

7'
622.5
5939



ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Tierra

**"ANALISIS DE LA FORMA DEL CONO DE AGUA EN
YACIMIENTOS CON EMPUJE HIDRAULICO
DE FONDO"**

TESIS DE GRADO

Previa a la obtención del Título de:

INGENIERO EN PETROLEO

Presentada por:

Víctor David Suárez Anchundia

Guayaquil - Ecuador

1992



AGRADECIMIENTO

**Al Ing. Ricardo Gallegos Orta, Director de esta
Tesis por los conocimientos y apoyos brindados.**

DEDICATORIA

A MI MADRE



BIBLIOTECA

Ricardo Gallegos Orta
Ing. Ricardo Gallegos Orta.
DECANO DE LA FACULTAD DE
INGENIERIA EN CIENCIAS DE
LA TIERRA

Ricardo Gallegos Orta
& d o
Ing. Ricardo Gallegos Orta.
DIRECTOR DE TESIS

Daniel Tappa Faldoni
Ing. Daniel Tappa Faldoni
MIEMBRO DEL TRIBUNAL

Heinz Terán Mite
Ing. Heinz Terán Mite
MIEMBRO DEL TRIBUNAL

DECLARACION EXPRESA

"La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta tesis, me corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la Espol).


Victor David Suarez Anchundia

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es determinar la forma bidimensional del **cono** de agua durante la producción simultánea de petróleo y de agua en un yacimiento en el cual el mecanismo de producción que predomina es el empuje de agua de fondo. La deformación del contacto-agua petróleo que **se** produce debido a la caída de presión creada por el flujo dinámico del yacimiento hacia el pozo o sistema de drenaje vertical es conocida con el nombre de conificación de agua. El flujo radial en el pozo provoca bruscos gradientes de presión que inducen al agua a elevarse hacia la boca del **pozo** en forma vertical, similar a la forma de un cono.

Se considerará para la realización de este estudio trabajos realizados anteriormente, que tienen relación directa con la determinación de la forma del cono, entre estos trabajos **se** tiene:

- a) Karp, Lowe y Marusov, que han trabajado en una expresión para la forma del **cono** basada en la ley de Darcy.
- b) Kidder, el cual presenta una expresión para la forma del **cono** en yacimientos delgados expuestos a interdigitación de agua.
- c) Smith, presenta una expresión para la forma del **cono** basada en conceptos

básicos de hidrodinámica.

El presente estudio considera una nueva expresión **para** determinar la forma del **cono** en base a una expresión modificada de la ecuación de Bernoulli.

Además **se** presenta un análisis comparativo de las técnicas de aproximación presentadas por Smith, **Karp** y la ecuación de Bernoulli con los resultados obtenidos en el simulador mecánico de Hele-Shaw. Este simulador utiliza flujo lineal y permeabilidad isotrópica para obtener un modelo de curva patrón del contacto agua-petróleo. Este análisis será utilizado para encontrar aplicabilidad a las expresiones derivadas de la ecuación de Bernoulli para la forma del cono en el yacimiento.



INDICE GENERAL

RESUMEN	VI
INDICE GENERAL	VIII
INDICE DE FIGURAS	XI
INDICE DE TABLAS	XIII
INTRODUCCION	XIV

CAPITULO I

ANALISIS TEORICO	16
1.1 CONIFICACION DE AGUA	16
1.2 FORMA DEL CONO POR EL USO DE LA ECUACION DE BERNOULLI	18
1.3 DETERMINACION DE LA FORMA DEL CONO POR EL USO DE HIRODINAMICA	24
1.3.1. La variable compleja y el plano	26
1.3.2. La transformada de Schwarz-Christoffel	28
1.4 FORMA DEL CONO POR EL USO DE LA LEY DE DARCY	33

CAPITULO II

SOLUCION DE LA ECUACION DE BERNOULLI PARA LA FORMA DEL CONO	38
--	-----------



2.1 DATOS EXPERIMENTALES (MODELO HELE-SHAW) 38

2.2 SOLUCION DE LA ECUACION DE BERNOULLI PARA LA FORMA DEL CONO 39

 2.2.1. FLujo Neto 41

 2.2.2. Determinación de la presión como función del radio 43

 2.2.3. Determinación de la velocidad como función del radio 45

 2.2.4. Determinación de la pérdida de Cabeza como una función del radio 49

 2.2.5. La Ecuación de Bernoulli para la forma del cono 51

2.3 APLICACION DE LA ECUACION DE BERNOULLI PARA LA FORMA DEL CONO 52

 2.3.1. Determinación de V_1 , P_1 i z_1 53

 2.3.2. Determinación de P_2 54

 2.3.3. Determinación de h_L 59

 2.3.4. Procedimiento para la aplicación de la ecuación de Bernoulli para la forma del cono 59

CAPITULO III

ANALISIS COMPARATIVO DE LA ECUACIONES DE LA FORMA DEL CONO 75

CAPITULO IV

APLICACION GENERAL DE LAS ECUACIONES DE BERNOULLI E HIDRODINAMICA PARA LA FORMA DEL CONO EN EL

	X
YACIMIENTO	80
CONCLUSIONES	82
RECOMENDACIONES	86
TABLAS	88
FIGURAS	93
BIBLIOGRAFIA	110



INDICE DE FIGURAS

FIG. No.

1. Cono estático de agua
2. Condiciones de equilibrio a lo largo de los ejes de un sistema de conificación de agua.
3. Cono inestable de agua con fondo de agua.
4. Transformación energética gradual para flujo de canal abierto
5. Diagrama de Argand
6. a. Representación del modelo de flujo uniforme de izquierda a derecha en el plano w .
b. El plano z para la transformación $w = z^2$
7. Flujo por una abertura angosta en el **final** de un canal
8. Flujo por una abertura angosta en el **final** de un canal trazado en la mitad de un plano (plano t).
9. a. Tira infinita en el plano z
b. Flujo uniforme en una tira infinita trazada sobre la mitad de un plano.
10. Forma del **cono** en un sistema de flujo lineal.
11. Gráfico de flujo neto superpuesto en la zona de petróleo para un **CAW** de flujo que involucra agua y petróleo.
12. Gráfico de flujo neto superpuesto en la zona de agua para un **CAW** de flujo que involucra agua y petróleo.



13. **Gráfico** de presión a lo largo del contacto agua-petróleo como función del radio.
14. Perfil probable de velocidad adyacente **al** contacto agua-petróleo.
15. Velocidad a lo largo del contacto agua-petróleo como una función del radio.
16. Gráfico de la pérdida de cabeza como una función del radio.
17. Localización de datos necesarios para la solución de la ecuación de Bernoulli para la forma del cono.
18. Presión a lo largo de la interface del modelo de petróleo como una función del radio.
19. Comparación de Bernoulli, hidrodinámica y **Karp**, Lowe y Marusov **para** la ecuación de la forma del **cono** respecto a la curva patrón.
20. Comparación de Bernoulli, hidrodinámica y **Karp**, Lowe y Marusov para la ecuación de la forma del **cono** respecto a la curva patrón.
21. Comparación de Bernoulli, hidrodinámica y **Karp**, Lowe y Marusov para la ecuación de la forma del **cono** respecto a la curva patrón.

INDICE DE TABLAS

TABLA No.

FLUJO NETO EN ZONAS DE PETROLEO Y AGUA	1
DATOS EXPERIMENTALES TOMADOS POR SMITH EN EL MODELO DE HELE-SHAW CASO I	2
DATOS EXPERIMENTALES TOMADOS POR SMITH EN EL MODELO DE HELE-SHAW CASO II	3
DATOS EXPERIMENTALES TOMADOS POR SMITH EN EL MODELO DE HELE-SHAW CASO III	4



INTRODUCCION

En un yacimiento de rocas oleófilas, es agua está a menudo asociada con el petróleo, generalmente el yacimiento está preferentemente humedecido por agua cuando dos o tres fluidos están presentes en el espacio poroso. Si la saturación de agua en el yacimiento es mayor que el agua residual, entonces el agua y el petróleo van a estar **separados** en dos zonas distintas. La zona de agua es llamada agua de fondo o tabla de agua.

Para un pozo completado en un yacimiento de agua de fondo, existirá una tasa crítica de producción de petróleo bajo la cual el agua no debe ser producida. Por encima de **Esta** tasa crítica de **producción**, el agua de fondo va a formar un **cono** y será producida con el petróleo.

Esta tesis **tratará** el problema de la conificación del agua, específicamente la forma del **cono** de agua durante la producción simultánea de petróleo y agua. Una solución acertada a este problema es de importancia por dos **razones**:

- Primero, una precisa solución para la forma del **cono** de agua debe ayudar en el desarrollo de métodos para reprimir, y prevenir posibles conificaciones de agua.



- Segundo, una correcta determinación de la forma del cono permitirá el análisis del volúmen de petróleo barrido por la conificación de agua.

Lo expuesto de la forma del cono de agua será presentado en cuatro secciones, donde se ha tratado de hacer el enfoque de la manera más simple y concisa, para así interesar al estudiante o al joven profesional en este importante tema de Ingeniería de Petróleos.

~~Estas~~ secciones serán:

- 1^{ra} Un análisis teórico de las varias aproximaciones para determinar la forma del cono.
- 2^{do} Una solución de la ecuación de Bernoulli para la forma del cono.
- 3^{ro} Una discusión comparativa de los resultados; y
- 4^a Una proyección de los resultados del modelo al yacimiento.

CAPITULO I

ANALISIS TEORICO

Para la realización del análisis teórico este capítulo fue dividido en cuatro partes:

- Una discusión de la conificación de agua
- Una derivación de la ecuación de la forma del **cono** usando una forma modificada de la ecuación de Bernoulli .
- Una derivación de la ecuación de la forma del cono usando hidrodinámica.
- Una derivación de la ecuación de la forma del **cono** usando la Ley de Darcy.

1.1. CONIFICACION DE AGUA. (5)

Puesto que el agua tiene, una densidad mayor a la del petróleo y es también inmisible con él , en un yacimiento uniforme el agua estará debajo del petróleo y formará el agua de fondo. Cuando ocurre la caída de presión en un pozo el equilibrio estático en el yacimiento es trastornado. El agua de fondo **se** levantará hasta que la presión de equilibrio sea re-establecida en el yacimiento. Un **cono** de agua estático resulta después de este movimiento de fluido, (Figura 1). La regla para que el equilibrio estático sea re-establecido es que: el único fluido producido en el **pozo** debe ser petróleo.

La condición necesaria para el equilibrio estático es :

$$P(r,z) + g\rho_w z = P_b$$

Ec.(1)

Donde :

$P(r,z)$: Presión en el contacto agua petróleo en el punto (r,z)

g : aceleración gravitatoria.

ρ_w : densidad del agua

z : altura del contacto agua-petróleo por encima del contacto horizontal.

P_b : presión en el fondo de la zona de petróleo.

La caída de presión en el fondo del pozo es igual al diferencial hidrostático en la cabeza $gz_0(\rho_w - \rho_o)$.

El flujo de fluido al pozo es convergente y el gradiente de presión aumenta rápidamente en la cercanía de la boca del pozo. La Figura 2 muestra cualitativamente el gradiente de presión como una función de la distancia desde el fondo de la zona de petróleo. Este diagrama tiene validez en el eje de la boca del pozo. La curva A muestra que el gradiente de presión en la zona de petróleo incrementa, mientras la distancia desde el fondo de ésta zona aumenta. La curva B representa el gradiente de presión constante en la zona de agua. Este gradiente es constante debido a la aceleración uniforme de la gravedad.

El cono estático de agua debe aumentar con la caída de presión en el pozo hasta

alcanzar Z_{max} . En este punto, el gradiente de presión en el petróleo, el cual es causado por los decrementos de presión en el pozo, es igual al gradiente de presión del agua. Esta es la altura máxima en la cual el cono de agua puede aumentar y mantener todavía el equilibrio estático. Otra disminución de presión en la boca del pozo creará una condición inestable y el agua deberá conificarse inmediatamente al pozo y será producida junto con el petróleo. Este estado de inestabilidad de la conificación del agua se ilustra en la Figura 3. Este es el tipo de conificación a ser tratado en este estudio.

1.2 FORMA DEL CONO USANDO LA ECUACION DE BERNOULLI. (1,8)

Cada partícula de fluido en movimiento o en reposo, obedece a la segunda ley de movimiento de Newton. Las ecuaciones de Navier-Stokes son una expresión de la segunda ley de Newton para un fluido real. Las siguientes ecuaciones ilustran la forma general de estas en las coordenadas x, y i z .

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

Ec. (2b)

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

Ec. (2c)

Donde:

u: Componente de la velocidad en la dirección x

v: Componente de la velocidad en la dirección y

w: Componente de la velocidad en la dirección z

 Ω : Potencial del campo de fuerza μ : viscosidad

t: tiempo



ρ : densidad

Deberá notarse que los términos de viscosidad y densidad en las ecuaciones de momento no son necesariamente constantes.

En esta forma las ecuaciones de Navier Stokes no son manejables. A menudo en los problemas de flujo de fluidos, se supone un flujo ideal (incompresible y viscosidad cero). En flujo de fluidos en medios porosos donde las velocidades son normalmente pequeñas esta suposición es razonable. Así, si un fluido ideal es tomado, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a las ecuaciones de Euler.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

Ec.(3a)

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

Ec.(3b)

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

Ec.(3c)

Asumiendo que el flujo en un medio poroso es laminar e irrotacional, las relaciones siguientes son verdaderas.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Ec.(4)

Dado que la derivada del potencial con respecto a la distancia es definida como la velocidad, y sustituyendo las relaciones de la ecuación (4) en la ecuación (3a), tenemos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{(\partial x)(\partial t)} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Ec.(5a)

Donde:

ϕ : función del potencial de velocidad.

Integrando la ecuación (5a) con respecto a x , obtenemos :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \Omega + \frac{P}{\rho} = F_1(y, z, t)$$

Ec.(6a)

El miembro derecho de la ecuación (6a) se convierte en una función de y , z i t . No es una función de x porque la derivada de la ecuación (6a) con respecto a x es necesariamente cero.

Analogamente, en la integración de las ecuaciones (3b) y (3c) se convierten en:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \Omega + \frac{P}{\rho} = F_2(x, z, t)$$

Ec.(6b)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + a + \frac{P}{\rho} = F_3(x, y, t)$$

Ec.(6c)

Observando que los miembros del lado izquierdo (6a), (6b), (6c) son idénticos, eso permite que los miembros del lado derecho también lo sean. Por lo tanto es evidente que F_1 , F_2 , i F_3 son funciones de t solamente. Si el flujo es estable, la ecuación (6) se reduce a:

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \Omega + \frac{P}{\rho} = \text{constante}$$

Ec.(7)

La ecuación 7 puede ser escrita,

$$\frac{V^2}{2g} + z + \frac{P}{\gamma} = \text{constante}$$

Ec.(8)

Donde:

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

$$\Omega = gz$$

γ = peso específico

Otra manera de expresar la ecuación (8) es:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

Ec.(9)

La ecuación (9) es válida para un fluido ideal. **Para** un fluido real esta ecuación no es exacta debido a la presencia de las fuerzas de corte. **Para** tomar en cuenta aquellas fuerzas de corte, se le añade a la ecuación un término llamado pérdida de cabeza hidrostática.

Esta llamada pérdida de cabeza hidrostática toma en consideración la transformación de energía mecánica en energía térmica debido a los esfuerzos aplicados.

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$

Ec.(10)



Esta es la forma modificada de la ecuación de Bernoulli que deberá ser **usada** en la determinación de la forma del cono.

La ecuación (10) puede escribirse:

$$z_2 = \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{P_2}{\gamma} - \frac{V_2^2}{2g} - h_L$$



Ec.(11)

La Figura 4 muestra una representación gráfica de la ecuación de Bernoulli. Aunque esta figura representa el flujo dentro de un canal abierto, los principios del diagrama son los mismos del flujo de fluidos en medios porosos o flujo de cualquier fluido real.

1.3 DETERMINACION DE LA FORMA DEL CONO POR USO DE HIDRODINAMICA (9).

En hidrodinámica se trata con el flujo de un fluido ideal, el cual tiene las características de incompresibilidad, viscosidad **cero**, y forma perfecta en límites rígidos. Los conceptos de la función de corriente y de la función potencial **son** básicos para cualquier tratamiento de hidrodinámica. La función de corriente ψ es definida por los conceptos de velocidad u y v en plano bidimensional como:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Ec.(12)

Cuando una función de corriente es igualada a una constante particular representa una línea de corriente dentro de un modelo particular de flujo. También, la diferencia numérica entre dos funciones de corriente cualesquiera es la tasa de flujo que existe entre estas dos funciones de corriente. Las funciones de corriente pueden existir en ambos flujo rotacional e irrotacional. En el flujo irrotacional una sola función de corriente puede satisfacer a la vez a la ecuación de Laplace y a los límites requeridos para un modelo particular de flujo.

En el flujo irrotacional, existe una familia de curvas las cuales son ortogonales a las funciones de corriente. Aquellas curvas son funciones de potencial de velocidad y son definidas por la ecuación:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = V_s$$

Ec.(13)

Donde:

V_s : velocidad en dirección de la distancia S

Como la función de corriente, la función potencial de velocidad es también una

solución de la ecuación de Laplace en flujo irrotacional. La ecuación (14) es una forma general de la ecuación de Laplace para dos dimensiones

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$



BIBLIOTECA

Ec.(14)

El contacto agua-petróleo , el cual representa al cono de agua mostrado en la Figura 3, es una línea de corriente. Por consiguiente, si para un grupo de condiciones límites la función de corriente puede ser determinada en términos de x i y , entonces debe existir una expresión general para el contacto agua petróleo como una función de x i y . Esta expresión sería una solución general para la forma del cono de un fluido ideal el mismo que no es posible por ser el caso de un flujo particular en cuestión, debido a que los fluidos son viscosos, inmiscibles, ligeramente compresibles, y varían en densidad. Pero la variación de densidad e inmiscibilidad es el producto de la presencia de agua y petróleo, por lo tanto para el desarrollo del modelo matemático se asume un solo fluido y así una sola densidad, este hecho no debe negar la veracidad de los resultados.

1.3.1. La variable compleja y el plano. (7,9)

Un número que tiene dos partes escalares distintas, a i b , y es escrito en la forma $a+ib$, donde $i = \sqrt{-1}$, es un número complejo. La letra a es la parte real y la letra b es la imaginaria.

El diagrama de Argand en la Figura 5 da una representación geométrica de los números complejos, con x e y sustituidos respectivamente.

Observando la Figura 5 es evidente que:

$$z = x + iy \quad \text{Ec. (15)}$$

Cuando x e y son consideradas variables, z es llamada una variable compleja y es igual a :

$$w = f(z) = f(x + iy) \quad \text{Ec. (16)}$$

La función $f(z)$ es también una variable compleja y es analítica, porque dentro de una región la derivada de la función tiene un valor único en cada punto y tiene solamente un valor finito de $f(z)$ para cualquier valor de z . La variable compleja w puede ser separada en dos partes, real e imaginaria llamadas ϕ e ψ respectivamente.

$$w = \phi + i\psi \quad \text{Ec. (17)}$$

Es bastante obvio que w es una función de x e y , como también ϕ e ψ .

$$w = \phi + i\psi = f_1(x, y) + if_2(x, y) \quad \text{Ec. (18)}$$

El número complejo, $z = x + iy$ define un punto en el diagrama de Argand el cual puede ser también llamado el plano z . Similarmente, $w = \phi + i\psi$ define un punto en el plano w donde ϕ es la abscisa y ψ es la ordenada. Para cualquier punto en el plano z habrá un punto correspondiente en el plano w , cambiado de posición por la transformación del plano z al plano w .

Si ψ es considerado como una función de corriente y ϕ como una función potencial de velocidad, la forma de las líneas ψ y las líneas ϕ en el plano w

representan un flujo uniforme paralelos a los ejes ϕ y en la dirección positiva ϕ . Cuando las líneas ϕ y las líneas ψ son trazadas en el plano z , ellas representan el modelo físico real.

La función $w = f(z)$ siempre toma el modelo de flujo paralelo, de izquierda a derecha en el plano W y es una representación del flujo físico en el plano z . La Figura 6 ilustra las características del plano z y del plano W . La función $W = f(z)$ puede ser considerada como una transformación del modelo del flujo real del plano z en el modelo de flujo uniforme del plano W . Cuando $w = f(z)$ es conocida la parte real $\phi = f_1(x,y)$ igualada a una constante es la ecuación de las líneas equipotenciales en el plano Z , la parte imaginaria $\psi = f_2(x,y)$ igualada a una constante es la ecuación de las líneas de corriente en el plano z . Cada línea potencial y cada línea de corriente tienen su propia constante, diferente una de otra.

1.3.2 Transformación Schwarz-Christoffel (9)

La Figura 3 ilustra el flujo de fluidos reales a la boca del pozo. La Figura 7 muestra el modelo físico del flujo de un fluido escapando por una abertura ubicada en el centro de un rectángulo. Este tipo de rectángulo o polígono simple cerrado es llamado faja de tierra semi-infinita y tiene por definición que dos de sus vértices tienden al infinito. En la Figura 7 observamos que el rectángulo es simétrico con respecto al eje x , si consideramos solamente

la mitad más baja del rectángulo, es evidente que Cste modelo de flujo es similar al de la Figura 3 en el lado derecho. Asumiendo simetría con respecto a los ejes del pozo, el modelo de flujo en la Figura 7 es similar al modelo de flujo de la Figura 3 en el lado izquierdo.

El teorema de Schwarz-Christoffel facilita la transformacido de cualquier polígono cerrado simple en la mitad de un plano modelo el cual es la mitad superior de un plano comunmente conocido como el plano t . Vallentine expresa este teorema como lo siguiente:

El interior del modelo de flujo de un polígono cerrado simple puede ser transformado en la mitad superior de un plano, siendo transformado en su totalidad los límites del polígono en los ejes reales del plano t . Si el polígono está en el plano z y el nuevo plano es el plano t , entonces la transformación es:

$$\frac{dz}{dt} = A(a-t)^{-\frac{\alpha}{\pi}} (b-t)^{-\frac{\beta}{\pi}} (c-t)^{-\frac{\gamma}{\pi}}$$

Ec.(19)

Donde :

A: $Re^{i\theta}$ es una constante compleja.

a, b, c : son constantes reales en orden de magnitud ascendente .

α, β, γ : son ángulos de desviación externa del polígono.

La transformacido puede ser concebida como una abertura hecha en un polígono cerrado simple, ubicada en un punto conveniente extendiéndose Cste polígono a lo largo de los ejes reales del plano t .

En la Figura 7 la cual representa el plano z , $ABCD$ es una tira horizontal semi-infinita de altura 1. Los puntos correspondientes en el plano t son también A , B , C y D . Aquellos puntos son arbitrariamente colocados de modo que A es en $t = -\infty$, B es en $t = -1$, C es en $t = +1$, y D es en $t = +\infty$. La Figura 8 ilustra la tira semi-infinita transformada en el plano t , desarrollada a lo largo de los ejes reales de dicho plano.

La ecuación (19) puede ser escrita.

$$z = A \int \frac{dt}{(-1-t)^{1/2} (1-t)^{1/2}} + B$$

Ec.(20)

Donde $(a-t)$ i $(d-t)$ son omitidos porque los vértices A y D son infinitos.

Simplificando e integrando la ecuación (20) obtenemos:

$$z = A \cosh^{-1} t + B$$

Ec.(21)

~~Para~~ evaluar A i B es necesario acudir a la Figura 7 y usar las condiciones de borde, las mismas que están en los vértices B i C . ~~Estas~~ condiciones son:

$$\text{Para } C, z = -\frac{1}{2}i \text{ siendo } t=1$$

$$\text{Para } B, z = \frac{1}{2}i \text{ siendo } t=-1 \quad \text{Ec.(22)}$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuación (21) y resolviendo ~~para~~

t .

$$t = i \operatorname{senh} (\pi/1 z) \quad \text{Ec. (23)}$$

La ecuación (23) representa la función de transformación desde el plano z al plano t . De esta manera, es necesario hacer una transformación desde el plano t al plano w . El plano w es ilustrado en la Figura 6a. Debe ser notado que el plano w tiene una forma similar en lo que respecta a la tira infinita desde el plano t a el plano z ver Figura 9a., la misma que tiene vértices A, B, C, i D al infinito. Usando la transformación Schwarz-Christoffel, se ha establecido que la transformación para una tira infinita desde el plano t a el plano z es:

$$z = \frac{1}{\pi} \operatorname{Int} t$$

Ec.(24)

Sin embargo una tira infinita en el plano z , es en parte idéntica al plano w , y la forma de la ecuación (24) puede ser usada como la transformación desde el plano t al plano w . Efectuando $1 = Q$, y un cambio de signo por la existencia de un sumidero.

$$w = -\frac{Q}{\pi} \operatorname{Int} t$$

Ec.(25)

Esta expresión es la transformación de un sumidero centrico para el origen

de un flujo paralelo en una tira infinita del plano z .

Reemplazando; la ecuación (23) en la ecuación (25) obtenemos $w=f(z)$

$$w = -\frac{Q}{\pi} \ln \left[\sinh \left(\frac{\pi}{1} z \right) \right]$$

Ec.(26)

Sustituyendo $w = \phi + i\psi$; $z = x + iy$ en la ecuación (26) e igualando las partes reales e imaginarias , obtenemos:

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2\pi x}{1} - \cos \frac{2\pi y}{1} \right) \right]$$

Ec.(27)

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \left| \frac{\tan \frac{\pi y}{1}}{\tanh \frac{\pi x}{1}} \right|$$

Ec.(28)

La ecuación (28) es la descripción general para la forma del cono de uno o dos fluidos ideales.

14 FORMA DEL CONO POR EL USO DE LA LEY DE DARCY. (2,6)

Karp, Lowe y Marusov han desarrollado una ecuación de la forma del cono usando la ley de Darcy. Esta ecuación es válida para un sistema de flujo lineal, el cual representa el modelo de Hele-Shaw. La derivación de la ecuación de la forma del cono, usando la ley de Darcy, se presenta a continuación :

La Figura 10 representa la forma del cono de agua en un sistema de flujo lineal. Dos ecuaciones se deducen por las condiciones de presión en el eje referencial cero.

$$P_w(r,y) + \rho_w g y = P_c(r)$$

Ec.(29)

$$P_o(r,y) + \rho_o g(y-z) + \rho_w g z = P_c(r)$$

Ec.(30)

Donde:

$P_w(r,y)$: Presión en la zona de agua en el punto (r,y)

$P_o(r,y)$: Presión en la zona de petróleo en el punto (r,y)

$P_c(r)$: Presión en el eje referencial cero y radio r

Aplicando la ley de Darcy para las zonas de petróleo y agua.



$$V_o = -\frac{K}{\mu_o} \frac{\partial P_o(r,z)}{\partial r} ; \quad V_w = -\frac{K}{\mu_w} \frac{\partial P_w(r,z)}{\partial r}$$

Ec.(31)

Donde :

K : permeabilidad

~~Estas~~ velocidades dependen solamente del gradiente de presión en la dirección horizontal, pero esta suposición es incorrecta porque hay también un gradiente de potencial positivo en la dirección vertical específicamente en la cercanía de la boca del pozo.

Diferenciando las ecuaciones (29) i (30) con respecto a r obtenemos:

$$\frac{\partial P_w}{\partial r} = \frac{\partial P_c(r)}{\partial r}$$

Ec.(32)

$$\frac{\partial P_c}{\partial r} - \rho_o g \frac{\partial z}{\partial r} + \rho_w g \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial P_c(r)}{\partial r}$$

Ec.(33)

Substrayendo la ecuación (33) de la ecuación (32) da

$$\frac{\partial P_o}{\partial r} - \frac{\partial P_w}{\partial r} - \rho_o g \frac{\partial z}{\partial r} + \rho_w g \frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

Ec. (34)

Re-ordenando la ecuación (31) obtenemos:

$$\frac{\partial P_o}{\partial r} = \frac{-\mu_o V_o}{K} \quad ; \quad \frac{\partial P_w}{\partial r} = \frac{-\mu_w V_w}{K}$$

Ec. (35)

Combinando las ecuaciones (35) y (34) resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\mu_o V_o - \mu_w V_w}{Kg(\rho_w - \rho_o)}$$

Ec. (36)

Asumiendo la producción de petróleo libre de agua, la velocidad en la zona de agua es igual a cero. Pero esta suposición no es totalmente **correcta** porque el **agua** llegará a ser producida y tomará cierta velocidad para que **se** forme el **cono** de agua. Con esta suposición,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\mu_o V_o}{Kg(\rho_w - \rho_o)}$$

Ec. (37)

Sustituyendo el valor del área de la sección transversal de interface

$A_0 = (h-z) W_1$, en la ecuación anterior da:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\mu_o Q_o}{Kg(\rho_w - \rho_o)(h-z) W_1}$$

Ec. (38)

Donde $W_1 =$ ancho de la grieta.

La expresión mencionada para el Área de interface no es correcta. El Área efectiva disponible para el flujo de un fluido es el Área delineada por la función de velocidad potencial. Por lo expuesto anteriormente el Área es correcta siempre que las funciones de velocidad potencial sean líneas verticales. Para ciertas distancias de la boca del pozo donde la curvatura de las líneas de corriente son pequeñas esta suposición es muy buena. Sin embargo para aquel flujo tan cercano a la boca del pozo, las líneas de corriente están curvadas y por lo tanto la exactitud de la aproximación para el Área de flujo rápidamente disminuye.

De allí que z solamente es una función del radio,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{dz}{dr}$$

Ec. (39)

Separando variables y poniendo la ecuación (38) en forma de integral.

$$\int_{h-D}^0 (h-z) dz = \frac{\mu_o Q_o}{Kg(\rho_w - \rho_d) W_1} \int_{r_w}^{r_o} dr$$

Ec. (40)

Integrando y despejando la tasa de flujo obtenemos:

$$Q_o = \frac{-KgW_1(\rho_w - \rho_d)(h^2 - D^2)}{2\mu_o(r_o - r_w)}$$

Ec.(41)

Sustituyendo Q_o en la siguiente ecuación

$$(h-z) dz = \frac{\mu_o Q_o}{Kg(\rho_w - \rho_d) W_1} dr$$

Ec.(42)

Y expresando en forma integral

$$\int_0^z (h-z) dz = -\frac{1}{2} \left[\frac{h^2 - D^2}{r_o - r_w} \right] \int_{r_o}^r dr$$

Ec.(43)

Integrando y despejando z resulta:

$$z = h - \sqrt{h^2 - \frac{(h^2 - D^2)(r_o - r)}{r_o - r_w}}$$

Ec.(44)

Esta última expresión es la ecuación para la forma del **cono** en un sistema lineal, como el mostrado por Karp, Lowe y Marusov. La altura **z** del **cono** es una función de h , D , r_o , r_w , y r , todos los cuales **son** determinados fácilmente. Como se indicó anteriormente, las asunciones son muy limitadas. Esta ecuación va a ser comparada con las otras dos ecuaciones de la forma del cono.

(Capitulo 111)



CAPITULO II

SOLUCION DE LA ECUACION DE BERNOULLI PARA LA FORMA DEL CONO

Para una mejor comprensión de este capítulo se lo ha dividido en tres partes:

- 1) Datos experimentales para el análisis de la ecuación de Bernoulli para la forma del cono
- 2) Una solución de la ecuación de Bernoulli para la forma del cono, y
- 3) Una aplicación práctica de la ecuación de Bernoulli **para** la forma del cono.

2.1 DATOS EXPERIMENTALES (MODELO HELESHAW) (6)

Una vez obtenida una solución de la ecuación de Bernoulli para la forma del cono, es necesario para el análisis de la misma usar **casos** de flujo de fluido real , éstos casos **se** basan en el trabajo de Smith, que abarcó diferentes métodos de control del **cono** de agua usando datos experimentales obtenidos en el simulador de flujo de Hele-Shaw. Estos mismos datos experimentales **se** usaron como base para el análisis, de la ecuación de Bernoulli para la forma del cono.

El modelo de Hele-Shaw representa la mitad derecha de un sistema de flujo lineal bidimensional similar a la mitad derecha de la Figura 3. Observando Csta figura notamos que es simétrica respecto a los ejes del pozo, entoces el modelo también representa la mitad izquierda de la Figura 3. Por lo tanto se asume que el modelo de Hele-Shaw debe dar una buena representación de la forma del cono en un sistema de flujo lineal a través de un medio con permeabilidad isotrópica.

Las diferentes formas del cono obtenidas en el modelo de Hele-Shaw fueron graficadas por Smith a escala fotográfica, de Csta manera para los análisis siguientes de la forma del cono deben contar con Cstas graficas del contacto agua-petróleo elaboradas por Smith.

2.2 SOLUCION DE LA ECUACION DE BERNOULLI PARA LA FORMA DEL CONO.

La ecuación de Bernoulli para la forma del cono es:

$$z_2 = \frac{P_1}{\gamma} - z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{P_2}{\gamma} - \frac{V_2^2}{2g} - h_L$$

Ec.(11)

En Csta forma la ecuación no tiene significado particular alguno como

una ecuación **para** la forma del cono. La forma del **cono** es una función de los radios desde la boca del pozo. Por lo tanto una solución **para** z_2 **será** expresada en términos de estos radios, r .

Observando los términos en la ecuación de Bernoulli, es evidente que P_1/γ , z_1 , y $V_1^2/2g$ pueden ser medidos directamente en la boca del pozo. Los términos P_2/γ , $V_2^2/2g$ y h_L son medidos en el campo de flujo y dependen sobre todo de las condiciones que presenta dicho campo. Para analizar aquellas cantidades, **se** debe conocer cierta información con respecto al campo de flujo. ~~Esta~~ información es obtenida a partir de las pruebas de flujo de fluidos hecho en el modelo de Hele-Shaw. Las presiones son conocidas en dos lugares del campo. Los dos puntos son el de inyección y el de producción de fluidos en el modelo de Hele-Shaw, así como también nos da la entrada del contacto **agua-petróleo**, la presión y la **tasa** de flujo en la boca del pozo.

Con estos datos disponibles, es posible describir completamente el campo de flujo en términos de funciones potenciales y funciones de corriente. De **esta** manera describiendo el campo de flujo es posible calcular el campo de presión, velocidad y pérdida de cabeza como una función del radio, el contacto agua-petróleo es **parte** del campo de flujo donde aquellos términos van a ser evaluados. Con la presión, velocidad y pérdida de cabeza a lo largo del contacto agua-petróleo en términos de

radios, entonces z_2 es una función del radio que es la expresión deseada de la ecuación de Bernoulli para la forma del cono.

2.2.1. Flujo Neto

El gráfico de flujo **neto** se lo debe usar como un método de descripción al flujo observado en el modelo de Hele-Shaw. Un flujo **neto** es el resultado de la malla formada por una familia de líneas equipotenciales y una familia de líneas de corriente. La velocidad en el flujo **neto** es definida como:

$$V = \frac{\Delta\psi}{\Delta n} = \frac{\Delta\phi}{\Delta s}$$

Ec.(45)

Si las líneas de corriente y las líneas equipotenciales son escogidas de modo que $\Delta\psi$ igual a A_+ , entonces A_n será igual a A_s . Estos resultados en un flujo **neto** lógicamente ~~se tratan~~ de cuadriláteros casi cuadrados. Si, entre todas las líneas de corriente, $\Delta\psi$ es igual a una constante y A_n igual a A_s , entonces A_+ es igual a una constante entre todas las líneas equipotenciales durante todo el flujo **neto**. Algunas características básicas de flujo **neto**:

- 1) Están basados en la suposición de un flujo irrotacional el cual no necesita ser continuo (estable)
- 2) Hay un único modelo de flujo para un grupo de condiciones límites dadas.
- 3) Las líneas equipotenciales **se** intersectan perpendicularmente con las líneas de corriente.
- 4) **Todos** los lados de una rejilla cuadrada deben ser tangentes a un círculo construido en el centro del cuadrado.
- 5) En regiones de flujo uniforme las rejillas cuadradas son de igual **tamaño** o medida, en regiones de flujo divergente las rejillas cuadradas aumentan su tamaño y en regiones de fluido convergente las rejillas cuadradas disminuyen su **tamaño**.
- 6) El tamaño de los cuadrados disminuyen hacia el interior de las curvas o decrecen los radios.
- 7) Las líneas de corriente, como límites sólidos pueden actuar como límites de flujo neto.

El método de construcción de un flujo **neto** es básicamente un procedimiento de prueba y error. Primero un área de flujo uniforme es seleccionada y luego el número de líneas de corriente debe ser determinado. Así trazadas las líneas de corriente, las líneas equipotenciales son dibujadas, cumpliendo con las condiciones de ser ortogonales y formar cuadrados con

las líneas de corriente. Si obtenemos un flujo **neto** del pozo entonces este esquema **será** una representación exacta del campo del flujo **neto** del yacimiento.

La forma del cono mostrada en las Figuras 11 y 12 es basada en una prueba de conificación de agua hecha por Smith. La Figura 11 tiene superpuesto un **flujo neto** en la zona de petróleo y la Figura 12 tiene superpuesto un flujo **neto** en la zona de agua. La Tabla I presenta los datos que son pertinentes a ambas figuras.

2.2.2. Determinación de la presión como una función del radio.

Ahora es necesario hallar la variación de presión a lo largo del contacto agua-petróleo como una función del radio. Las presiones son conocidas en los puntos (3) y (1) en la Figura 11. La presión en el punto (3) es 0,4359 lpc y en el punto (1) es 0,2383 lpc. La presión en cada línea equipotencial a lo largo del contacto del modelo de petróleo **se** determina, debido al hecho de que existe una caída de igual potencial entre las líneas. Puesto que hay cuarenta líneas equipotenciales entre los puntos (3) y (1), el incremento de la caída de potencial es:

$$\Delta\phi = \frac{0.4359 - 0.2383}{40} = 0.00494 \text{ /pc}$$

A lo largo del contacto del modelo de petróleo, el incremento de la caída de potencial es igual al incremento de la caída de presión. La presión a lo largo de una línea equipotencial varía solamente con el efecto de la presión hidrostática, así, la presión de cada línea equipotencial a lo largo del contacto agua-petróleo puede calcularse. La Figura 14 es un diagrama de la presión en el contacto agua-petróleo como una función del radio.

La Figura 13 es una curva con dos regiones distintas. Una región, $r=0$ a $r=10$ pulgadas, es una región con un gradiente de presión que varía rápidamente. Esta región es creada por la variación rápida del gradiente de potencial y la cabeza hidrostática produciendo la curvatura de líneas de corriente y la contracción del flujo. La otra región, $r=10$ a $r=60$ pulgadas, es una región de gradiente de presión constante. Esto es debido al hecho de que la región tiene flujo uniforme.

Para encontrar la presión en el contacto agua-petróleo como una función de radio, es necesario aproximar la curva de la Figura 13. Puesto que el radio es la única variable considerada, se aplicará una aproximación polinomial. Para esto se propone la

siguiente aproximación:

$$P(r,z) = a + br^{1/2} + cr^{1/3} \quad \text{Ec. (46)}$$

Si buscando mayor exactitud la ecuación (46) exigiría una serie de raíces de orden superior, pero el objetivo de este trabajo es usar aproximaciones polinomiales tal que ~~sea~~ factible su resolución aplicando operaciones algebraicas básicas evitando el uso de métodos numéricos.

Adn cuando la aproximación mostrada sobre Csto no es exacta, tuvo una desviación media de 0.0008 lpc, y un error promedio de 0.129 %. Esto indica que la aproximación es excelente cuando se considera el grado de exactitud de los datos.

2.2.3. Determinación de la velocidad como una función del radio.

La velocidad a lo largo del contacto agua-petróleo es el próximo parámetro a considerarse. Para determinar la velocidad a lo largo del contacto **agua-petróleo**, es necesario hacer tres suposiciones:

(1) Existe una falla bien definida a lo largo del contacto agua

petróleo.

(2) La distribución de velocidad entre dos líneas de corriente cualesquiera es uniforme.

(3) La velocidad en el contacto agua-petróleo es el promedio de las velocidades inmediatamente contiguas al contacto.

La Figura 14 ilustra las suposiciones antes mencionadas. La velocidad en el contacto agua-petróleo es:

$$V(r,z) = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

Ec.(47)

Las suposiciones anteriores facilitan el cálculo de la velocidad a lo largo del contacto agua-petróleo. Es obvio que aquellas suposiciones no sean estrictamente **correctas** para el flujo de un fluido real. La Figura 14 también muestra el probable perfil de velocidad real que cruza aproximadamente el contacto agua-petróleo entre los valores V_1 y V_2 . Este hecho da crédito a la técnica del cálculo empleada **para** hallar la velocidad a lo largo del contacto agua-petróleo.

Para el modelo de prueba los resultados en la Tabla I, las Figuras 11 y 12 presentan gráficos de flujo **neto** en las zonas de

petróleo y agua respectivamente. El flujo entre las líneas de corriente ψ_0 y ψ_1 , en ambas zonas de petróleo y agua van a usarse para el cálculo de las velocidades contiguas al contacto petróleo y agua. La velocidad adyacente al contacto agua-petróleo es:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\Psi_1 - \Psi_0}{A}$$

Ec.(48)

Donde A: área delineada por las líneas equipotenciales.

Resolviendo la velocidad en las zonas de petróleo y agua, aplicando la ecuación (47) se calcula la velocidad a lo largo del contacto agua-petróleo.

Para el modelo de prueba mencionado anteriormente, la velocidad a lo largo del contacto agua-petróleo como una función del radio, se muestra en la Figura 15. La Figura 15 ilustra muy claramente al agudo crecimiento de la velocidad que ocurre en el intervalo desde $r=0$ a $r=8$ pulgadas. Este agudo crecimiento de velocidad refleja el hecho de que las líneas de corriente están

sujetas a una curvatura excesiva y convergente. Además esta región de gran cambio de pendiente en la Figura 15 es la misma región que presenta un gran cambio de pendiente en el contacto agua-petróleo. Esta región de excesiva curvatura en las líneas de corriente actúa como una zona de transición desde el flujo de aceleración lenta a el flujo de aceleración rápida.

La velocidad a lo largo del contacto agua-petróleo como una función del radio puede ser aproximado por:

$$V_2 = \frac{a_1}{r} + b$$

Ec.(49)

Inmediatamente se nota que esta ecuación no es válida en $r=0$, dado que la velocidad se convierte en un valor infinito. También para resolver el valor constante de la constante b, es necesario asumir que el término a_1/r es cero en algún radio infinito. Estas dos condiciones no restringen la exactitud de la ecuación. Esta aproximación mostró una desviación media de -0.0022 pulg/seg y un error promedio de -2.62%.

2.2.4. Determinación de la pérdida de cabeza hidrostática como una función del radio.

La velocidad y la presión a lo largo del contacto agua-petróleo han sido descritas como una función del radio. Ahora es posible calcular la pérdida de cabeza hidrostática como una función del radio usando la ecuación :

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$

Ec.(10)

Ecuación que permite el cálculo de la pérdida de **cabeza** hidrostática, dado que todas las otras cantidades son conocidas a partir de la prueba del modelo.

El diagrama de la pérdida de cabeza hidrostática **como** función del radio es mostrado en la Figura 16. La línea continua en la Figura 16 representa la aproximación:

$$h_L = a_2 r \quad \text{Ec.(50)}$$

Los valores reales de la pérdida de cabeza hidrostática en la

Figura 16 se desvían con respecto a la aproximación en las cercanías del pozo . Esta variación de los valores reales y aproximados de la pérdida de cabeza hidrostática pueden ser explicados conociendo que: la pérdida de **cabeza** hidrostática es directamente **proporcional** a la distancia y a la velocidad promedio con que viaja la partícula de fluido. De $r=6$ a $r=60$ pulgadas, el flujo de fluido a lo largo del contacto agua-petróleo es casi **paralelo** al plano horizontal. La velocidad en esta región es constante. Así, la pérdida de **cabeza** hidrostática varía linealmente con respecto al radio y existe una pequeña divergencia entre los valores reales y aproximados de pérdida de cabeza hidrostática.

En el intervalo $r=0$ a $r=6$ pulgadas, el flujo cambia su dirección aproximándose a **90°**, y la velocidad en **esta** región aumenta repentinamente. Dado que el fluido en **este** intervalo recorre una distancia mayor de 6 pulgadas indicada en la Figura 16, entonces la pérdida de cabeza hidrostática sería mayor que la calculada por la aproximación. El efecto del aumento de velocidad en el intervalo simplemente **se** suma a la divergencia causada por el aumento de longitud de flujo.

2.2.5. La ecuación de Bernoulli para la forma del cono.

Basado en el análisis del modelo de prueba mencionado en la Tabla I, todos los términos en el lado derecho de la ecuación de la forma del cono de Bernoulli:

$$z_2 = \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{P_2}{\gamma} - \frac{V_2^2}{2g} - h_L$$



BIBLIOTECA
E. C. (11)

han sido descritos. Dado que la presión P_2 , velocidad V_2 y la pérdida de cabeza hidrostática h_L han sido expresados en función del radio desde la boca del pozo, la ecuación de la forma del cono de Bernoulli será escrita como:

$$z_2 = \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{P_2}{\gamma} - \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$

(11)

El cambio de signo del término pérdida de cabeza hidrostática toma en cuenta el hecho de que la ecuación es utilizada en una dirección opuesta al flujo de fluido. Sustituyendo los segundos valores de velocidad, presión, y pérdida de cabeza hidrostática como una función del radio, resulta:

$$z_2 = \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{1}{\gamma} [a + br^{1/2} + cr^{1/3}] - \frac{\left[\frac{a_1}{r} + b_1 \right]^2}{2g} + a_2 r$$

Ec. (52)

En la aplicación de *Csta* ecuación, ha sido determinado que el término de velocidad que tiene significado numérico es V_1 (velocidad en la boca del pozo). Así, la ecuación (52) puede ser reducida a:

$$z_2 = \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{1}{\gamma} [a + br^{1/2} + cr^{1/3}] + a_2 r$$

Ec. (53)

Esta es la forma final de la ecuación de Bernoulli para la forma del cono. Cuando se revisó la ecuación con el contacto agua-petróleo en la Figura 11, dió una desviación promedia de 0.066 pulgadas y un error promedio de 0.87%.

23 APLICACION DE LA ECUACION DE LA FORMA DEL CONO DE BERNOULLI.

Una **técnica** para aplicar la ecuación de la forma del **cono** de Bernoulli es estructurada con la suposición que puede obtenerse cierta información particular del yacimiento. La Figura 17 muestra los datos que son

necesarios para la aplicación de esta ecuación de la forma del cono.

Estos datos son:

- 1) Tasa de flujo, presión, radio del pozo, e intervalo productor a la boca del pozo.
- 2) Espesor de la zona permeable.
- 3) Presión definida en alguna distancia r_e , y a cierta altura Y , en una región de flujo uniforme.
- 4) Elevación del contacto agua-petróleo a la misma distancia r_e , en una región de flujo uniforme.

Esta solución técnica debe probarse contra los otros modelos de prueba conocidos realizados por Smith. Al construir esta solución técnica la suposición básica deberá ser tal que la forma del cono en el modelo es representativa de la forma del cono en el yacimiento. También en definir los diferentes términos en la ecuación de Bernoulli, a las respectivas condiciones del yacimiento.

2.3.1. Determinación de V , P_1 , y z_1 (Condiciones de la boca del pozo)

La velocidad en la boca del pozo es obtenida con la siguiente ecuación:

$$V_1 = \frac{Q_o + Q_w}{2 \pi r_w D}$$

Ec.(54)

~~Esta~~ velocidad promedio en la boca del pozo es una aproximación de la velocidad a lo largo del contacto agua-petróleo. En el yacimiento, la presión P, puede obtenerse usando una bomba de presión. La altura del contacto agua-petróleo Z, es equivalente a la altura de la zona permeable h menos la profundidad del pozo D.

2.3.2. Determinación de P_2 (a una distancia r del pozo).

La relación de la presión a lo largo del contacto agua-petróleo como una función del radio es:

$$P_2 = a + br^{1/2} + cr^{1/3} \quad \text{Ec.(46)}$$

~~Esta~~ ecuación requiere conocer la presión en tres puntos diferentes a lo largo del contacto agua-petróleo. La Figura 17 muestra que hay solamente dos puntos donde las presiones son conocidas. Aquellos puntos son:

- 1) En la boca del pozo, y

2) En un radio r_e , a una altura Y (zona de flujo uniforme). Por lo tanto una solución **para** la ecuación (46) es obtenida con el análisis de un modelo de presión a lo largo de la interface en el modelo de petróleo como una función del radio. La Figura 18 muestra la variación de presión con el radio **para** la condición descrita anteriormente. Este gráfico **se** basa en las condiciones de **flujo** descritas en la Tabla I, y la Figura 11.

El incremento de presión es muy agudo desde $r=0$ a $r=6$ pulgadas debido **al** cambio rápido de gradiente de potencial en este intervalo. Cuando el radio es mayor que 6 pulgadas, la pendiente de la curva es aproximadamente constante. El gradiente de potencial es **esta** región también es aproximadamente constante y la presión como una función del radio **se** convierte esencialmente en una relación lineal. Para esto **se** propone la siguiente ecuación:

$$P_{\infty r} = a + br^{2/3} \quad \text{Ec.}(55)$$

Que **se** convierte en una buena aproximación de la curva representada en la Figura 18. Esta aproximación da una desviación promedio de -0.004 lpc y un error promedio de -1.2%. Así, la presión a lo largo de la interface de petróleo en

el yacimiento puede ser correctamente descrita.

Ahora es necesario transferir un valor conocido de presión en el contacto petróleo-yacimiento a un punto en el contacto agua-petróleo. Este punto en el contacto agua-petróleo estará entre $r=0$ y $r=r_e$, en la región de flujo uniforme.

En la región de flujo uniforme la presión en el contacto agua-petróleo para algunos radios r es igual a la presión en el contacto petróleo-yacimiento a ese mismo radio r , más el efecto de la cabeza hidrostática. De esta manera si logramos determinar una buena aproximación para la forma de la interface agua-petróleo evaluada para ciertos radio r (zona de flujo uniforme), entonces es posible determinar el efecto de la cabeza hidrostática y por ende el valor de la presión para esos radios.

Usando la forma del cono ilustrada en la Figura 12, una buena aproximación de la forma del cono en la región de flujo uniforme sería:

$$(h-z) = a + br^{1/2} + cr^{1/3} \quad \text{Ec. (56)}$$

Esta aproximación mostró una desviación promedio de -0.10

pulgadas y un error promedio de 0.89%, cuando se probó con la Figura 11.

La ecuación (56) tiene 3 constantes y solamente dos condiciones conocidas, por lo tanto se debe aplicar un método empírico para resolver aquellas constantes desconocidas en esta ecuación. El método implica los siguientes pasos:

- 1) Tomar $r=0$. Sabiendo que $(h-z)$ en $r=0$ es una solución para la constante **a**
- 2) Elegir una distancia radial desde el pozo para lo cual la presión del contacto agua-petróleo sea necesario.
- 3) Determinar la distancia entre los radios elegidos en (2) y el radio r_e , punto en el cual el contacto agua-petróleo es conocido.
- 4) Arbitrariamente se escoje un punto en el contacto agua-petróleo el cual está a la distancia determinada en (3), fuera de r_e (Suponer que $r_e = 60$ pulgadas. La presión deseada a $r = 40$ pulgadas. Arbitrariamente se escoje el punto en el contacto agua-petróleo para $r = 80$ pulgadas)
- 5) Del punto determinado en (4), asumir que el contacto agua-petróleo está al mismo nivel como en r_e .
- 6) Tres puntos en el contacto agua-petróleo son ahora conocidos y se procede a determinar la solución de tres ecuaciones

simultáneas.

Esta **técnica** es muy buena **para** determinar un punto intermedio en el contacto agua-petróleo, en la región de flujo uniforme debido a que el rango de error está de 1 a 3%.

De esta manera la presión para ciertos puntos intermedios en el contacto agua-petróleo pueden ser determinados, dado que **se** calcula el valor de la cabeza hidrostática conociendo la elevación del contacto agua-petróleo para algunos radios r .

Tres presiones en el contacto agua-petróleo son **ahora** conocidas.

Aquellas presiones son:

- 1) La presión en la boca del pozo.
- 2) La presión en el contacto agua-petróleo a un radio r .
- 3) La presión en el contacto agua-petróleo en el radio r_* .

Así **se** puede calcular el valor de las tres constantes en la ecuación **(46)** resolviendo las tres ecuaciones simultáneas.

Entonces la presión en el contacto agua-petróleo es explícita en términos de los radios desde la boca del pozo.



2.3.3. Determinación de h_L .

BIBLIOTECA

La expresión para la pérdida de cabeza como una función de radio es:

$$h_L = a_2 r \quad \text{Ec. (50)}$$

La pérdida de cabeza para el radio r_e es calculada por la ecuación :

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$



BIBLIOTECA

Ec. (10)

Donde $V_2^2/2g=0$

Conociendo el valor de h_L para una distancia r_e y evaluando en la ecuación (50) obtenemos el valor de la contante a .

2.3.4. Procedimiento para la aplicación de la ecuación de Bernoulli para la forma del cono.

El procedimiento tiene tres secciones donde se muestra como los términos de la ecuación de Bernoulli van a determinarse. Además se plantea un procedimiento secuencial para determinar

la ecuación de Bernoulli para la forma del **cono** y la aplicación del mismo **para** resolver un problema **tipo** donde **se** ilustra detalladamente ésta solución técnica.

El procedimiento para determinar la ecuación de Bernoulli para la forma del **cono** **se** presenta a continuación:

- 1) Recolectar datos. Proporcionar datos confiables incluidos h , ρ_o , ρ_w , P_1 , Q_t , r_w , D , $P(r_e, y)$, Y $z(r_e)$.
- 2) Calcular la velocidad en la boca del pozo (V_1).
- 3) Convertir $P(r_e, y)$ a presión en el contacto petróleo-yacimiento en el radio r_e .
- 4) Determine las constantes en el contacto petróleo-yacimiento de la ecuación de presión:

$$P_{o-r} = a + br^{2/3}$$

- 5) Arbitrariamente elija una distancia r la cual sea entre $r=0$ y $r=r_e$, y que **se** encuentra en la región de flujo uniforme (Sugerencia: $r=2/3 r_e$).
- 6) Calcule la presión en el contacto petróleo-yacimiento en el radio r .
- 7) Calcule la presión en el contacto agua-petróleo en el radio

$(2r_e - r)$. Asuma que el nivel del contacto agua-petróleo en el radio $(2r_e - r)$ es el mismo como es en el radio r_e .

8) Resuelva el valor de las constantes en la ecuación de **flujo** uniforme **para** la forma del cono.

$$(h-z) = a + br^{1/2} + cr^{1/3}.$$

9) ~~Use~~ la ecuación (8) para resolver el nivel del contacto agua-petróleo **para** el valor de r en (5).

10) Adicione la presión hidrostática en el radio r a el valor de la presión en (6). Siendo **Csta** la presión en el contacto agua-petróleo en el radio r .

11) Resuelva para las constantes en la ecuación de presión

$$P(r,z) = a + br^{1/2} + cr^{1/3}$$

12) Resuelva para la pérdida de cabeza desde $r=0$ a $r=r_e$ usando:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + h_L$$

13) Resuelva para la constante en la ecuación de **cabeza**:

$$h_L = a_2 r$$

14) Escriba la ecuación para la forma del **cono** de Bernoulli y resuelva **para** determinar la forma del cono.

El ejemplo siguiente, basado en los **datos** de la Tabla II, debe aclarar este método descrito. La Figura 19 muestra la forma del cono de agua para los datos de la Tabla II (**Caso I**).

A partir de la Tabla II y la Figura 19, los siguientes datos son conocidos:

1) Presión en la boca del pozo	0.1079 lpc
Tasa de flujo de petróleo	0.0479 pulg ³ /seg
Relación agua petróleo	0.542
Presión en $r_e = 60$ pulg (Contacto petróleo-yacimiento)	0.5320 lpc
Ancho del flujo	0.015 pulgadas
Profundidad del intervalo productor	0.375 pulgadas
Altura de la zona permeable	19.20 pulgadas
Altura del contacto agua petróleo en $r_e = 60$ pulgadas	6.6 pulgadas
Gravedad específica del agua	1.0078
Gravedad específica del petróleo	0.826

2) La velocidad en la boca del pozo es igual a

$$V_1 = \frac{0.0479 + 0.0479(0.542)}{(0.015)(0.375)} = 13.12 \text{ pulg/seg}$$

3) La presión en el contacto petróleo-yacimiento en $r_e=60$ pulgadas es $P_{160} = 0.532$ lpc

4) Resolviendo para las constantes en la ecuación:

$$P_{o-r} = a + br^{2/3}, \text{ con las condiciones}$$

$$r=0, P_{o-r} = 0.108 \text{ lpc}$$

$$r=60 \text{ pulgadas}, P_{o-r} = 0.532 \text{ psi}$$

Resulta

$$P_{o-r} = 0.108 + 0.0276r^{2/3}$$

Las constantes a y b fueron resueltas por el uso de dos ecuaciones simultáneas.

5) Si $r = 2/3 r_e$ entonces $r = 40$ pulgadas

6) La presión en el contacto petróleo-yacimiento en $r=40$ pulgadas es $P_r = 0.431$ lpc

7) El nivel del contacto agua-petróleo en un punto $(2r_e - r)$ o **80**

pulgada, desde la boca del **pozo** es 6.60 pulgadas.

8) Sabiendo que:

$$z = 6.60 \text{ pulgadas, } r = 60 \text{ pulgadas.}$$

$$z = 6.60 \text{ pulgadas, } r = 80 \text{ pulgadas}$$

$$z = 18.894 \text{ pulgadas, } r = 0$$

$$h = 19.20 \text{ pulgadas}$$

y resolviendo **tres** ecuaciones simultáneas, las constantes en la ecuación

$$(h-z) = a + br^{1/2} + cr^{1/3}, \text{ se convierte en}$$

$$(h-z) = 0.36 - 2.95r^{1/2} + 8.97r^{1/3}$$

9) En $r = 40$ pulgadas, el nivel del contacto agua-petróleo es $(h-$

$$z)|_{40} = 12.38 \text{ pulgadas}$$

$$(h-z)|_{60} = 12.63 \text{ pulgadas}$$

10) La presión en el contacto agua-petróleo es:

$$P(40, z) = 12.38 (0.0361)(0.826) + 0.431 = 0.798 \text{ lpc .}$$

11) Sabiendo que:

$$r = 0, P(r, z) = 0.108 \text{ lpc}$$

$$r = 40 \text{ pulgadas, } P(r, z) = 0.798 \text{ lpc}$$

$$r = 60 \text{ pulgadas, } P(r, z) = 0.908 \text{ lpc}$$

y resolviendo para las constantes en la ecuación

$$P(r,z) = a + br^{1/2} + cr^{1/3}$$

Resulta:

$$P(r,z) = 0.108 + 0.0204r^{1/2} + 0.164r^{1/3}$$

12) La pérdida de cabeza desde $r=0$ a $r=60$ pulgadas es:

$$h_L = \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{P_2}{\gamma} - z_2$$

$$h_L = \frac{0.108}{0.0364} + 19.20 + \frac{(13.12)^2}{772.8} - \frac{0.908}{0.0364} - 6.60$$

$$h_L = 9.29 \text{ pulgadas}$$

13) La ecuación de la pérdida de cabeza es

$$h_L = 0.1548r$$

15) La ecuación para la forma del cono es





$$z_2 = 22.38 - \frac{[0.108 + 0.0204r^{1/2} + 0.164r^{1/3}]}{0.0364} + 0.1548r$$

La solución para esta ecuación de la forma del cono es ilustrada en la Figura 19.

El ejemplo siguiente, basado en los datos de la Tabla 11, debe aclarar este método descrito. La Figura 20 muestra la forma del cono de agua para los datos de la Tabla III (Cam 11).

A partir de la Tabla III y la Figura 20, los siguientes datos son conocidos:

1) Presión en la boca del pozo	0.1079 lpc
Tasa de flujo de petróleo	0.0384 pulg³/seg
Relación agua petróleo	0.372
Presión en $r_e = 60$ pulg (Contacto petróleo-yacimiento)	0.5320 lpc
Ancho del flujo	0.015 pulgadas
Profundidad del intervalo productor	0.375 pulgadas
Altura de la zona permeable	19.20 pulgadas
Altura del contacto agua petróleo en $r_e = 60$ pulgadas	5.02 pulgadas
Gravedad específica del agua	1.0078

Gravedad específica del petróleo

0.826

2) La velocidad en la boca del **pozo** es igual a

$$V_1 = \frac{0.0384 + 0.0384 (0.372)}{(0.015) (0.375)} = 9.37 \text{ pulg/seg}$$

3) La presión en el contacto petróleo-yacimiento en $r_e = 60$ pulgadas es $P|_{60} = 0.532$ lpc

4) Resolviendo para las constantes en la ecuación:

$P_{\sigma-r} = a + br^{2/3}$, con las condiciones

$r=0$, $P_{\sigma-r} = 0.108$ lpc

$r=60$ pulgadas, $P_{\sigma-r} = 0.532$ psi

Resulta

$$P_{\sigma-r} = 0.108 + 0.0276r^{2/3}$$

Las constantes a y b fueron resueltas por el uso de dos ecuaciones simulatáneas.

5) Si $r = 2/3 r_e$ entonces $r = 40$ pulgadas

6) La presión en el contacto petróleo-yacimiento en $r=40$ pulgadas es $P_{\sigma-r} = 0.431$ lpc

7) El nivel del contacto agua-petróleo en un punto $(2r_e - r)$ o 80 pulgada, desde la boca del pozo es 5.02 pulgadas.

8) Sabiendo que:

$$z = 5.02 \text{ pulgadas, } r = 60 \text{ pulgadas.}$$

$$z = 5.02 \text{ pulgadas, } r = 80 \text{ pulgadas}$$

$$z = 18.84 \text{ pulgadas, } r = 0$$

$$h = 19.20 \text{ pulgadas}$$

y resolviendo tres ecuaciones simultáneas, las constantes en la ecuación

$$(h-z) = a + br^{1/2} + cr^{1/3}, \text{ se convierte en}$$

$$(h-z) = 0.36 - 3.32r^{1/2} + 10.11r^{1/3}$$



BIBLIOTECA

9) En $r = 40$ pulgadas, el nivel del contacto agua-petróleo es $(h-z)|_{40''} = 13.94$ pulgadas

$$(h-z)|_{60''} = 14.223 \text{ pulgadas}$$

10) La presión en el contacto agua-petróleo es:

$$P(40, z) = 13.94 (0.0361)(0.826) + 0.431 = 0.847 \text{ lpc .}$$

11) Sabiendo que:

$$r = 0, P(r, z) = 0.108 \text{ lpc}$$

$$r = 40 \text{ pulgadas, } P(r, z) = 0.847 \text{ lpc}$$

$r=60$ pulgadas, $P(r,z) = 0.956$ lpc

y resolviendo para las constantes en la ecuación

$$P(r,z) = a + br^{1/2} + cr^{1/3}$$

Resulta:

$$P(r,z) = 0.108 + 0.0038r^{1/2} + 0.209r^{1/3}$$

12) La pérdida de cabeza desde $r=0$ a $r=60$ pulgadas es:

$$h_L = \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{P_2}{\gamma} - z_2$$

$$h_L = \frac{0.108}{0.0364} + 19.20 + \frac{(9.370)^2}{772.8} - \frac{0.956}{0.0364} - 5.02$$

$$h_L = 9.0 \text{ pulgadas}$$

13) La ecuación de la pérdida de cabeza es

$$h_L = 0.150 r$$

15) La ecuación para la forma del cono es

$$z_2 = 22.28 - \frac{[0.108 + 0.0038r^{1/2} + 0.209r^{1/3}]}{0.0364} + 0.150r$$

La solución para esta ecuación de la forma del cono es ilustrada en la Figura 20.

El ejemplo siguiente, basado en los datos de la Tabla 11, debe aclarar este método descrito. La Figura 21 muestra la forma del cono de agua para los datos de la Tabla IV (Caso 111).

A partir de la Tabla IV y la Figura 21, los siguientes datos son conocidos:

1) Presión en la boca del pozo	0.1079 lpc
Tasa de flujo de petróleo	0.0243 pulg ³ /seg
Relación agua petróleo	1.870
Presión en $r_e = 60$ pulg (Contacto petróleo-yacimiento)	0.5320 lpc
Ancho del flujo	0.015 pulgadas
Profundidad del intervalo productor	0.375 pulgadas
Altura de la zona permeable	19.20 pulgadas
Altura del contacto agua petróleo en $r_e = 60$ pulgadas	8.56 pulgadas
Gravedad específica del agua	1.0078
Gravedad específica del petróleo	0.826

2) La velocidad en la boca del pozo es igual a

$$V_1 = \frac{0.0243 + 0.0243 (1.870)}{(0.015) (0.375)} = 12.40 \text{ pulg/seg}$$

3) La presión en el contacto petróleo-yacimiento en $r_e = 60$ pulgadas es $P|_{60} = 0.532$ lpc

4) Resolviendo para las constantes en la ecuación:

$$P_{o-r} = a + br^{2/3}, \text{ con las condiciones}$$

$$r=0, P_{o-r} = 0.108 \text{ lpc}$$

$$r=60 \text{ pulgadas, } P_{o-r} = 0.532 \text{ psi}$$

Resulta

$$P_{o-r} = 0.108 + 0.0276r^{2/3}$$

Las constantes a y b fueron resueltas por el uso de dos ecuaciones simultáneas.

5) Si $r = 2/3 r_e$ entonces $r = 40$ pulgadas

6) La presión en el contacto petróleo-yacimiento en $r=40$ pulgadas es $P_{o-r} = 0.431$ lpc

7) El nivel del contacto agua-petróleo en un punto $(2r_e - r)$ o **80**



pulgada, desde la boca del **pozo** es 8.56 pulgadas.

8) Sabiendo que:

$$z = 8.56 \text{ pulgadas, } r = 60 \text{ pulgadas.}$$

$$z = 8.56 \text{ pulgadas, } r = 80 \text{ pulgadas}$$

$$z = 18.84 \text{ pulgadas, } r = 0$$

$$h = 19.20 \text{ pulgadas}$$

y resolviendo tres ecuaciones simultáneas, las constantes en la ecuación

$$(h-z) = a + br^{1/2} + cr^{1/3}, \text{ se convierte en}$$

$$(h-z) = 0.36 - 2.61r^{1/2} + 7.78r^{1/3}$$

9) En $r=40$ pulgadas, el nivel del contacto agua-petróleo es $(h-$

$$z)|_{40} = 10.46 \text{ pulgadas}$$

$$(h-z)|_{60} = 10.60 \text{ pulgadas}$$

10) La presión en el contacto agua-petróleo es:

$$P(40, z) = 10.46 (0.0361)(0.826) + 0.431 = 0.743 \text{ lpc .}$$

11) Sabiendo que:

$$r=0, P(r, z) = 0.108 \text{ lpc}$$

$$r=40 \text{ pulgadas, } P(r, z) = 0.743 \text{ lpc}$$

$$r=60 \text{ pulgadas, } P(r, z) = 0.848 \text{ lpc}$$

y resolviendo para las constantes en la ecuación

$$P(r,z) = a + br^{1/2} + cr^{1/3}$$

Resulta:

$$P(r,z) = 0.108 + 0.0259r^{1/2} + 0.138r^{1/3}$$

12) La pérdida de cabeza desde $r=0$ a $r=60$ pulgadas es:

$$h_L = \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{P_2}{\gamma} - z_2$$

$$h_L = \frac{0.108}{0.0364} + 19.20 + \frac{(12.40)^2}{772.8} - \frac{0.848}{0.0364} - 8.56$$

$$h_L = 9.49 \text{ pulgadas}$$

13) La ecuación de la pérdida de cabeza es

$$h_f = 0.158 r$$

15) La ecuación para la forma del cono es

$$z_2 = 22.37 - \frac{[0.108 + 0.0259r^{1/2} + 0.138r^{1/3}]}{0.0364} - 0.158r$$

La solución para ésta ecuación de la forma del cono es ilustrada en la Figura 21.

CAPITULO III

ANALISIS COMPARATIVO DE LA ECUACIONES DE LA FORMA DEL CONO

Las ecuaciones de la forma del cono basadas en la ecuación de Bernoulli, hidrodinámica, y la ley de Darcy son mostradas en las Figuras 19, 20, 21. Las Tablas 11, III, y IV presentan los datos correspondientes a las Figuras 19, 20, 21 respectivamente.

Los datos presentados en las Tablas y sus respectivos **gráficos** de la forma del cono fueron la información usada **para** calcular la forma del cono por Bernoulli. El diagrama de la de la forma del cono basado en las ecuaciones de hidrodinámica, por Karp y **otros**, las obtuvo Smith con la misma información y **se** las ilustra superpuesta en las Figuras 19, 20 , y 21.

Cada una de las figuras mencionadas anteriormente deben ser analizadas **separadamente**. El nivel original del contacto agua-petróleo en las figuras es diferente. Este hecho, junto con la variación de **tasas** de flujo **para** los tres casos, **hace** que la aplicación de las ecuaciones para la forma del cono **sea** muy general.

La Figura 19 es el primer caso de flujo a considerarse. La ecuación de Bernoulli **para**

la forma del cono y la ecuación hidrodinámica dan la mejor aproximación del contacto agua petróleo. La ecuación de Bernoulli da la mejor aproximación entre $r=7$ y $r=36$ pulgadas mientras la ecuación hidrodinámica es mejor desde la boca del pozo a $r=7$ pulgadas. La ecuación de **Karp y otros** no da resultados satisfactorios como las ecuaciones de Bernoulli e hidrodinámica.

La ecuación de **Karp y otros**, para la forma del cono tiene una desviación promedia de 2.36 pulgadas y un error promedio de 23.91%, mientras que la ecuación hidrodinámica tiene una desviación promedia de 0.70 pulgadas y un error promedio de 5.96%.

La ecuación de Bernoulli para la forma del cono genera una desviación promedia de 0.56 pulgadas y un error promedio de 7.06%.

La Figura 20 muestra resultados análogos a los anteriormente mencionados. Las ecuaciones de Bernoulli e hidrodinámica para la forma del cono son nuevamente superiores a la ecuación propuesta por **Karp, y otros**. La ecuación hidrodinámica da una mejor visión del cono de agua entre la boca del pozo y $r=5$ pulgadas, mientras que la ecuación de Bernoulli es mejor en el intervalo de $r=5$ a $r=40$ pulgadas. La aproximación de Bernoulli para la forma del cono, sin embargo, es bastante regular en el intervalo entre la boca del pozo y $r=5$ pulgadas. La ecuación de **Karp, y otros**, es nuevamente una aproximación no tan satisfactoria como las ecuaciones de Bernoulli e hidrodinámica.

La ecuación de **Karp, y otros**, para la forma del cono muestra una desviación promedia

de 3.14 pulgadas **y** un error promedio de 26.86% , mientras la ecuación hidrodinámica tiene una desviación promedio de 0.53 pulgadas **y** un error promedio de 4.43%. La ecuación de Bernoulli da una desviación promedio de **0.09** pulgadas **y** un error promedio de 2.44%.

El caso de flujo en la Figura 21 nos genera los más pobres resultados **para** la ecuación de la forma del cono de Bernoulli **y** los mejores resultados **para** la ecuación de la forma del cono de **Karp, y otros**. La mejor aproximación desde la boca del pozo a $r=11$ pulgadas está dado por la ecuación hidrodinámica. La ecuación de Bernoulli es mejor en el intervalo de $r=11$ a $r=32$ pulgadas. La ecuación de **Karp, y otros**, es buena en la región entre la boca del pozo **y** $r=6$ pulgadas. **Más** allá de ese punto, la ecuación de **Karp, y otros** es nuevamente la aproximación relativamente **más** pobre que las ecuaciones de Bernoulli e hidrodinámica.

La ecuación de **Karp y otros**, da una desviación promedio de 1.90 pulgadas y un error promedio de 20.63%. La ecuación de Bernoulli **para** la forma del cono da una desviación promedio de **0.7** pulgadas y un error promedio de 19.05% , mientras que la ecuación hidrodinámica tiene **una** desviación promedio de 0.49 pulgadas **y** un error promedio de 8.36%.

La ecuación de Bernoulli **para** la forma del cono en las Figuras 19, 20, **y** 21 **da** una pendiente irregular del **cono** de **agua** en la cercanía del pozo. Esta característica común es causada por la aproximación de la presión a lo largo del contacto agua-petróleo

como una función del radio. Esta aproximación fue basada en las condiciones de flujo mostradas en la Figura 11. El declive del contacto agua-petróleo es la Figura 11 es muy empinado en las cercanías de la boca del pozo. Esta inclinación abrupta afectaría la aproximación de la presión a lo largo del contacto agua-petróleo.

Es evidente que las ecuaciones de Bernoulli e hidrodinámica para la forma del cono superan en exactitud a la ecuación de Karp, y otros. Para los tres casos previamente discutidos, cualquier cambio significativo es pequeño en la exactitud total de las ecuaciones de Bernoulli e hidrodinámica.

La ecuación hidrodinámica para la forma del cono es generalmente mejor en el intervalo de las primeras 5 a 10 pulgadas desde la boca del pozo; mientras la ecuación de Bernoulli es generalmente mejor en el intervalo entre 10 y 40 pulgadas desde la boca del pozo.

La ecuación de Bernoulli tiene dos ventajas distintas sobre la ecuación hidrodinámica. La primera ventaja es el hecho de que la ecuación de Bernoulli puede ser resuelta aplicando cálculos matemáticos básicos. La segunda ventaja es que la ecuación de Bernoulli da una solución directa para la forma del cono. La ecuación hidrodinámica no es tratable su solución por el uso de cálculos matemáticos básicos, porque los términos en la ecuación necesitan una solución compleja, limitando la adaptabilidad de la ecuación. También, la ecuación hidrodinámica para la forma del cono no presta por sí sola una solución directa de la forma del cono. Para obtener una solución para la

forma del cono es necesario hacer un diagrama de campo de las líneas de corriente y entonces localizar el contacto agua-petróleo en éste campo en algún radio r_c . El contacto agua petróleo desde el radio r_c a la boca del **pozo es** paralelo a otras líneas de corrientes existentes.

Después de demostrar las dos ecuaciones de mayor precisión **para** la forma del cono, la ecuación de Bernoulli se convierte en la más aplicable **entre** esas dos ecuaciones . La ecuación de Bernoulli **se** usará con mayor facilidad **y es, así,** la mejor ecuación **para** predecir la forma del cono de agua.



BIBLIOTECA

CAPITULO IV

APLICACION GENERAL DE LAS ECUACIONES DE BERNOULLI E HIDRODINAMICA PARA LA FORMA DEL CONO EN EL YACIMIENTO

Estas ecuaciones para la forma del **cono han** sido probadas frente a las pruebas de flujo real en el modelo de Hele-Shaw. **Ahora** es necesario hacer algunas observaciones con respecto al **uso** de aquellas ecuaciones **para** un caso **real** en un yacimiento.

Las variables en la ecuación de Bernoulli **para** la forma del cono están en función de la distancia desde la boca del pozo. Un ejemplo de **esto es** la ecuación **para** la presión a lo largo del contacto agua-petróleo con producción de agua .

$$P(r,z) = a + br^{1/2} + cr^{1/3} \quad (46)$$

Esta ecuación representa la forma de la curva de presión como una función de la distancia desde la boca del pozo. **Esta** relación expedita es general e independiente de la localización de los límites. La forma de la ecuación (46) para el modelo y **para** el yacimiento deben ser idénticos. **Las** constantes en la ecuación deben ser los factores que solamente varíen. **Así**, la ecuación de Bernoulli para la forma del cono es una relación expedita muy general aplicable a ambos casos, el modelo y el yacimiento.



Examinando la ecuación hidrodinámica para la forma del cono se puede ver que esta ecuación tiene las mismas características como la ecuación de Bernoulli. La ecuación hidrodinámica puede ser aplicada en su forma básica para cualquier medida del yacimiento. Aquellas dos ecuaciones son también independientes de las propiedades del fluido lo cual añade a ellas índole general.

En el modelo de Hele-Shaw, la permeabilidad fue isotrópica, en el yacimiento rara vez se da. Generalmente para un depósito horizontal acostado, la permeabilidad horizontal es de dos a diez veces más grande que la permeabilidad vertical. El movimiento de los fluidos en la dirección vertical sería obstruido relativo a la dirección horizontal. Así el cono de agua en un yacimiento horizontal sería suprimido en cierto grado. En una inclinación baja o yacimiento horizontal, la forma del cono de agua puede fácilmente tomar una forma más parecida a la ecuación de Bernoulli que a la forma del cono real observada en el modelo de Hele-Shaw.

El sistema del yacimiento antes mencionado es un sistema de flujo radial. Aunque el sistema de flujo radial difiere con el sistema de flujo lineal, la forma del cono observado en ambos sistemas son bastantes similares. Así, esto es válido para hacer la transferencia de resultados desde el modelo lineal de Hele-Shaw al yacimiento radial.

Considerando las variaciones de permeabilidad en el yacimiento, la ecuación de Bernoulli debe dar una representación muy buena de la forma del cono en el yacimiento.

CONCLUSIONES

1. Se han presentado tres ecuaciones **para** la solución de la forma del **cono** de agua en un yacimiento con agua de fondo, éstas ecuaciones son:

- 1) La ecuación de Bernoulli.
- 2) La ecuación hidrodinámica, y
- 3) La ecuación de Karp y otros.

Así la ecuación modificada de la ecuación de energía de Bernoulli usada para determinar la forma del cono es:

$$z_2 = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - \frac{1}{\gamma} [a + br^{1/2} + cr^{1/3}] + a_2r$$

Donde

$P(r,z) = a + br^{1/2} + cr^{1/3}$; es el término de presión.

$h_L = a_2r$ es el término de pérdida de **cabeza** hidrostática.

2. Del análisis comparativo de los resultados obtenidos de la aplicación de las tres ecuaciones **para** la forma del cono, probadas frente a las pruebas de flujo en el modelo de Hele-Shaw concluimos que a **pesar** de haber utilizado ciertas suposiciones el estudio tiende a ser satisfactorio. Así las ecuaciones de

Bernoulli e hidrodinámica **para** la forma del cono son mejores aproximaciones que la ecuación propuesta por Karp, y **otros**.

3. Desde el punto de vista matemático la ecuación **de** Bernoulli **para** la forma del cono es considerada la mejor aproximación, debido a la relativa facilidad de cálculo que presenta, donde los términos de presión y pérdida de cabeza hidrostática en el **campo** son aproximadas por polinomios. Aquellas aproximaciones son limitadas en magnitud a un grado tal que puede ser resuelto con operaciones de matemática elemental. Esta cualidad en la ecuación permite una solución muy rápida de la forma del cono.
4. Se establece que las variables en la ecuación de Bernoulli para la forma del cono está en función únicamente de la distancia y pueden ser aplicadas en su forma básica **para** cualquier medida del yacimiento, por lo tanto dicha ecuación es independiente de las propiedades del fluido el cual le da la característica de índole general pero sin dejar de ser una buena aproximación
5. Desde el punto de vista físico, considerando que en un yacimiento existen variaciones de permeabilidad en función de la dirección que **se** tome, la ecuación de la forma del cono de Bernoulli debe **dar** una **representación** muy buena de la forma del **cono** de agua en el yacimiento, debido a que, generalmente **para** un yacimiento horizontal, la permeabilidad horizontal es de dos a diez veces **más** grande que la permeabilidad vertical; entonces el

movimiento de fluidos en la dirección vertical sería obstruido relativo a la dirección horizontal, así el **cono** de agua sería suprimido en cierto grado y fácilmente debe tomar una forma más parecida a la que representa la ecuación de Bernoulli en las cercanías de la boca del pozo que, la forma del cono observada en el modelo de Hele-Shaw donde la permeabilidad fue isotrópica.

6. El hecho importante que muestra la ecuación de Bernoulli **para** la forma del cono es que la **técnica** de aproximación es un **área** donde esfuerzos de investigación podrían agotarse siendo bien invertidos. **Esta** clase de análisis de la forma del **cono** tiene **gran mérito**, y trabajos adicionales deberían ser acometidos en este campo.

RECOMENDACIONES

1. Mejorar la exactitud de **las** aproximaciones polinomiales en el **cual** la ecuación de la forma del cono de Bernoulli está basada debido a que, las expresiones propuestas no necesariamente es el último resultado.
2. Hacer un estudio de investigación profunda sobre nuevas técnicas de aproximación basandose en un análisis matemático-físico con la finalidad de confeccionar un modelo matemático que **se** ajuste a las propiedades que presenta el yacimiento, ilustrando diferentes casos particulares.
3. Realizar un proyecto que presente la ecuación de Bernoulli modificada **para** determinar la forma de la cresta de agua en un **pozo** horizontal para un yacimiento con agua de fondo, diseñando previamente un modelo de flujo real análogo al de Hele-Shaw pero ajustado a las condiciones del proyecto.
4. Proponer como tema de graduación un proyecto que involucre el desarrollo de métodos **para** reprimir y prevenir una posible conificación de agua , contando **para** ello con una técnica de aproximación que permita obtener una precisa solución **para** la forma del **cono** de agua, constituyendose éste en el argumento fundamental que motivo el desarrollo de Esta tesis.

5. Analizar la forma del cono de agua en yacimientos con empuje hidráulico de fondo obteniendo una expresión para la presión de fondo fluyente y la pérdida de cabeza hidrostática en función del tiempo que complementaría a la expresión modificada de Bernoulli recomendada en este estudio, teniendo como resultado el avance progresivo de la forma del **cono** de agua con respecto al período de producción.

TABLAS



BIBLIOTECA

TABLA I
FLUJO NETO EN ZONAS DE PETROLEO Y AGUA

TASA DE PRODUCCION DE PETROLEO, cc/seg 0.361

RELACION AGUA-PETROLEO NETA 0.103

ALTURAS DE LA CABEZA DE FLUIDO

	PULGADAS DESDE FONDO	PULGADAS DESDE LA BASE DEL MODELO
PULGADAS DE PETROLEO	36.25	27.19
PULGADAS DE PETROLEO	42.88	33.82
PULGADAS DE AGUA	37.63	28.57

TEMPERATURA 76°F

PROPIEDADES DEL FLUIDO

GRAVEDAD ESPECIFICA DEL AGUA (SGW)	1.000
GRAVEDAD ESPECIFICA DEL PETROLEO (SGO)	0.826
VISCOSIDAD DEL AGUA	0.905 cp
VISCOSIDAD DEL PETROLEO	2.18 cp

TABLA II
 DATOS EXPERIMENTALES OBTENIDOS POR SMITH
 MODELO DE HELE-SHAW
 CASO I

TASA DE PRODUCCION DE PETROLEO, cc/seg 0.785

RELACION AGUA-PETROLEO NETA 0.542

ALTURAS DE LA CABEZA DE FLUIDO

	PULGADAS DESDE FONDO	PULGADAS DESDE LA BASE DEL MODELO
PULGADAS DE PETROLEO	31.88	22.82
PULGADAS DE PETROLEO	46.13	37.04

TEMPERATURA 76°F

PROPIEDADES DEL FLUIDO

GRAVEDAD ESPECIFICA DEL AGUA (SGW)	1.0078
GRAVEDAD ESPECIFICA DEL PETROLEO (SGO)	0.826
VISCOSIDAD DEL AGUA	0.905 cp
VISCOSIDAD DEL PETROLEO	2.18 cp



TABLA III
DATOS EXPERIMENTALES OBTENIDOS POR SIMILITUD
MODELO DE HEAD - SEAL
CASO II

TASA DE PRODUCCION DE PETROLEO, cc/seg 0.630

RELACION AGUA - PETROLEO NETA 0.372

ALTURAS DE LA CABEZA DE FLUIDO

	PULGADAS DESDE FONDO	PULGADAS DESDE LA BASE DEL MODELO
PULGADAS DE PETROLEO	31.50	22.44
PULGADAS DE PETROLEO	45.00	35.94

TEMPERATURA 76°F

PROPIEDADES DEL FLUIDO

GRAVEDAD ESPECIFICA DEL AGUA (SGW)	1.0078
GRAVEDAD ESPECIFICA DEL PETROLEO (SGO)	0.826
VISCOSIDAD DEL AGUA	0.905 cp
VISCOSIDAD DEL PETROLEO	2.18 cp

TABLA IV
 DATOS EXPERIMENTALES OBTENIDOS POR SMITH
 MODELO DE HILDE-SILVER
 CASO III

TASA DE PRODUCCION DE PETROLEO, cc/seg 0.398

RELACION AGUA-PETROLEO NETA 1.870

ALTURAS DE LA CABEZA DE FLUIDO

	PULGADAS DESDE FONDO	PULGADAS DESDE LA BASE DEL MODELO
PULGADAS DE PETROLEO	30.75	21.69
PULGADAS DE AGUA	42.88	33.82

TEMPERATURA 76°F

PROPIEDADES DEL FLUIDO

GRAVEDAD ESPECIFICA DEL AGUA (SGW)	1.0078
GRAVEDAD ESPECIFICA DEL PETROLEO (SGO)	0.826
VISCOSIDAD DEL AGUA	0.905 cp
VISCOSIDAD DEL PETROLEO	2.18 cp

FIGURAS

CONO ESTATICO DE AGUA (5)

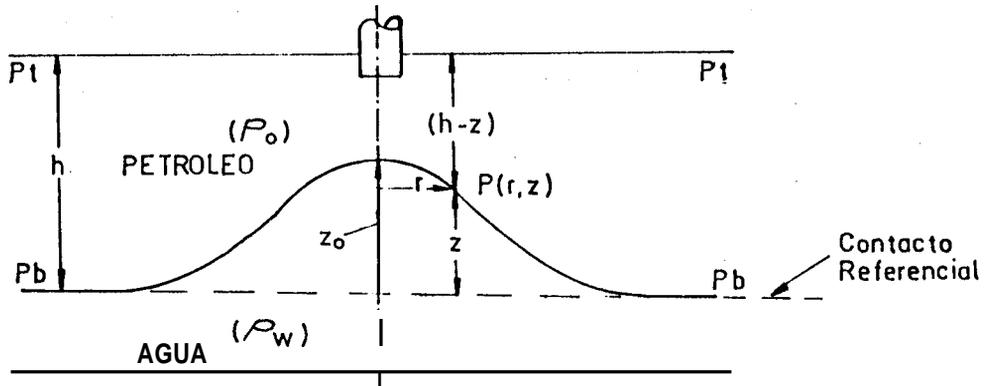


Figura Nº 1

Condiciones de Equilibrio a lo largo de los Ejes de un Sistema de Conificación de Agua (5)

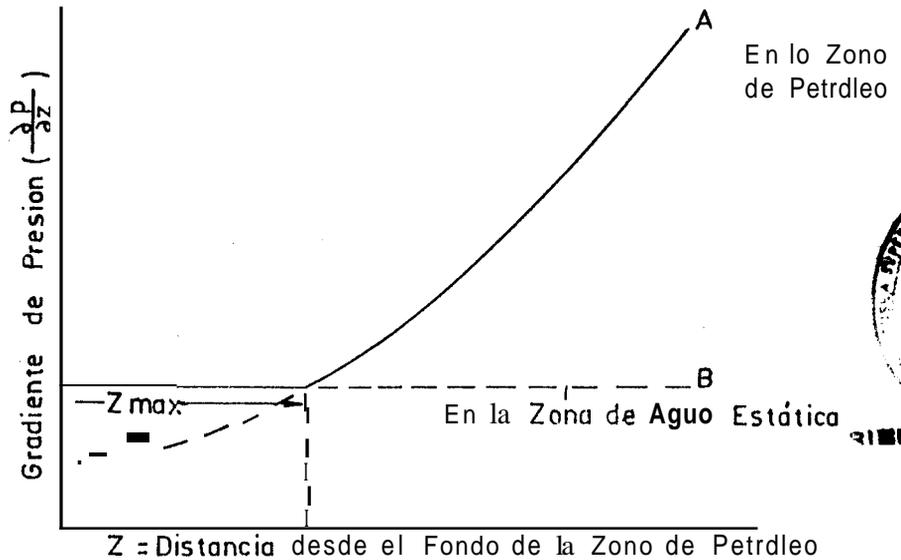


Figura Nº 2



BIBLIOTECA

Cono Inestable de Agua con Agua de Fondo (5)

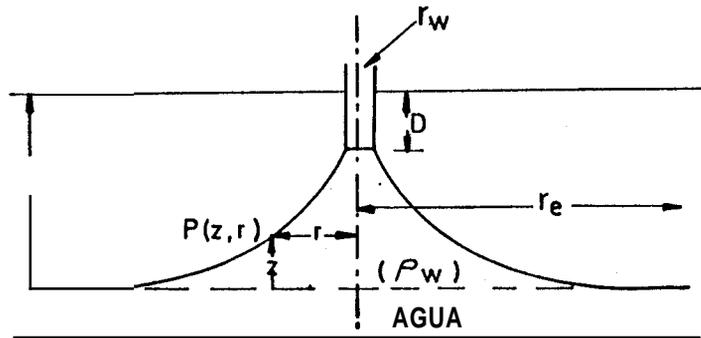


Figura N° 3

Transformación Energética Gradual para Flujo de Canal Abierto (1)

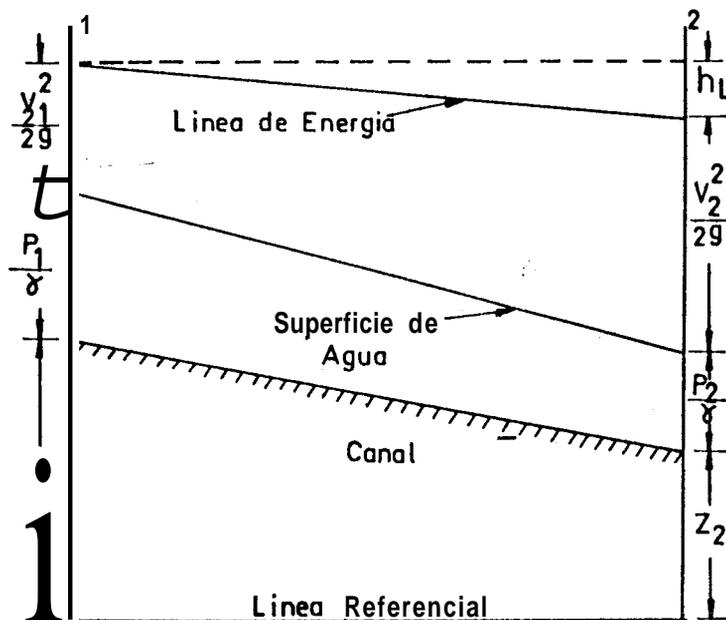


Figura N° 4

Diagrama de Argand (9)

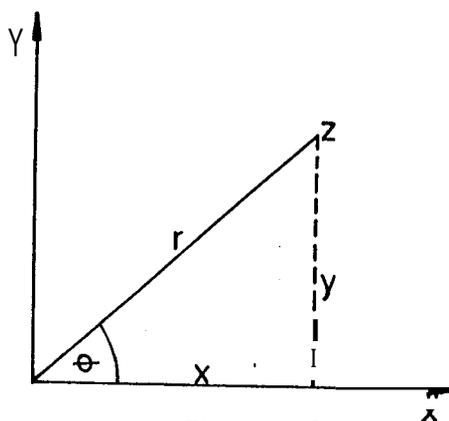


Figura N° 5

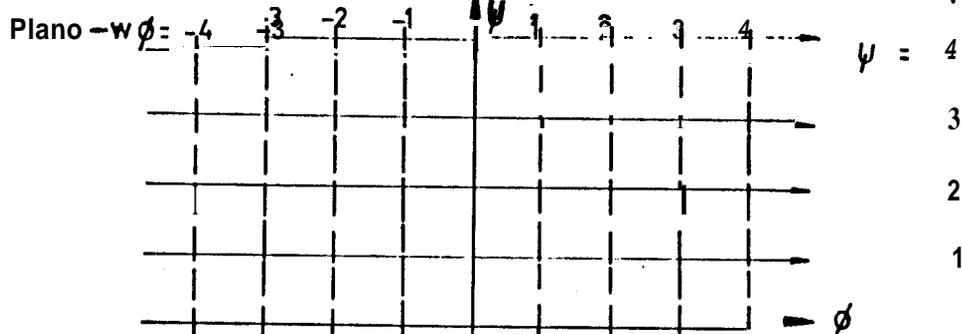
Representación en el Plano W del Modelo de Flujo Uniforme de Izquierda a Derecha (9)

Figura N° 6 a

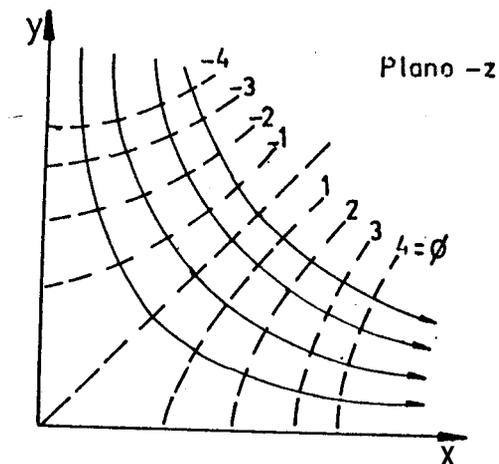
El Plano Z para la Transformación $W=Z^2$ (9)

Figura N° 6 b

Flujo por una Abertura Angosta en el Final de un Canal (9)

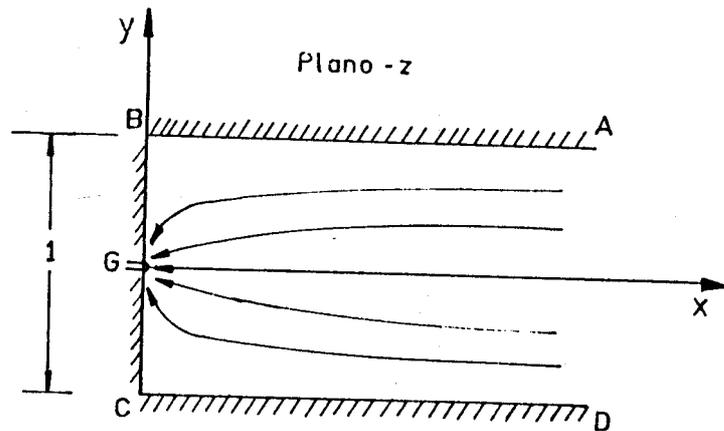


Figura NQ7

Flujo por una Abertura Angosta en el Final de un Canal Trazado en la Mitad de un Plano (Plano t) (9)

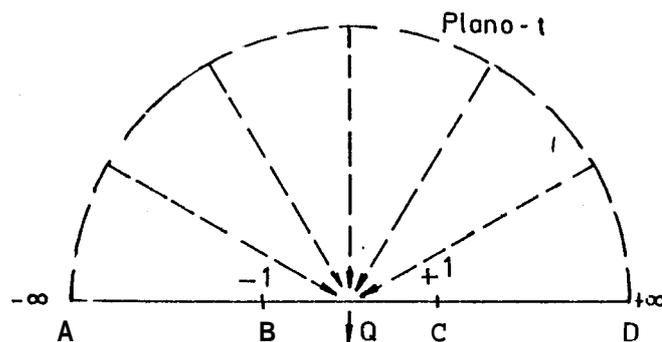


Figura N° 8

Tira Infinita en el Plano z (9)

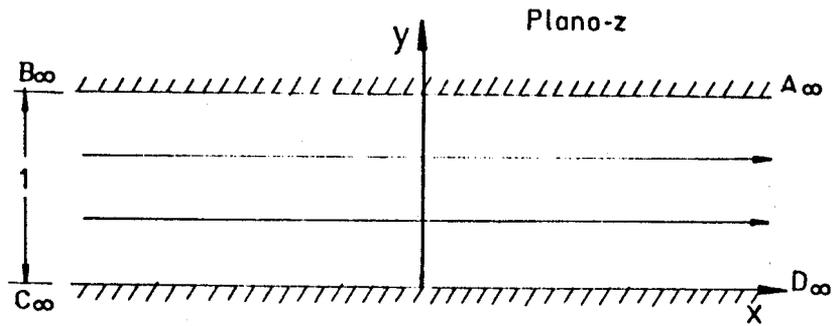


Figura N° 9a

Flujo Uniforme en una Tira Infinita Trazada en la Mitad del Plano (9)

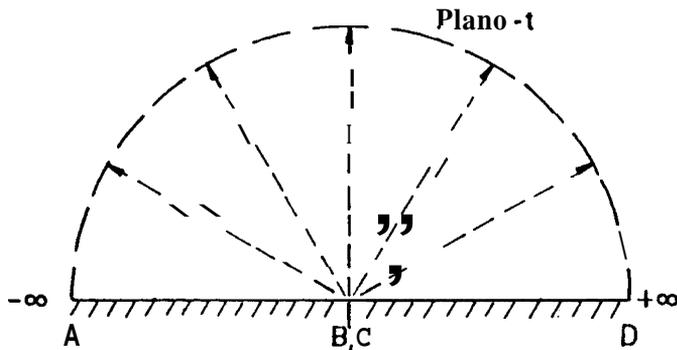
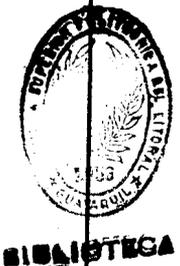


Figura N° 9b



Forma del Cono en un Sistema de Flujo Lineal (6)

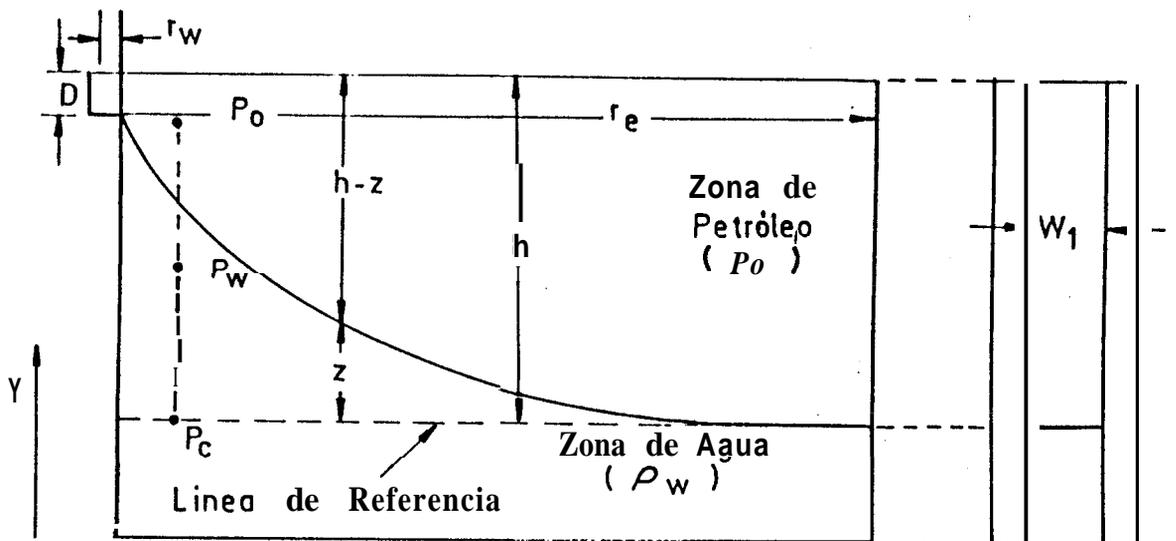


Figura N° 10

Gráfico de Flujo Neto Super-puesto en la Zona de Petróleo para un Caso de Flujo que Involucra Agua y Petróleo (6)

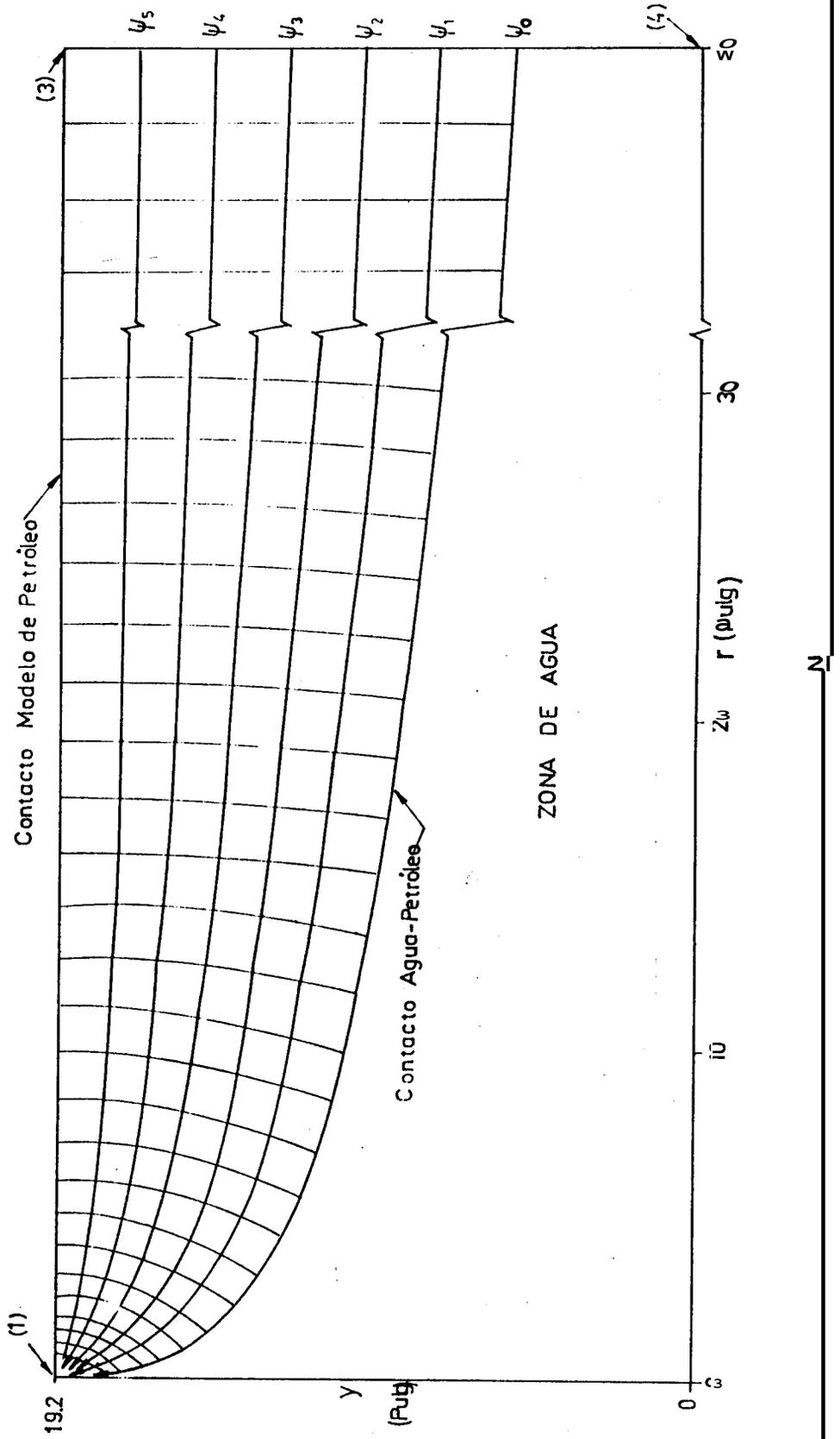


Grafico de Flujo Neto Super-puesto en la Zona de Agua para un
Caso de Flujo que Involucra Agua y Petróleo (6)

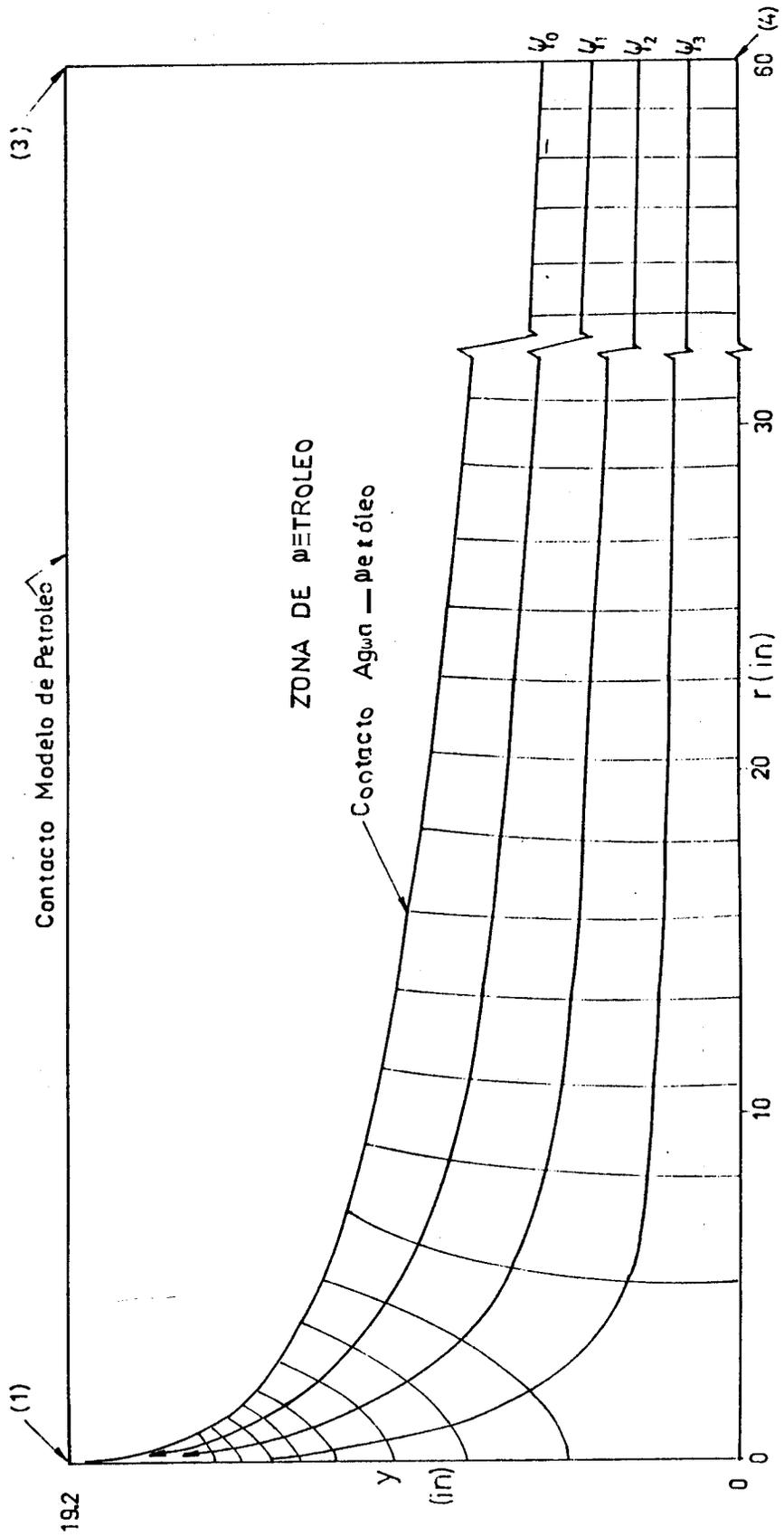


Figura Nº 12



BIBLIOTECA

Gráfico de Presión a lo largo del Contacto Agua Petróleo como Función del Radio

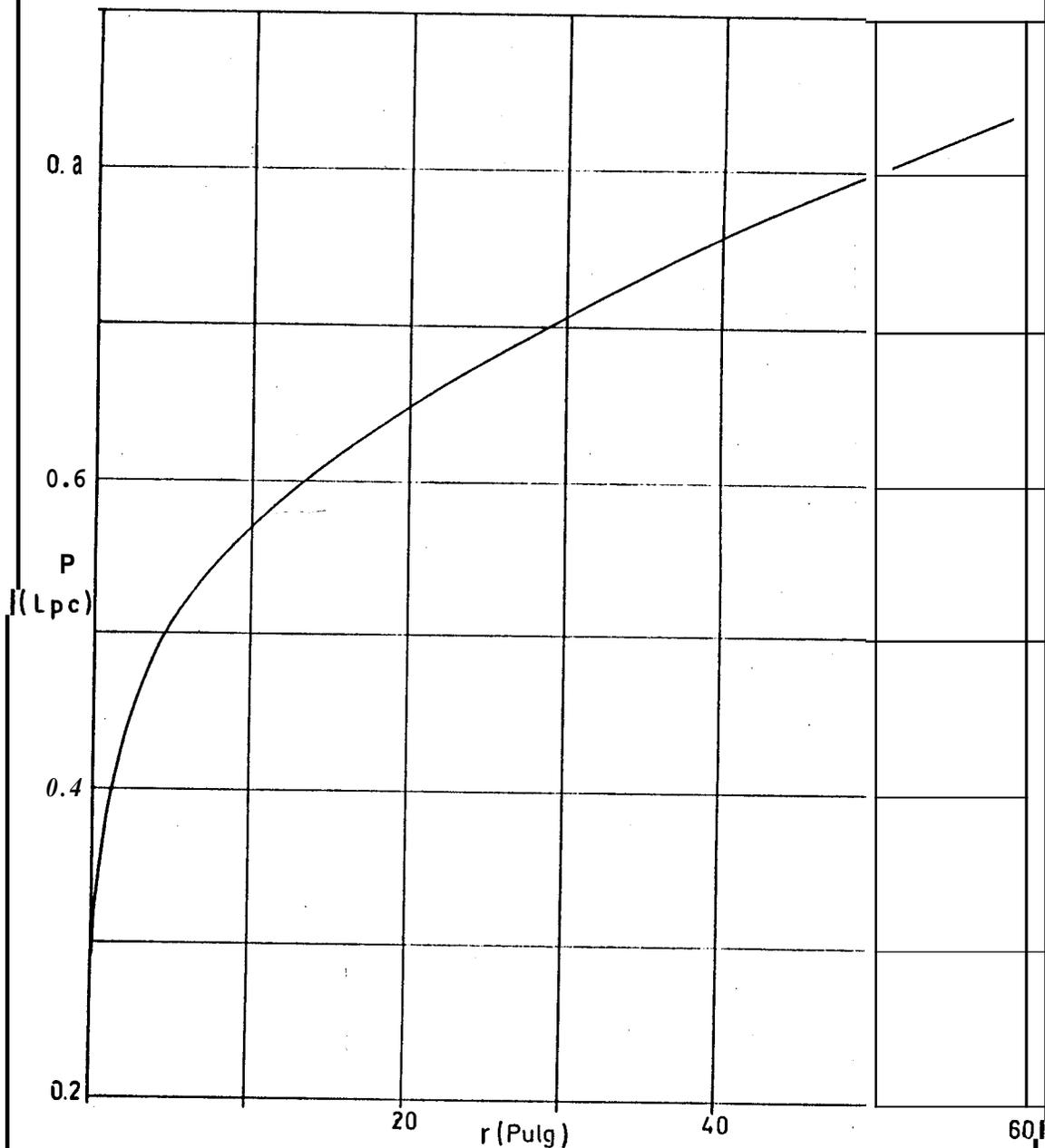


Figura Nº 13

Perfil Probable de Velocidad Adyacente al Contacto Agua - Petróleo

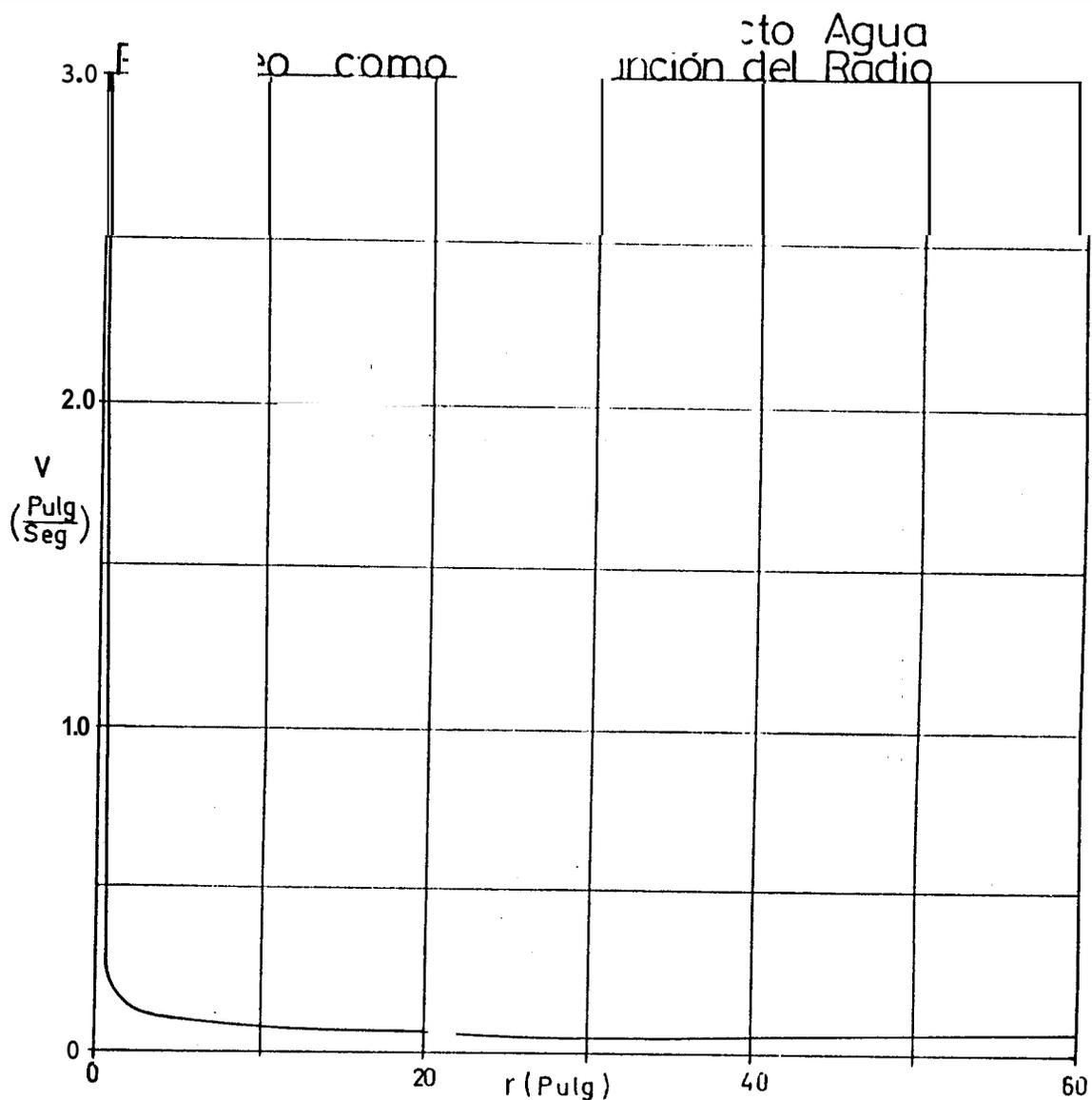
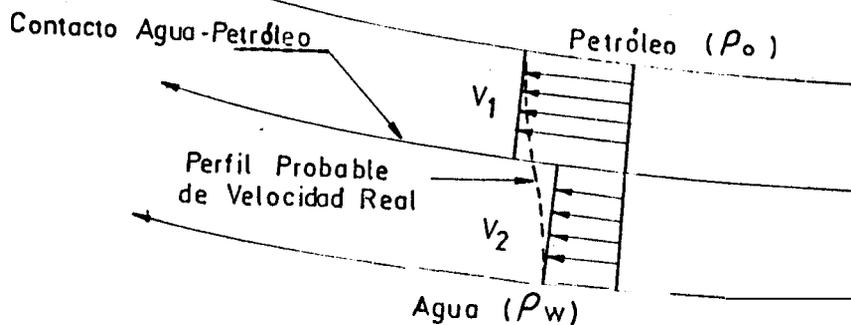


Figura No 15

Gráfico de la Pérdida de Cabeza Hidrostática como una Función del Radio

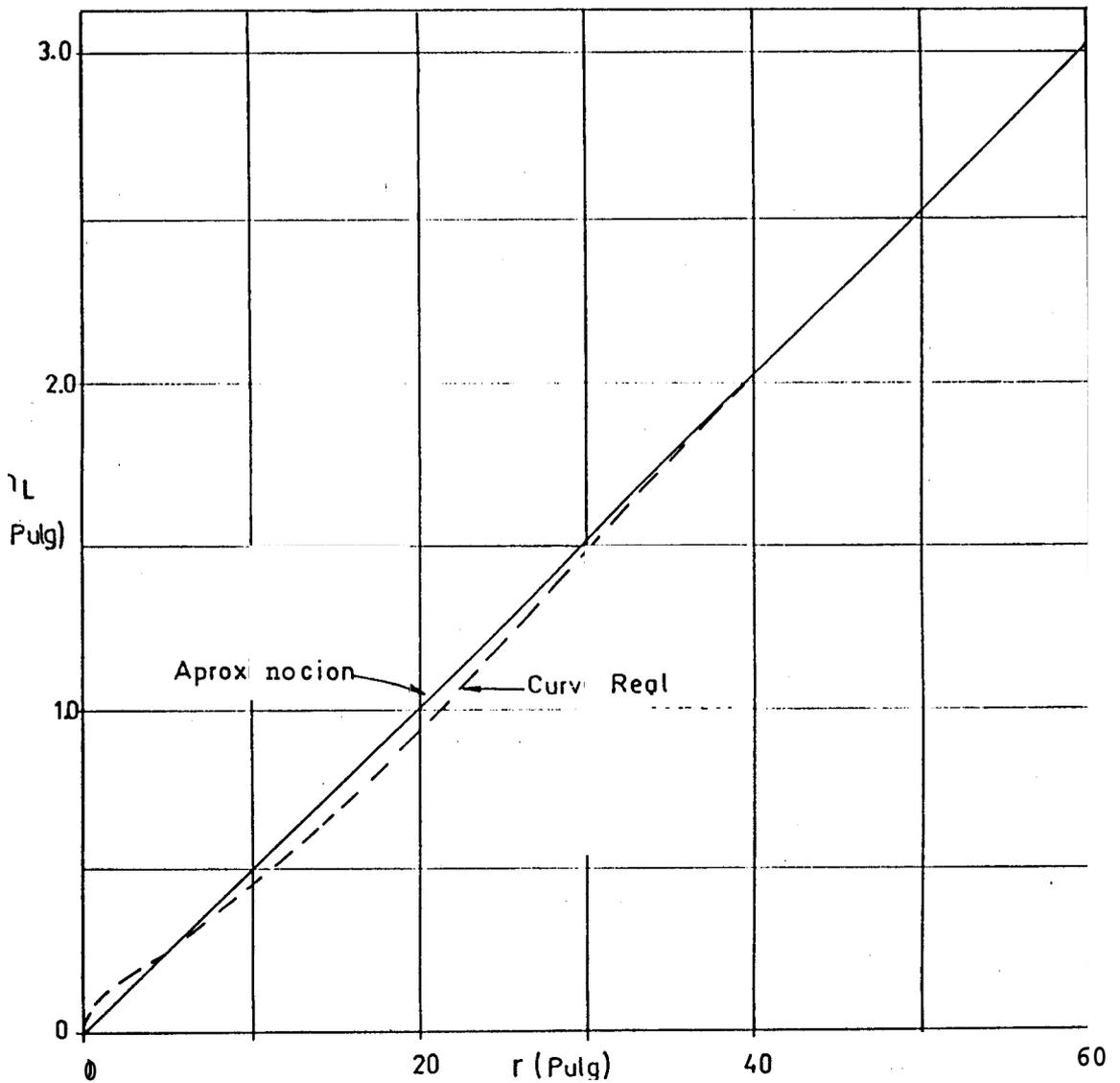


Figura Nº 16

Localización de Datos Neccsarios para la Solución de la Ecuación de Bernoulli para la Forma del Cono Respecto a una Curva Patron

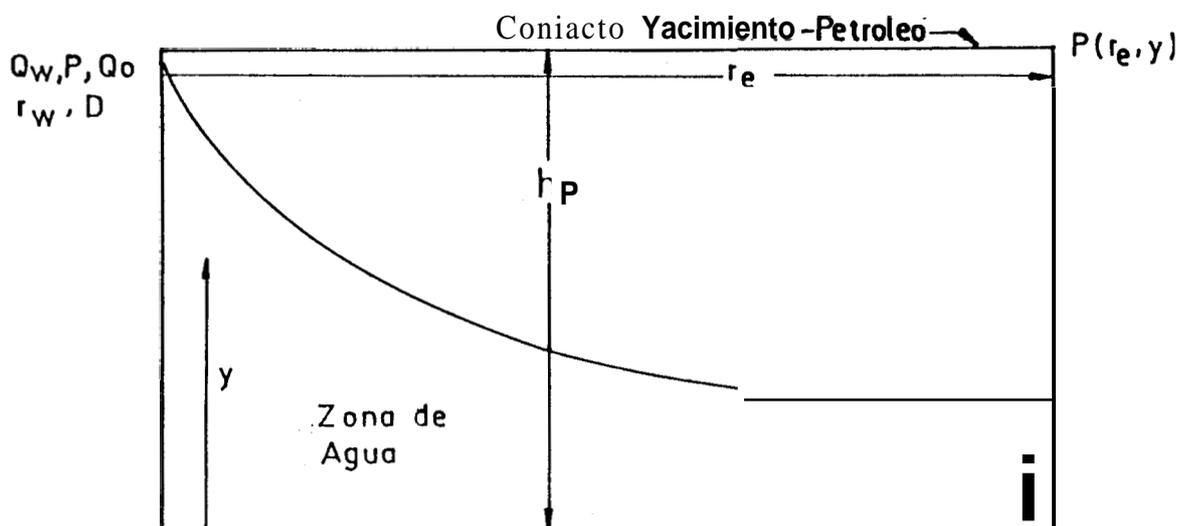


Figura Nº 17

Presión a lo largo de la Interface del
Modelo de Petróleo como una Función
del Radio

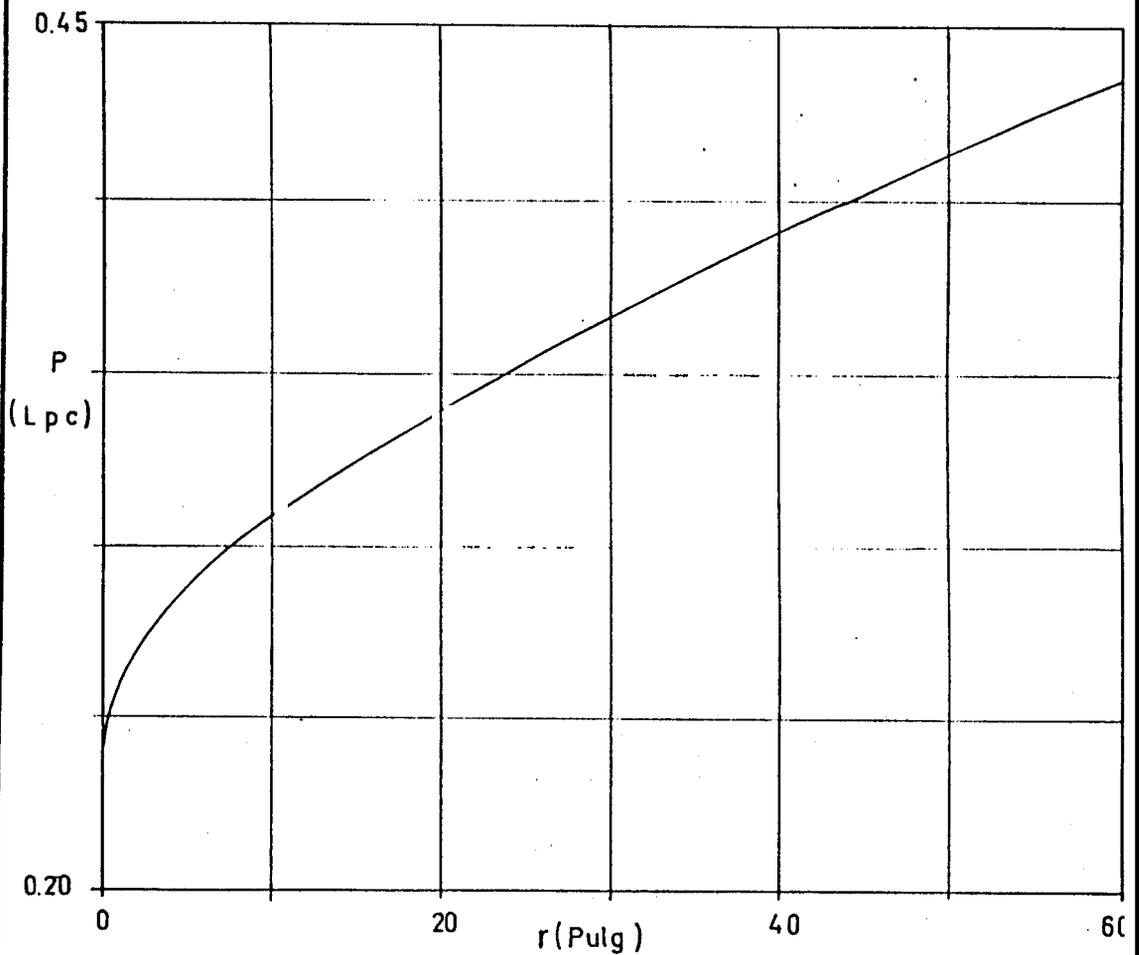


Figura Nº 18



Comparación de Bernoulli Hidrodinámica y Karp, Lowe y Marusov para la Ecuación de la Forma del Cono Respecto a una Curva Patron Caso II (6)

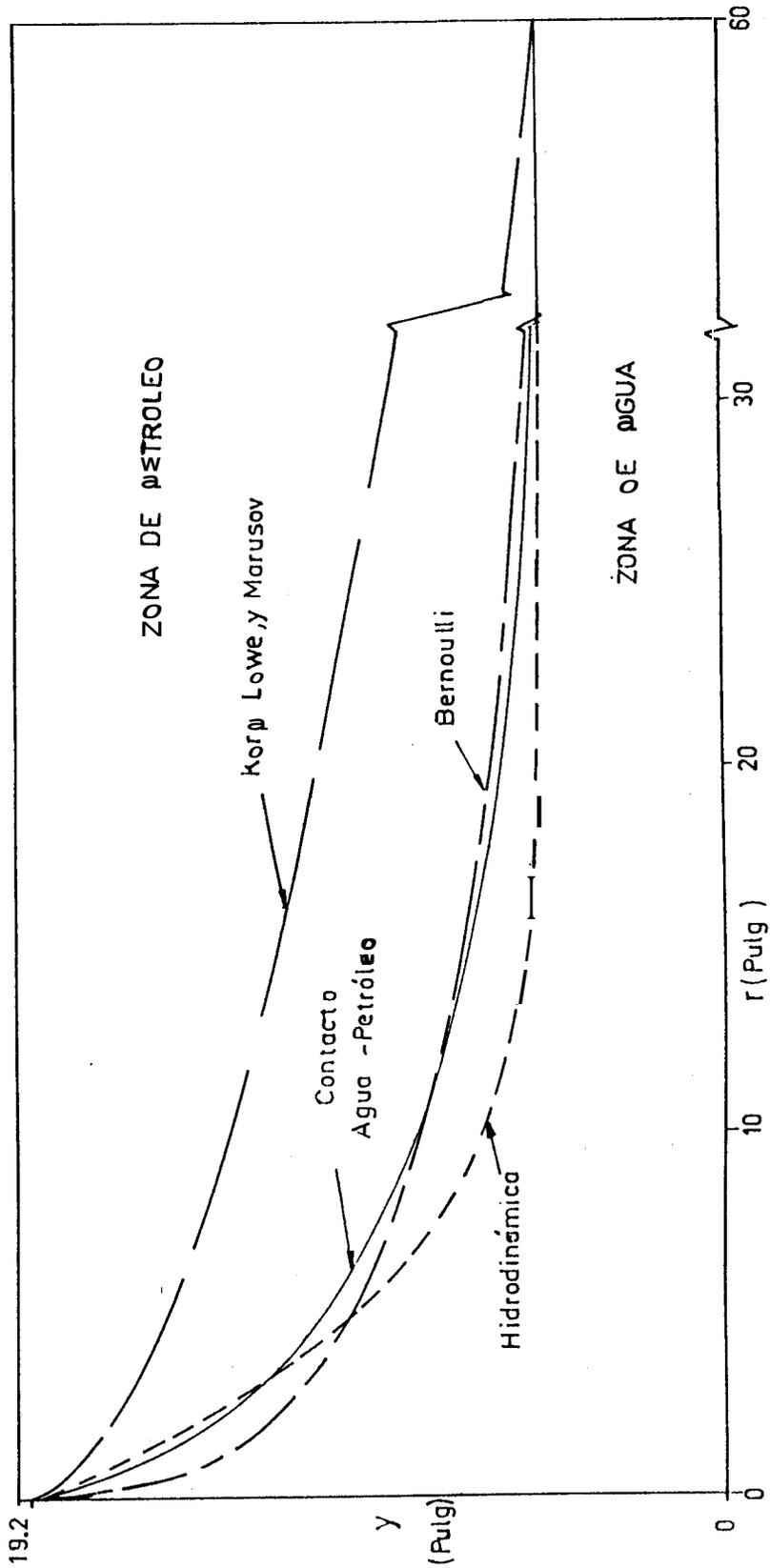
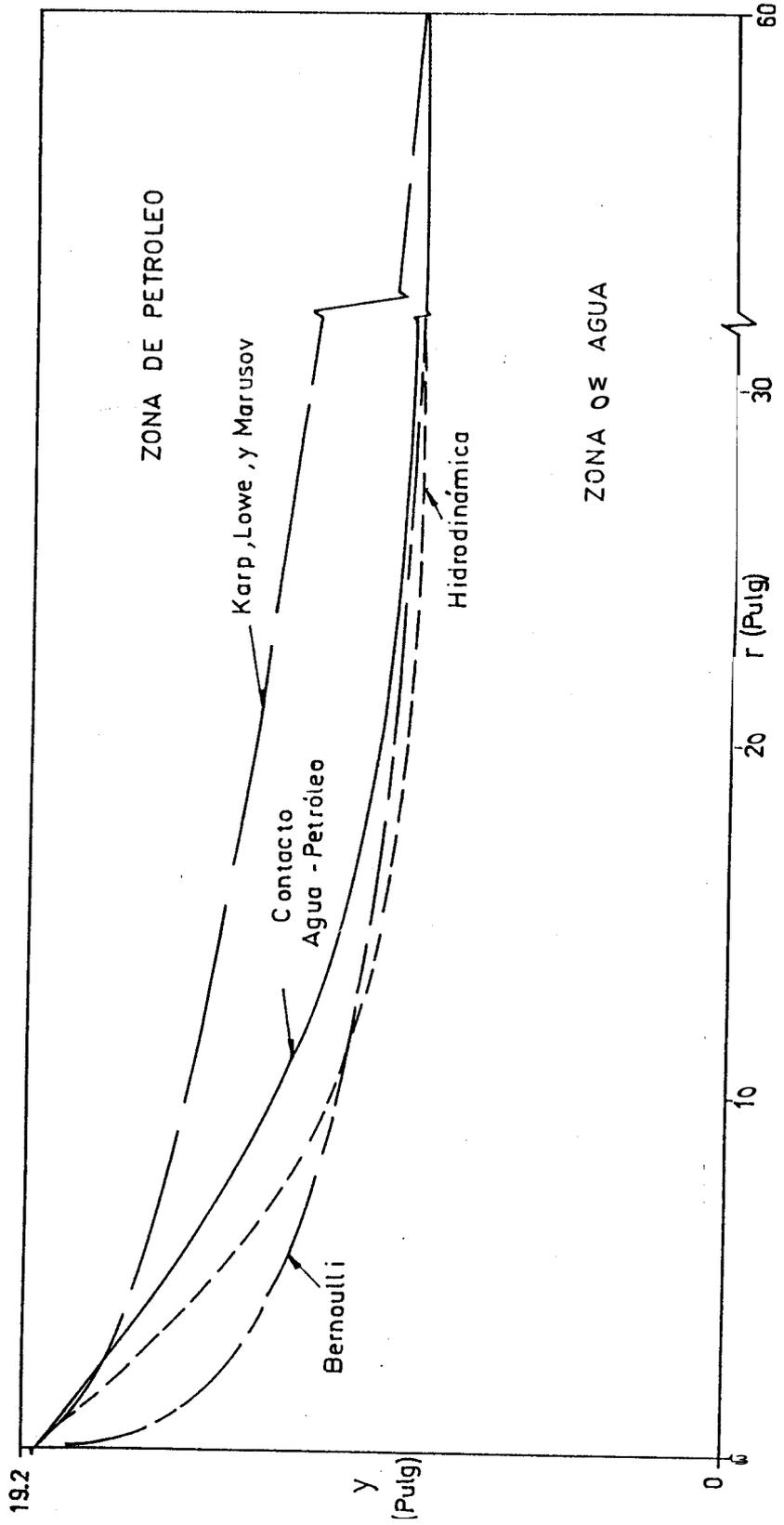


Figura Nº 20

Comparación de Bernoulli, Hidrodinámica y Karp, Lowe y Marusov para la Ecuación de la Forma del Cono Respecto a una Curva Patron. Caso III (6)



BIBLIOGRAFIA

1. Chow, V.T. Open Channel Hydraulics. New York McGraw-Hill **Book** Company Inc., 1959, p.p. 39.
2. Karp, J.C., Lowe, D.K., and Marusov, N. "Horizontal Barriers for Controlling Water Conning" paper presented at the 1961 ~~Fall~~ A.I.M.E. Meeting. Reprint SPE-153.
3. Knudsen, J.G. and **Katz, D.L.** Fluid Dynamics and Heat ~~Transfer~~. New **York** McGraw-Hill **Book** Company, Inc. 1958, p.p. 23-51.
4. Kidder, R.E. Flow of Immiscible Fluids in Porous Media: Exact Solution of Free Boundary Problem, "Journal of Applied Physics, Vol.27 No. **8**, August 1956 p.p. 867-869.
5. Muskat, M. Flow of Homogeneous Fluid Through Porous Media. Michigan: J.W. Edwards, Inc., 1946, p.p. 480-482.
6. **Smith, C.R.** "Water Conning Control in Oil Wells by Fluid Injection" Ph.D. Thesis in Petroleum Engineering , University of Texas, Austin, August 1962.

7. Streeter, V.L. Fluid Dynamics. New York: McGraw-Hill Book Company. Inc., 1948 p.p. 85-91.
8. Streeter, V.L. Fluid Mechanics. New York: McGraw-Hill Book Company. Inc., 1958 p.p. 91-93.
9. Vallentine, H.R. Applied Hidrodynamics. London: Butterworth, 1959, p.p. 19-196

