Segunda Evaluación de Estadística

Término: 2015-I

10 de septiembre de 2015

1. Considere las variables aleatorias continuas X_1, X_2, cuya función de densidad conjunta depende de un parámetro $\beta > 0$ y está dada por

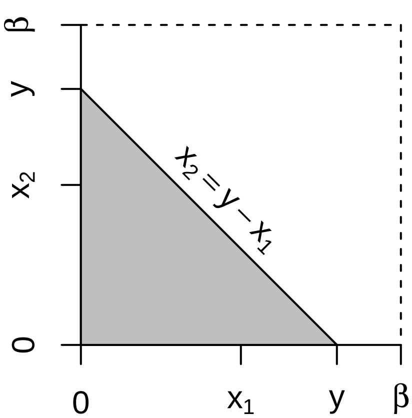
$$f(x_1, x_2) = k(x_1 + x_2), 0 < x_1 < \beta, 0 < x_2 < \beta$$

(a) (5 puntos) Encuentre el valor de la constante k (en función de β) para que la función propuesta sea una función de densidad conjunta.

Solución: $\int_0^\beta \int_0^\beta k(x_1 + x_2)dx_1dx_2 = k\beta^3 = 1$. De aquí se deduce que $k = \frac{1}{\beta^3}$

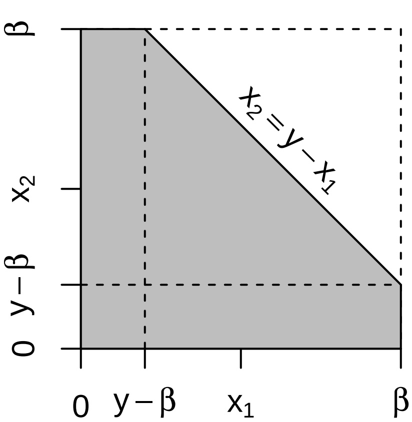
(b) (10 puntos) Suponga que $Y = X_1 + X_2$. Encuentre la función de distribución acumulada de Y, es decir, $G(y) = P(Y \leq y)$. (SUGERENCIA: halle $P(X_1 + X_2 \leq y)$ integrando la función de densidad conjunta $f(x_1, x_2)$ para diferentes valores de y)

Solución: En el caso de $0 < y < \beta$, el gráfico es así:



El integral sería así: $P(X_1 + X_2 \leq y) = \int_0^\beta \int_0^{y-x_1} \frac{1}{\beta^3}(x_1 + x_2)dx_2dx_1 = \frac{y^2}{2\beta^2} - \frac{1}{6}$

Para el caso de $\beta < y < 2\beta$, el gráfico sería así:



El integral quedaría así: $\int_0^{y-\beta} \int_0^\beta \frac{1}{\beta^3}(x_1 + x_2)dx_2dx_1 + \int_{y-\beta}^\beta \int_0^{y-x_1} \frac{1}{\beta^3}(x_1 + x_2)dx_2dx_1 = \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{y^3}{3\beta^3} - \frac{1}{3}$. Entonces, la distribución de Y quedaría así:

$$P(Y \leq y) = \begin{cases} \frac{y^2}{2\beta^2} - \frac{1}{6} & 0 < y < \beta \\ \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{y^3}{3\beta^3} - \frac{1}{3} & \beta < y < 2\beta \end{cases}$$

(c) (10 puntos) Se desea realizar el contraste de hipótesis $H_0 : \beta \leq 5$ vs $H_1 : \beta > 5$. Para probar esta hipótesis, se decide tomar una muestra de esta función de densidad conjunta, y rechazar la hipótesis nula si $Y > 8$. Halle el nivel de significancia de esta prueba.

Solución: El nivel de significancia se obtiene calculando la probabilidad de rechazar H_0, es decir $P(Y > 8)$, cuando $\beta = 5$. Entonces tenemos que

$$P(Y > 8) = 1 - P(Y \leq 8) = 1 - \left(\frac{8^2}{5^2} - \frac{8^3}{3 \cdot 5^3} - \frac{1}{3}\right) = 0.1386667$$

2. (20 puntos) Una fábrica de jabas de plástico para bebidas carbonatadas tiene problemas con los costos de fabricación de su producto debido a que los costos de importación de la materia prima se han elevado. Para enfrentar la situación, la administración ha decidido utilizar material reciclado nacional para fabricar sus jabas. Investigando en artículos científicos, se dieron cuenta que hay 3 fórmulas distintas para producir la materia prima a partir del material reciclado. El problema de utilizar material reciclado es que el proceso produce una mayor cantidad de merma. Para verificar el nivel de merma que producen las distintas fórmulas, la fábrica produce 100 jabas con cada una de las fórmulas para producir material reciclado, y obtiene los siguientes resultados:

	Fórmula A	Fórmula B	Fórmula C
Inservible	20	15	25
Reparable	30	25	30
Buena	50	60	45

Evalúe si en esta muestra existe evidencia estadística de que el nivel de merma es distinto para cada marca. Incluya hipótesis, estadístico de prueba y conclusión. (Ji Cuadrado con 4 grados de libertad con cola superior 0.05 es 9.487729).

Solución: La hipótesis nula es que el tipo de merma es independiente de la fórmula que se utilice. Las frecuencias esperadas son

	Fórmula A	Fórmula B	Fórmula C
Inservible	20.00000	20.00000	20.00000
Reparable	28.33333	28.33333	28.33333
Buena	51.66667	51.66667	51.66667

Los valores de $\frac{(o-e)^2}{e}$ son

	Fórmula A	Fórmula B	Fórmula C
Inservible	0.0000000	1.2500000	1.2500000
Reparable	0.0980392	0.3921569	0.0980392
Buena	0.0537634	1.3440860	0.8602151

El estadístico prueba $\sum \frac{(o-e)^2}{e}$ da 5.3462998. Como es menor que el valor crítico de la Ji cuadrado, no se rechaza la hipótesis nula, es decir, las distintas fórmulas dan los mismos niveles de merma.

3. Se desea comparar la resistencia de dos aleaciones de acero, para lo cual se producen cables de 10 metros de longitud con 5 milimetros de espesor con cada aleación. Cada cable es sometido a una prueba de estrés, en la que se coloca un peso que aumenta gradualemente hasta que el cable se rompe. Los pesos de rompimiento, en kilogramos, de la muestra hecha con la primera aleación son 3138, 2856, 3078, 2967, y con la segunda aleación son 2901, 2932, 2979, 3007, 2953.

   (a) (10 puntos) ¿Existe evidencia estadística de que las verdaderas varianzas son distintas? Incluye hipótesis, estadístico de prueba y conclusión. (F con 3 y 4 grados de libertad con cola superior 0.05 es 6.5913821)

Solución: Las varianzas son $s_1^2 = 15524.25$, $s_2^2 = 1681.8$. El estadístico de prueba es $s_1^2/s_2^2 = 9.2307349$. Este valor es mayor que el valor crítico, por lo que existe evidencia estadística de la varianza del primer grupo es mayor que la varianza del segundo grupo.

(b) (10 puntos) ¿Existe evidencia estadística de que las verdaderas medias son distintas? Sin importar su respuesta al literal anterior, suponga que las varianzas con iguales. Incluya hipótesis, estadístico de prueba y conclusión. (T con 5 grados de libertad con cola superior 0.025 es 2.5705818)

Solución: La varianza conjunta es

$$s_p^2 = \frac{(4-1)15524.25 + (5-1)1681.8}{4+5-2} = 7614.28$$

Las medias son $\bar{x} = 3009.8$ y $\bar{y} = 2954.4$ El estadístico de prueba es

$$T = \frac{3009.8 - 2954.4}{\sqrt{7614.28\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)}} = 0.9455772$$

El valor absoluto del estadístico de prueba es menor que el valor crítico, por lo que no se rechaza la hipótesis nula de que las medias son iguales.

4. (10 puntos) El número de personas que llega a una agencia de un banco en días laborables de 10:00 am a 11:00 am sigue una distribución Poisson con $\lambda = 18$. Luego de observar el número de personas de 10:00 a 11:00 durante 50 días laborables se obtiene un promedio aritmético de estos 50 números. ¿Cuál es la probabilidad de que este promedio sea mayor que 19?

   Solución: Por el tamaño de la muestra, se puede aplicar el teorema del límite central. Los parámetros son $\mu = 18, \sigma^2 = 18, \sigma = 4.2426407$. Entonces

$$P(\bar{X} > 19) = P\left(z > \frac{19-18}{4.24/\sqrt{50}}\right) = 1.6667 = 0.04779$$

5. (10 puntos) A un grupo de 500 personas de 40 años seleccionadas al azar se les realiza una prueba de sangre para medir el nivel de azucar en la sangre. De los participantes en este estudio, 200 tenián un nivel de azúcar mayor a 100. Obtenga un intervalo del 95% de confianza para la proporción de personas en la población que tienen un nivel de azúcar mayor a 100.

   Solución: El tamaño de muestra es $n = 500$. La proporción de personas con un nivel de azúcar mayor a 100 es $\hat{p} = 200/500 = 0.4$. El intervalo de confianza es

$$0.4 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{500}} = 0.4 \pm 0.0429414$$

   El intervalo es $(0.3570586, 0.4429414)$

6. (15 puntos) Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes Poisson con parámetros λ_1 y λ_2, demuestre que distribución condicional de X_1 dada la suma $X_1 + X_2 = k$ es binomial con $n = k$ y $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

   Solución: Como X_1 y X_2 son independientes, se tiene que

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{e^{\lambda_1}\lambda_1^{x_1}}{x_1!}\frac{e^{\lambda_2}\lambda_2^{x_2}}{x_2!}$$

   Entonces, la probabilidad conjunta de X_1 y $X_1 + X_2$ es

$$\begin{aligned} P(X_1 = c, X_1 + X_2 = k) &= P(X_1 = c, X_2 = k - c) \\ &= \frac{e^{\lambda_1}\lambda_1^{c}}{c!}\frac{e^{\lambda_2}\lambda_2^{k-c}}{(k-c)!} \end{aligned}$$

   Esta distribución conjunta estaría definidada para $c = 0, 1, 2, \ldots, k$ y para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Table 1: Tabla Normal: Función de distribución acumulada de la Normal Estándar $N(0,1)$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990