ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE ECONOMÍA Y NEGOCIOS
METODOS CUANTITATIVOS IV
PRIMERA EVALUACIÓN **26 de Noviembre de 2012**

"Como estudiante de la FEN me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

____
Firma de Compromiso del Estudiante

NOMBRE..........SOLUCION Y RUBRICA...........PARALELO:......... ....

FIRMA............................... MATRICULA..............PROFESOR:...........

TEMA 1 (5 puntos) En las siguientes Ecuaciones Diferenciales determine el orden y si es lineal o no:

Ecuación	orden	linealidad
$\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$	2	NO
$t^5y'''-(1-t^3)y''+6y'=2t$	3	SI
$x''-(2x-t)x'+2x=3t$	2	NO
$\frac{dy}{dt}=(1-t)y+2y+3$	1	SI
$\sin\theta y''-\cos\theta y'=2$	2	SI

RUBRICA:

PARA CADA ECUACIÓN
- Si indica correctamente todo (el orden y la linealidad)............... 1 punto
- Si falla en una característica. ....1/2 punto
- Si falla en todas... 0 puntos

TEMA 2 (35 Puntos) Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales indicando el método por la cual fue resuelta:

a. (7 PUNTOS) $(1+x)\frac{dy}{dx}=xy+x+x^2$

SOLUCION
PRIMER METODO

$$(1+x)\frac{dy}{dx}=xy+x+x^2 \equiv (1+x)\frac{dy}{dx}-xy=x+x^2$$
$$\equiv \frac{(1+x)}{(1+x)}\frac{dy}{dx}-\frac{x}{1+x}y=\frac{x(1+x)}{1+x}$$
$$\equiv \frac{dy}{dx}-\frac{x}{1+x}y=x \text{ (LINEAL)}$$

Primero: $e^{\int -\frac{x}{1+x}dx} = e^{-\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx} = e^{-(x-\ln(1+x))} = e^{-x+\ln(1+x)} = e^{-x}e^{\ln(1+x)} = (1+x)e^{-x}$

Segundo:

$$y(x) = \frac{1}{(1+x)e^{-x}}\left[\int x(1+x)e^{-x}dx + C\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int x(1+x)e^{-x}dx &= \int \underbrace{(x+x^2)}_{u}\underbrace{e^{-x}dx}_{dv} = (x+x^2)(-e^{-x}) - \int -e^{-x}(1+2x)dx \\ &= (x+x^2)(-e^{-x}) + \int \underbrace{(1+2x)}_{u}\underbrace{e^{-x}dx}_{dv} \\ &= (x+x^2)(-e^{-x}) + \left[(1+2x)(-e^{-x}) - \int -e^{-x}(2)dx\right] \\ &= (x+x^2)(-e^{-x}) - (1+2x)e^{-x} - 2e^{-x}\end{aligned}}$$

$$y(x) = \frac{1}{(1+x)e^{-x}}\left[(x+x^2)(-e^{-x}) - (1+2x)e^{-x} - 2e^{-x} + C\right]$$

$$\boxed{y(x) = -x - \frac{1+2x}{1+x} - \frac{2}{1+x} + \frac{Ce^{x}}{(1+x)}} \quad \text{Solución General}$$

SEGUNDO METODO: por factor integrante

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = xy + x + x^2 \quad \equiv \underbrace{(xy+x+x^2)}_{M}dx - \underbrace{(1+x)}_{N}dy = 0$$

Encontremos el factor integrante: $R(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx} = e^{\int \frac{1}{-(1+x)}[x+1]dx} = e^{-x}$

Entonces la ecuación exacta seria: $(xye^{-x} + xe^{-x} + x^2e^{-x})dx - (e^{-x} + xe^{-x})dy = 0$

Hallemos la función potencial:

$$f(x,y) = \int \underbrace{(xy+x+x^2)}_{u}\underbrace{e^{-x}dx}_{dv} = (xy+x+x^2)(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})(y+1+2x)dx$$

$$= -(xy+x+x^2)e^{-x} + \int \underbrace{(y+1+2x)}_{u}\underbrace{e^{-x}dx}_{dv}$$

$$= -(xy+x+x^2)e^{-x} + \left[(y+1+2x)(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})2dx\right]$$

$$f(x,y) = -(xy+x+x^2)e^{-x} - (y+1+2x)e^{-x} - 2e^{-x} + g(y) + C_1$$

$$f(x,y) = \int -(e^{-x} + xe^{-x})dy = -(e^{-x} + xe^{-x})y + h(y) + C_2$$

Por lo tanto: $\boxed{-(xy+x+x^2)e^{-x} - (y+1+2x)e^{-x} - 2e^{-x} = C}$ Solución General

RUBRICA:

Si identifica y plantea la ecuación como lineal o Factor integrante……………………………………………………………..……2 puntos.
Si encuentra correctamente la solución general……………………..5 puntos

b) (7 PUNTOS) $y\left(x+y+1\right)dx+\left(x+2y\right)dy=0$

SOLUCION

$$y\left(x+y+1\right)dx+\left(x+2y\right)dy=0\equiv\underbrace{\left(xy+y^{2}+y\right)}_{M}dx+\underbrace{\left(x+2y\right)}_{N}dy=0$$

Prueba de exactitud:

$$\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(xy+y^{2}+y\right)}_{M}=x+2y+1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(x+2y\right)}_{N}=1 \qquad \text{NO ES EXACTA}$$

Veamos si existe EL FACTOR INTEGRANTE: $R\left(x\right)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$

$$R\left(x\right)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}=e^{\int\frac{1}{x+2y}\left(x+2y+1-1\right)dx}=e^{x} \text{ (EXISTE)}$$

Por tanto la ecuación diferencial será exacta con este factor

$$\left(xye^{x}+y^{2}e^{x}+ye^{x}\right)dx+\left(xe^{x}+2ye^{x}\right)dy=0$$

Veamos si efectivamente es exacta:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xye^{x}+y^{2}e^{x}+ye^{x}\right)=xe^{x}+2ye^{x}+e^{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{x}+2ye^{x}\right)=e^{x}+xe^{x}+2ye^{x}$$

(Son Iguales, por tanto es exacta)

Hallemos la función potencial.

$$f\left(x,y\right)=\int\left(xye^{x}+y^{2}e^{x}+ye^{x}\right)dx=y\underbrace{\int\underset{u}{x}\,\underset{dv}{e^{x}dx}}_{\text{por partes}}+y^{2}e^{x}+ye^{x}+h\left(y\right)+C_{1}=y\left(xe^{x}-e^{x}\right)+y^{2}e^{x}+ye^{x}+h\left(y\right)+C_{1}$$

$$f\left(x,y\right)=xye^{x}+y^{2}e^{x}+h\left(y\right)+C_{1}$$

$$f\left(x,y\right)=\int\left(xe^{x}+2ye^{x}\right)dy=xye^{x}+y^{2}e^{x}+g\left(x\right)+C_{2}$$

Entonces la solución general seria:

$$\boxed{xye^{x}+y^{2}e^{x}=C}$$

RUBRICA:

Si identifica y plantea la ecuación como factor integrante o alguna otra..2 puntos
Si encuentra correctamente la solución general..........................5 puntos

c) (7 pts) $ydx + x(\ln x - \ln y - 1)dy = 0$

SOLUCIÓN:

$$ydx + x(\ln x - \ln y - 1)dy = 0 \quad \equiv \quad y + x\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\equiv x\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right)\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\equiv \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right)} \qquad \text{(HOMOGENEA)}$$

$$u + xu' = -\frac{u}{\ln\left(u^{-1}\right) - 1} \quad \equiv \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u}{\ln(u) + 1} - u$$

$$\equiv x\frac{du}{dx} = \frac{u}{\ln(u) + 1} - u$$

$$\equiv x\frac{du}{dx} = \frac{u - u\ln u - u}{\ln(u) + 1}$$

$$\equiv x\frac{du}{dx} = \frac{-u\ln u}{\ln(u) + 1}$$

$$\equiv \frac{\ln(u) + 1}{u\ln u}du = -\frac{dx}{x}$$

$$\equiv \int\frac{\ln(u) + 1}{u\ln u}du = \int -\frac{dx}{x}$$

$$\equiv \ln(u\ln u) = -\ln x + C$$

$$\equiv \boxed{\ln\left(\frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) = -\ln x + C} \text{ Solución General}$$

SEGUNDO METODO: por factor integrante

$$\underset{M}{y}\,dx + \underbrace{x(\ln x - \ln y - 1)}_{N}dy = 0$$

$$R(x) = e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx} = e^{\int\frac{1}{x(\ln x - \ln y - 1)}[-1 - \ln x - 1 + \ln y + 1]dx} = e^{\int -\frac{1}{x(\ln x - \ln y - 1)}[\ln x - \ln y - 1]dx} = e^{-\ln x} = x^{-1}$$

Entonces la ecuación exacta seria: $x^{-1}ydx + (\ln x - \ln y - 1)dy = 0$

Hallemos la función potencial:

$$f(x,y) = \int x^{-1}ydx = y\ln x + g(y) + C_1$$

$$f(x,y) = \int(\ln x - \ln y - 1)dy = y\ln x - y\ln y + y - y + h(x) + C_2$$

Por lo tanto: $\boxed{y\ln x - y\ln y = C}$ Solución General

RUBRICA:

Si identifica y plantea la ecuación como homogénea o factor integrante...2 puntos Si encuentra correctamente la solución general..........................5 puntos

d) (7 PUNTOS) $x\dfrac{dy}{dx}=(1+x)y+xy^2 \quad ; \quad y(1)=1$

SOLUCIÓN:

$$x\frac{dy}{dx}=(1+x)y+xy^2 \quad \equiv xy'-(1+x)y=xy^2$$

$$\equiv y'-\frac{(1+x)}{x}y=y^2 \ \text{(BERNOULLI)}$$

$$y'-\frac{(1+x)}{x}y=y^2 \quad \equiv y^{-2}y'-\frac{(1+x)}{x}\underbrace{y^{-1}}_{u}=1$$

$$\boxed{u=y^{-1}}\Rightarrow u'=-y^{-2}y'$$

$$-u'-\frac{1+x}{x}u=1\Rightarrow u'+\frac{1+x}{x}u=-1$$

$$e^{\int\frac{1+x}{x}dx}=e^{x+\ln x}=e^x e^{\ln x}=xe^x$$

$$u(x)=\frac{1}{xe^x}\left[\int xe^x(-1)dx+C\right]=\frac{1}{xe^x}\left[-xe^x+e^x+C\right]$$

Entonces

$$u(x)=\frac{-xe^x+e^x+C}{xe^x}$$

$$y^{-1}=\frac{-xe^x+e^x+C}{xe^x}\Rightarrow \boxed{y(x)=\frac{xe^x}{-xe^x+e^x+C}} \text{ (Solución General)}$$

Hallemos la solución particular:

$$1=\frac{1e^1}{-1e^1+e^1+C}\Rightarrow C=e$$

$$\boxed{y(x)=\frac{xe^x}{-xe^x+e^x+e}} \text{ (Solución Particular)}$$

RUBRICA:

Si identifica y plantea la ecuación como Bernoulli o alguna otra….1 punto
Si encuentra correctamente la solución general……………………..5 puntos
Si encuentra correctamente la solución particular…………………...1 punto

e) (7 pts) $y''+y=4x^2-1+\cos x$

SOLUCION

$$y_C''+y_C=0\Rightarrow r^2+1=0\Rightarrow r^2=-1\Rightarrow r=\pm i$$

$$\Rightarrow \boxed{y_C(x)=k_1\sin x+k_2\cos x}$$

$$y_p''+y_p=4x^2-1+\cos x$$

$$g(x)=4x^2-1+\cos x\Rightarrow y_p(x)=Ax^2+Bx+C+D\sin x+\underbrace{E\cos x}_{\text{repetida}}$$

$$\Rightarrow y_p(x)=Ax^2+Bx+C+Dx\sin x+Ex\cos x$$

$$y_p'(x)=2Ax+B+D\sin x+Dx\cos x+E\cos x-Ex\sin x$$

$$y_p''(x)=2A+D\cos x+D\cos x-Dx\sin x-E\sin x-E\sin x-Ex\cos x=2A+2D\cos x-Dx\sin x-2E\sin x-Ex\cos x$$

Reemplazamos:

$$2A+2D\cos x-\cancel{Dx\sin x}-2E\sin x-\cancel{Ex\cos x}+Ax^2+Bx+C+\cancel{Dx\sin x}+\cancel{Ex\cos x}=4x^2-1+\cos x$$

$$\begin{cases}\boxed{A=4}\\ \boxed{B=0}\\ 2A+C=-1\to C=-1-2(4)\to\boxed{C=-9}\\ -2E=0\to\boxed{E=0}\\ 2D=1\to\boxed{D=1/2}\end{cases}$$

$$\boxed{y_p(x)=4x^2-9+\frac{1}{2}x\sin x}$$

$$\therefore\ \boxed{y(x)=k_1\sin x+k_2\cos x+4x^2-9+\frac{1}{2}x\sin x}$$

RUBRICA:

Si encuentra la solución complementaria……………………………......3 puntos	
Si encuentra la solución particular………………………………….…..4 puntos	

<u>TEMA 3</u> (10 Puntos) Una persona tiene $5000 y los invierte de tal forma que la razón a la que aumenta su inversión es proporcional a su capital actual. Si luego de 2 años su inversión ha aumentado en $1000, determine:

a) El valor de la inversión en cualquier tiempo.
b) El tiempo en que su duplica la inversión.
c) El grafico de la inversión
d) Que ocurre con la inversión a largo plazo.

<u>Solución:</u>

a)

$Q(t) \equiv \text{Inversión}$

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \Rightarrow \boxed{Q(t) = Ce^{kt}} \text{ Solución General}$$

$Q(0) = 5000 \Rightarrow \boxed{C = 5000}$

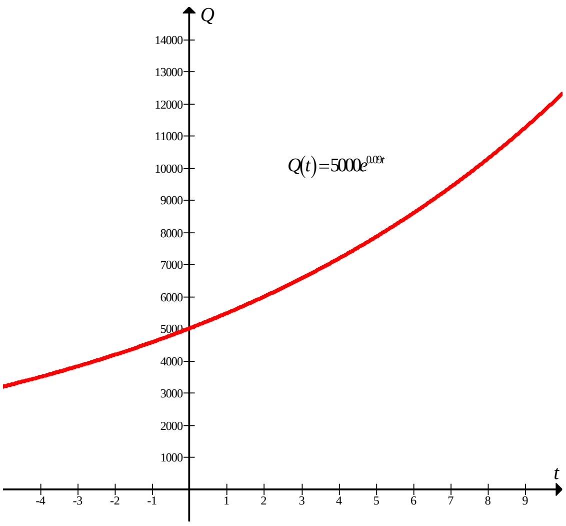
$$Q(2) = 6000 \Rightarrow 6000 = 5000e^{k(2)} \Rightarrow e^{2k} = \frac{6}{5} \Rightarrow k = \frac{\ln\left(6/5\right)}{2} \Rightarrow \boxed{k = 0.09}$$

$$\boxed{Q(t) = 5000e^{0.09t}} \text{Solución particular}$$

b)

$$10000 = 5000e^{0.09t} \Rightarrow e^{0.09t} = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0.09} \approx 7.7 \ \approx 8 \text{ años}$$

c)



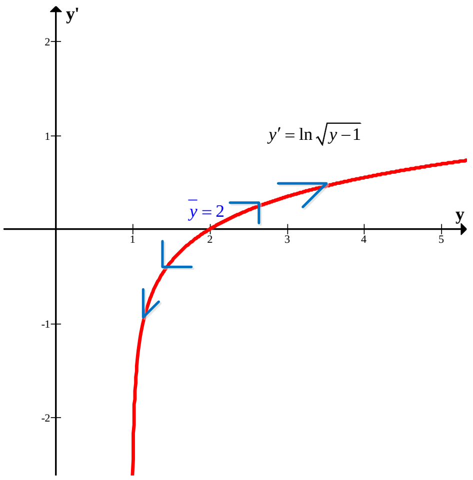
d) La inversión a largo plazo crece sin límite, no es estable dinámicamente.

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty}\left(5000e^{0.00t}\right) = \infty$$

RUBRICA:

Si encuentra Q(t)……………………………..…………………………….......	3 puntos
Si encuentra el tiempo…………………………………………….…………	3 puntos
Si realizar la grafica…………………………………………………………	2 puntos
Si determina la estabilidad………………………………………………	2 puntos

<u>TEMA 4</u> (10 Puntos) Sea la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \ln\sqrt{y-1}$. Determine su punto de equilibrio y analice cualitativamente la estabilidad dinámica de su solución.



Punto de Equilibrio:

$$
\begin{aligned}
y' = 0 &\Rightarrow \ln\sqrt{y-1} = 0 \\
&\Rightarrow e^{\ln\sqrt{y-1}} = e^{0} \\
&\Rightarrow \sqrt{y-1} = 1 \\
&\Rightarrow y - 1 = 1 \\
&\Rightarrow \boxed{\bar{y} = 2}
\end{aligned}
$$

Por tanto la solución es dinámicamente inestable.

RUBRICA:

Si encuentra el punto de equilibrio………….……………..………...2 puntos.
Si grafica la curva de fase……..…………………………..…..6 puntos.
Si indica que es dinámicamente inestable.………………..……..2 puntos.

<u>TEMA 5</u> (10 puntos) Sea $y''' + y'' - 5y' + 3y = 2e^{-3x} + 2 + x$.

a. Encuentre su solución general.
b. Analice cualitativamente la estabilidad dinámica de su solución complementaria.

<u>SOLUCION:</u>

a) $$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

Primero la complementaria:

$$y_C''' + y_C'' - 5y_C' + 3y_C = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 - 5r + 3 = 0$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & -3 & \\ \hline 1 & 2 & -3 & // & \end{array}$$

$$(r-1)(r^2 + 2r - 3) = 0 \Rightarrow (r-1)(r+3)(r-1) = 0$$

Entonces: $\boxed{y_c(x) = k_1 e^x + k_2 x e^x + k_3 e^{-3x}}$

Segundo la particular:

$$y_P''' + y_P'' - 5y_P' + 3y_P = 2e^{-3x} + 2 + x$$

$$y_P(x) = Axe^{-3x} + Bx + C \Rightarrow \begin{cases} y_P' = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} + B \\ y_P'' = -3Ae^{-3x} - 3Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} = -6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} \\ y_P''' = 18Ae^{-3x} + 9Ae^{-3x} - 27Axe^{-3x} = 27Ae^{-3x} - 27Axe^{-3x} \end{cases}$$

Reemplazamos:

$$\left(27xe^{-3x} - 27Axe^{-3x}\right) + \left(-6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x}\right) - 5\left(Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} + B\right) + 3\left(Axe^{-3x} + Bx + C\right) = 2e^{-3x} + 2 + x$$

$$27Ae^{-3x} - \cancel{27Axe^{-3x}} - 6Ae^{-3x} + \cancel{9Axe^{-3x}} - 5Ae^{-3x} + \cancel{15Axe^{-3x}} - 5B + \cancel{3Axe^{-3x}} + 3Bx + 3C = 2e^{-3x} + 2 + x$$

$$16Ae^{-3x} + 3Bx - 5B + 3C = 2e^{-3x} + 2 + x \Rightarrow \begin{cases} 16A = 2 \rightarrow \boxed{A = 1/8} \\ 3B = 1 \rightarrow \boxed{B = 1/3} \\ -5B + 3C = 2 \rightarrow C = \dfrac{2 + 5/3}{3} \rightarrow \boxed{C = 11/9} \end{cases}$$

$$\boxed{y_P(x) = \frac{1}{8}xe^{-3x} + \frac{1}{3}x + \frac{11}{9}}$$

$$\boxed{y(x) = k_1 e^x + k_2 x e^x + k_3 e^{-3x} + \frac{1}{8}xe^{-3x} + \frac{1}{3}x + \frac{11}{9}} \text{ Solución General}$$

b)

Análisis cualitativo. Aplicamos el teorema de Routh.

$$y_C''' + y_C'' - 5y_C' + 3y_C = 0 \quad \Rightarrow \underset{a_0}{1}\,r^3 + \underset{a_1}{1}\,r^2 \underset{a_2}{-5}\,r + \underset{a_3}{3} = 0$$

1. $|a_1| = |1| = 1 > 0$

2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 3 = -8 < 0$

Como NO todos los determinantes son positivos entonces No todas las raíces de la ecuación auxiliar son negativas. Por tanto, la solución complementaria es dinámicamente inestable.

RUBRICA:

Si encuentra la solución complementaria..…………………….3 puntos.
Si encuentra la solución particular ………………………..…..4 puntos.
Si aplica el teorema de Routh y concluye que la solución complementaria es dinámicamente estable………………..…...3 puntos.