}{A}$$

$$R = \frac{\rho_0}{A} \int_0^L e^{-x/L} dx$$

$$R = \frac{\rho_0}{A} \left(-L e^{-x/L}\right)_0^L$$

$$R = \frac{\rho_0 L}{A} (1 - e^{-1})$$