



Yo,....., me comprometo a realizar el examen en forma individual, solo puedo usar lápiz, esferográfico, y calculadora sencilla y el material que se me otorgue en el examen, cualquier otro material debo guardarlo en mi mochila y ponerla en parte anterior del aula. Como constancia del compromiso adquirido firmo a continuación

..... N° Matrícula: .....

**Tema 1**

Un anuncio de hamburguesas indica que un cliente puede ordenar su hamburguesa con alguno, con ninguno de los siguientes ingredientes o con todos: catsup, mostaza, mayonesa, lechuga, tomate, cebolla, pepinillos, queso o champiñones. ¿Cuántas órdenes diferentes de hamburguesa se pueden servir?

**Tema 2**

Determine el coeficiente de  $x^9y^3$  en los desarrollos de (a)  $(x + y)^{12}$ , (b)  $(x + 2y)^{12}$  y (c)  $(2x - 3y)^{12}$ .

**Tema 3**

- a) ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la pareja de ecuaciones  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_7 = 37$ ,  $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ ?
- b) ¿Cuántas de las soluciones de la parte (a) tienen  $x_1, x_2, x_3 > 0$ ?

**Tema 4**

11. David tiene un conjunto de 180 bloques distintos. Cada uno de estos bloques está hecho de madera o plástico y viene en alguno de tres tamaños (pequeño, mediano, grande), cinco colores (rojo, blanco, azul, amarillo, verde) y seis formas (triangular, cuadrado, rectangular, hexagonal, octagonal, circular). ¿Cuántos de los bloques de este conjunto difieren

- a) del bloque *pequeño, rojo, de madera, cuadrado* en exactamente una forma? (Por ejemplo, el bloque *pequeño, rojo, de plástico, cuadrado* es uno de esos bloques.)
- b) del bloque *grande, azul, de plástico, hexagonal* en exactamente dos formas? (Por ejemplo, el bloque *pequeño, rojo, de plástico, hexagonal* es uno de esos bloques.)

**Tema 5**

Demuestre lo siguiente mediante inducción matemática.

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

Demuestre que para cualquier  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n > 9 \Rightarrow n^3 < 2^n$ .

**Tema 6**

- a) Encuentre tres enteros positivos  $a, b, c$  tales que  $31 \mid (5a + 7b + 11c)$ .
- b) Si  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  y  $31 \mid (5a + 7b + 11c)$ , demuestre que (i)  $31 \mid (21a + 17b + 9c)$  y (ii)  $31 \mid (6a + 27b + 7c)$ .
- c) Si  $n \in \mathbb{N}$ , demuestre que  $3 \mid (7^n - 4^n)$ .