



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
TERCERA EVALUACIÓN DE CÁLCULO DIFERENCIAL
09 DE MARZO DE 2015



Profesor: _____ Paralelo: ____

COMPROMISO DE HONOR

Yo, _____ al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que NO puedo usar calculadora, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

Firma: _____ Número de matrícula _____

1. (20 puntos) Califique cada una de las siguientes proposiciones como VERDADERA o FALSA. Justifique su respuesta.

a) La recta con ecuación $y = -2x + 9$ es tangente a la curva $y = 4x - x^2$

b) Si $\theta = 1$ es la ecuación de una curva C en coordenadas polares, entonces la gráfica de C es una circunferencia centrada en el polo con radio de longitud

c) Si f es una función de variable real con regla de correspondencia $f(x) = \lfloor \sin(x) \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$, entonces f es continua en $x = 0$

d) Si $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una métrica tal que $\forall p, q \in \mathbb{R}$, $d(p, q) = \frac{|p-q|}{1+|p-q|}$ entonces $x = \frac{5}{2} \in N_{\frac{1}{2}}(2)$, es decir el punto $x = \frac{5}{2}$ pertenece al entorno con radio de longitud $r = \frac{1}{2}$ y centrada en $p = 2$

2. (10 puntos) Considere la función de variable real $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

a) Aplicando el teorema del valor medio para derivadas, demuestre que:

$$\exists c \in (x, x+2) \text{ tal que } \sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

b) Considerando que $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, demuestre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{c}} = 0$

c) A partir de lo anterior, demuestre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) = 0$

3. Calcule

a) (10 puntos) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x}$

b) (5 puntos) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - x)$

c) (10 puntos) $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $\begin{cases} x = t - \ln(t) \\ y = \ln(t) \end{cases}$

d) (5 puntos) $\frac{dy}{dx}$ si $(x + y^2)^2 + (x^2 + y)^3 = 4$

4. (10 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente a la inversa de la función f con regla de correspondencia $f(x) = x^7 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ en el punto $P(-2, a) \in f^{-1}$

5. (10 puntos) Aproxime, utilizando diferenciales, el valor de $\arctan(0,98)$

6. (10 puntos) Un embudo en forma cónica tiene un diámetro de 24 pulgadas en su parte superior y 8 pulgadas de profundidad. El agua entra al embudo a una razón de 12 pulgadas cúbicas por segundo y sale de él a una razón de 4 pulgadas cúbicas por segundo, determine que tan rápido se eleva la superficie del agua cuando esta tiene una profundidad de 5 pulgadas.

7. (10 puntos) Sea $f(x) = \frac{3}{1-2x}$, $x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.

a) Determine una expresión para $\frac{d^n f}{dx^n}$

b) Demuestre, por inducción matemática, que la expresión determinada en el literal anterior es válida $\forall n \in \mathbb{N}$