ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

INGENIERIA EN ESTADISTICA INFORMATICA

"IMPLEMENTACION DE UN SISTEMA DE MONITOREO ESTOCASTICO Y DINAMICO PARA FONDO DE PENSIONES"

TESIS DE GRADO

Previa a la obtención del Título de:

INGENIERO EN ESTADÍSTICA INFORMÁTICA

Presentada por:

Oscar David Espín Maldonado

GUAYAQUIL – ECUADOR

AÑO
2004

AGRADECIMIENTO

Por sobre todas las cosas doy gracias a Dios, por ser mí guía y estar a mi lado en todo momento. A mi madre por todo el empuje y apoyo incondicional, quien me enseñó el sendero correcto y me impartió sus principios. A mis hermanos porque gracias al ejemplo de ellos pude seguir adelante. A mi director de tesis por todos sus conocimientos impartidos.

DEDICATORIA

A las tres personas que más quiero en el mundo: Mi madre, mi esposa y mi hijo Adrián.

TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

ING. LUIS RODRIGUEZ

PRESIDENTE

MAT. FERNANDO SANDOYA

DIRECTOR DE TESIS

ING. CAROLA PINOS

VOCAL

MAT. CESAR GUERRERO

VOCAL

DECLARACIÓN EXPRESA

"La responsabilidad del contenido de esta tesis de grado, me corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL"

(Reglamento de graduación de la ESPOL)

Oscar David Espín Maldonado

Resumen

El presente estudio tiene por finalidad diseñar e implementar una aplicación informática que permita a una institución que administre fondos de pensiones tener una herramienta de apoyo para tratar de prever una posible desestabilización financiera del fondo mediante el monitoreo y la constante actualización de los datos de los miembros del fondo en custodia. Para esto se necesitará proyectar los valores que la administradora de fondos deberá asumir en cualquier instante de acuerdo a los sucesos que se vayan presentando y las contribuciones futuras para de esta manera evaluar el balance actuarial a lo largo de la proyección basada en el algoritmo de simulación bajo incertidumbre de Monte Carlo.

En la primera sección se establece una breve introducción del problema, antecedentes y tipos de riesgos considerados para este estudio.

En la segunda sección se establecerá el marco teórico y notaciones generales del modelo establecido para la implementación del mismo.

En la tercera sección se procederá a realizar el diseño de la base de datos y de la aplicación, adicionalmente, en esta parte se describirán los procesos a

realizarse en la aplicación y los datos que tendrán las entidades de la base de datos, así como el algoritmo y los diagramas esquemáticos para el funcionamiento del sistema.

En la cuarta sección se procederá a detallar los supuestos actuariales, económicos y estocásticos específicos y la población que nos van a permitir implementar el sistema de monitoreo para la realización de las proyecciones, además se mostrarán los gráficos y resultados numéricos a partir de la población detallada y los supuestos realizados.

En la quinta y última sección se detallarán las conclusiones y recomendaciones acerca de los resultados obtenidos y de la aplicación informática en si.

ÍNDICE GENERAL

ABREVIATURAS

PVFB	Valor Presente de los Beneficios Futuros
PVFS	Valor Presente de los Salarios Futuros
AGG	Método del Costo Agregado.
AFP's	Administradoras de Fondos de Pensiones.

SIMBOLOGÍAS

ξ	Variable aleatoria asociada a la edad de fallecimiento
$F(x)$	Función de distribución de la variable aleatoria ξ
$S(x)$	Función de supervivencia de x
${}_t p_x$	Probabilidad de que x sobreviva t años más.
${}_t q_x$	Probabilidad de que x fallezca dentro de t años.
$\lambda(x)$	Número de supervivientes a la edad x.
μ_x	Tanto instantáneo de fallecimiento a la edad x.
$q_x^{(k)}$	Probabilidad de salida de un grupo de supervivencia por la causa k.
φ	Conjunto de todos los estados laborales posibles para los miembros del plan.
φ_A	Conjunto de todos los estados laborales posibles para los miembros activos.
φ_C	Conjunto de los estados de beneficiarios para los miembros retirados.
φ_{Cm}	Conjunto de los estados de beneficiarios para los miembros que escogieron el beneficio de las anualidades.

φ_{Cs}	Conjunto de los estados de beneficiario para los miembros que escogieron el beneficio de una sola suma.
φ_{F}	Conjunto de estados de detención de pago de beneficios. (Muerte)
φ_{V}	Estado de licencia temporal.
φ_{VF}	Estado de Invalidez Permanente.
e	Edad de entrada de un miembro al fondo de pensiones.
τ	Edad obligatoria de jubilación de un miembro del plan.
ω	Edad máxima de supervivencia.
A_i	El i – ésimo estado laboral activo.
$A_{(t)}$	Conjunto de todos los miembros activos.
$IA_{(t)}$	Conjunto de todos los miembros inactivos.
${}^{\upsilon}b_{ij(xy)}^{(m)}$	Probabilidad de transición de un miembro con estado actual *i* a la edad *x* con υ años de servicio moviéndose al m – ésimo siguiente estado laboral *j* a la edad *y* con menos que $\upsilon + y - x$ años de servicio.
${}_{j}B_{(x)}$	Pago de Beneficio debido a la causa *j*.
$CR_{(t)}$	Tasa de contribución al instante *"t"*.

$F_{(t)}$	Recursos del fondo de pensiones al instante *"t"*.
$H_{(x)}$	Años de servicio acumulados de un miembro a la edad *x*.
$I_g\left(X_{(x)}\right)$	Indicador del estado laboral a la edad *x*.
$L_{(x,y)}$	Probabilidad condicional de que un miembro se encuentre activo entre las edades *x* e *y.*
${}_{j}PVFB^{\alpha}_{(x)(t)}$	Valor Presente de los Beneficios Futuros para el miembro α a la edad *x* al instante *t* debido a la causa *j*.
$PVFB_{(t)}$	Valor Presente Global de los Beneficios Futuros al instante "*t*".
$PVFS^{\alpha}_{(x)(t)}$	Valor Presente del Salario Futuro para un miembro α a l a edad *x* al instante *"t".*
$PVFS_{(t)}$	Valor Presente Global del Salario Futuro al instante *"t"*.
$r_{(t)}$	Tasa de interés al instante *"t"*.
$R_{t,s}$	Retornos acumulados o ratios descontados desde instante *t* a *s*.
$S_{(x)}$	Escala salarial a la edad *x*.
$.S\ddot{a}_{(x:\overline{y-x}),(t)}$	Valor Presente de los honorarios cubiertos acumulados desde la edad *x* a *y* al instante *"t"*.

$U_{(x)}$	Crédito de servicio a la edad *x*.
$X_{(x)}$	Estado laboral a la edad *x*.

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCION

Con el reciente incremento en el interés por la seguridad social debido a los problemas del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social (IESS) por las pensiones jubilares se plantean interrogantes a las Administradoras de fondos de pensiones o AFP's tales como: ¿Existe alguna manera de brindar seguridad a los afiliados actuales y futuros?, ¿Existen medidas correctas de planeación financiera y evaluación presupuestaria en estas entidades?, ¿Cómo puede una AFP prever una desestabilización financiera para no perjudicar a todos sus aportantes?.

El estudio de nuevas técnicas de valoración actuarial nos lleva a desarrollar un modelo matemático – computarizado que considere los factores que afectan en la estabilidad del fondo y además que nos permita evaluarla en cualquier instante en el tiempo de acuerdo con los sucesos que van aconteciendo. Para comprender esto, primero debemos considerar lo que significa una desestabilización financiera para un fondo administrado: decimos que un fondo de pensiones administrado por una AFP cae en desestabilización cuando el balance actuarial tiene saldo negativo, es decir, que produce pérdidas. Esto se debe a que las contribuciones sumadas con los retornos de las inversiones no superan a los valores que la AFP debe asumir en el momento que se presenten los siniestros, los cuales pueden ser por diferentes causas, entre ellas tenemos la jubilación, el retiro voluntario, el despido intempestivo, la invalidez permanente y la muerte.

Por lo contrario, decimos que un fondo administrado es estable cuando produce un saldo positivo, es decir que los ingresos por contribuciones sumadas a los retornos de las inversiones superan los montos asumidos por la AFP en un instante.

CAPÍTULO 1

1. INTRODUCCIÓN Y TIPOS DE RIESGOS CONSIDERADOS

En el presente capítulo se abordará una breve introducción del tema junto con antecedentes y tipos de riesgos considerados para la realización de este estudio.

Las operaciones de seguros y los fondos de pensiones han sido establecidos con la finalidad de que las personas o empresas se protejan de cualquier inconveniente financiero que pueda afectar sus planes venideros y salvaguardar su bienestar económico futuro.

Estas operaciones ofrecen cobertura que, si bien es cierto no impiden que acaezcan los siniestros, hacen que el impacto financiero provocado por los inconvenientes inesperados sea menor. Esta alternativa no reduce la probabilidad de que ocurran, sino que genera un incentivo financiero para cubrir las pérdidas ocasionadas, las cuales impiden que se realicen con normalidad los planes futuros de las personas.

La estabilidad y la solidez financiera son dos factores críticos para la administración de los esquemas jubilatorios públicos y privados, en esta administración se ven directamente involucradas las denominadas aseguradoras de fondos de pensiones o AFPs.

La importancia económica de estas entidades radica en que producen bienestar para las personas o empresas a través del mejoramiento de las expectativas de que sus planes futuros no se vean truncados en su realización por la presencia inesperada de algún suceso que afecte de manera negativa su economía o estados financieros.

De igual manera las aseguradoras de fondos pueden incrementar la producción estimulando a las personas, empresas, etc. a que participen en situaciones inciertas en las que, ante la posibilidad de pérdidas, no se arriesgarían si no existieran estas entidades.

Antes de continuar, se debe tener presente lo que se denomina un plan de pensiones.

1.1 Plan de pensiones.-

Un plan de pensiones se puede considerar como un sistema para comprar rentas vitalicias diferidas (que se pagan durante la jubilación), mediante el pago previo de rentas temporales durante la prestación de servicios en una empresa. El saldo de los valores actuariales de las aportaciones y prestaciones puede ser en base individual o, más frecuentemente, sobre cierta base para el grupo total de participantes del plan.

Los participantes de un plan de pensiones pueden ser los empleados de un solo empresario o bien pueden ser los empleados de un grupo de empresas que realizan actividades similares, ya que estos fondos son clasificados de acuerdo al tipo de actividad que realizan los participantes debido a la diferentes riesgos laborales a los que están expuestos, por ejemplo, no es similar el riesgo que puede tener un burócrata que un trabajador petrolero. En general un plan de jubilación proporciona pensiones basadas en la edad alcanzada y los años de servicios prestados, o por invalidez. En el caso de abandono del empleo, se pueden rembolsar las aportaciones de los empleados capitalizadas, o bien de pensiones diferidas dependiendo de cada esquema de beneficio de cada administradora de fondos. Para el caso en el cual el fallecimiento acaezca antes que otras contingencias, la prestación puede ser un montante global, o bien una renta pagadera a un beneficiario. Las entregas por parte de los participantes se denominan aportaciones o contribuciones.

Es ahí donde se hace presente la importancia de un sistema de monitoreo que mediante la retroalimentación permita evaluar los flujos de dinero que la empresa debe asumir en el momento que se presenten los siniestros y las posibles medidas que se deban adoptar para evitar la desestabilización financiera de la administradora de fondos ante tales pagos.

Para esto, se debe construir un modelo estocástico apropiado, el cual relacionará la mano de obra actual y los flujos futuros de efectivo correspondientes.

Recientemente (1997) en la literatura se han propuesto algunos planes estocásticos para formular los cálculos financieros en valoración actuarial. En estos se simulan los flujos de dinero en efectivo a través de métodos de simulación dinámica. La investigación ha sido orientada en relación al proceso de decisión ajustado por el presupuesto de los costos del plan de pensiones, perfeccionando su estado financiero. Primero se establece que la tasa de aportación se obtiene mediante un plan de amortización generalizado para el valor presente más un costo normal. Luego se examina el costo agregado que refuerza planes para los miembros activos cuando existen diferencias consistentes entre los ingresos supuestos y reales.

También se considera un plan jubilatorio en el que las ganancias y las pérdidas son directamente amortizadas sobre un número fijo de años o indirectamente extendido sobre un plazo variable.

Además se puede considerar que los retornos de los fondos están representados por un proceso estocástico. Se obtienen las expectativas y los niveles de aportación. Luego se señalan los planes del fondo que son óptimos en relación al periodo de los excesos de dispersión y deficiencias por la reducción de las aportaciones y la variabilidad del fondo.

Las tasas de retorno pueden ser representadas por un modelo de series temporales, y con esto obtener un método recursivo para calcular la distribución condicional del nivel del fondo.

Dados los retornos aleatorios se considera también un fondo dinámico de pensiones y la amortización de ganancias y pérdidas.

Por último se diseña un procedimiento práctico de simulación en el modelo dinámico de pensiones y también se discuten las posibilidades de que las valoraciones y las proyecciones sean diferentes.

1.2 Tipos de riesgos considerados.-

Se consideran 2 tipos de riesgos que conciernen respectivamente a la estabilidad y a la seguridad del fondo: el riesgo de la tasa de aportación y el riesgo de solvencia.

El riesgo de la tasa de aportación es considerado para un esquema de pensiones de beneficio definido y compara diferentes aproximaciones del fondo por medio de la minimización de la variabilidad en el valor presente de las aportaciones futuras.

El modelo estocástico y dinámico que se estudia en este trabajo involucra una proyección dinámica de series de flujos de efectivo en base a las producciones del plan y, a los factores económicos en el descubrimiento de costos jubilatorios. La valoración jubilatoria es vista convencionalmente en términos de los procesos estocásticos y dinámicos.

Este proyecto está enfocado en la importancia de construir un modelo estocástico realizando la administración de riesgo para el plan de pensiones. Tomando en cuenta que, en cualquier momento cualquier miembro del plan se encuentra en uno de los posibles estados laborales y este cambio en el estado laboral puede tener un impacto financiero directo en los flujos de efectivo esperados.

Debido a la incertidumbre de las suposiciones actuariales, un proceso estocástico generalizado resulta de gran ayuda en el establecimiento de las políticas de planeación financiera y de la evaluación del presupuesto. El estado financiero futuro del plan puede ser proyectado a través de comportamiento estocástico según la experiencia probabilística pasada dada por los supuestos actuariales.

Debido a la complejidad, nos enfocamos principalmente en la estructura interior cambiante del sistema y de los factores macroeconómicos.

En la siguiente sección se establecerá el marco de trabajo y las notaciones que serán utilizadas en la elaboración de este modelo. En base a estas funciones actuariales, podremos monitorear los costos jubilatorios futuros bajo posibles escenarios.

CAPÍTULO 2

2. DEFINICIONES Y NOTACIÓN ACTUARIAL

En este capítulo, primero se abordarán definiciones y notaciones clásicas de las operaciones de seguros y planes de pensiones con el objeto de dar un marco teórico para el desarrollo específico de nuestro estudio.

2.1 Función de supervivencia.

Sea x la edad, en años de un individuo, donde x puede tomar cualquier valor desde 0 (cero) hasta el límite superior de supervivencia de alguna población.

Consideremos un recién nacido y asociemos la variable aleatoria ξ a la edad de *fallecimiento* del individuo considerado. Sea *F(x)* la función de distribución de ξ ,

$$F(x) = P(\xi \leq x), \qquad x \geq 0$$

Sea,

$$S(x) = 1 - F(x) = P(\xi > x), \qquad x \geq 0 \qquad (2.1)$$

donde *F(0)= 0,* lo que equivale a decir que *s(0)= 1*. La función *s(x)* se denomina *función de supervivencia*, ya que para cualquier valor positivo de *x*, la función antes mencionada nos da la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad *x*.

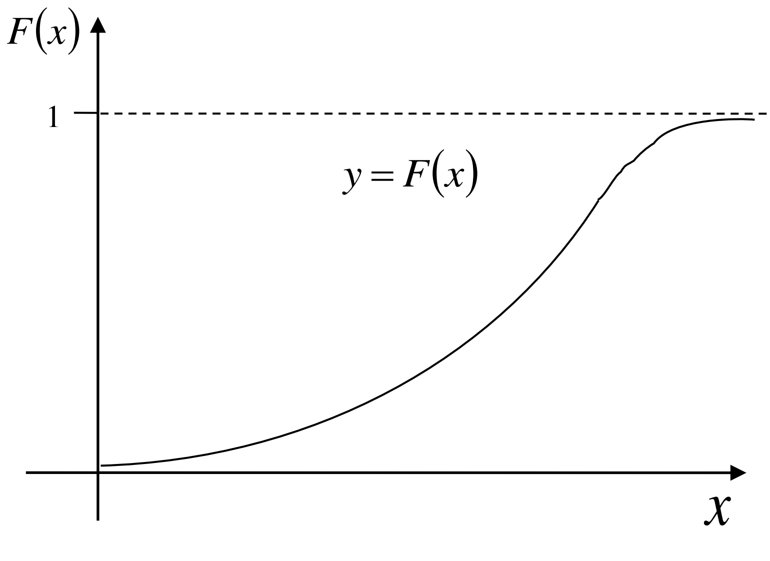


Figura 2.1.1.- *Forma General de la función de F(x)*

La distribución de ξ se puede definir, bien sea por la función F(x), o también, por s(x). Es decir,

$$P(x < \xi < z) = F(z) - F(x)$$
$$= S(x) - S(z)$$

La probabilidad de que un recién nacido fallezca entre *x* e *y*, sobreviviendo a la edad *x*, sería:

$$P(x < \xi \leq z | \xi \geq x) = \frac{F(y) - F(x)}{1 - F(x)} \qquad (2.2)$$

A continuación tenemos las propiedades de la función de supervivencia *s(x)*:

- *s(x)* es una función decreciente o no crece.
- Se asume que *s(x)* es una función continua de *x*.
- Se supone que *s(0)*=1 y que en el extremo superior ∞ de *x*, s(∞)=0.

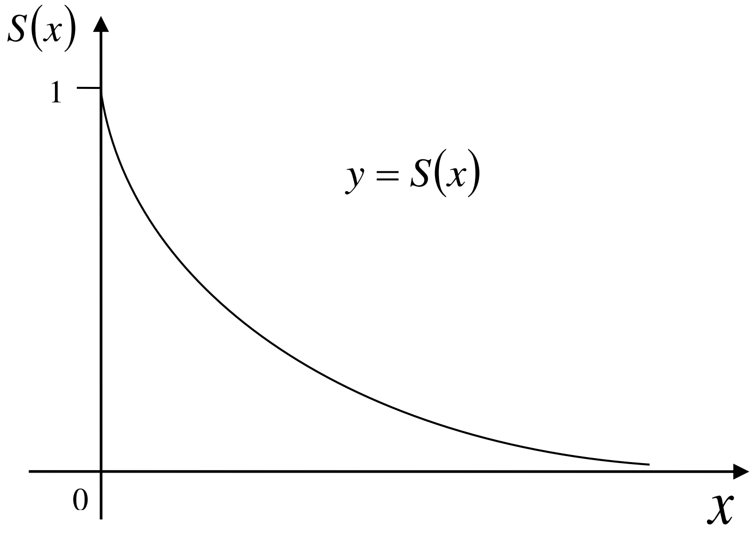


Figura 2.1.2.- *Forma General de la función S(x)*

2.2 Tiempo futuro de supervivencia.

Sea (*x*) una persona de edad x y sea *T(x)*, o *T*, el tiempo futuro de supervivencia de (x), es decir, $\xi - x$, entonces:

- La probabilidad de que (x), *fallezca* dentro de *t* años vendría dada por:

$$ {}_tq_x = P[T(x) \leq t], \qquad t \geq 0 $$

y la probabilidad de que (*x*) sobreviva *t* años más vendría dada por la siguiente expresión:

$$ {}_t p_x = 1 - {}_t q_x = P[T(x) > t], \quad t \geq 0 $$

- Las probabilidades de supervivencia referidas a un año serían respectivamente:

p_x Probabilidad de que (*x*) viva un año más

q_x Probabilidad de que (*x*) fallezca dentro de un año.

- La probabilidad de que (x) sobreviva *t* años más y *fallezca* en los *n* años siguientes sería:

$$ {}_{t|n} q_x = P[t < T \leq t + n] = {}_{t+n} q_x - {}_t q_x $$

$$ = {}_t p_x - {}_{t+n} p_x $$

2.3 Modelos de supervivencia.

Sea l_0 el número de recién nacidos. Existe para cada edad de *fallecimiento* de un recién nacido una determinada distribución dada por la función de supervivencia *s(x)*. Sea $\lambda(x)$ el número de supervivientes a la edad *x* y sea $l_x = E[\lambda(x)]$, entonces se tiene que:

$$l_x = l_0 . s(x) \tag{2.3}$$

Ahora siendo ${}_n\delta_x$ el número de *fallecimientos* entre las edades *x* y *x+n*, de los l_0 iniciales y ${}_n d_x = E\left[{}_n\delta_x\right]$, se tendría entonces que:

$${}_n d_x = l_0\left[s(x) - s(x+n)\right] \tag{2.4}$$

2.4 Tanto instantáneo de fallecimiento.

La fuerza de *fallecimiento* varía cada momento y, por tanto, se debe disponer de alguna forma de medir dicha variación en cada instante.

Para ello, tomemos en consideración la probabilidad:

$$P\left[x < \xi \leq x + \Delta x \middle| \xi > x\right] = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \approx \frac{F'(x).\,\Delta x}{1 - F(x)} = \frac{f(x)\Delta x}{1 - F(x)}$$

donde *f(x)/1 - F(x)* representa una función de densidad de probabilidad condicionada que nos da, para cada edad *x*, el valor de la función de densidad de probabilidad condicionada de ξ a la edad exacta *x*, sobreviviendo a esta edad. Se denomina **"tanto instantáneo de fallecimiento"**.

Sea el tanto instantáneo μ_x y se tiene que:

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1-F(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)}$$

Sabiendo las propiedades de la función de densidad *f(x)* y la función de distribución *F(x)*, entonces el tanto instantáneo $\mu_x \geq 0$.

2.5 Número total esperado de años de supervivencia.

Se tiene un determinado colectivo de personas constituido por l_0 elementos iniciales, sea L_x el número total esperado de años de supervivencia vividos por los elementos del colectivo el cual se lo puede expresar de la siguiente manera:

$$L_x = \int_0^1 t.l_{x+t}.\mu_{x+t}dt \; + \; l_{x+t} \tag{2.5}$$

2.6 Tanto central de fallecimiento a la edad x.

Sea el tanto central de fallecimiento a la edad x definido por la siguiente expresión:

$$m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t} . \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t} dt} \qquad (2.6)$$

T_x es el total de años vividos desde x por el grupo de supervivientes procedentes de un grupo inicial de *l₀* elementos y se puede expresar de la forma siguiente:

$$T_x = \int_0^\infty t \, . \, l_{x+t} \mu_{x+t} dt = -\int_0^\infty t dl_{x+t} = \int_0^\infty l_{x+t} dt \qquad (2.7)$$

2.7 Número promedio de años vividos entre x y x+1.

Sea *a(x)* el número promedio de años vividos por el grupo de supervivientes que fallecieron entre las edades *x* y *x+1*:

$$a(x) = \frac{\int_0^1 t . {}_t p_x . \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt} \qquad (2.8)$$

2.8 Valor actual y Valor actuarial.

Sea un colectivo de personas con característica *x* que contrata un determinado seguro con una empresa aseguradora, la cual le pagará una indemnización cuando pierda la característica *x*.

Sea $F_x(t)$ la función de distribución de la variable aleatoria ξ (variable aleatoria relacionada a la pérdida de la característica x), la cual nos da la probabilidad de que el elemento considerado pierda dicha característica en un momento anterior a *t.* Definiendo el valor financiero actual por la expresión υ^{ξ}, donde la variable aleatoria ξ está relacionada al momento en que pierde la característica x el elemento que se consideró.

Es decir,

$$\text{Valor actual} = \upsilon^{\xi}$$

Y como υ^{ξ} es una variable aleatoria, se puede obtener su esperanza matemática que se denomina valor actuarial y viene dado por la siguiente expresión:

$$\text{Valor actuarial} = \quad E\left(\upsilon^{\xi}\right) = \int_{0}^{\infty} \upsilon^{t} dF_x(t)$$

2.9 Símbolos de conmutación

Estos símbolos son valores tabulados en las tablas financiero – actuariales y se los utiliza en el cálculo de seguros, rentas, pensiones, etc., dependen de las tablas de mortalidad y de la tasa de interés aplicable. Los más importantes son los detallados a continuación:

$$C_x = \upsilon^{x+1}.d_x \qquad M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$$

$$D_x = \upsilon^{x}.l_x \qquad N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}$$

$$R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t} \qquad S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t}$$

2.10 Valores actuariales de las operaciones de seguros múltiples.

Para continuar con las notaciones actuariales, ahora vamos a hacer referencia en lugar de una persona, a un grupo de personas, ya que su aplicación directa concierne a los fondos de pensiones que están compuestos por varias personas. De ahora en adelante haremos referencia a un grupo en el cual al menos uno se mantenga vivo.

2.10.1 Grupo de vida conjunta

Es un grupo de personas en el cual sobreviven todos los miembros y muere en el instante del primer fallecimiento. Sea

$(x_1, x_2,\ldots, x_m)$, un grupo de miembros donde x_i representa la edad o tiempo de supervivencia del miembro *i* y *m* representa el número de miembros del grupo.

2.10.2 Función de distribución del tiempo hasta el fallecimiento de un grupo.

Sea un grupo de supervivencia conjunta y sea $T = mín[T(x_1),T(x_2),\ldots,T(x_m)]$, donde $T(x_i)$ es el tiempo hasta el fallecimiento del miembro *i* del grupo.

Por simplicidad asumiremos que las variables aleatorias relacionadas con los tiempos hasta el fallecimiento de los miembros del grupo son independientes, ya que si asumimos dependencia, el cálculo de las distribuciones sería demasiado complicado.

La función de distribución de la variable aleatoria *T* para *t*>0, para el caso de dos miembros $x_1 = x$ y $x_2 = y$ tal que $T = T(xy)$ vendría dada de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
F_T(t) = P(T \leq t) &= P\{mín[T(x),T(y)] \leq t\} \\
&= 1 - P[T(x) > t \quad y \quad T(y) > t]
\end{aligned}
$$

Es decir, que si asumimos independencia, la probabilidad de que el grupo (xy) sobreviva en el momento *t* ${}_t p_{xy}$, sea

$$ {}_t p_{xy} = {}_t p_x \cdot {}_t p_y \tag{2.9} $$

Al diferenciar la función $F_T(t)$ se obtiene la función de densidad de la variable aleatoria *T*, así:

$$ = {}_t p_x \cdot {}_t p_y \left(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} \right) $$

2.10.3 Grupo al último superviviente

Cuando hablamos de un grupo al último superviviente nos referimos al tipo de grupo que existe mientras sobreviva un elemento de dicho grupo y deja de existir cuando fallece el último miembro.

Sea $\left(\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}\right)$, el grupo de miembros, donde x_i representa la edad del miembro *i* y *m* denota el número de miembros del grupo.

- Si se quiere establecer la función de distribución de la variable aleatoria *T*, tiempo hasta el fallecimiento del grupo, se tiene que $T = máx\left[T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)\right]$ donde $T(x_i)$ es el tiempo hasta el fallecimiento del miembro *i* y además se debe suponer que T(x_1), T(x_2),…, T(x_m) son independientes entre si. Para el caso de dos miembros tenemos:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P\{máx[T(x), T(y) \leq t]\}$$
$$= P[T(x) \leq t \text{ y } T(y) \leq t]$$

Y, si tomamos en cuenta que son independientes,

$$F_T(t) = P[T(x) \leq t].P[T(y) \leq t] = (1 - {}_t p_x)(1 - {}_t p_y)$$
$$= 1 - {}_t p_x - {}_x p_y + {}_t p_x \cdot {}_t p_y$$

Por consiguiente, la probabilidad de supervivencia del grupo $\overline{xy}$ al último fallecimiento, *t* años después será

$${}_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x \cdot {}_t p_y \qquad (2.10)$$

2.10.4 Probabilidad de fallecimiento relativa a grupos de n miembros

La Probabilidad de que un grupo de *m* miembros $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sobrevivan *n* años más si los *m* miembros superviven en aquel momento se puede expresar de la siguiente manera:

$$ {}_{n}p_{x_1 x_2 \ldots x_m} \tag{2.11} $$

y tomando en cuenta la independencia entre los fallecimiento de los *m* miembros que forman el grupo, se tiene que:

$$ {}_{n}p_{x_1 x_2 \ldots x_m} = {}_{n}p_{x_1} \cdot {}_{n}p_{x_2} \cdot {}_{n}p_{x_3} \cdots {}_{n}p_{x_m} $$

donde ${}_{n}p_{x}$ representa la probabilidad de que el miembro de edad x_n en el momento de celebrar la operación sobreviva *n* años más.

2.10.5 Tanto instantáneo de fallecimiento de un grupo de m miembros

Se define el tanto instantáneo de fallecimiento de un grupo al primer fallecimiento después de *t* años como:

$$ \mu_{x_1+t:\,x_2+t:\ldots x_m+t:} = \mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t} + \ldots + \mu_{x_m+t} \tag{2.12} $$

2.11 Modelos matemáticos de salidas múltiples de un colectivo de personas.

Consideremos ahora el hecho de los miembros de un plan de pensiones pueden salir por diferentes causas que la considerada hasta ahora (fallecimiento).

En la vida real un miembro puede dejar de aportar en un fondo de pensiones por causas como las siguientes: enfermedad, fallecimiento, invalidez y jubilación.

2.11.1 Probabilidades de salidas múltiples

Los modelos de salida múltiple son unos modelos matemáticos que considera un grupo de miembros bastante grande, el cual está sujeto a diversas causas de salida que operan de forma continua.

Utilicemos la siguiente notación:

$l_x^{(\tau)}$: Total de miembros de edad x en un grupo (colectivo) de miembros sujetos a la influencia de *m* causas de salidas (1), (2),…, (*m*);

$d_x^{(k)}$: Salidas por la causa (*k*) entre las edades x, x+1;

$d_x^{(\tau)}$: Total de salidas por todas las causas entre las edades x, x+1, es decir,

$$d_x^{(\tau)} = \sum_{k=1}^{m} d_x^{(k)} \tag{2.13}$$

Además,

$$l_x^{(\tau)} - d_x^{(\tau)} = l_{x+1}^{(\tau)} \tag{2.14}$$

$q_x^{(k)}$: Probabilidad de que (*x*) salga del grupo de supervivientes, por la causa (*k*), a lo largo de un año

$$q_x^{(k)} = \frac{d_x^{(k)}}{l_x^{(\tau)}} \tag{2.15}$$

$q_x^{(\tau)}$: Probabilidad de que (x) salga del grupo de supervivientes, por cualquier causa, durante un año:

$$q_x^{(\tau)} = \frac{d_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} = \sum_{k=1}^{m} q_x^{(k)} \tag{2.16}$$

$p_x^{(\tau)}$: Probabilidad de que (x) permanezca en el grupo de supervivientes durante, al menos un año.

$$p_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \tag{2.17}$$

De igual manera,

$${}_n p_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+n}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \tag{2.18}$$

$${}_n q_x^{(\tau)} = 1 - {}_n p_x^{(\tau)} \tag{2.19}$$

2.11.2 Tantos centrales de salida

El tanto central de salida por todas las posibles causas a la edad x se define de la siguiente manera:

$$m_x^{(\tau)} = \frac{d_x^{(\tau)}}{L_x^{(\tau)}} \tag{2.20}$$

Donde

$$L_x^{(\tau)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} dt \tag{2.21}$$

El tanto central de salida por la causa (k) viene dado por:

$$m_x^{(k)} = \frac{d_x^{(k)}}{L_x^{(\tau)}}$$

2.11.3 Tantos instantáneos de salida

En un modelo de salidas múltiples, el tanto total instantáneo de salida a la edad x se define de la siguiente forma:

$$\mu_x^{(\tau)} = l\acute{\imath}m_{h\to 0} \frac{{}_h q_x^{(\tau)}}{h} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \cdot \frac{d\left(l_x^{(\tau)}\right)}{dx} = -\frac{d\left(\log_e l_x^{(\tau)}\right)}{dx}$$

$$_n p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^n \mu_{x+t}^{(\tau)} dt} \tag{2.22}$$

- Para definir los tantos instantáneos de salidas por cada una de las causas individuales, se debe establecer las siguientes funciones:

$$l_x^{(k)} = \sum_{t=x}^{\infty} d_t^{(k)} \qquad , \quad k = 1,2,\ldots,m \tag{2.23}$$

Donde $l_x^{(k)}$ es el número de miembros de edad x que salen por la causa (*k*).

Sea el tanto instantáneo de salida por cada causa (*k*) tal que:

$$\int_x^{\infty} l_y^{(\tau)} \mu_y^{(k)} dy = l_x^{(k)} \qquad , \quad k = 1,2,\ldots,m \tag{2.24}$$

Además:

$$d_x^{(k)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} . \mu_{x+t}^{(k)} dt \tag{2.25}$$

$${}_n q_x^{(k)} = \int_0^n {}_t p_x^{(\tau)} . \mu_{x+t}^{(k)} dt$$

Debido a que $l_x^{(\tau)} = \sum_{k=1}^{m} l_x^{(k)}$, se concluye que:

$$\mu_x^{(\tau)} = \sum_{k=1}^{m} \mu_x^{(k)} \tag{2.26}$$

Cabe mencionar la diferencia que existe entre los tantos instantáneos de salidas y las probabilidades de salida, debido a que las funciones de probabilidad indican un cierto intervalo de tiempo durante el cual el grupo de elementos considerado se está reduciendo por todas las causas de salida; por tanto, el número de miembros que salen en el intervalo por la causa (*k*) no es independiente de las salidas por las otras causas. Cuanto más intenso sea el efecto de estas fuerzas, menores serán las salidas por la causa (*k*) y menor será el valor de la probabilidad de salida por esta causa.

Por otra parte, la función $\mu_x^{(k)}$, al ser un tanto instantáneo de salida, no se refiere a ningún intervalo de tiempo y por ello no se encuentra afectado por la influencia de las demás causas.

2.12 Teoría de Pensiones

2.12.1 Funciones Básicas.

A continuación abordaremos la notación básica para representar un grupo de supervivencia de miembros que están sujetos, durante varios años de servicio activo, a probabilidades de salida como: abandono de servicio (*w*), fallecimiento (*d*), invalidez (*i*) y jubilación (*r*), por haber alcanzado determinada edad.

Siguiendo la notación anterior se tiene que:

$$l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - w_x - d_x - l_x - r_x \qquad (2.27)$$

Por tanto, la probabilidad de supervivencia en un año vendría dada por:

$$p_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} = \left[1 - \left(q_x^{(w)} + q_x^{(d)} + q_x^{(i)} + q_x^{(r)}\right)\right]$$

Donde,

$q_x^{(w)}$: Es la probabilidad de salida del grupo durante un año por abandono de servicio;

$q_x^{(d)}$: Es la probabilidad de salida del grupo durante un año por fallecimiento;

$q_x^{(i)}$: Es la probabilidad de salida del grupo durante un año por invalidez;

$q_x^{(r)}$: Es la probabilidad de salida del grupo durante un año por jubilación.

Se denotarán los tantos instantáneos de la siguiente forma: $\mu_x^{(w)}, \mu_x^{(d)}, \mu_x^{(i)}, \mu_x^{(r)}$ respectivamente,

$$ {}_t p_x = \frac{l_{x+t}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} = {}_{t-1} p_x^{(\tau)} . p_{x+t-1}^{(\tau)} \qquad (2.28) $$

Para representar la edad de entrada, edad establecida para la jubilación y edad límite vamos a utilizar las letras a, α, ω respectivamente tal que $l_\omega^{(\tau)} = 0$.

Para la valoración de las prestaciones mediante rentas, se debe tener unas tablas financiero – actuariales adecuadas que distinguirán entre jubilado por invalidez o por edad de servicio y dependiendo de las características de la población. Para esto se deberá utilizar superíndices que permitirán distinguir los correspondientes valores actuariales:

$\bar{a}_{x+t}^{i}$ valor actuarial de una renta de jubilación por invalidez

$\bar{a}^{r}_{x+t}$ valor actuarial de una renta de jubilación por años de servicio

Usamos valores actuariales de rentas continuas como una aproximación de la forma de pago de la prestación que generalmente es mensual.

Los planes de pensiones establecen sus prestaciones como porcentaje del salario medio de los n años anteriores. Estos modelos se usan frecuentemente para planes relacionados con empleados que reciben salario, siendo necesario hacer proyecciones salariales futuras para valorar las posibles prestaciones y las contribuciones del patrocinador del plan. Con tal fin, definimos las funciones salariales siguientes:

$(SA)_{x+t}$ tanto salarial anual real a la edad x+t, correspondiente a un partícipe del plan que entró a la edad x y ahora tiene x+t;

$(SE)_{x+t+h}$ tanto salarial esperado a la edad x+h+t

Se asumirá que tenemos una función escala de los salarios denotada por S_y , que vamos a utilizar para las proyecciones, tal que:

$$(SE)_{x+t+h} = (SA)_{x+t} \frac{S_{x+t+h}}{S_{x+t}} \tag{2.29}$$

La función escala S_y se refiere tanto a los aumentos de los sueldos y antigüedad como a los incrementos ocasionados por la inflación. Generalmente, la función es S_y una función escalón, con niveles constantes a lo largo de cualquier año de edad considerado.

Los factores que se necesitan para determinar los valores actuariales de las contribuciones de los planes de pensiones y prestaciones a que se debe hacer frente en un modelo de salidas múltiples son: una escala salarial, alguna hipótesis relativa al rendimiento de las inversiones y valores de las rentas apropiadas para las invalidaciones y jubilaciones por la edad de servicios.

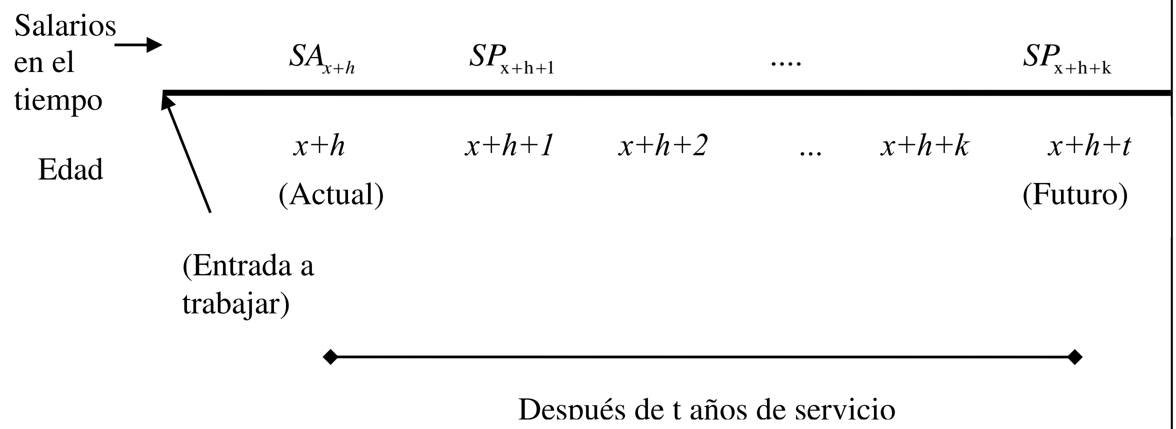
Cada valor actuarial se puede calcular de diferentes formas:

1. Suponiendo una variable continua asociada al valor actuarial, lo cual se obtiene mediante una integral.

2. Desarrollando las funciones de conmutación de modo que las expresiones de la sumatoria se puedan escribir compactamente y calcular mediante tablas de acuerdo a la población.

Muchos planes de prestaciones definen las aportaciones y las prestaciones en función de la historia salarial de un miembro del colectivo.

Utilizaremos el siguiente gráfico como explicación.



El p

Figura 2.12.1.- *Teoría de Pensiones: Tanto salarial*

pasado.

El total de servicios pasados $(TSP)_{x+h} =$ total a la edad *x+h* de las ganancias pasadas.

$(SP)_{x+h+t}$, salario proyectado para el año de edad que va de *x+h+t* a *x+h+t+1*.

$$SE_{x+h+t} = SA_{x+h} \frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}} \qquad (2.30)$$

Donde SA_{x+h}, salario anual actual, y $\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}$, factor escala.

Algunas funciones escalón típicas:

1. $$S_{x+h+t} = (1+i)^t \qquad (2.31)$$

Interés compuesto anual.

2. $$S_{x+h+t} = 1 + ti \,, \tag{2.32}$$

Crecimiento simple constante.

En este caso el $(SP)_{x+h+t} = (SA_{x+h})(1+ti)$ y el salario se proyecta para que aumente cada año en la cantidad constante $i(SA_{x+h})$.

2.12.2 Valor Actuarial de las prestaciones anuales por jubilación.

La prestación del plan principal es normalmente la renta a la edad de jubilación. El modelo para la renta de jubilación supone que el pago comienza a la edad *x+h+t* (salida) y pasa continuamente a un tanto anual constante *R(x,h,t),* que puede tener en cuenta la historia salarial y de los servicios.

Para simplificar las expresiones del valor actuarial, supongamos el montante global equivalente a una renta de jubilación.

$\bar{a}^{(r)}_{x+h+t}$ Valor actuarial en *x+h+t* de 1 u.m. anual pagada continuamente, recibida a la edad de jubilación (es decir, t años a partir de ahora).

$R(x,h,t)$ Monto constante anual.

Se consideran los *h* años de servicios pasados y *t* años de servicios futuros entre las edades x (entrada), x+h (hoy) y x+h+t (jubilación). Se debe considerar un punto α entre hoy y la jubilación y un punto β después de la jubilación.

De ser posible la jubilación a cualquier edad entre α y β, se tendría una expresión exacta para el valor actuarial a la edad x+h, de las prestaciones rentas por jubilación:

Valor Actuarial (x+h) de la renta de jubilación

$$= \int_{t=\alpha-(x+h)}^{\beta-(x+h)} R(x,h,t)\bar{a}_{x+h+t}^{(r)} \cdot \upsilon^{t} \cdot {}_{t}p_{x+h} \ \mu_{x+h+t}^{(r)}$$

Donde,

$${}_{t}p_{x+h} \ \mu_{x+h+t}^{(r)}$$

Significa que en (x+h), el individuo permanece activo hasta la edad (x+h+t) y luego se jubila (salida por causa r) al instante siguiente.

2.12.3 Escala Salarial

SA_{x+h} : Salario anual actual para el año [x+h, x+h+1] para un individuo que entró a la edad x, y actualmente tiene la edad x+h.

S_y : Función salarial, generalmente se supone que es una función escalón (constante para cada año de edad).

SE_{x+h+t} : Salario anual esperado entre las edades x+h+t y x+h+t+1.

$$SE_{x+h+t} = \frac{SA_{x+h} \ . \ S_{x+h+t}}{S_{x+h}} \qquad (2.33)$$

STP_{x+h} : Salarios totales pasados a la edad x+h, después de h años de servicio.

CTPA: Aportaciones totales pasadas capitalizadas a la edad x+h.

$${}_mZ_y = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}S_{y-m} + S_{y-m+1} + ... + S_{y-1} + \frac{1}{2}S_y\right] \qquad (2.34)$$

Media de los *m* últimos años de los factores escala para usar con la regla del punto medio $\left(edad \ \ y + \frac{1}{2}\right)$.

R(x,h,t), monto de la prestación por renta a cada edad de servicio anual para un individuo actualmente de edad x+h con t años hasta la jubilación. Generalmente, se supone constante durante la jubilación.

2.12.4 Valores actuariales de las aportaciones.

Mostraremos algunos casos posibles para la valoración de las aportaciones o contribuciones:

- Cantidad constante de *c* unidades monetarias / año de edad actual (x+h), pagada de forma continua:

$$\int_{t=0}^{w-x-h} \upsilon^{t} \cdot {}_{t}p_{x+h}^{(\tau)} . c dt$$

Valor actuarial exacto de las aportaciones futuras.

- Fracción f del salario, pagada de forma continua por (x+h)

$$\int_{t=0}^{w-x-h-1} \upsilon^{t} \cdot {}_{t}p_{x+h}^{(\tau)} . f . SE_{x+h+t} dt$$

Valor actuarial de las aportaciones futuras.

Valores actuariales de las prestaciones por jubilación.

- Caso general:

$$\int_{t=0}^{w-x-h} \upsilon^{t} \cdot {}_{t}p_{x+h}^{(\tau)} . \mu_{x+h+t}^{(r)} . R(x,h,t) . \bar{a}_{x+h+t}^{(r)} dt$$

Valor actuarial de las prestaciones por jubilación en el caso general.

Mencionaremos algunos casos específicos, según las variaciones de la definición de una renta de jubilación R(x,h,t):

1. La fracción g del salario medio anual de los *m* últimos años:

$$R\left(x,h,t+\frac{1}{2}\right)=g.SA_{x+h}.\frac{{}_{m}Z_{x+h+t}}{S_{x+h}}$$

$$=\left(\sum_{t=0}^{w-x-h-1}\upsilon^{t+1/2}\cdot_{t}q_{x+h}^{(r)}\cdot g.SA_{x+h}\right)$$

$$=\frac{{}_{m}Z_{x+h+t}}{S_{x+n}}.\bar{a}_{x+h+1/2}$$

$$g.SA_{x+h}.\frac{{}^{Za}\overline{M}_{x+h}^{(r)}}{{}^{S}D_{x+h}^{(\tau)}}$$

Valor actuarial de las prestaciones por jubilación.

2. Salario final y antigüedad:

$$R\left(x,h,t+\frac{1}{2}\right)=f\left(x+t+\frac{1}{2}\right)SA_{x+h}.\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}$$

$$=\left[\sum_{t=0}^{w-x-h-1}\upsilon^{t+1/2}\cdot_{t|}q_{x+h}^{(r)}.f.SA_{x+h}\left(h+t+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}.\bar{a}_{x+n+t+1/2}=$$

$$=f\left(h+\frac{1}{2}\right)SA_{x+h}\frac{{}^{Sa}\overline{M}_{x+h}^{(r)}}{{}^{S}D_{x+h}^{(\tau)}}+f.SA_{x+h}.\frac{\overline{R}_{x+h+1}}{{}^{S}D_{x+h}^{(\tau)}}$$

Valor actuarial de las prestaciones por jubilación.

3. Salario medio profesional: $R\left(x,h,t+\frac{1}{2}\right)$ = fracción *f* de la paga profesional total =*f* (servicio total).

4. Media profesional

$$= f.SPT_{x+h} + \frac{f.SA\left(S_{x+h} + S_{x+h+1} + \ldots + S_{x+h+t-1} + \frac{1}{2} S_{x+h+t} \right)}{S_{x+h}}$$

Valor actuarial de las prestaciones por jubilación correspondientes a los servicios pasados.

$$= \sum_{t=0}^{w-x-h-1} \upsilon^{t+1/2} \cdot {}_{t|} q_{x+h}^{(r)} . f.SPT_{x+h} . \bar{a}_{x+h+t+1/2}^{(r)}$$

$$= f.SPT_{x+h} \cdot \frac{{}^{a}\overline{M}_{x+h}^{(r)}}{D_{x+h}^{(\tau)}}$$

Valor actuarial de las prestaciones correspondientes a los servicios futuros.

2.13 Desarrollo del modelo matemático

2.13.1 Factores Demográficos.

Se consideran algunos factores demográficos que influyen en la valoración de los planes de pensiones entre los cuales se incluyen: tasas de mortalidad, transición entre diferentes estados laborales, tasas de cambios, tasas de retiros y la suposición de nuevas entradas. Estas proporciones son cruciales para las proyecciones futuras de los flujos de efectivo. En este modelo la transición de los miembros del plan está dada en base al estado laboral obtenido. Se debe definir la distribución de la contratación de las nuevas entradas.

2.13.2 El comportamiento de la transición de un plan dinámico.

Se debe tener un modelo que describa la propiedad estocástica general de la probabilidad de transición de los miembros del plan entre varios estados laborales. Dada la relación directa entre la edad alcanzada y la transición, los créditos por años de servicio y la historia laboral de cada miembro del plan, el proceso propuesto para este modelo puede clarificar las características de la transición de cada miembro del plan. Este modelo se desarrolla según la clasificación y movimientos de los miembros del plan y se emplean modificaciones para mantener las utilidades del modelo en el monitoreo de la solvencia del plan.

Para representar los posibles estados de los miembros del plan se usa un espacio finito de estados φ

$$\varphi = \{\varphi_A, \varphi_C, \varphi_V, \varphi_F, \varphi_{VF}\}$$

φ_A es un subgrupo de estados laborales para un miembro activo. Los grupos incluyen todos los posibles estados laborales presentes de los miembros del plan. Sea $\varphi_A = \{A_1, A_2,..., A_a\}$, donde a es el número de varios estados laborales. Una ilustración de la φ_A puede ser:

$\varphi_A =$ {Técnico, Ejecutivo Principal, Nivel de entrada Profesional}

En el ejemplo anterior, hay un total de 3 estados laborales en el plan jubilatorio. Los estados laborales de un plan específico pueden ser cambiados debido a la promoción laboral o a otra política administrativa del tiempo sobre todo el tiempo de la carrera.

En este grupo se asume que se satisfacen las propiedades irreducibles de que desde cualquier posición se está en capacidad de llegar a otra.

Es decir:

$$A_i \leftrightarrow A_j \quad , \quad A_i, A_j \in \varphi_A$$

Pero para este estudio en particular se asume que los miembros pueden recibir únicamente ascensos.

φ_C es un grupo de todos los posibles estados de beneficios bajo la actual estructura del plan de pagos. Se pueden considerar 4 categorías principales de beneficios por medio del plan de pensiones con lo que φ_C puede ser descrito como sigue:

$$\varphi_C = \text{ \{Despido, Jubilación, Retiro, Invalidez Permanente\}}$$

Una vez que un miembro del plan cae en φ_C ya no puede volver al trabajo. Ahora bien, las opciones de pago pueden ser dos: con suma acumulada o con anualidad. En el primer caso φ_{CS} denota todos los posibles pagos de beneficios con suma acumulada bajo la estructura del plan de pensiones. En este caso, el patrocinador del plan no tendrá ninguna obligación financiera a futuro una vez que el miembro del plan obtiene el pago de suma acumulada. En el segundo caso se consideran todas las posibles formas de pago anual φ_{cm} como otro subgrupo de φ_C. En este caso el patrocinador del plan no tendrá obligación financiera cuando el jubilado que escoge el pago anual entra en el estado de detención del pago φ_F, el cual normalmente incluye la muerte.

El estado de invalidez φ_V es un grupo que excluye los estados φ_A, φ_C y φ_F. Los créditos de servicio del miembro del plan mientras esté en este subgrupo no son acumulados para los beneficios jubilatorios.

Las posibles razones de entrar en este subgrupo son las siguientes: por la ausencia temporal en el trabajo u otras circunstancias accidentales. Este subgrupo no está cerrado ya que el miembro del plan puede volver a la posición original. En este caso φ_{VF} es el estado en el cual el miembro que salió ya no vuelve permanentemente al trabajo. Bajo este esquema son ampliamente determinados los estados laborales de cada miembro del plan.

El siguiente diagrama resume los posibles cambios de estados laborales.

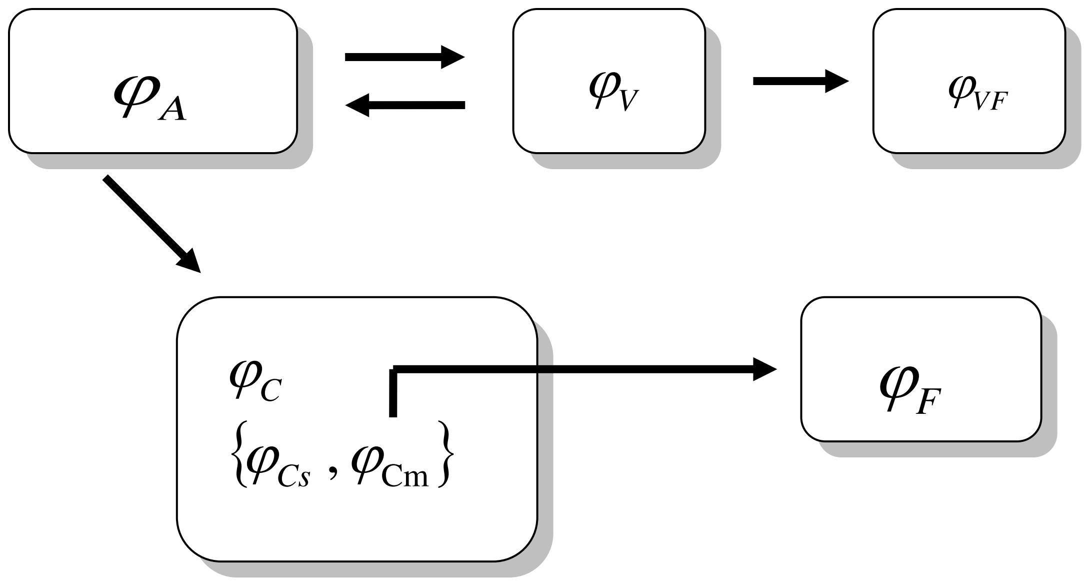


Figura 2.13.1.- *Transición en el plan dinámico*

2.13.3 Tiempo de transición.

Está definido como el tiempo acumulado que un miembro del plan tarda en cambiar a diferentes estados. Aquí *n* denota el instante de transición para el *n – ésimo* cambio de posición. Este tiempo de transición es formulado como función del tiempo $t = T(n)$, para la construcción del proceso estocástico en este modelo. La información del plan en la transición *n* está dada por un vector de transición tridimensional $\{X_n, G_n, H_n\}$, donde n es un entero positivo. X_n es el estado del miembro del plan en la transición *n*; G_n es la edad alcanzada por el miembro del plan en la transición *n* y H_n representa los años de servicio del miembro del plan en la transición *n*.

La probabilidad de transición es una función del estado presente, la edad alcanzada y los años de servicio. Es formulada de la siguiente manera:

$$ {}^{\upsilon}P_{ij(xy)}^{(m)}(n) = P\left(X_{n+m} = j, G_{n+m} \leq y, H_{n+m} \leq \upsilon + y - x \middle| X_n = i, G_n = x, H_n = \upsilon\right) $$

(2.37)

Esta ecuación representa la probabilidad de transición de un miembro del plan con un estado presente *i,* con la edad x y con υ años de servicio trasladándose al estado *j*, a la edad menor o igual que *y*, con años de servicios menor o igual que $\upsilon + y - x$ después de *m* transiciones. Por simplicidad *n* es omitido. Usando ${}^{\upsilon}b_{ij(xy)}$ para denotar la probabilidad de que la siguiente edad de transición sea *y*.

$$ {}^{\upsilon}b_{ij(xy)} = P\left(X_{n+1} = j, G_{n+1} = y, H_{n+1} \leq \upsilon + y - x \middle| X_n = i, G_n = x, H_n = \upsilon\right) $$

$$ = {}^{\upsilon}P_{ij(xy)}^{(1)} - {}^{\upsilon}P_{ij(x,y-1)}^{(1)} $$

(2.38)

Para la siguiente *m – ésima* transición, la probabilidad puede ser formulada como sigue:

$$ {}^{\upsilon}b_{j(xy)}^{(m)} = P\left(X_{n+m} = j, G_{n+m} = y, H_{n+m} \leq \upsilon + y - x \middle| X_n = i, G_n = x, H_n = \upsilon\right) $$

$$ = {}^{\upsilon}P_{ij(xy)}^{(m)} - {}^{\upsilon}P_{ij(x,y-1)}^{(m)} $$

(2.39)

La suma de probabilidades de transición de un miembro en la transición *n* con el estado actual *i*, a la edad *x,* con υ años de servicio moviéndose al estado *j* a la edad menor o igual que *y* con años de servicio menor o igual que $\upsilon + y - x$ es por tanto:

$$ {}^{\upsilon}b_{ij(xy)}^{(\ )} = \sum_{m=1}^{y-x} {}^{\upsilon}b_{ij(xy)}^{(m)} \tag{2.40} $$

Del cálculo anterior, la probabilidad de que el miembro del plan tenga un estado laboral puede ser escrito como:

$$ L_{(xy)}^{\upsilon} = 1 - \sum_{j \notin \varphi_A} {}^{\upsilon}b_{ij(xy)}^{(\ )} \quad , \quad i \in \varphi_A \tag{2.41} $$

2.13.4 Distribución de reclutamiento.

En el sistema abierto, es decir, en el sistema que permite nuevas entradas, para completar la especificación del modelo, se debe asumir como se asignan las nuevas entradas a varios estados e intervalos de edad. En muchas aplicaciones las nuevas entradas son puestas en rangos bajos de trabajo, pero en este estudio se considera una suposición más general. Como ejemplo de una situación en la cual tal modelo es apropiado, se puede tomar un sistema público de pensiones. Para efectos de este estudio asumiremos que se trata de un sistema cerrado, es decir, no hay nuevas entradas.

2.13.5 Factores económicos.

Existe un grupo de factores actuariales basados en ambientes económicos futuros. En el plan actuarial a veces se necesita involucrar al patrocinador del plan, al administrador y a los distintos escenarios posibles de situaciones económicas futuras. Los componentes económicos incluyen: medición de tasas de inflación y tasas de retorno de los fondos ganados por la pensión del fondo en custodia.

2.13.6 Tasas de Interés.

En el ambiente económico actual son muy importantes las suposiciones económicas usadas en la valoración actuarial. Sobre todo destacan por su importancia la proyección de las tasas futuras de retorno y la tasa de inflación.

Sea $r_{(t)}$ la tasa de interés en un intervalo pequeño de tiempo entre el instante *t* y *t+1*. Normalmente, la tasa de interés es simplemente asumida como constante; es decir $r_{(t)} = r_{(t+1)} = ... = r$. En este caso se ha modelado para ser un proceso estocástico que refleje un ambiente económico más realista. Así, $r_{(t)} \neq r_{(t+1)}$, una representación general para $R_{t,s}$ que define el valor de los recursos del plan medidos en diferentes instantes desde *t* a *s* se describe como sigue:

$$R_{t,s}=\begin{cases}\prod_{\theta=t}^{s-1}\left(1+r_{(\theta)}\right) & \text{si } t<s\\ \left(\prod_{\theta=s}^{s-1}1+r_{(\theta)}\right)^{-1} & \text{si } t>s\\ 1 & \text{si } t=s\end{cases}$$

(2.42)

En donde si t >s, $R_{t,s}$ representa el valor de interés acumulado. En el otro lado, si t< s, $R_{t,s}$ denota el valor de descuento y en el caso en que t = s, el valor debe ser 1.

La aproximación estocástica puede ser un valor particular del rango de resultados en lugar de hacer pronósticos específicos o proyecciones.

2.13.7Tasas de inflación.

Las tasas de inflación reflejan los beneficios proyectados en la valoración. Al igual que el modelo de la tasa de interés esta se debe asumir como estocástica para mantener una medida de la variación en los costos de vida post – jubilación. Sea $fr_{(t)}$ la tasa de inflación entre los instantes *t* y *t+1* (excluyendo *t +1*). Aquí $fr_{(t)}$ definiendo el valor del fondo del plan, medido en diferentes instantes desde *t* a *s* está dado por:

$$FR_{t,s} = \begin{cases} \prod_{\theta=t}^{s-1}\left(1+fr_{(\theta)}\right) & \text{si } t < s \\ \left(\prod_{\theta=s}^{s-1} 1+fr_{(\theta)}\right)^{-1} & \text{si } t > s \\ 1 & \text{si } t = s \end{cases}$$

(2.43)

Donde $FR_{t,s}$ representa la tasa de inflación acumulada entre *t* y *s*. Aunque, bien se puede usar un índice de precio mensual inflacionario para representar las tasas de inflación.

2.13.8 Esquema de beneficio.

El esquema de beneficio influye directamente en el pago final jubilatorio y en los beneficios auxiliares de los miembros del plan. Este incluye los años de servicio, la escala salarial y la fórmula de beneficio. Estos factores son decididos por el patrocinador del plan, quien negocia entre los miembros del plan y el administrador del fondo. Los requerimientos de los estados también juegan un papel importante en la decisión de dar límites inferior y superior a los pagos en el esquema de beneficio.

2.13.9 Años de Servicio y crédito de servicio

Se debe estudiar el esquema de beneficio en base a los años de servicio y a los créditos de servicio. Los años de servicio están definidos como los indicadores acumulados para los pagos de la siguiente manera:

$$I_k(X_n) = \begin{cases} 1, & X_n \in \varphi_A \\ 0 & X_n \notin \varphi_A \end{cases} \tag{2.44}$$

Donde $I_k(X_n)$ es una función indicadora del estado laboral del miembro del plan en la transición *n* al tiempo *k*. En estas notaciones, 1 se usa para los miembros activos y 0 para los miembros inactivos. Para los miembros inactivos los años de servicio no se incrementan. Los años de servicio son acumulados dependiendo de los años entre las transiciones *n* y *n-1*.

Los años de servicio acumulados (H_n) se calculan entonces de la siguiente manera:

$$H_n = H_{n-1} + \sum_{k=T(n-1)}^{T(n)-1} I_k(X_{n-1}) \;, \quad n \geq 1, H_0 = 0 \tag{2.45}$$

La información contenida en X_n no puede revelar explícitamente los años de servicio del miembro del plan. Poniendo $X_{(x)}$ el estado laboral del miembro del plan a la edad *x*, tenemos:

$$X_{(x)} = X_n, \qquad para \;\; G_n \leq x \leq G_{n+1} \;\; , \; x \in N^+$$

y se define la función indicadora $I_g\left(X_{(x)}\right)$ a la edad alcanzada *x* de la siguiente manera:

$$I_k\left(X_{(x)}\right) = \begin{cases} 1, & X_{(x)} \in \varphi_A \\ 0 & X_{(x)} \notin \varphi_A \end{cases} \tag{2.46}$$

El vector que tiene la información del miembro del plan $\left(Z^{(x)}_{1X(y-x+1)}\right)$ entre las edades *x* e *y* es:

$$Z^{(x)}_{1X(y-x+1)} = \left(I_g\left(X_{(x)}\right), \ldots, I_g\left(X_{(y)}\right)\right)_{1X(y-x)} \quad , x < y, x, y \in N^+$$

(2.47)

Los años de servicio acumulado son presentados como $H_{(y)} = \sum_{x=e}^{y} I_g\left(X_{(x)}\right)$, donde *e* es la edad del miembro cuando entra en el plan.

Así, la representación matricial de $H_{(y)}$ es:

$$H_{(y)} = Z^{(e)}_{1X(y-e)} . J_{(y-e+1)X1} \qquad (2.48)$$

donde $J_{(y-e+1)X1}$ es un vector unitario con dimensión $(y-e+1)$.

El crédito de servicio del miembro del plan se incrementa dependiendo de los años de servicio. Ciertamente, el pago total de los beneficios jubilatorios corresponde al crédito de servicio. En muchas situaciones, el crédito de servicio es directamente proporcional a los años de servicio. Algunas veces el plan podría tener un límite superior de crédito de servicio. Es más, en general, el pago jubilatorio no puede exceder un límite superior. Si $U(x)$ es usado para indicar el crédito de servicio del miembro del plan a la edad x, el crédito de servicio es presentado como $U(x) = u(H_{(x)})$, donde $H_{(x)}$ son los años de servicio a la edad *x*.

Por ejemplo, si los años de servicio entre las edades y_1 e y_2 tienen un crédito de servicio u_{12} anualmente y el límite superior es representado con y_i, entonces $u(x)$ se puede escribir como:

$$U_{(x)} = \begin{cases} u_{12} H_{(x)} & \text{si } y_1 \le H_{(x)} \le y_2 \\ u_{12}\ y_2 + u_{23}\left(H_{(x)} - y_2\right) & \text{si } y_2 \le H_{(x)} \le y_3 \\ . & \\ . & \\ \sum_{i=1}^{m} u_{i,i+1}\ \ y_{i+1} & \text{si } H_{(x)} > y_m \end{cases}$$

(2.49)

2.13.10 Escala de salarios.

La promoción laboral y la incertidumbre asociada a la tasa de inflación influyen en la escala salarial de los miembros del plan. La función de escala salarial $S_{(x)}$ para el miembro α a la edad *x* después de *k* años de servicio está dada por:

$$S^{\alpha}_{(x,x+k),\langle t,t+k\rangle} = f\left(X_{(x+k)}, FR_{t,t+k}\right) \quad (2.50)$$

Donde *f* es una función del estado laboral actual y las tasas de inflación esperadas. Sin considerar el efecto de las tasas de inflación, se asume que el miembro del plan a la edad x corresponde a una escala salarial específica $\left(S_{(x)}\right)$ y se asume que la forma de la función $f\left(X_{(x+k)}, FR_{t,t+k}\right)$ puede ser descompuesta en dos componentes multiplicativos. Sea $s'(x)$ la medida relativa del estado laboral actual del miembro del plan $X_{(x)}$. Entonces $S_{(x)} = s'\left(X_{(x)}\right)$.

El nivel salarial en varios estados laborales puede no necesariamente poseer una tasa salarial comparable. El salario del miembro del plan después de *k* años de contratado a la edad *x* puede ser denotado por:

$$S_{(x+k)} = S_{(x)} \cdot \frac{s'\left(X_{(x+k)}\right)}{s'\left(X_{(x)}\right)} \tag{2.51}$$

En la ecuación anterior, si se incluye de la tasa de inflación, el salario esperado del miembro a la edad *x+k* puede ser escrito como:

$$S_{(x,x+k),(t,t+k)} = S_{(x),(t)} \; \frac{s'\left(X_{(x+k)}\right)}{s'\left(X_{(x)}\right)} \; FR_{t,t+k} \tag{2.52}$$

Una opción coherente, con el fin de construir una escala salarial meritoria es examinar la relación histórica existente en el promedio de años de servicio desde 20 a 65 años, que para este caso obviaremos.

2.13.11 Fórmula de beneficio.

Los pagos de beneficio debido a la causa *j* del miembro del plan a la edad *x* se formulan de la siguiente manera:

$${}_{j}B_{(x)} = B\left(U_{(x)}, S_{(x),(t)}\right), \quad j \in \varphi_C \tag{2.53}$$

donde *j* denota la causa debida a la jubilación, invalidez permanente, retiro o despido en el esquema jubilatorio. Los beneficios auxiliares se pueden obtener por una aproximación similar. Varios tipos de esquema de beneficios pueden ser usados para mantener los beneficios jubilatorios de los miembros del plan.

El monto de los beneficios recibidos depende principalmente de los pagos de la nómina de los empleados. Uno de los beneficios generalmente aceptados en los planes jubilatorios públicos y privados es el uso de la fórmula de beneficio promedio final de *l* años, que se puede formular como $\frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1} S_{(x-k),(t-k)}$. Así, el beneficio jubilatorio a la edad *x* puede escribirse como:

$$
\begin{aligned}
{}_{ret}B_{(x)} &= \sum_{m=x}^{\infty}\left(U_{(m)} - U_{(m-1)}\right)\left(\frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1} S_{(x-k),(t-k)}\right) \\
&= U_{(x)}\ \frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1} S_{(x-k),(t-k)}
\end{aligned}
\qquad (2.54)
$$

Donde $ret \in \varphi_C$ es el estado jubilatorio.

Cuando los beneficios jubilatorios son pagados mensualmente, la inflación post – jubilación se considera calculando su valor actuarial presente.

Mientras que los beneficios jubilatorios del miembro del plan a la edad *y* se pueden denotar por:

$$ {}_{j}B_{(x):y-x} = {}_{j}\, B^{\alpha}_{(x)} \;\; FR_{t,t+y-x} \tag{2.55} $$

Ya que los beneficios jubilatorios son pagados en *m* instantes, el valor presente de la suma acumulada a la edad *x* entre las edades *y* e *y+1* puede ser escrito como:

$$ \left({}_{j}B^{\alpha}_{(x):y-x} \;\; \frac{12}{m} \right) \sum_{k=0}^{m-1} \left(R_{t+y-x,t+y-x+1} \right)^{-\frac{k}{m}} = \left({}_{j}B^{\alpha}_{(x)} \;\; FR_{t+y-x,t} \;\; \frac{12}{m} \right) \sum_{k=0}^{m-1} \left(R_{t+y-x,t+y-x+1} \right)^{-\frac{k}{m}} \tag{2.56} $$

Y el pago anual del miembro a la edad *x* hasta la muerte a la edad *z* es la suma de la serie de flujos de efectivo presentes descontados. Incorporando la posibilidad de un cambio temprano antes de la edad obligatoria, se puede definir el valor actuarial de la siguiente manera:

$$ {}^{\upsilon}b_{j\theta(xz)} \;\; \sum_{y=x}^{z} \left(R_{t,t+y-x} \;\; {}_{j}B^{\alpha}_{(x):y-x} \;\; \frac{12}{m} \;\; \sum_{k=0}^{m-1} \left(R_{t+y-x,t+y-x+1} \right)^{-\frac{k}{m}} \right), \qquad j \in \varphi_{Cm}, \theta \in \varphi_{F} \tag{2.57} $$

Las fuentes de aleatoriedad provienen de la inflación, la tasa de retorno y las probabilidades de transición del miembro del plan.

El valor actuarial presente del pago de beneficio para el miembro a la edad *x* debido a la causa *j* puede ser escrito como:

$$ {}_{j}Bp\,\upsilon^{\alpha}_{(x),(t)} = \sum_{z=x+1}^{\omega} {}^{\upsilon}b_{j\theta(xz)} \sum_{y=x}^{z} \left(R_{t,t+y-x+1} \;\; {}_{j}B^{\alpha}_{(x):y-x} \;\; \frac{12}{m} \;\; \sum_{k=0}^{m-1} \left(R_{t+y-x,t+y-x+1} \right)^{-\frac{k}{m}} \right), \quad j \in \varphi_{Cm}, \theta \in \varphi_{F} \tag{2.58} $$

donde ω es la edad máxima de supervivencia.

Si los beneficios jubilatorios son pagados con una simple suma acumulada entonces ${}_jBp\upsilon^{\alpha}_{(x)(t)} = {}_j B^{\alpha}_{(x)}$. Así, en general se tiene la siguiente presentación:

$$
{}_jBp\upsilon^{\alpha}_{(x),(t)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{z=x+1}^{\omega} {}^{\upsilon}b_{j\theta(xz)} \sum_{y=x}^{z} \left(R_{t,t+y-x} \quad {}_jB^{\alpha}_{(x):y-x} \quad \frac{12}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(R_{t+y-x,t+y-x+1}\right)^{-\frac{k}{m}} \right) & \text{si } \mathrm{j} \in \varphi_{\mathrm{Cm}} \\ {}_jB^{\alpha}_{(x)} & \text{si } \mathrm{j} \in \varphi_{\mathrm{Cs}} \end{cases} \tag{2.59}
$$

2.13.12 Valoración Actuarial

El método del costo actuarial proporciona un método flexible para calcular aportaciones anuales y obligaciones acumuladas del fondo jubilatorio. Comúnmente se usan algunos métodos de costos actuariales, cada uno genera un camino diferente para descubrir sus costos normales y las obligaciones acumuladas.

El método del costo agregado ***(AGG)*** se utiliza para mostrar el procedimiento de calcular la **proporción de la contribución**. Este método es usado para ser consistentes con el método actual del fondo usado en el descubrimiento de los costos jubilatorios. Con este método específico solo necesitaremos enfocarnos en las aportaciones en lugar de los costos normales y la obligación consolidada.

El método de costo agregado ***(AGG)*** calcula la tasa de aportación global del plan según el valor presente de beneficios futuros (***PVFB)*** por sus siglas en inglés, el valor presente del salario futuro ***(PVFS)*** por sus siglas en inglés, y el recurso del fondo al tiempo *t*. El ***PVFB*** para el empleado activo α a la edad *x* al tiempo *t* se presenta como:

$$ {}_{j}PVFB^{\alpha}_{(x),(t)} = \sum_{y=x+1}^{\tau} \left(\sum_{m=1}^{y-x} {}^{\upsilon}b^{(m)}_{ij(xy)} \quad {}_{j}Bp\,\upsilon^{\alpha}_{(y),(t+y-x)} \right) R_{t,t+y-x} \quad , \alpha \in A_{(t)} \qquad (2.60) $$

donde $i \in \varphi_A,\ j \in \varphi_C$, τ es la edad obligatoria de jubilación del miembro del plan.

En el caso de que no haya concesión con la licencia temporal entre los miembros del plan, el PVFB por la causa *j* se puede expresar como:

$$ {}_{j}PVFB^{\alpha}_{(x),(t)} = \sum_{y=x+1}^{\tau} \left(\sum_{m=1}^{y-x} {}^{\upsilon}b^{(m)}_{ij(xy)} \quad {}_{j}Bp\,\upsilon^{\alpha}_{(y),(t+y-z)} \right) R_{t,t+y-x} $$

$$ = \sum_{\mathrm{y=x+1}}^{\tau} {}^{\upsilon}b^{(\ )}_{ij(xy)} \quad {}_{j}Bp\,\upsilon^{\alpha}_{(y),(t+y-x)} \quad R_{t,t+y-x} \qquad (2.61) $$

$$ \alpha \in \mathrm{A}_{(\mathrm{t})}, i \in \varphi_A,\ j \in \varphi_C $$

pero en este caso, la licencia es permitida entre los miembros del plan.

El ***PVFB*** global para el individuo α en el trabajo es la suma sobre todas las posibles causas. Esto puede escribirse como:

$$PVFB^{\alpha}_{(x),(t)} = \sum_{j \in \varphi_C} \sum_{y=x+1}^{\tau} \left(\sum_{m=1}^{y-x} {}^{\upsilon} b^{(m)}_{ij(xy)} \quad {}_j Bp\, \upsilon^{\alpha}_{(y),(t+y-x)} \right) R_{t,t+y-x} \quad , \alpha \in A_{(t)} \qquad (2.62)$$

Donde $A_{(t)}$ denota el conjunto de miembros que se encuentran en estado activo. Debido a que el miembro γ en licencia temporal debe regresar a la posición original, el ***PVFB*** del miembro γ en licencia temporal por la causa *j* debe ser considerado y se formula de la siguiente manera:

$${}_j PVFB^{\gamma}_{(x),(t)} = \sum_{y=x+2}^{\tau} \left(\sum_{m=2}^{y-x} {}^{\upsilon} b^{(m)}_{ij(xy)} \quad {}_j Bp\, \upsilon^{\gamma}_{(y),(t+y-x)} \right) R_{t,t+y-x}, \quad i \in \varphi_V \,, \, j \in \varphi_C \qquad (2.63)$$

Además, el ***PVFB*** del miembro jubilado β que tiene el beneficio anual se puede escribir como:

$${}_j PVFB^{\beta}_{(x),(t)} = {}_j\, Bp\, \upsilon^{\beta}_{(x),(t)}$$

$$= \sum_{y=x+1}^{\omega} {}^{\upsilon} b_{j\theta(xy)} \sum_{y=x}^{z} \left(R_{t,t+y-x} \sum_{k=1}^{m-1} \left({}_j B^{\beta}_{(x)} \;\; FR_{t,t+y-x} \right) \left(R_{t,t+y-x,t+y-x+1} \right)^{-\frac{k}{m}} \right) \quad j \in \varphi_{Cm}, \;\; \theta \in \varphi_F \qquad (2.64)$$

Similar a la ecuación **(2.62)**, el ***PVFB*** global para un individuo que está en el estado φ_V o φ_{Cm} que denota invalidez temporal y beneficio mensual puede ser descrito como la suma de las posibles causas.

Dos factores importantes en el cálculo del valor presente del salario futuro son las tasas de producción y el salario anual; esto es:

$$PVFS_{(x),(t)}^{\alpha} = \sum_{y=x+1}^{\tau} \left(L_{(x,y)}^{\alpha} \ \ S\overline{a}_{(x:\overline{y-x|}),(t)}^{\alpha} \right), \alpha \in \varphi_A \tag{2.65}$$

Donde

$$S\overline{a}_{(x:\overline{y-x|}),(t)}^{\alpha} = \sum_{k=x}^{y} \left(I_g\left(X_{(k)}\right) \left(S_{(k),(t+k-x)}^{\alpha} \sum_{l=0}^{11} R_{t+k-x,t+k-x+1}^{\ \ -l/12} \right) R_{t,t+k-x} \right) \tag{2.66}$$

es el valor acumulado de los honorarios cubiertos desde la edad *x* a la edad *y* donde $I_g(X(k))$ es el indicador laboral a la edad *k*, $S_{(k),(t)}$ es la escala salarial a la edad *k* en el instante *t*, y **R** es la proporción de descuento de interés. Por simplicidad, se asume que las aportaciones son hechas iniciando el año.

Así:

$$PVFS_{(x),(t)}^{\gamma} = \sum_{k=x+1}^{\tau} \left({}^{\upsilon}b_{i\theta(xk)} \ \sum_{y=x}^{\tau} \left(L_{(k,y)}^{\gamma} \ \ S a_{(k:\overline{k-x|}),(t)} \right) \right) \ , \ i \in \varphi_V, \theta \in \varphi_A \tag{2.67}$$

$$PVFS_{(t)} = \sum_{\alpha \in A_{(t)}} PVFS^{\alpha}_{(x),(t)} + \sum_{\alpha \in IA_{(t)}} PVFS^{\gamma}_{(x),(t)} \tag{2.68}$$

El ***PVFS*** global es calculado para los miembros activos y con licencia temporal. El método de costo agregado ***(AGG)*** considera los cálculos financieros del fondo jubilatorio como un todo. Cada miembro del plan tiene una misma tasa de contribución.

En el instante *t*, el valor presente de los beneficios futuros y el valor presente del salario futuro puede ser presentado por:

$$PVFB_{(t)} = \sum_{\delta \in \alpha, \beta, \gamma} PVFB^{\delta}_{(x),(t)} \tag{2.69}$$

$$PVFS_{(t)} = \sum_{\delta \in \alpha, \gamma} PVFS^{\delta}_{(x),(t)} \tag{2.70}$$

Representando el recurso del fondo al instante *t* con $F_{(t)}$, la tasa de contribución (CR) calculada al tiempo *t* resulta de la siguiente igualdad tomando en consideración las ecuaciones anteriores:

$$\left(CR_{(t)} * PVFS_{(t)}\right) + F_{(t)} - PVFB_{(t)} = 0 \tag{2.71}$$

$$CR_{(t)} = \frac{PVFB_{(t)} - F_{(t)}}{PVFS_{(t)}} \qquad (2.72)$$

Bajo el método agregado regular, se calculan los costos normales usando la ecuación anterior.

Para ilustrar los cálculos se selecciona el método ***(AGG)***. En este caso no existe ninguna obligación acumulada. Cuando se toman en cuenta nuevas entradas futuras el método ***(AGG)*** puede producir un valor diferente. Si se quiere utilizar el método agregado del **grupo abierto**, una valoración futura podría realizarse usando el ***PVFB***, ***PVFS*** simulados y F dinámicos, cabe recalcar que para este estudio por simplicidad se toma en consideración un grupo cerrado, es decir, no existen nuevas entradas.

Usando la ecuación $CR_{(t)}$ y los pagos de beneficios simulados, las aportaciones del plan pueden ser calculadas recursivamente para años futuros.

En la próxima sección se procederá a diseñar el sistema y detallar los procedimientos a realizar por el mismo.

CAPÍTULO 3

3. DISEÑO DEL SISTEMA DE MONITOREO ESTOCÁSTICO Y DINÁMICO.

En esta sección se va a realizar una descripción de los procesos y su interacción para llevar a cabo las proyecciones simuladas de un fondo de pensiones y así analizar su estabilidad bajo ciertas suposiciones actuariales y económicas.

3.1 Descripción de los procesos.

3.1.1 Cálculo de años de servicio.

Desde que una persona ingresa en una empresa comienza a acumular los años de servicio que no son más que el tiempo que lleva laborando en esta entidad, lo cual al acumularse más cada vez produce que este llegue a cierta edad en la cual debe jubilarse y acogerse a un plan de jubilación otorgado bien sea por el seguro social o por la empresa en donde laboró.

También, para este proceso se debe considerar que el miembro que entra en un permiso de trabajo (ya sea por enfermedad, maternidad, invalidez temporal, etc.) no acumula años de servicio ya que se encuentra en un estado no productivo para la entidad que trabaja y el patrono debe permitir su permiso de enfermedad hasta que el empleado vuelva a laborar con normalidad.

3.1.2 Transición en el plan dinámico.

Debido a que en la vida laboral un trabajador está expuesto a cambios en el estado que actualmente se encuentra se los debe tener en consideración, para este proyecto serán tomados en cuenta los siguientes estados:

1. Activo
2. Beneficiario
3. Licencia Temporal
4. Invalidez permanente
5. Final

El trabajador que se encuentra activo puede pasar al estado de beneficiario en el momento en que se produce una de las siguientes situaciones:

a. Despido
b. Jubilación
c. Retiro
d. Invalidez permanente

Una vez que el miembro del plan llega a este estado, ya no puede regresar al trabajo. El empleado puede optar por diferentes formas de pago de sus beneficios, por lo cual, para efectos de este estudio se procedió a seleccionar dos principales a saber:

1. Suma acumulada
2. Anualidades

El empleado que entra en el estado de licencia temporal puede regresar al estado laboral original o caer en el estado de invalidez permanente, si cae en este último ya no puede regresar al estado original por lo cual quedaría automáticamente en el estado de beneficiario.

Para este proyecto se considerará un estado final cuyas características consisten en que el individuo que cae en este estado llega al final de sus beneficios, es decir, la empresa ya no debe desembolsar un solo pago más.

3.1.3 Cálculo de la probabilidad asociada a la transición entre cada estado.

Entre cada estado existe una probabilidad de transición asociada la cual representa con que posibilidad un individuo puede pasar de un estado laboral a otro, para lo cual se debe considerar tres factores a saber:

- Estado actual del empleado.
- La edad.
- Los años de servicio del empleado.

La probabilidad debería ser estimada considerando que el empleado se encuentra en un determinado estado trasladándose a otro estado después de cierto número de transiciones. Para este proyecto se obviará el cálculo de esta función de probabilidad ya que para este efecto debería realizarse el estudio actuarial correspondiente a los miembros del fondo en custodia.

3.1.4 Proyecciones de las tasas de interés

Para la elaboración de las proyecciones de los flujos de efectivo que la empresa deberá asumir es preciso considerar varios escenarios económicos, es decir, considerar tasas de interés estimadas suponiendo que se comportan como un proceso estocástico para establecer un escenario más realista ya que si tomamos en consideración que las tasas se mantienen constantes se estaría suponiendo que en la economía no hay fluctuaciones, lo cual resulta irreal.

3.1.5 Proceso de valoración actuarial.

En este proceso se tomarán en cuenta todos los supuestos realizados en los puntos anteriores. A continuación se procederá a diseñar y desarrollar una base de datos que permita mantener la información de los miembros del plan en constante actualización y que pueda proyectar los flujos de efectivo de la empresa cuando se presenten los diferentes sucesos.

3.2 Diseño de la base de datos propuesta

Una vez detallados los procesos, en esta sección se procederá a identificar y describir cada una de las entidades incluidas en el modelo de datos propuesto para este estudio las cuales se detallan a continuación:

1. Miembro
2. Estado laboral
3. Años de servicio
4. Transacción

1. Miembro.

En esta entidad se registrará a los miembros que pertenecen al plan en lo que se refiere a las características principales concernientes a nuestro estudio.

2. Estado laboral.

En esta tabla de nuestro modelo de datos se encontrarán los posibles estados laborales que se considerarán para la realización de este proyecto.

3. Años de servicio.

En esta tabla estarán registrados los años de servicio que posea el miembro del fondo desde que empieza a trabajar en la empresa hasta que se retira por cualquier motivo.

4. Transacción

En esta entidad se almacenarán los movimientos de los miembros del plan en las proyecciones que se realicen, lo cual nos permitirán obtener estadísticas de las transiciones efectuadas durante las proyecciones y como afecta esto al fondo.

3.3 Modelo de datos propuesto.

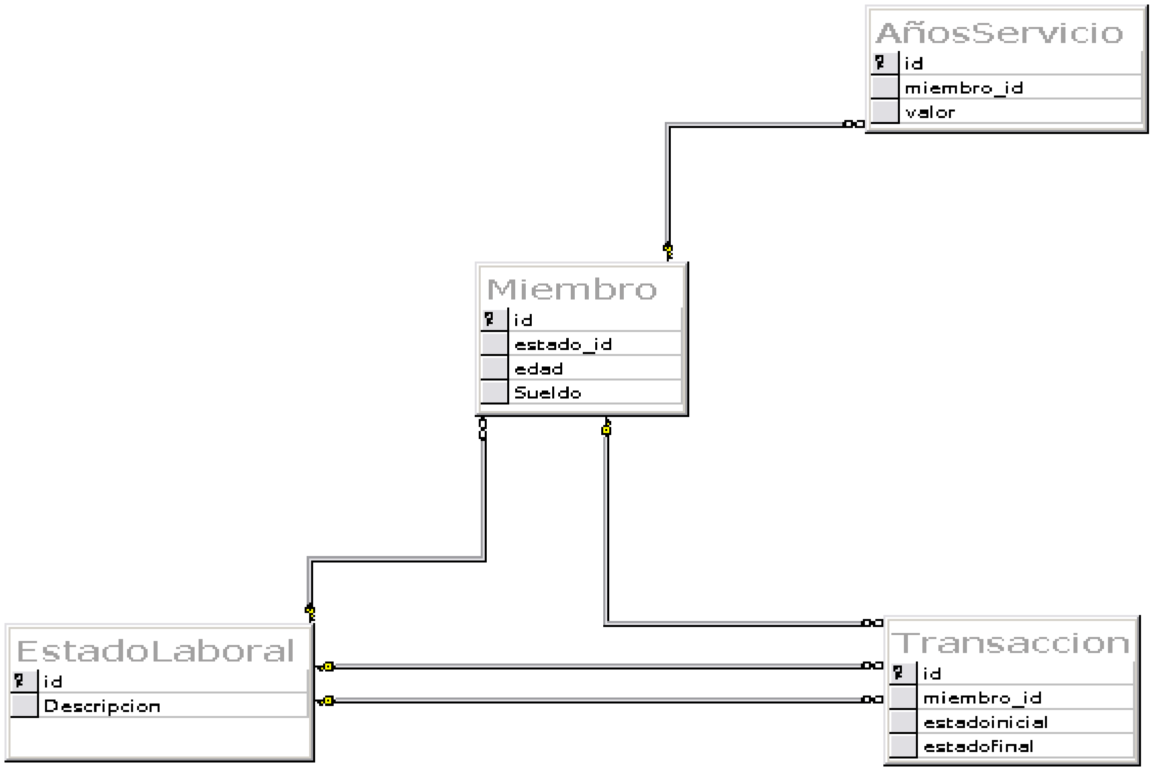


Figura 3.3.1.- *Modelo de Datos Propuesto*

3.4 Algoritmo de funcionamiento del sistema.

- Para cada año de la proyección se realizan los siguientes procesos:

1. Se seleccionan los datos de todos los miembros del fondo para decidir su estado en el próximo año mediante el algoritmo de simulación bajo incertidumbre de Monte Carlo. (ANEXO 2).
2. Con los datos actualizados se procede a determinar la mano de obra, los factores económicos y las probabilidades de transición correspondientes.
3. Seleccionando los miembros del plan que se encuentran en estado activo se procede a calcular el Valor Presente de los Beneficios Futuros para estos afiliados.
4. Seleccionando los miembros del plan que se encuentran en estado de licencia temporal se procede a calcular el Valor Presente de los Beneficios Futuros para estos afiliados.
5. Seleccionando los miembros del plan que se encuentran en estado de beneficiario se procede a calcular el Valor Presente de los Beneficios Futuros para estos afiliados.

6. Se procede a calcular el Valor Presente de los Beneficios Futuros Global, que corresponde a la suma de los Ítems 3, 4, 5 calculados anteriormente.
7. Con lo miembros que se encuentran en estado activo se procede a calcular el Valor Presente del Salario Futuro para estos afiliados.
8. Con lo miembros que se encuentran en estado de licencia temporal se procede a calcular el Valor Presente del Salario Futuro para estos afiliados.
9. Se procede a calcular el Valor Presente del Salario Futuro Global, que se obtiene por la suma de los Ítems 7, 8 calculados anteriormente.
10. Una vez calculados todos los valores anteriormente mencionados procedemos a calcular la tasa de contribución.
11. Con la tasa de contribución encontrada se procede a estimar las aportaciones para el año de proyección en curso y el correspondiente Balance Actuarial Anual.

3.5 Diagramas esquemáticos.

Se presentan los diagramas de flujo que detallan la secuencia de los procesos para la realización de las proyecciones.

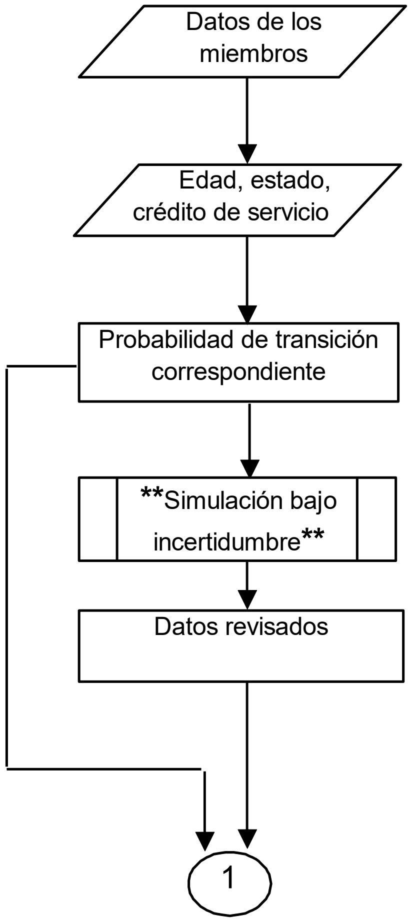


Figura 3.5.1.- *Diagrama esquemático de los procesos de la aplicación (a)*

**** Ver ANEXO 2****

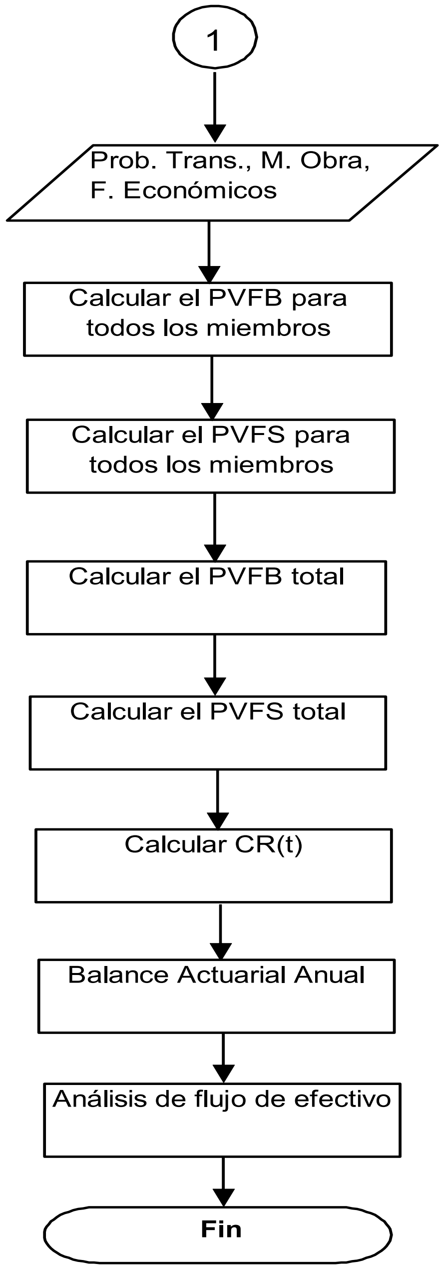


Figura 3.5.1.- *Diagrama esquemático de los procesos de la aplicación (b)*

CAPÍTULO 4

4. IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA Y RESULTADOS NUMÉRICOS

Para esta sección se documenta la aplicación computacional basada en el modelo actuarial y los supuestos realizados en los capítulos anteriores adicionando los siguientes supuestos de una población simulada para efectos de la prueba del sistema los cuales serán descritas a continuación.

4.1 Tamaño de la población.

El tamaño de la población simulada escogido para evaluar el sistema es de 50 miembros, cuyas edades están distribuidas de manera uniforme entre 18 y 40 años. Cabe indicar que también existe una parte de la aplicación que permite ingresar las principales características de los miembros individualmente por el usuario.

Se escogió como límite inferior 18 años y 40 años como límite superior para lograr una cantidad significativamente real de aportaciones hechas por estos miembros. Así mismo se pre – estableció que la edad obligatoria de jubilación (τ) es de 65 años y que la edad máxima de supervivencia (ω) es de 70 años.

4.2 Estados laborales

Para la elaboración del proyecto se tomó en consideración los siguientes estados laborales reales para los miembros del plan, los cuales se detallan a continuación:

- **Activo:** Asistente, Jefe, Gerente
- **Beneficiario:** Despido, Jubilación, Invalidez Permanente, Retiro.
- **Invalidez Temporal:** Licencia (por cualquier causa)
- **Forma de pago de beneficios:** Anualidades, Suma acumulada
- **Detención de pago:** Muerte del miembro del plan.

Cabe mencionar que para la relación Edad – Estado laboral no se tomó en cuenta la edad del miembro con respecto al estado laboral, es decir, que en el fondo puede aparecer un miembro que tenga un estado de gerente y tenga 18 o 42 años indistintamente. Como adicional se consideró el supuesto de que los miembros del plan no pueden bajar de rango en el estado laboral activo, es decir, que una persona que se encuentra en estado de Jefe no puede bajar al estado de Asistente, por ejemplo.

El sueldo estimado para cada estado tiene una relación directamente proporcional, es decir, mayor estatus implica mejor sueldo. Otro factor tomado en consideración es la escala salarial, la cual para efectos de prueba se asume constante al 8% anual para los miembros activos y los que se encuentren en licencia temporal.

Para el caso de las proyecciones de las tasas de interés se consideró que las tasas $r_{(\theta)}$ tenían una distribución aleatoria en el tiempo, por lo cual se asumió que tenían una distribución uniforme entre el 4% y el 8% anual. El efecto inflacionario producido por las tasas $fr_{(\theta)}$ no será considerado en este estudio, por lo que serán asumidas iguales a **1** en todo momento.

La fórmula de beneficio utilizada para los cálculos viene definida de la siguiente manera:

$$B_{(x)} = U(x) * sueldo_{(x)(t)} \tag{4.1}$$

Donde $sueldo_{(x)(t)}$ representa el sueldo anual a la edad *x* al instante “t” y $U(x)$, representa el crédito de servicio, que viene expresado como:

$$U(x) = \begin{cases} 0.049333 \ * H(x) & 0 < H(x) \leq 15 \\ 0.72999 \ + 0.000667 \ * H(x) & 15 < H(x) \leq 30 \\ 0.02555 \ \ * H(x) \text{- } 0.00645 & 30 < H(x) \leq 39 \\ 1 & H(x) > 39 \end{cases}$$

(4.2)

Aquí $H(x)$ representa los años de servicio acumulados.

La función $U(x)$ fue obtenida de la siguiente manera:

$$u_{12}(15) = 0.74$$

$$0.049333\,(15) + u_{23}(30 - 15) = 0.75$$

$$0.049333\,(15) + 0.000667\,(30) + u_{34}(39 - 30) = 0.99$$

1

Los valores a los que se iguala las ecuaciones representan los límites superiores de los créditos de servicio, es decir, por ejemplo los miembros que completen hasta los 15 años de servicio podrán tener un crédito de servicio máximo de 0.74. El valor 1 representa que el afiliado obtendrá el 100% del crédito de servicio.

Cabe mencionar que para efectos de este trabajo la fórmula de beneficios se generalizó para todos los casos.

Se tomó en consideración el hecho de que los miembros que no cumplían los 15 años de servicio solo pueden acceder al beneficio de suma acumulada, por el contrario los que superen esa cantidad de años de servicio podrán escoger entre anualidades y suma acumulada que forman parte del esquema de beneficio definido.

Los fondos disponibles al inicio de la proyección serán ingresados por el usuario del sistema los mismos que irán capitalizándose de acuerdo a los retornos aleatorios dados por la función de interés.

Para efectos de probar el sistema (debido a que no se encuentra realizado el estudio actuarial del fondo en custodia) se supuso que las probabilidades de tener un estado laboral activo, $L^{\alpha}_{(x,y)}$, $L^{\gamma}_{(x,y)}$ para los miembros activos y en licencia temporal respectivamente sean constantes para todas las edades y que sean ingresadas por el usuario.

El balance actuarial estará calculado en base a la siguiente fórmula:

$$Balance\ Actuarial = (\mathrm{Re}\,tornos + Contribuciones) - PVFB \tag{4.3}$$

Donde los retornos son los intereses generados en cada año del capital inicial. Por su parte las contribuciones se las obtiene para cada año calculando la siguiente expresión:

$$Contribuciones = CR_{(t)} * Sueldos_{(t)} \tag{4.4}$$

Donde $CR_{(t)}$ es la tasa de contribución al instante "t" y $Sueldos_{(t)}$ representa la suma de los sueldos el instante "t" de los miembros activos y los que se encuentran en licencia temporal.

Por último las probabilidades de transición utilizadas en el simulador bajo incertidumbre de Monte Carlo (utilizado en este estudio) se encuentran en el ANEXO 2.

4.3 Resultados Numéricos

Una vez realizadas 10 simulaciones con una proyección a 30 años para la población anteriormente mencionada se obtuvieron los resultados y gráficos mostrados a continuación:

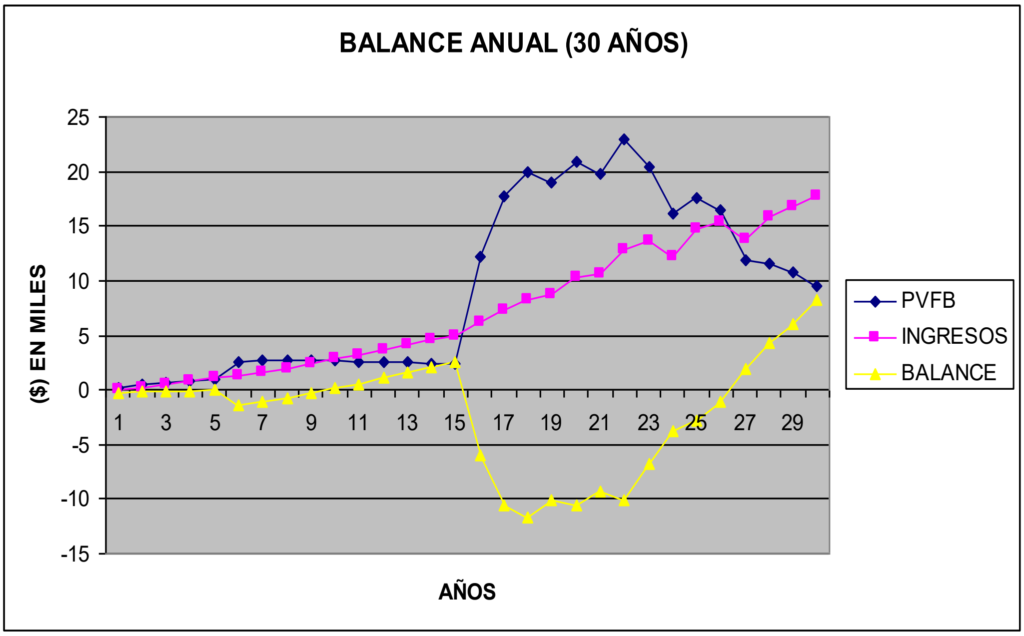


Figura 4.3.1.- *Balance Actuarial Proyectado a 30 años*

En este gráfico aparece el Balance Anual proyectado a 30 años de la población simulada, se puede observar que el valor del balance empieza cercano a cero y se recupera hasta el año 16 donde se desestabiliza y cae bajo cero, esto es debido a que los beneficios pagados a partir de este año (16) superan a los retornos y las contribuciones. Recordemos que estamos considerando una población cerrada, sin nuevos ingresos. Esto implica que, si tomamos como referencia de inicio de proyección el año 2004 el fondo caería bajo cero en el año 2020. Debido a los sucesos acaecidos durante los últimos años de la proyección el fondo comienza a recuperarse a partir del año 27, equivalente al año 2031, esto se debe a que los beneficios pagados se han reducido y a la vez los retornos y las contribuciones han aumentado.

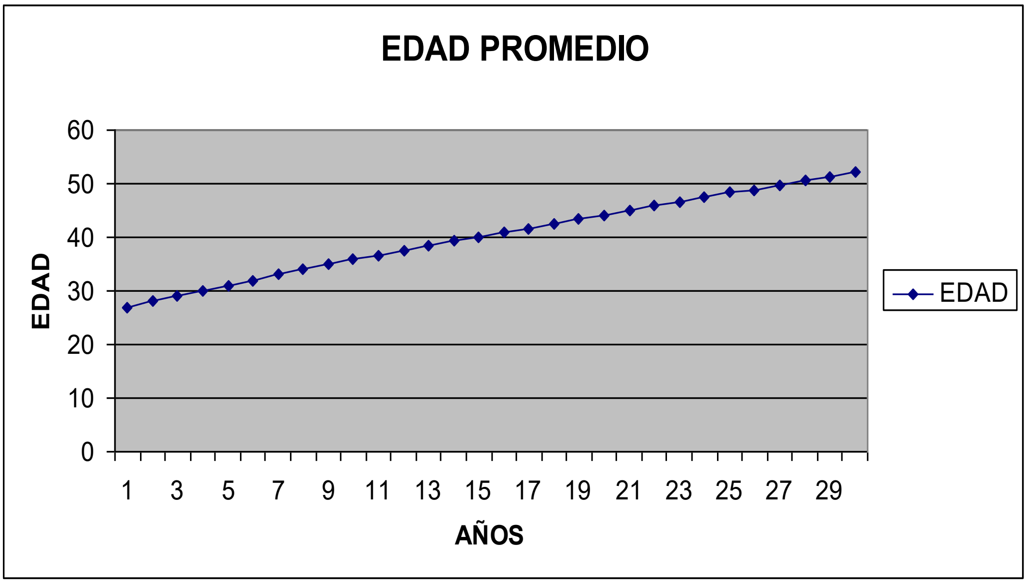


Figura 4.3.2.- *Edad promedio de los miembros del fondo.*

Se puede apreciar en el gráfico anterior que la edad promedio tiene una tendencia lineal creciente y a partir de 8 años comienza a crecer pero con menor fuerza. La edad promedio de los miembros del fondo es de 40.14 años y el promedio de años de servicio es de 24.42 años.

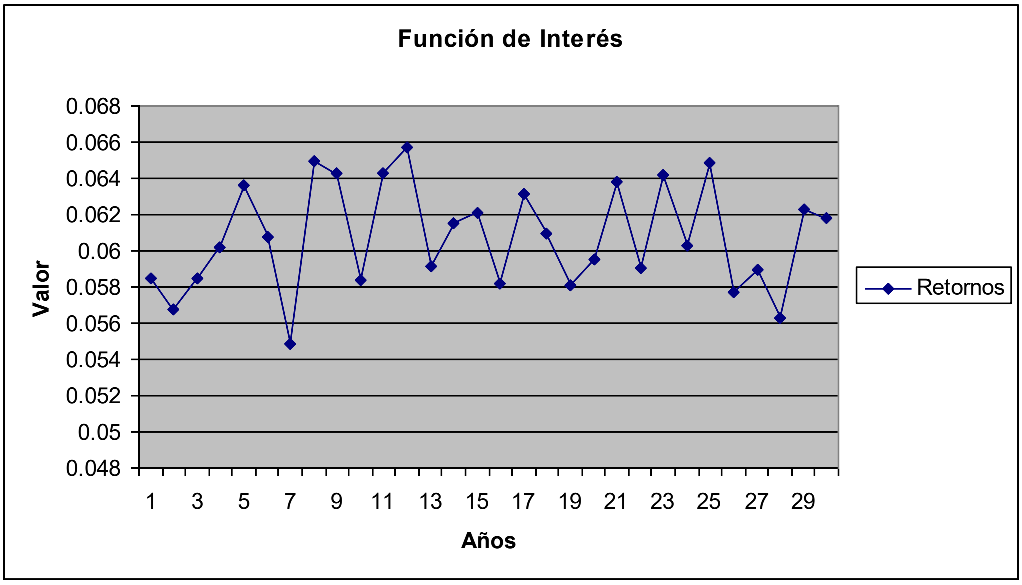


Figura 4.3.3.- *Función de Interés*

En este gráfico se puede apreciar la forma de la función de interés que proporciona los retornos aleatorios a lo largo de los años de proyección, donde el valor máximo es aproximadamente de 0.065 y el mínimo 0.054.

En los años de proyección se registraron en promedio 69.3 cambios de estados laborales, sus histogramas de frecuencias y su efecto en el fondo se detallan a continuación:

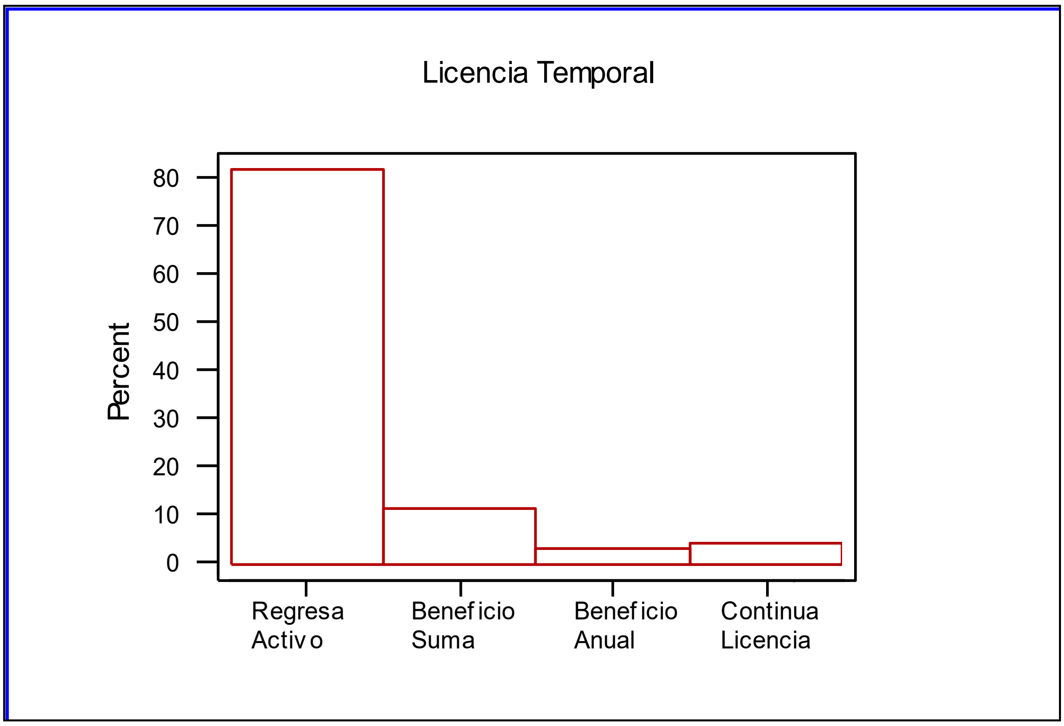


Figura 4.3.4.- *Histograma de Frecuencias de los miembros en Licencia Temporal*

En este gráfico se aprecia el histograma de frecuencias de los cambios de estados a licencia temporal, del total de cambios de estado el 17.32% fueron cambios de miembros activos a estado de licencia temporal. De estos miembros el 82.50% volvió al estado laboral en que se encontraban anteriormente. El 10% de estos pasó a invalidez permanente y escogieron el beneficio de una sola suma. El 3.33% pasó a invalidez permanente y escogió el beneficio anual. El porcentaje restante (4.17%) al final de la proyección se quedó en el estado de licencia temporal.

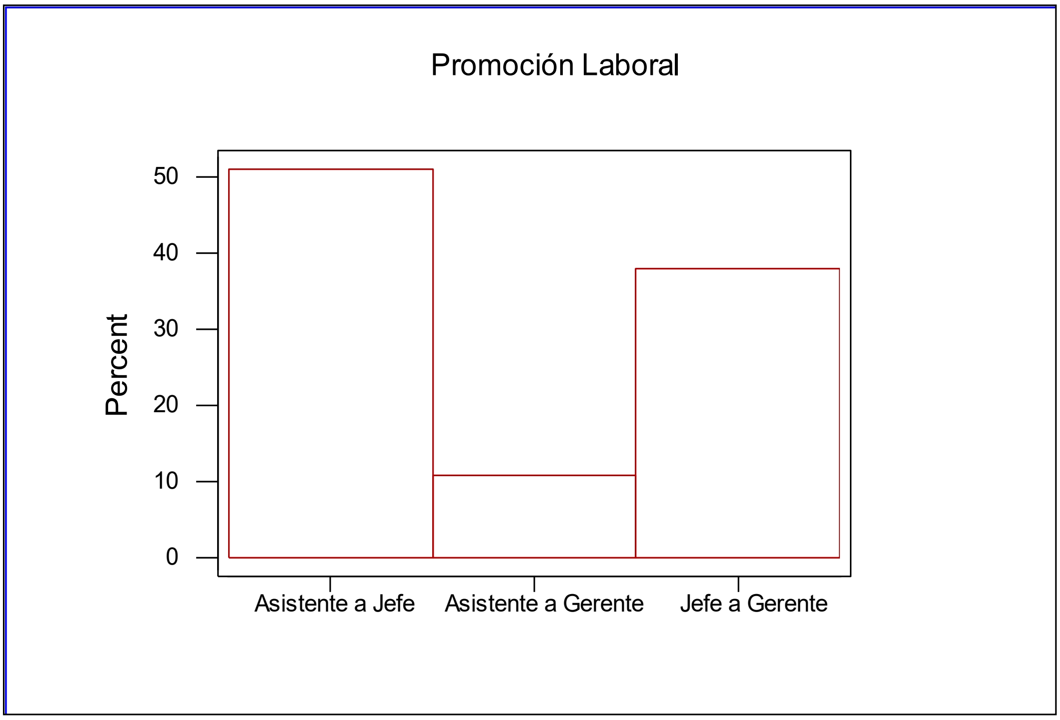


Figura 4.3.5.- *Histograma de Frecuencias de la promoción Laboral en la proyección*

El 33.04% de los cambios resultó ser promociones, de los cuales, el 51.09% fueron promociones de Asistentes a Jefes, el 10.92% de Asistentes a Gerentes y el 37.99% de Jefes a Gerentes. Cabe recalcar que estos cambios afectan los valores en las proyecciones, ya que una promoción implica un aumento de sueldo.

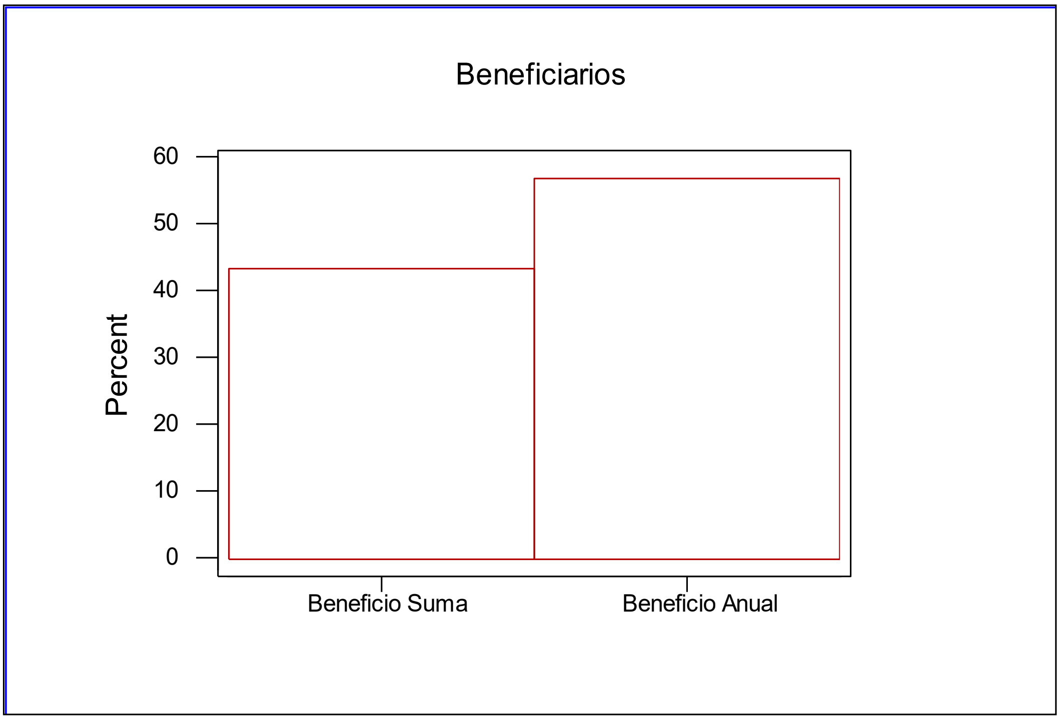


Figura 4.3.6.- *Histograma de Frecuencias de los miembros Beneficiarios en la proyección*

En este gráfico se observa el histograma de frecuencias porcentuales de los cambios registrados a Beneficiarios, los cuales representaron un porcentaje de 26.98% de total de cambios de estado laboral. De estos, el 43.32% de los miembros tomó el tipo de beneficio que es de una sola suma, lo cual no afectaba significativamente al valor presente de los beneficios futuros. El 56.68% resultaron cambios de miembros activos a beneficiarios anuales.

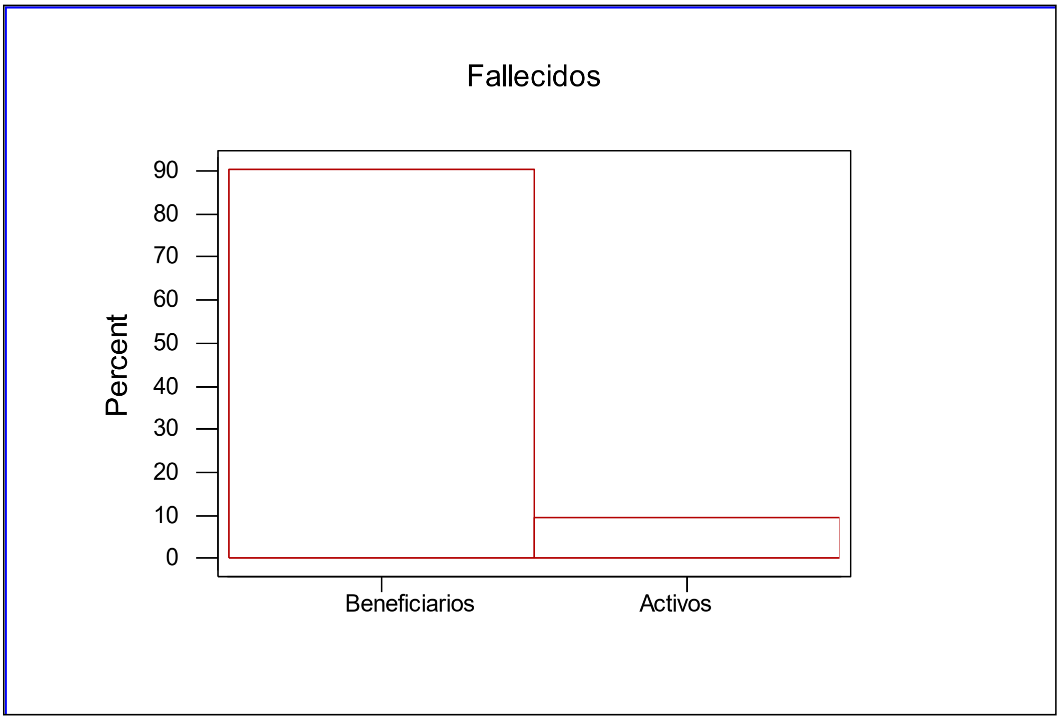


Figura 4.3.7.- *Histograma de Frecuencias de los miembros que fallecieron durante la proyección.*

El 6.06% de los cambios se produjo por fallecimiento de miembros del fondo, el 90.48% de estos fueron miembros que pasaron de beneficio anual a fallecimiento. Esta cantidad de miembros que fallecieron, significó la reducción de los beneficios pagados, a esto se debe la recuperación del balance a partir del año 27 de proyección. El 9.52% correspondió a miembros activos que fallecieron, este último porcentaje no influye en los pagos realizados debido a que no se consideró el fallecimiento como un estado de beneficio, sino más bien el estado de detención del pago de beneficios, exclusivo para los miembros que escogían el tipo de beneficio pagado anualmente, es decir que en cuanto los miembros con beneficio anual fallecían ya no se les pagaba más, este porcentaje únicamente influye en la disminución de las contribuciones anuales.

CAPÍTULO 5

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo, una vez concluida la implementación de este sistema y después de los resultados numéricos obtenidos detallaremos las conclusiones con respecto al análisis de los resultados numéricos y la aplicación informática desarrollada.

Luego de establecer las conclusiones de este estudio se describirán las recomendaciones correspondientes para mejoras en estudios posteriores.

5.1. Conclusiones.

1. La versatilidad de este sistema hace que la gran cantidad de cálculos y análisis financiero – actuariales involucrados en el modelo sean fáciles de realizar por parte de usuarios no expertos en el tema. Este programa puede ser el núcleo para la generación del software de tipo comercial que podría ser de utilidad como apoyo para la toma de decisiones.

2. Debido a la cantidad de afiliados con los que se realizó las proyecciones (50 miembros) hubo años en que la tasa de contribución resultaba negativa, esto quiere decir que los fondos disponibles en ese instante eran mayores que los pagos de beneficios futuros a realizarse, en consecuencia se reemplazó esas tasas de contribución negativas por tasas de contribuciones iguales a cero (0).

3. Después de realizadas las proyecciones se tuvo que la edad promedio de los miembros del fondo en los 30 años de proyección fue de 40.14 años y el promedio de años de servicio fue de 24.42 años. Cabe recalcar que esto influye en las contribuciones anuales y en los beneficios futuros proyectados, ya que en promedio representa 24 años de aportaciones por parte de los afiliados.

4. Se pudo observar en los resultados numéricos que el balance cae en pérdidas al cabo de 16 años, tomando como fecha de inicio de proyección el 2004 se puede decir que la fecha de desestabilización sería en el 2020, además comienza a verse una recuperación del valor del balance a partir de los 27 años, es decir, al año 2031, esto se debe a que los beneficios pagados disminuyeron y a la vez los retornos aumentaron.

5. En los años de proyección en promedio se registraron 69.3 cambios en los estados laborales, de los cuales el 17.32% fueron cambios de miembros activos a estado de licencia temporal. De estos miembros el 82.50% volvió al estado laboral en que se encontraban anteriormente. El 10% de estos pasó a invalidez permanente y escogieron el beneficio de una sola suma. El 3.33% pasó a invalidez permanente y escogió el beneficio anual. Estos cambios afectan el valor proyectado de los beneficios futuros así como el valor presente de los salarios futuros. El porcentaje restante (4.17%) al final de la proyección se quedó en el estado de licencia temporal. El 26.99% de los cambios correspondieron a miembros que pasaron a estado de beneficio. El 11.69% de los miembros tomó el tipo de beneficio que es de una sola suma, lo cual no afectaba significativamente al valor presente de los

beneficios futuros. El 15.30% resultaron cambios de miembros activos a beneficiarios anuales. El 33.04% de los cambios resultó ser promociones, de los cuales, el 16.88% fueron promociones de Asistentes a Jefes, el 3.61% de asistentes a Gerentes y el 12.55% de Jefes a Gerentes. Cabe recalcar que estos cambios afectan los valores en las proyecciones, ya que una promoción laboral implica un aumento de sueldo. El 6.06% de los cambios se produjo por fallecimiento de miembros del fondo, el 90.48% de estos fueron miembros que pasaron de beneficio anual a muerte. Esta cantidad de miembros que fallecieron, significó la reducción de los beneficios pagados, a esto se debe la recuperación del balance a partir del año 27 de proyección. El 9.52% correspondió a miembros activos que fallecieron. Este último porcentaje no influye en los pagos realizados debido a que no se consideró el fallecimiento como un estado de beneficio, sino más bien el estado de detención del pago de beneficios, exclusivo para los miembros que escogían el tipo de beneficio pagado anualmente, este porcentaje únicamente influían en la disminución de las contribuciones anuales.

6. El tipo de búsqueda de los datos requeridos en la base es Lineal, es decir, que la búsqueda se realiza línea por línea hasta encontrar el registro que se quiere lo que vuelve al sistema un poco lento al momento de realizar los cálculos.

5.2 Recomendaciones:

1. Es preciso realizar el estudio actuarial correspondiente a la población que va a ser sometida a las proyecciones realizadas por el sistema para lograr predicciones adecuadas.

2. Se deben fijar los tipos de beneficios a los que los miembros del plan pueden acceder en el momento de su retiro por cualquier circunstancia con el objeto de contribuir a una mejor estimación de los valores actuariales del fondo de pensiones.

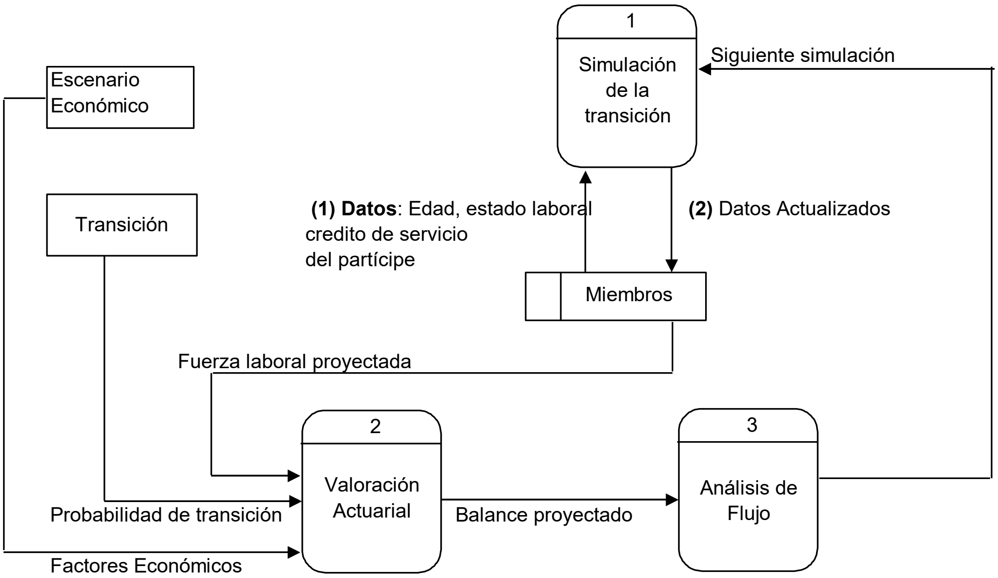
3. Las empresas que manejan fondos de pensiones pudieran implementar este sistema (con el estudio actuarial correspondiente a los miembros de los fondos que administran) y así tener una herramienta de apoyo para tratar de prever la desestabilización financiera y tomar las medidas necesarias en la planificación financiera y evaluación presupuestaria antes de que esto suceda.

4. Es preciso utilizar algún tipo alternativo de estructura de datos para optimizar la búsqueda de los registros en la base de datos y los cálculos correspondientes y así mejorar la eficiencia del sistema.

ANEXOS

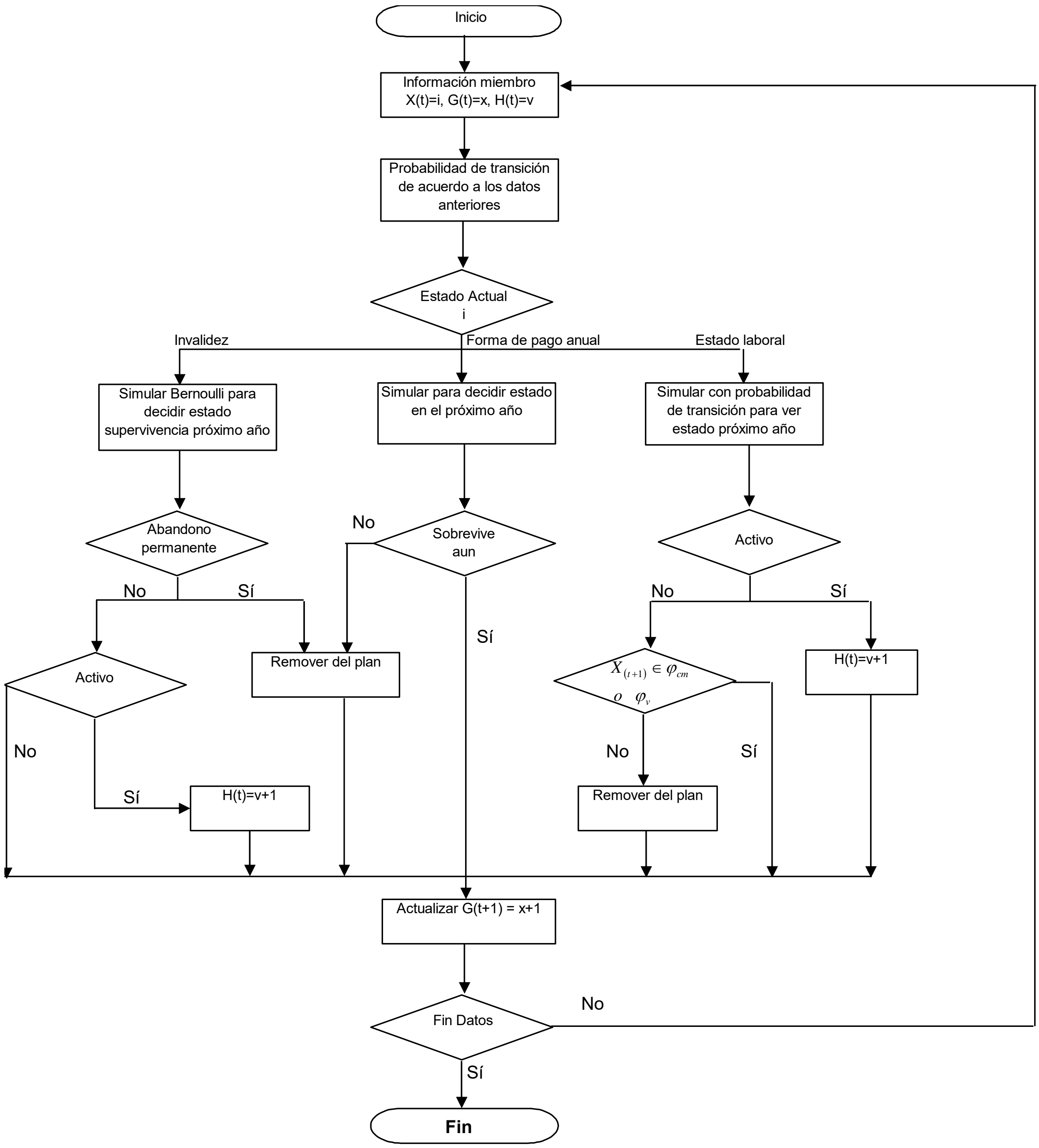
ANEXO 1

DIAGRAMA DE PROCESOS DE LA APLICACIÓN



ANEXO 2

El proceso de simulación bajo incertidumbre de Monte Carlo.



Anexo 3

Funciones de distribución de probabilidades de transición utilizadas en el plan dinámico.

1. **Estado en el próximo año.**

$$F(x)=\begin{cases} activo & 0 \le x < 0.98 \\ Licencia & 0.98 \le x < 0.9901 \\ Beneficiario & 0.9901 \le x < 0.9999 \\ Muerte & x \ge 0.9999 \end{cases}$$

2. **Tipo de beneficio escogido (Más de 15 años de servicio).**

$$F(x)=\begin{cases} Suma & 0 \le x < 0.1 \\ Anual & x \ge 0.1 \end{cases}$$

3. **Tipo de salida del fondo.**

$$F(x)=\begin{cases} Despedido & 0 \le x < 0.6 \\ \mathrm{Re}\,tirado & x \ge 0.6 \end{cases}$$

Observación: Un miembro va a jubilarse al cumplir 65 años de edad.

4. Beneficio Anual

$$F(x) = \begin{cases} Vive & 0 \le x < 0.9 \\ Muere & x \ge 0.9 \end{cases}$$

5. Licencia Temporal

$$F(x) = \begin{cases} Activo & 0 \le x < 0.7 \\ Licencia & 0.7 \le x < 0.9 \\ Invalidez\ Permanente & x \ge 0.9 \end{cases}$$

ANEXO 4

Promedio de la Proyección del Balance Actuarial (30 Años)

Promedio						
Año	PVFB	CONTRIBUCIONES	FONDOS	INTERESES	INGRESOS	BALANCE
1	0.22049002	0	4	0	0	-0.22049002
2	0.43694618	0	4.247485	0.247485	0.247485	-0.18946118
3	0.64038291	0	4.52491256	0.524912558	0.524912558	-0.11547035
4	0.84861134	0	4.75342977	0.753429766	0.753429766	-0.09518157
5	1.040162	0	5.04895894	1.048958936	1.048958936	0.00879694
6	2.61221656	0	5.28166007	1.281660072	1.281660072	-1.33055649
7	2.71526855	0	5.60415321	1.60415321	1.60415321	-1.11111534
8	2.69533473	0	5.9770319	1.977031898	1.977031898	-0.71830284
9	2.67385723	0	6.3518424	2.351842395	2.351842395	-0.32201483
10	2.63048607	0	6.79879674	2.798796743	2.798796743	0.16831067
11	2.59863325	0	7.14081772	3.140817725	3.140817725	0.54218447
12	2.53979742	0	7.64149517	3.641495165	3.641495165	1.10169775
13	2.49432448	0	8.14067954	4.140679541	4.140679541	1.64635506
14	2.41943227	0	8.57219974	4.572199739	4.572199739	2.15276747
15	2.343587	0	8.84682198	4.846821981	4.846821981	2.50323499
16	12.2444207	0.300106191	9.89998694	5.899986936	6.200093127	-6.04432754
17	17.766793	1.042868636	10.1788274	6.1788274	7.221696036	-10.5450969
18	19.9802754	1.43532287	10.8061129	6.806112886	8.241435756	-11.7388396
19	18.9357344	1.437814233	11.3421771	7.342177083	8.779991316	-10.1557431
20	20.8918103	2.013349672	12.2263501	8.226350086	10.23969976	-10.6521105
21	19.8490586	1.891552095	12.7044096	8.704409558	10.59596165	-9.25309697
22	22.9038383	3.256675029	13.5555824	9.555582408	12.81225744	-10.0915809
23	20.3781908	2.928795651	14.6786587	10.67865873	13.60745439	-6.77073641
24	16.1067854	1.068155732	15.1995689	11.19956886	12.2677246	-3.83906082
25	17.5500611	2.46956402	16.2941076	12.29410761	14.76367163	-2.78638944
26	16.3859084	2.5500037	16.8251676	12.82516765	15.37517135	-1.01073708
27	11.8772476	0.0877771	17.7117743	13.71177426	13.79955136	1.92230377
28	11.4911996	0.58922289	19.2223889	15.22238892	15.81161181	4.32041218
29	10.6991955	0.220423491	20.5544864	16.55448645	16.77490994	6.07571444
30	9.55745468	0	21.8023224	17.80232244	17.80232244	8.24486777

BIBLIOGRAFÍA

1. Espín M. Oscar, (2004), Implementación de un sistema de monitoreo estocástico y dinámico para fondo de pensiones, ESPOL, Tesis de grado por título de Ingeniero en Estadística Informática, Guayaquil – Ecuador.

2. Ángel Vega Pérez, Estadística – Aplicaciones Econométricas y Actuariales.

3. M. Ayuso, H. Corrales, M. Guillén, A. M. Pérez Marín, J. L. Rojo, Estadística Actuarial Vida.

4. Julio G. Villalón, Operaciones clásicas y modernas de seguros, Ediciones Pirámide, España.

5. The Journal of Risk and Insurance, 2002, Pension Valuation Under Uncertainties, Vol.69, No. 2.

6. www.eluniverso.com, Ecuador

7. www.fiap.cl, Chile