

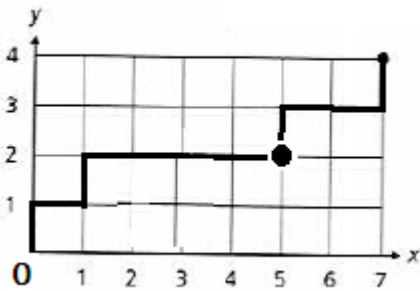


Yo,....., me comprometo a realizar el examen en forma individual, solo puedo usar lápiz, esferográfico, y calculadora sencilla y el material que se me otorgue en el examen, cualquier otro material debo guardarlo en mi mochila y ponerla en parte anterior del aula. Como constancia del compromiso adquirido firmo a continuación

..... N° Matrícula: .....

TEMA 1.- (20 puntos)

- a) Elena selecciona cinco cartas de una baraja de 52 cartas. De cuantas formas diferentes puede hacer la selección de estas cinco cartas de tal forma que contenga por lo menos una carta de trebol.
- b) Elena sale del punto (0;0) y se dirige al punto (7;4) los movimientos permitidos son hacia la derecha y hacia arriba, y en cada caminata ella puede bajar 0, 1, o 2 veces (no obligatorio) ¿De cuantas formas diferentes puede realizar esta caminata?



Tema 2.- (inducción) (20 puntos)

Los números armonicos se definen:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \text{ para cualquier } n \in \mathbb{Z}^+.$$

- a) Demostrar que:

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se verifica  $H_{2^n} \leq 1 + \frac{1}{n}$ .

- b) Demostrar:

$$\text{Si } n \in \mathbb{Z}^+, \text{ entonces } \sum_{j=1}^n H_j = (n + 1) H_n - n.$$

Tema 3.- (ecuacion diofantica) (20 puntos)

Una mujer tiene un cesto de manzanas, haciendo grupo de 3 sobran 2, haciendo grupo de 4 sobran 3, hallar el número de manzanas que contiene el cesto sabiendo que están entre 100 y 110.

**Tema 4.- (20 puntos)**

Resuelva las siguientes relaciones de recurrencia:

a)  $a_{n+1} - a_n = 2n + 3, \quad n \geq 0, \quad a_0 = 1$   
b)  $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n, \quad n \geq 0, \quad a_0 = 3$

**Tema 5.- (20 puntos)**

a) Resolver la siguiente relación de recurrencia:

$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3(2^n) + 7(3^n),$  donde  $n \geq 0$  y  $a_0 = 1, a_1 = 4.$

b)

Para  $n \geq 1$ , sea  $D_n$  el determinante de la matriz  $n \times n$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontrar y resolver una relación de recurrencia para determinar  $D_n$  en función de  $n$