1. Sea Π_i la proyección

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, ...) \to \Pi_i(\omega) = \omega_i \, .$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, justifique la existencia de la $\sigma-$álgebra más pequeña que hace que todas las n funciones, $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n$, sean medibles. i.e. Muestre que existe una $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}$ sobre el conjunto de las sucesiones de Bernoulli, $\mathbb{B}$, tal que para todo $i = 1, 2, ..., n$, la función

$$\Pi_i : (\mathbb{B}, \mathcal{F}) \to (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$$

es medible. Y además, si $\mathcal{G}$ es una $\sigma-$álgebra sobre $\mathbb{B}$, tal que para todo $i = 1, 2, ..., n$,

$$\Pi_i : (\mathbb{B}, \mathcal{G}) \to (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$$

es medible, entonces $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

2. Denotando $\sigma[\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n]$ la $\sigma-$álgebra del ejercicio anterior, y utilizando la notación usada en clase, muestre que

$$\sigma[\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n] = \sigma[\sigma[\Pi_1] \cup \sigma[\Pi_2] \cup ... \cup \sigma[\Pi_n]]$$

3. Sea proj_n la proyección

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, ...) \to \text{proj}_n(\omega) = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \, .$$

Justifique el hecho que la $\sigma-$álgebra $\sigma[\text{proj}_n]$ (la $\sigma-$álgebra generada por proj_n, también denotada $\mathcal{F}_n$), es generada por una partición.

Describa los elementos de la partición que genera $\mathcal{F}_n$ y muestre que cada elemento de la partición es igual a la intersección de conjuntos de

$$\sigma[\Pi_1] \cup \sigma[\Pi_2] \cup ... \cup \sigma[\Pi_n] \, .$$

4. Muestre que

$$\sigma[\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n] = \mathcal{F}_n$$

5. Imaginemos un juego en el cual se lanzan dos monedas iguales. Un benefactor, aficionado al juego, paga al fopol (fondo politécnico de solidaridad para la lucha contra las plagas de los cangrejos) un dolar si una de las monedas cae con el lado "corona" para arriba, si las dos son "cara" no sucede nada. Es consensual asociar la medida

$$\tau(\{0\}) = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \tau(\{1\}) = \frac{3}{4}$$

sobre $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$.

Utilizamos las sucesiones de Bernoulli, $\mathbb{B}$, para registrar lo que gana el fopol (1 o 0) en una sucesión de juegos.

Justifique la existencia de la medida preimagen de τ, por la proyección Π_i y descríbala (denotándola τ_i).

6. Al final de n juegos, tenemos 2^n posibles resultados, que se traducen en 2^n eventos disjuntos: Las sucesiones de Bernoulli que comienzan con $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \{0,1\}^n$. Es consensual asociar a cada uno de estos eventos la "probabilidad producto"

$$\mathrm{P}_n(\{(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, \omega_{n+1}, \omega_{n+2}, ...) ; \omega_i \in \{0,1\}, i > n\}) = \Pi_{j=1}^{n} \tau(\{\xi_j\})$$

(para reflejar matemáticamente la noción de independencia).

Muestre que esta fórmula define, de hecho, una probabilidad sobre $(\mathbb{B}, \mathcal{F}_n)$.

7. Muestre que existe una medida de probabilidad P sobre $(\mathbb{B}, \mathcal{F}_\infty)$, tal que para todo n, para todo $A \in \mathcal{F}_n$,

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}_n(A)$$

8. Justifique el hecho que la función

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, ...) \to \mathrm{X}(\omega) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \omega_i \cdot 2^{-i},$$

es una variable aleatoria.

9. Muestre que la variable aleatoria X (del ejercicio anterior) tiene una función distribución (función de acumulación) continua.