EXAMEN DE CONTROL AUTOMÁTICO
PRIMER PARCIAL
JULIO 2 DE 2013

PRIMER TEMA: 25 puntos

El agua de alimentación para una caldera debe ser suministrada con presión constante X mediante una bomba centrífuga en la que se puede regular su velocidad Y. El diagrama muestra sus curvas características. El flujo estático Q_2 es:

$$Q_2(t) = k\left(\sqrt{X(t) - P_2}\right)Z^2(t)$$

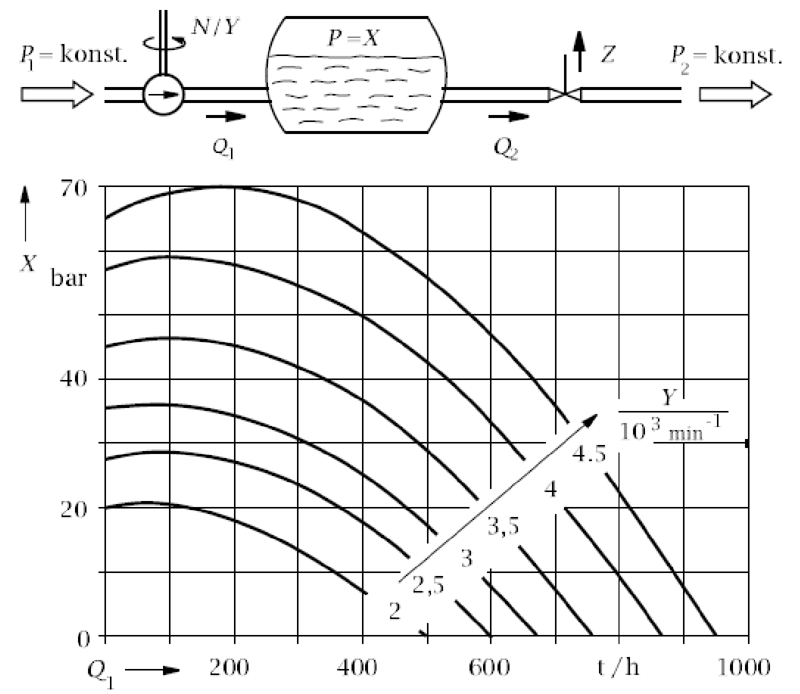
$$k = 0.0045\frac{t}{h\sqrt{bar}\cdot mm^2}$$

$$P_2 = 45bar$$

El sistema debe operarse en:
X_o = 50 bar y Z_o = 200 mm

- Proporcione las relaciones lineales:
  a) (7 p.) $x = C_1 \cdot q_1 + C_2 \cdot y$
  b) (8 p.) $q_2 = C_3 \cdot x + C_4 \cdot z$
  c) (10 p.) $x = a \cdot y + b \cdot z$

NOTA: En comportamiento estacionario $Q_1 = Q_2$



SEGUNDO TEMA: 25 puntos

El siguiente grafico, muestra un sistema de calefacción de un fluido

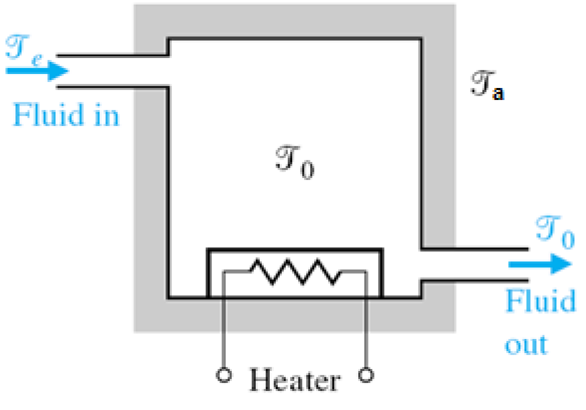
- $q_e(t)$ Calor suministrado por calentador
- $q_i(t)$ Calor del fluido entrante
- $q_l(t)$ Calor absorvido por fluido
- $q_s(t)$ Calor a traves de paredes recipiente
- Ct Capacidad térmica kcal/°C
- Rt Resistencia térmica °C.s/kcal
- F Flujo líquido kg/s
- c Calor específico líquido kcal/kg.°C

a.) (15 p.) Obtenga la ecuación del Balance Energético.

$$q_e(t) + q_i(t) = q_l(t) + q_s(t)$$

b.) (10 p.) Obtenga el diagrama de bloques

$$T_o(s) = G(s)[K_1Q_e(s) + K_2T_e(s) + K_3T_a(s)]$$

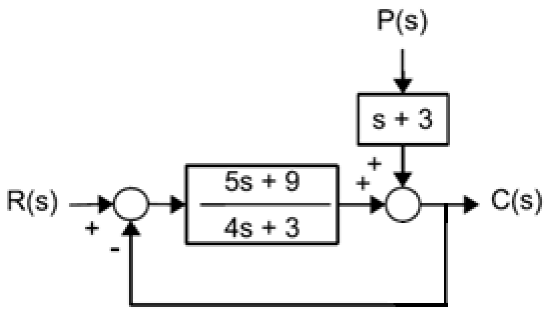


TERCER TEMA: 25 puntos

Para el sistema mostrado en el siguiente diagrama de bloques, encuentre el error de estado estacionario del sistema cuando:

A) (10 p.) La señal de referencia es:
   1) R(s) tipo escalón unitario
   2) R(s) tipo rampa unitaria

B) (15 p.) La señal de perturbación es:
   1) P(s) tipo escalón unitario
   2) P(s) tipo rampa unitaria



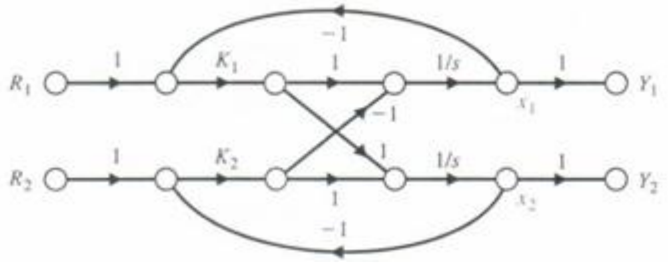
CUARTO TEMA: 25 puntos

El diagrama de flujo de señales para un sistema de control multivariable se muestra en la figura. Defina como x_1 y x_2 las variables de estado, R_1 y R_2 las variables de entrada y Y_1 y Y_2 las variables de salida.

a) (10 p.) Escriba las ecuaciones dinámicas (de estado y de salida) en forma matricial.

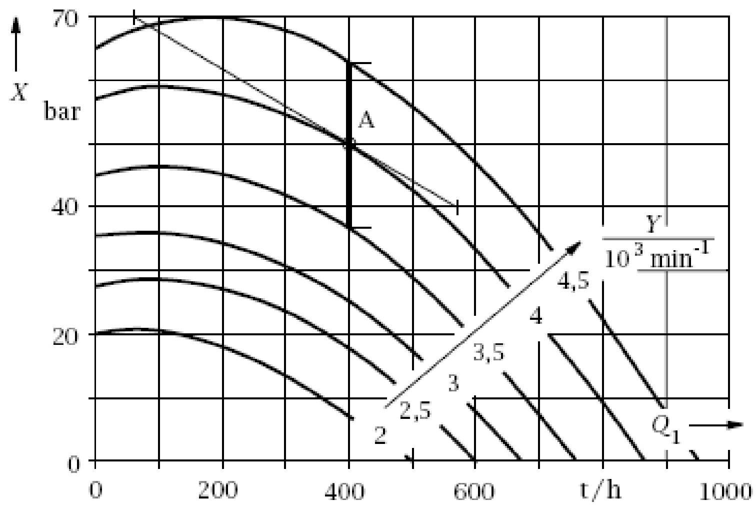
b) (5 p.) Asumiendo K_1 =1 y K_2 =1, obtenga la matriz de transición de estados $\phi(t)$.

c) (10 p.) Determine la matriz de transferencia G(s).



Solución:

PRIMER TEMA



$$En\_equilibrio: \quad Q_1 = Q_2 \quad ; \quad Q_{10} = Q_{20} \quad ; \quad Q_{20} = k\left(\sqrt{X_0 - P_2}\right) Z_0^2 = Q_{10}$$

$$Z_0 = 200 \quad ; \quad X_0 = 50 \quad ; \quad k = 0.0045 \quad ; \quad P_2 = 45 \quad \rightarrow \quad Q_{10} = 402\_t/h$$

$$Del\_grafico,\_Punto\_Operación\_A: \quad X_0 = 50 \quad ; \quad Q_{10} = 402 \quad ; \quad Y_0 = 4$$

$$a. \quad x = C_1 \cdot q_1 + C_2 \cdot y$$

$$C_1 = \left.\frac{\Delta X}{\Delta Q_1}\right|_{Y_0} = -\frac{30 bar}{500 t/h} = -0.06\_bar \cdot h/t$$

$$C_2 = \left.\frac{\Delta X}{\Delta Y}\right|_{Q_{10}} = \frac{27 bar}{1000 \min^{-1}} = 0.027\_bar \cdot \min^{-1}$$

$$Q_2 = k\left(\sqrt{X - P_2}\right) Z^2 \quad \rightarrow \quad b. \quad q_1 = q_2 = C_3 \cdot x + C_4 \cdot z$$

$$C_3 = \left.\frac{\partial Q_2}{\partial X}\right|_A = \frac{k}{2\sqrt{X_0 - P_2}} \cdot Z_0^2 = 40.2\_t/h \cdot bar$$

$$C_4 = \left.\frac{\partial Q_2}{\partial Z}\right|_A = 2k\sqrt{X_0 - P_2} \cdot Z_0 = 4.02\_t/h \cdot mm$$

$$b. \rightarrow a. \quad x = C_1 \cdot (C_3 \cdot x + C_4 \cdot z) + C_2 \cdot y$$

$$x = a \cdot y + b \cdot z \quad \rightarrow \quad a = \frac{C_2}{1 - C_1 C_3} = 7.91 \cdot 10^{-3}\_bar \cdot \min \quad ; \quad b = \frac{C_1 C_4}{1 - C_1 C_3} = -0.071\_bar/mm$$

Segundo Tema:

$$q_e(t) + q_i(t) = q_l(t) + q_s(t)$$

$$q_l(t) = C_t \frac{dT_o(t)}{dt}$$

$$q_s(t) = \frac{1}{R_t}[T_o(t) - T_a(t)]$$

$$q_i(t) = c \cdot F \cdot T_e(t)$$

$$C_t \frac{dT_o(t)}{dt} + \frac{1}{R_t} T_o(t) = q_e(t) + c \cdot F \cdot T_e(t) + \frac{1}{R_t} T_a(t)$$

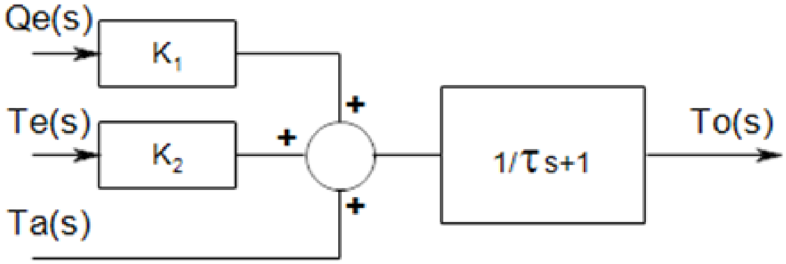
$$R_t C_t \frac{dT_o(t)}{dt} + T_o(t) = R_t \cdot q_e(t) + c \cdot F \cdot R_t \cdot T_e(t) + T_a(t)$$

$$\xrightarrow{L}$$

$$\left[R_t C_t s + 1\right] T_o(s) = R_t \cdot Q_e(s) + c \cdot F \cdot R_t \cdot T_e(s) + T_a(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{\tau \cdot s + 1} \quad ; \quad \tau = R_t C_t \quad ; \quad K_1 = R_t \quad ; \quad K_2 = c \cdot F \cdot R_t \quad ; \quad K_3 = 1$$

$$T_o(s) = G(s)[K_1 Q_e(s) + K_2 T_e(s) + K_3 T_a(s)]$$



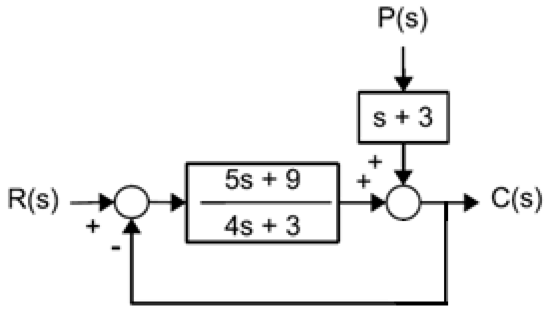
Tercer Tema.

A.1)

La función de transferencia entre $R(s)$ y $C(s)$ es:

$$G_R(s)=\frac{5s+9}{4s+3} \quad ; \quad H(s)=1 \quad ; \quad R(s)=\frac{1}{s} \quad \to \quad e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$$

$$K_p=\lim_{s\to 0} G_R(s)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{5s+9}{4s+3}\right)=\frac{9}{3} \quad \to \quad e_{ss}=\frac{1}{1+\frac{9}{3}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$



A.2)

$$R(s)=\frac{1}{s^2} \to e_{ss}=\frac{1}{K_v}$$

$$K_v=\lim_{s\to 0} sG(s)=\lim_{s\to 0} s\left(\frac{5s+9}{4s+3}\right)=0 \quad \to \quad e_{ss}=\frac{1}{0}=\infty$$

B.1)

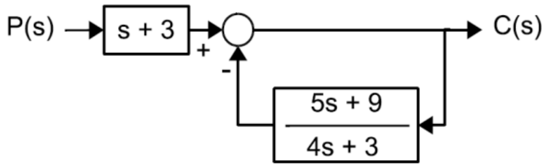
Para calcular este error es necesario conocer a la función de transferencia entre $C(s)$ y $P(s)$, es decir:

$$E(s)=R(s)-C(s) \quad ; \quad R(s)=0 \quad \to \quad E(s)=-C(s)$$

$$P(s)=\frac{1}{s} \quad ; \quad C(s)=G_p(s)P(s)$$

$$G_p(s)=\frac{(s+3)}{1+\left(\frac{5s+9}{4s+3}\right)}=\frac{(4s+3)(s+3)}{4s+3+5s+9}=\frac{(4s+3)(s+3)}{9s+12}$$

$$\mathrm{e}_{ss}=-\lim_{s\to 0} sC(s)=-\lim_{s\to 0} s\left(\frac{(4s+3)(s+3)}{9s+12}\right)\left(\frac{1}{s}\right)=-\frac{9}{12}=-\frac{3}{4}$$



B.2)

$$\mathrm{e}_{ss}=-\lim_{s\to 0} sC(s)=-\lim_{s\to 0} s\left(\frac{(4s+3)(s+3)}{9s+12}\right)\left(\frac{1}{s^2}\right)=-\infty$$

Cuarto tema:

a.)

$$\dot{X}_1 = (R_1 - X_1)K_1 - (R_2 - X_2)K_2 \quad ; \quad Y_1 = X_1$$

$$\dot{X}_2 = (R_1 - X_1)K_1 + (R_2 - X_2)K_2 \quad ; \quad Y_2 = X_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_1 & K_2 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_2 \\ K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot R \quad ; \quad Y = C \cdot X$$

b.)

$$K_1 = K_2 = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad (sI - A) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{11}(s) = \Phi_{22}(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{s+1}{(s+1+j)(s+1-j)} = \frac{A}{(s+1+j)} + \frac{B}{(s+1-j)} = \frac{1/2}{(s+1+j)} + \frac{1/2}{(s+1-j)}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} \quad \varphi_{11}(t) = \varphi_{22}(t) = e^{-t}\cos t$$

$$-\Phi_{21}(s) = \Phi_{12}(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{s+1}{(s+1+j)(s+1-j)} = \frac{C}{(s+1+j)} + \frac{D}{(s+1-j)} = \frac{-j/2}{(s+1+j)} + \frac{j/2}{(s+1-j)}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} \quad -\varphi_{21}(t) = \varphi_{12}(t) = e^{-t} sent$$

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t} sent \\ -e^{-t} sent & e^{-t}\cos t \end{bmatrix}$$

c.)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} s+2 & -s \\ s & s+2 \end{bmatrix}$$