

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**

**Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la  
Producción**

“Modelado, Simulación y Control de un Sistema Dinámico  
mediante el uso de Componentes Análogos Simples”

**TESIS DE GRADO**

Previo la obtención del Título de:

**INGENIERO MECÁNICO**

Presentada por:

Roberth Arturo Tinoco Romero.

**GUAYAQUIL – ECUADOR**

**AÑO: 2006**

## **AGRADECIMIENTO**

A todas las personas que de uno u otro modo colaboraron con la realización exitosa de este proyecto y en especial al Ing. Eduardo Orces por su invaluable ayuda

## **DEDICATORIA**

A las innumerables personas que han hecho posible mi formación académica de principio a fin, cuyo respaldo incondicional han sido un fuerte valuarte que llevaré siempre en consideración, entre ellos principalmente a mis padres.

## TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

*Cecilia A. Paredes V.*

Dra. Cecilia Paredes V.  
SUBDECANA DE LA FIMCP  
PRESIDENTE

*Eduardo Orcés P.*

Ing. Eduardo Orcés P.  
DIRECTOR DE TESIS



*Federico Camacho B.*

Ing. Federico Camacho B.  
VOCAL

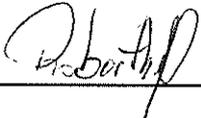
*Nelson Cevallos B.*

Ing. Nelson Cevallos B.  
VOCAL

## DECLARACIÓN EXPRESA

“La responsabilidad del contenido de esta Tesis de Grado, me corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL”

(Reglamento de graduación de la ESPOL).



---

Roberth A. Tinoco R.

---

## RESUMEN

Como un sistema típico de control, el péndulo invertido es un excelente medio de comprobación y evaluación de diferentes métodos de control aplicados a sistemas inestables reales, además es muy conocido por su analogía en el diseño de un controlador de vibraciones en la plataforma para el lanzamiento de cohetes. Otras aplicaciones importantes es en la robótica, en el posicionamiento de un satélite con respecto a la tierra, en este caso el satélite esta en movimiento y las antenas que se encuentran en la tierra no pueden dejar que se mueva demasiado, ya que sino se saldría del rango de comunicación entre ellos. Es así como podríamos decir que están sujetos estos dos cuerpos (satélite y antena) por un vector virtual el cuál en la parte de la tierra se encuentra fijo y la parte en movimiento en el espacio, haciendo así la función del péndulo invertido.

Existen más aplicaciones para el péndulo invertido como lo es la estabilidad en grúas, edificios, aplicaciones didácticas, etc. Un péndulo invertido es un

dispositivo físico que consiste en una barra cilíndrica con libertad de oscilar alrededor de un pivote fijo. El pivote es montado sobre un carruaje el cual en su giro puede seguir una trayectoria horizontal.

Nuestro propósito final es conservar el péndulo perpendicular ante la presencia de perturbaciones, donde el péndulo inclinado regresa a la posición vertical cuando se aplica al carro una fuerza de control apropiada y al final de cada proceso de control, se pretende regresar el carro a la posición de referencia. La fuerza correcta tiene que ser establecida a través de las mediciones de los valores instantáneos de la posición horizontal y el ángulo de inclinación del péndulo, por lo que hacemos uso del diseño de un observador de orden mínimo.

El sistema péndulo, carro y actuador puede ser modelado como un sistema lineal si todos los parámetros son conocidos (masas, longitudes, etc.), bajo la premisa de que el ángulo de inclinación por parte del péndulo es pequeño, para así poder encontrar un controlador para estabilizarlo, basado en la tutela del uso de las diversas metodologías de control expuestas y así destacar los puntos relevantes de cada uno de ellas con las simulaciones pertinentes.

# ÍNDICE GENERAL

	Pág.
RESUMEN.....	II
INDICE GENERAL .....	III
ABREVIATURAS .....	IV
SIMBOLOGÍA.....	V
INDICE DE FIGURAS.....	VI
INDICE DE TABLAS .....	VII
INTRODUCCIÓN .....	1

## CAPITULO 1

1. MODELADO Y RESPUESTA A LAZO ABIERTO DEL SISTEMA .....	4
1.1. Modelo Matemático del Sistema Dinámico Péndulo Invertido .....	6
1.2. Representación del Sistema en Simulink .....	15
1.3. Respuesta del Sistema a Lazo Abierto.....	19
1.4. Estrategias de Control .....	35

## CAPITULO 2

2. METODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES PARA EL ANÁLISIS DEL SISTEMA DE CONTROL .....	41
2.1. Determinación de la Función de Transferencia del Controlador.....	43
2.2. Análisis de la Variable no Controlada.....	79
2.3. Modelado en SIMULINK del Sistema de Control Obtenido .....	84

## CAPITULO 3

3. METÓDO DE UBICACIÓN DE POLOS PARA EL ANÁLISIS DEL SISTEMA DE CONTROL .....	88
3.1. Controlabilidad y Observabilidad .....	90
3.2. Análisis del Sistema de Control mediante la Realimentación del Estado Observado de Orden Completo.....	94
3.3. Modelado en SIMULINK del Sistema de Control Obtenido .....	121

## CAPITULO 4

4. REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL EN EL DISEÑO FINAL DEL SISTEMA DE CONTROL .....	125
4.1. Selección del Actuador.....	126
4.2. Control Óptimo de un Sistema Lineal Regulador.....	173
4.3. Diseño del Sistema de Control mediante Realimentación de Estados con Observador de Orden Mínimo .....	182

CAPITULO 5

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....214

APÉNDICES

BIBLIOGRAFÍA

## ABREVIATURAS

A	Amperio
op-amp	Amplificador operacional
AC	Corriente Alterna
DC	Corriente Directa
FEM	Fuerza Contra-electromotriz
H	Henrio
Kg	Kilogramo
K $\Omega$	kilo-ohmio
LA	Lazo Abierto
LC	Lazo Cerrado
LGR	Lugar Geométrico de las Raíces.
N	Newton
N-m	Newton-metro
e	Número neperiano
m	Metro
m/s	Metro por segundo
$\Omega$	Ohmio
rad	Radian
rad/s	Radian por segundo
r.p.m.	Revoluciones por minuto
s	Segundos
w	Vatio
v	Voltios

## SIMBOLOGIA

$\alpha$	Aceleración Angular del Eje del Motor
$F_o$	Amplitud de la Fuerza Excitatriz
$\nu$	Coeficiente de Fricción viscosa equivalente del Motor reductor
$B$	Coeficiente de Fricción Viscosa equivalente del Carro
$b$	Coeficiente de Fricción Viscosa equivalente del Péndulo
$y_{cg}$	Centro de Gravedad del
$\chi_{cg}$	Centro de Gravedad del Péndulo en el Eje de las abscisas
$K_1$	Constante del Par Motriz
$K_2$	Constante de la Fuerza contra-electromotriz
$P$	Control Proporcional.
$D$	Control Derivativo
$I$	Control Integral
$i_a$	Corriente de Armadura del Motor
$i_f$	Corriente de Campo del Motor
$\varphi$	Desfase entre la Fuerza Excitatriz y el Desplazamiento angular.
$\phi$	Desplazamiento Angular del eje del Motor
$d$	Diámetro de la polea.
$r$	Radio de la polea.
$\phi(s)$	Polinomio Característico de la Matriz de Estados
$\theta$	Desplazamiento Angular del Péndulo
$X$	Desplazamiento Lineal del Carro
$FAD$	Factor de Amplificación Dinámico.
$\zeta$	Factor de Amortiguamiento Relativo
$\Psi$	Flujo magnético en el entrehierro del Motor
$\omega_o$	Frecuencia Natural
$\omega_a$	Frecuencia Amortiguada
$\omega$	Frecuencia Excitatriz
$F_d$	Fuerza excitatriz o disturbio externo
$G$	Función de Transferencia del Sistema Péndulo Invertido.
$\Delta V$	Ganancia de Voltaje

$K_d$	Ganancia Derivativa
$K_i$	Ganancia Integral
$K_p$	Ganancia proporcional
$g$	Gravedad
$J$	Índice de desempeño
$L_m$	Inductancia.
$J_c$	Inercia de Carga.
$J_m$	Inercia del eje del Motor
$I$	Inercia del Péndulo
$Z_{Mi}$	Impedancia Miller de entrada.
$Z_{Mo}$	Impedancia Miller de salida.
$\ell$	Longitud media del Péndulo
$A$	Matriz de Estado
$B$	Matriz de Entrada
$K$	Matriz de Ganancia de Realimentación del Estado
$L$	matriz de Ganancia del Observador
$C$	Matriz de Salida
$D$	Matriz de Transición Directa
$M$	Masa del Carro
$m$	Masa del Péndulo
$i$	Número imaginario
$n$	Número de Estados.
$T$	Par desarrollado por el Motor
$\tau_o$	Par desarrollado en la Polea
$\tau$	Período Fundamental
$h_{fe}$	Parámetro de la relación de la transferencia directa de la corriente a corto circuito para una configuración base común.
$h_{ie}$	Parámetro de impedancia de entrada a cortocircuito para una configuración emisor común
$\sigma$	Parte real de un número complejo
$\mu_i$	Polos del sistema a lazo cerrado.
$\beta$	Relación entre la corriente del colector y la corriente de base en el transistor.
$N$	Reducción de velocidad
$R_a$	Resistencia de Armadura del Motor
$\mu$	Señal del Control
$v$	Señal del Control del Problema dual
$M_p$	Sobrepaso Máximo
$t_s$	Tiempo de Asentamiento o Estabilización
$t_r$	Tiempo de Levantamiento
$s$	Variable Compleja
$\chi_i$	Variables de Estado

Z Variables de Estado del Problema dual.  
 $\hat{x}$  Variables de Estado estimadas  
 $e_a$  Voltaje aplicado a la Armadura del Motor DC  
 $e_b$  Voltaje o fuerza Contra-electromotriz

## INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1-1: Diagrama de Cuerpo libre del Sistema Péndulo Invertido.....	7
Figura 1-2: Comportamiento Dinámico del Sistema en Lazo Cerrado ante una señal Escalón con el uso de la Función de Transferencia.....	23
Figura 1-3: Comportamiento Dinámico del Sistema en Lazo Cerrado ante una señal Escalón en el Espacio de estados.....	31
Figura 1-4: Subsistema del Modelado Sistema Péndulo Invertido en Simulink .....	33
Figura 1-5: Respuesta de la Desviación Angular del Péndulo ante una señal Escalón como disturbio en Simulink.....	34
Figura 1-7: Respuesta del Desplazamiento del Carro ante una señal Escalón como disturbio en Simulink .....	34
Figura 1-8: Sistema Retroalimentado .....	40
Figura 2-1: Diagramas de Bloques del Sistema Péndulo Invertido.....	45
Figura 2-2: Diagramas de Bloques Simplificado del Sistema Péndulo Invertido.....	46
Figura 2-3: Trazo del LGR usando Matlab.....	51
Figura 2-4: Respuesta del Sistema ante una Señal Escalón como disturbio omitiendo los efectos de amortiguamiento.....	65
Figura 2-5: Respuesta del Sistema ante una Señal Escalón como disturbio considerando los efectos de amortiguamiento.....	66
Figura 2-6: Trazo del LGR para establecer el parámetro de ajuste.....	72
Figura 2-7: Trazo del LGR amplificado para establecer el parámetro de ajuste.....	73

Figura 2-8:	Respuesta del Sistema de Control bajo una señal escalón como disturbio en base al método del LGR.....	74
Figura 2-9	Respuesta Transitoria para una señal impulso con el uso del Controlador PID .....	78
Figura 2-10	Diagrama de Bloques Global del Sistema Péndulo Invertido.....	80
Figura 2-11:	Diagrama de Bloques Simplificado del Sistema Péndulo Invertido.....	80
Figura 2-12:	Respuesta de las Variables de Salida del Sistema de control ante una señal escalón como Disturbio .....	83
Figura 2-13:	Configuración Resultante del Sistema de Control utilizando Simulink.....	85
Figura 2-14:	Velocidad de Respuesta del desplazamiento Angular del Péndulo por medio de Simulink en presencia de una señal escalón .....	86
Figura 2-15:	Velocidad de Respuesta del desplazamiento Lineal del Carro por medio de Simulink en presencia de una señal escalón .....	86
Figura 3-1:	Plano Complejo S.....	101
Figura 3-2:	Velocidad de Respuesta mediante el uso del Método de Ubicación de Polos.....	104
Figura 3-3:	Diagrama de Bloques usando Realimentación de Estado .....	105
Figura 3-4:	Diagrama de Bloques incluyendo el Observador de orden Completo.....	116
Figura 3-5:	Velocidad de Respuesta de las Variables Controladas con el uso de un Observador de Orden completo.....	120
Figura 3-6:	Diagrama de Bloques del Sistema Péndulo Invertido en Simulink usando Realimentación de Estado .....	122
Figura 3-7:	Velocidad de Respuesta de Desplazamiento Angular del Péndulo usando Realimentación de estado y una señal Escalón como disturbio .....	123
Figura 3-8.	Velocidad de Respuesta de Desplazamiento lineal del Carro usando Realimentación de estado y una señal Escalón como disturbio.....	123
Figura 4-1:	Ilustración que muestra la Energía requerida por el motor .....	138
Figura 4-2:	Circuito Equivalente de un Motor DC controlado por Armadura .....	140
Figura 4-3:	Conexión Dinámica del Péndulo-Motor .....	144

Figura 4-4:	Equipo de Prueba para la determinación de la constante Par Motriz.....	148
Figura 4-5:	Ilustración de los Equipos usados para determinar las constantes del motor.....	150
Figura 4-6:	Ilustración del Reductor.....	155
Figura 4-7:	Ilustración de la Prueba para determinar la Inercia del eje del Motor.....	158
Figura 4-8:	Diagrama de Cuerpo Libre del Rotor por una barra adherida a su eje.....	159
Figura 4-9:	Descripción del Sistema Motor, Reductos y Conjunto Carro – Péndulo.....	163
Figura 4-10:	Trazo del LGR para determinar la reducción óptima.....	167
Figura 4-11:	Trazo del LGR para determinar la reducción óptima amplificada.....	168
Figura 4-12:	Modelo AC del Driver del Motor mediante parámetros Híbridos.....	191
Figura 4-13:	Modelo AC del Driver del Motor mediante parámetros Híbridos en base al Teorema Millar.....	192
Figura 4-14:	Amplificador Operacional Sumador Inversor.....	194
Figura 4-15:	Respuesta Transitoria del Sistema de Control en base a LQR con una señal Escalón como disturbio.....	199
Figura 4-16:	Diagrama de la Señal de flujo del Controlador.....	205
Figura 4-17:	Configuración del modelo Sistema Péndulo Invertido en Simulink con LQR.....	208
Figura 4-18:	Comportamiento Dinámico del Péndulo en base al Diseño LQR y con una señal Escalón como Disturbio.....	209
Figura 4-19:	Comportamiento Dinámico del Carro en base al Diseño LQR y con una señal Escalón como Disturbio.....	209

## ÍNDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1-1: Parámetros del Sistema Físico Péndulo Invertido .....	22
Tabla 1-2: Instrucciones en Matlab con el Uso del la Función de Transferencia.....	22
Tabla 1-3: Instrucciones en Matlab con el uso del Espacio de Estados .....	30
Tabla 2-1: Instrucciones en Matlab para el trazo del LGR.....	50
Tabla 2-2: Instrucciones en Matlab para obtener la Respuesta del Sistema ante una señal Escalón como disturbio omitiendo los efectos e amortiguamiento.....	64
Tabla 2-3: Instrucciones en Matlab para establecer el Parámetro de Ajuste con las especificaciones de Desempeño en base el criterio de Routh y al LGR.....	71
Tabla 2-4: Comportamiento Habitual de Kp, Ki y Kd en la respuesta transitoria .....	76
Tabla 2-5: instrucciones en Matlab para la determinación de la respuesta transitoria en base al control PID .....	77
Tabla 2-6: Instrucciones en Matlab para el Análisis de la Variable no Controlada.....	82
Tabla 3-1: Instrucciones en Matlab para determinar la matriz de Ganancia de realimentación de Estado.....	102
Tabla 3-2: Lista de sustituciones necesarias para escribir la ecuación para el observador de Orden Mínimo.....	112
Tabla 3-3: Instrucciones en Matlab para determinar K y L .....	119
Tabla 4-1: Tipos de Actuadores a considerar .....	128
Tabla 4-2: Potencia del Motor.....	138
Tabla 4-3: Parámetros para determinar la Constante Par Motriz.....	150
Tabla 4-4: Parámetros para determinar la Constante Fuerza Electromotriz.....	151
Tabla 4-5: Parámetros para determinar la Resistencia de Armadura.....	151
Tabla 4-6: Valores experimentales para determinar la inercia del eje del Motor .....	161

Tabla 4-7:	Parámetros Parciales Físicos del sistema.....	161
Tabla 4-8:	Parámetros del Sistema Péndulo Invertido .....	172
Tabla 4-9:	Instrucciones en Matlab para determinar los eigenvalores del la Matriz de Estado .....	186
Tabla 4-10:	Instrucciones en Matlab para determinar K .....	198
Tabla 4-11:	Instrucciones en Matlab para determinar L .....	202
Tabla 4-12:	Lista de Componentes.....	212

# INTRODUCCIÓN

En este proyecto se presenta una de las muchas aplicaciones del control automático, que sirve para comprender los principios de la robótica, siendo además muy conocido por ser una buena analogía en el diseño de un controlador de vibraciones en una plataforma para el lanzamiento de un cohete, posicionamiento de un satélite con respecto a la tierra, estabilidad de grúas, edificios y sobre todo se utiliza en el ámbito educativo, por ser un excelente medio que destaca los puntos relevantes de comprobación y evaluación de los diferentes métodos de control aplicados a sistemas reales inestables, tal cual es el “Sistema de Control de un Péndulo Invertido”, el mismo que es básicamente un dispositivo físico que consiste en una barra con libertad de oscilar alrededor de un pivote fijo y este último es montado sobre un carro el cual en su giro debe seguir una trayectoria horizontal, donde el propósito final es conservar el péndulo perpendicular ante la presencia de perturbaciones, es decir el péndulo inclinado regresa a la posición vertical cuando se aplica al carro una fuerza de control apropiada, y en la que, a cada proceso de control se pretende regresar el carro a la posición de referencia.

El diseño, la construcción y la operación del péndulo invertido se hace con el fin de practicar los principios de la Mecatrónica (Ingeniería de Control,

Electrónica y Computacional) y con ello mostrar el poder de un mecanismo de control a estudiantes de dinámica y control . El desafío de estabilizar el Péndulo Invertido no es nuevo, por ello procuraremos controlarlo mediante el uso de simples componentes análogos tales como potenciómetros y amplificadores operacionales, y en consecuencia la demostración de la solución a establecer será mas accesible a estudiantes de control introductorias.

El comportamiento dinámico se lo describe a partir del sistema físico, para la cual se obtiene el modelo matemático por medio de las leyes físicas fundamentales y así llegar a la ley de control para lograr un sistema estable por medio de metodologías diferentes tales como el Lugar Geométrico de las Raíces, Ubicación de Polos y Regulador Cuadrático Lineal, para posteriormente hacer una simulación, bajo el uso de una herramienta computacional muy importante, como lo es MATLAB y SIMULINK.

Matlab es un programa interactivo para computación numérica y visualización de datos, mientras que Simulink es un software que le permite modelar, simular y analizar sistemas dinámicos cuyas salidas cambian con el tiempo. Estos programas son ampliamente usados por Ingenieros de Control en el análisis y diseño, posee además una extraordinaria versatilidad y capacidad para resolver problemas en matemática matricial.

Las simulaciones son importantes pero no son ningún sustituto para actuar recíprocamente con un hardware real. La principal limitación de las simulaciones es que son perfectos cada vez que trabajan monótonamente, debido a que son fundamentadas en base a una serie de ecuaciones matemáticas para crear un modelo ideal de un sistema real, sin considerar a menudo en ellas la fricción y dinámica real del sistema que pueden a la vez tener un impacto sobre la estabilidad y respuesta de control. Otra limitación de las simulaciones es que sus respuestas se la representan en forma de gráficas o animaciones mostradas en la pantalla del computador, en las cuales su comportamiento difiere considerablemente del sistema real. Ante lo ultimo expuesto, a mas de plantear la resolución a nuestro problema con perspectivas de un modelo que se asemeje lo mas posible al sistema real, llevaremos a cabo la construcción de nuestro controlador y así plantear la diferencias existentes entre el comportamiento dinámico analizado y el real obtenido.

El proceso inicialmente es no lineal e inestable con una señal de entrada y dos de salida en donde la restricción a desviaciones angulares pequeñas por parte del péndulo, hace posible la modelación de nuestro sistema como lineal, la cual nos conducirá a la acción correctiva que un actuador a seleccionar deberá ejecutar para lograr nuestro objetivo de estabilización.

# CAPÍTULO 1

## 1. MODELADO Y RESPUESTA A LAZO ABIERTO DEL SISTEMA

Con la finalidad de entender el comportamiento de los sistemas dinámicos y controlar los sistemas complejos, es necesario obtener modelos matemáticos que los representan. Debido a que el sistema a considerar es por naturaleza dinámico, las ecuaciones que las describen son ecuaciones diferenciales. No obstante al poder ser linealizada, entonces la Transformada de Laplace puede ser utilizada para simplificar el método de solución.

En la práctica, la complejidad de los sistemas y la ignorancia de factores relevantes necesitaremos la introducción a las asunciones concernientes a la operación del sistema. Por consiguiente nosotros a menudo encontraremos útil considerar la sistema físico, delineado bajo ciertas asunciones, y linealizado. Entonces, usando las leyes físicas describiremos el sistema

equivalente lineal por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Finalmente, utilizando herramientas matemáticas, tales como la Transformada de Laplace, obtendremos una solución que describirá el comportamiento del sistema.

### **Definición del Sistema a Controlar.**

El Péndulo Invertido es un sistema conformado por una barra montado sobre un carro impulsado por un actuador. El objetivo a alcanzar, es mantener el péndulo en posición vertical tanto como sea posible y tener control sobre la posición del carro, bajo esta premisa el sistema en cuestión puede ser modelado como un sistema lineal considerando a las desviaciones angulares por parte del péndulo insignificantes, en donde la bondad del diseño vendrá acondicionada por todos los movimientos que el carro necesita para posesionarse sin que el péndulo se desvíe desde su posición vertical más de un cierto ángulo, el cual debe darse en un tiempo razonable.

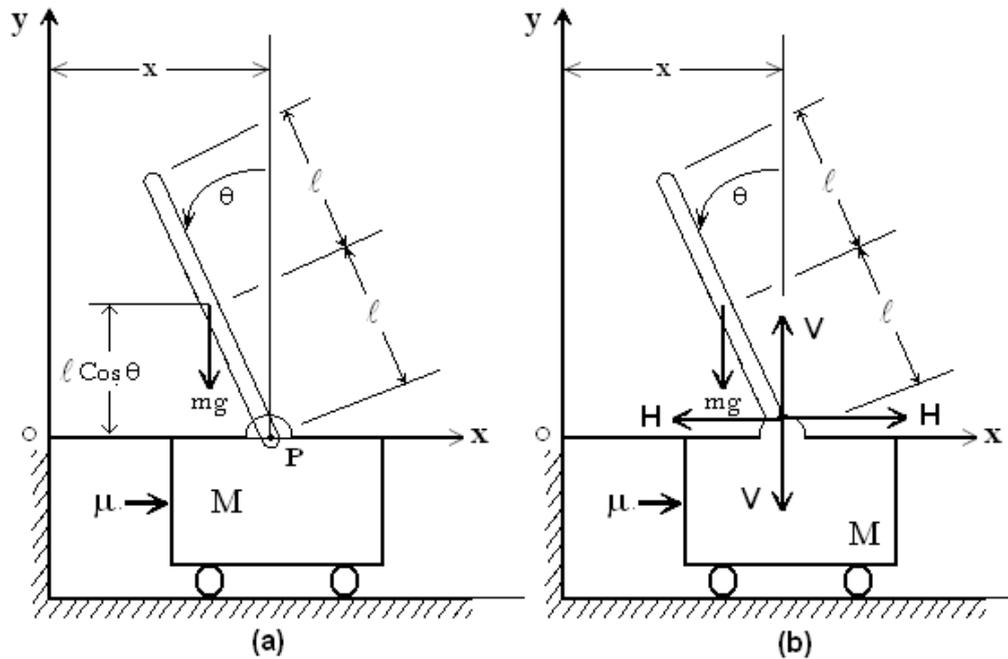
Por lo tanto, el sistema de control a realizar tendrá dos salidas: inclinación del péndulo y posición del carro. Dichas salidas serán procesadas por el controlador a diseñar que dará como respuesta la fuerza y el sentido a aplicar al movimiento del carro.

Por ende la aplicación de un modelo en el espacio de estados será el idóneo, no obstante para fines didácticos haremos énfasis al control convencional a mas del mencionado, en donde la única variable a controlar será la desviación angular del péndulo independientemente de lo que sucede con la posición del carro.

### **1.1. Modelo Matemático del Sistema.**

Una vez planteado nuestros objetivos, no resta proceder al modelado matemático que describen el comportamiento dinámico que caracteriza nuestro sistema el cual es el primer paso a tomar en todo proceso de diseño, para ello haremos hincapié a las leyes físicas fundamentales que nos conducirán a las ecuaciones diferenciales respectivas que describirán tal condición.

Considere la ilustración de la siguiente figura, en la que el péndulo se monta en un carro controlado por una fuerza de control, considerando de antemano el problema en dos dimensiones, en el que el péndulo únicamente se mueve en el plano del papel.



**FIGURA. 1.1** (A) SISTEMA DEL PÉNDULO INVERTIDO, (B) DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.

Definiendo el ángulo respecto a la línea vertical como  $\theta$ , al igual que a las coordenadas  $(x, y)$  del centro de gravedad de la barra del péndulo como  $(x_{cg}, y_{cg})$ . De modo que:

$$x_{cg} = x - l \sin \theta \quad (1-1)$$

$$y_{cg} = l \cos \theta \quad (1-2)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento para el sistema, considere el diagrama de cuerpo libre que aparece en la figura (b). El movimiento

horizontal del centro de gravedad de la barra del péndulo se obtiene mediante:

$$H = m \frac{d^2}{dt^2} (x - \ell \sin \theta) \quad (1-3)$$

El movimiento vertical del centro de gravedad de la barra del péndulo es

$$V - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (\ell \cos \theta) \quad (1-4)$$

El movimiento rotacional de la barra del péndulo alrededor de su centro de gravedad se describe mediante

$$V \ell \sin \theta + H \ell \cos \theta = I \ddot{\theta} + B \dot{\theta} \quad (1-5)$$

Donde B es el coeficiente de amortiguamiento de la barra e I la inercia de la misma. El movimiento horizontal del carro se describe mediante

$$u - H - b \frac{dx}{dt} = M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1-6)$$

Las ecuaciones (1-3) a (1-6), antes expuestas describen el movimiento del sistema del péndulo invertido en el carro. Debido a que estas ecuaciones contienen  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$ , son no lineales.

Si suponemos que el ángulo  $\theta$  es pequeño, para pequeñas oscilaciones del péndulo (el cual es básicamente nuestro propósito), las ecuaciones (1-2) a (1-6) se linealizan del modo siguiente:

$$H = m \cdot (\ddot{x} - l\ddot{\theta}) \quad (1-7)$$

$$V - mg = 0 \quad (1-8)$$

$$I\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = V\ell\theta + H\ell \quad (1-9)$$

$$M\ddot{x} + b\dot{x} = u - H \quad (1-10)$$

A partir de las ecuaciones (1-7) y (1-10), obtenemos:

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - m\ell\ddot{\theta} = u \quad (1-11)$$

A partir de las ecuaciones (1-7), (1-8) y (1-9), obtenemos:

$$I\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = mg\ell\theta + H\ell$$

$$I\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = mg\ell\theta + \ell(m\ddot{x} - m\ell\ddot{\theta})$$

O bien

$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta} + B\dot{\theta} - mg\ell\theta = m\ell\ddot{x} \quad (1-12)$$

Las ecuaciones (1-11) y (1-12) describen el comportamiento dinámico del Sistema Péndulo Invertido y en el cual, es el punto de partida para el

establecimiento de nuestro controlador que proporcione los objetivos deseados.

### **Derivación de la Función de Transferencia del Péndulo Invertido.**

La facultad de obtener una aproximación lineal de un sistema físico permite al analista considerar el uso de la **Transformada de Laplace**. El método de Transformada de Laplace substituye fácilmente de manera relativa la resolución de una ecuación algebraica por la dificultad intrínseca en las ecuaciones diferenciales.

La **Función de Transferencia** de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial e invariante con el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero. Para obtener la función de transferencia de manera analítica de las ecuaciones del sistema linealizado debemos primero tomar la transformada de Laplace de el sistema de ecuaciones. El resultado de tomar la transformada de Laplace es:

$$(M + m)X(s)S^2 + bX(s)S - m\ell\theta(s)S^2 = U(s) \quad (1-13)$$

$$(I + m\ell^2)\theta(s)S^2 + B\theta(s)S - mg\ell\theta(s) = m\ell X(s)S^2 \quad (1-14)$$

Por el momento estaremos interesados en establecer el ángulo Theta como salida de nuestro sistema, por lo que resolviendo la ecuación (1-14) para X(s),

$$X(s) = \left[ \frac{(I + m\ell^2)}{m\ell} + \frac{B}{m\ell S} - \frac{g}{S^2} \right] \theta(s) \quad (1-15)$$

Entonces substituyendo la ecuación obtenida (1-15) en la ecuación (1-13), y reordenando tenemos.

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{\frac{m\ell}{q} S}{S^3 + \left[ \frac{B(M + m) + b(I + m\ell^2)}{q} \right] S^2 + \left[ \frac{Bb - (M + m)mg\ell}{q} \right] S - \frac{bmg\ell}{q}} \quad (1-16)$$

donde.

$$q = [(M + m)(I + m\ell^2) - (m\ell)^2] \quad (1-17)$$

Debe señalarse que, para los sistemas en los que se conocen con anticipación las entradas, y en los cuales no hay perturbaciones es aconsejable emplear un control a lazo abierto, tal cual obviamente no es nuestro caso. A continuación cimentaremos lo mencionado, a través del uso de la función de transferencia, espacio de estados y por último emplearemos una simulación para finalmente encarrilarnos a una estrategia de control.

### **Determinación de los Parámetros Físicos del Sistema.**

Como todo proceso de diseño, una vez establecido la identificación de la necesidad con la consecuente investigación minuciosa pertinente y su respectivo planteamiento de la meta a llegar, se procede a determinar los parámetros a partir del análisis que conlleve a una mejor solución para fines didácticos.

Remitiéndonos a las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema, en donde eliminando el diferencial de segundo orden de  $x$  para confines prácticos, se obtiene la siguiente ecuación diferencial para  $\theta$ .

$$\ddot{\theta} - \left[ \frac{M + m}{(M + m)(I + m\ell^2) - (m\ell)^2} \right] \cdot mg\ell\theta = 0 \quad (1-18)$$

de idéntica manera para el desplazamiento lineal  $x$ .

$$\ddot{x} = \frac{m\ell}{m + M} \ddot{\theta} \quad (1-19)$$

Por fines prácticos, los efectos de amortiguamiento se consideran insignificantes con una señal de control nula, percibiendo así que  $\theta$  es independiente de  $x$  (el movimiento angular es independiente del movimiento trasnacional), lo contrario no es verdad, es decir  $x$  si depende de  $\theta$ . Si renombramos la siguiente variable, considerando que para una barra uniforme su inercia es  $m\ell^2/3$ , entonces

$$\omega_n^2 = \frac{(M + m) \cdot mg\ell}{(M + m)(I + m\ell^2) - (m\ell)^2} = \frac{3g}{\ell} \left( \frac{M + m}{4M + m} \right) \Rightarrow \quad (1-20)$$

$$\ddot{\theta} - \omega_n^2 \cdot \theta = 0$$

Por ser una ecuación diferencial de Segundo grado, homogénea y lineal, por inspección podemos aseverar que:

$\theta = Ae^{st} \Rightarrow$  Reemplazando

$$Ae^{st}(s^2 - \omega_n^2) = 0 \rightarrow s = \pm\omega_n$$

Debido a la propiedad de linealidad de la ecuación diferencial, la solución es la superposición de ambas soluciones, entonces:

$$\theta(t) = C_1 e^{\omega_n t} + C_2 e^{-\omega_n t}$$

Para establecer las constantes, hacemos uso de las condiciones iniciales del problema, donde:

$$\theta(0) = \theta_o ; \dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\theta(t) = \theta_o \left( \frac{e^{\omega_n t} + e^{-\omega_n t}}{2} \right) = \theta_o \text{Cosh}(\omega_n t) \Rightarrow \quad (1-21)$$

$$x(t) = \left( \frac{m\ell}{M+m} \right) \theta_o \omega_n^2 \text{Cosh}(\omega_n t) \quad (1-22)$$

La solución es la esperada, pues se trata de funciones crecientes positivas, no obstante para reducir los efectos de inestabilidad, se procede a modificar los parámetros que intervienen. La razón de crecimiento de ambas funciones depende directamente de la frecuencia natural del péndulo, reduciéndose

cuando este posee un pequeño valor, de ahí la necesidad de centrarnos en tal punto. Partiendo del hecho de que la masa del carro es conocida, debido a que por disponibilidad, eficiencia, tamaño y costo, este previamente se lo adquiere, la cual es de 0.425 Kg.

En base a lo mencionado, podemos disponer una serie de alternativas potenciales viables, no obstante partiendo del hecho de una elección arbitraria pero justificable por los términos antes planteados, expresamos que inercia del péndulo, masa del carro es un factor irrelevante pero la longitud del cuestionado péndulo es factor incidente, pues entre mayor es, mejor controlabilidad obtendremos dentro de los límites prácticos. Como resultado de lo mencionado elegiremos una barra cilíndrica de 8 mm de diámetro de acero inoxidable con una longitud de 33 cm. (0.270 Kg.) que hará la función de péndulo en nuestro sistema.

## **1.2. Representación del Sistema en Simulink.**

Este sistema es complicado modelarlo en Simulink debido a la restricción física (pivote) entre el carro y el péndulo que reducen los grados de libertad en el sistema.

Tanto el carro como el ángulo de inclinación del péndulo (  $x$  y  $\theta$  respectivamente) tienen un grado de libertad, por lo cual entonces nosotros modelaremos las ecuaciones de Newton para esos dos grados de libertad, con el siguiente proceder:

De las ecuaciones (1-5) y (1-6), despejamos el término diferencial de segundo grado

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{M_{\text{Cart}}} \sum F_x = \frac{1}{M} \left( \mu - H - b \frac{dx}{dt} \right)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{I_{\text{Pend}}} \sum \tau = \frac{1}{I} \left( H\ell \cos \theta + V\ell \sin \theta - \beta \frac{d\theta}{dt} \right)$$

Es necesario, sin embargo, incluir la interacción existente entre las fuerzas  $V$  y  $H$ , del carro y la del péndulo para establecer la dinámica del sistema. La adición de estas fuerzas requiere modelar de la dinámica del péndulo tanto de  $\chi$  y  $y$  como la de la variable  $\theta$ . Con ello obtendremos provecho de las bondades que presta el modelado a través de Simulink no sin antes mencionar que debemos estar sujetos al cuidado minucioso respecto al álgebra involucrada, por lo que finalmente modelaremos las ecuaciones en las que intervienen  $\chi$  y  $y$  para el péndulo.

$$m \frac{d^2 x_{cg}}{dt^2} = \sum_{Pend} F_x = H$$

$$\Rightarrow H = m \frac{d^2 x_{cg}}{dt^2} \quad (1-23)$$

$$m \frac{d^2 y_{cg}}{dt^2} = \sum_{Pend} F_y = V - mg$$

$$\Rightarrow V - mg = m \frac{d^2 y_{cg}}{dt^2} \quad (1-24)$$

No obstante,  $x_{cg}$  y  $y_{cg}$  son funciones de theta, por consiguiente, nosotros podemos representar sus derivaciones en términos de la derivada de theta.

$$x_{cg} = x - \ell \sin \theta$$

$$\frac{dx_{cg}}{dt} = \frac{dx}{dt} - \ell \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2 x_{cg}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} - \ell \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \ell \sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$y_{cg} = y + \ell \cos \theta$$

$$\frac{dy_{cg}}{dt} = \frac{dy}{dt} - \ell \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad ; \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 y_{cg}}{dt^2} = -\ell \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \ell \cos \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Estas expresiones pueden entonces ser substituidas dentro de las expresiones tanto para H y V. En lugar de continuar con el álgebra aquí, nosotros simplemente representaremos estas ecuaciones en Simulink. Vale recalcar que Simulink puede operar con ecuaciones no lineales, de ese modo es innecesario linealizar estas ecuaciones como procedimos en la sección anterior.

La construcción del modelado del sistema realizado en SIMULINK se lo detalla en el Apéndice A.

### 1.3. Respuesta del Sistema a Lazo Abierto.

Los sistemas en los cuales la salida no afecta la acción de control se denominan *sistemas de control en lazo abierto*. En otras palabras, en un sistema de control en lazo abierto no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada. Por tanto, a cada entrada de referencia le corresponde una condición de operación fija; como resultado, la precisión del sistema depende la *calibración*.

Ante la presencia de perturbaciones, un sistema de control a lazo abierto no realiza la tarea deseada. En la práctica, el control en lazo abierto sólo se usa si se conoce la relación entre la entrada y la salida y si no hay perturbaciones internas ni externas.

Un requerimiento importante para nuestro sistema de control es de que debe ser estable. Esto significa que si al sistema se aplica una entrada de magnitud finita, entonces la salida debería también ser finita y de ningún modo infinita, es decir incrementarse dentro de un límite, pero tal aseveración será puesta en tela de duda, para así determinar la estabilidad inherente de nuestro sistema dinámico original.

Determinar la estabilidad de un sistema dada su función de transferencia implica también determinar las raíces del polinomio del denominador de la función y considerar si cualquiera de éstas son o no son positivas, sin embargo podemos rendir una primera prueba que se aplica al revisar los coeficientes de la ecuación del denominador. Si estos son todos positivos y ninguno es cero, el sistema puede ser estable. Si cualquiera de los coeficientes es negativo, entonces el sistema es inestable y si cualquiera de los coeficientes es cero, en el mejor de los casos el sistema es críticamente estable. Para objeto de ilustración, a más de considerar lo antes planteado, aplicaremos a nuestro sistema una señal de entrada que nos permitirá analizar el desempeño del sistema, al obtener la respuesta ante tal perturbación, la misma que será la base para la comparación del desempeño de diversos sistemas de control a determinar a lo largo del presente proyecto, por ello al estar nuestro sistema sujeto a perturbaciones repentinas una **función impulso** sería una buena señal de prueba.

### **Análisis de la respuesta a Lazo Abierto del Sistema Péndulo Invertido mediante la Función de Transferencia usando MATLAB.**

La función de transferencia determinada a través de la transformada de Laplace puede analizarse usando Matlab, para lo cual tanto el denominador como el numerador deben ser ingresados como vectores, bajo la creación de

un archivo-M, en donde los parámetros conocidos, como lo muestra la tabla 1-1 de nuestro sistema son sustituidos en tal expresión matemática. El análisis de sistema en cuestión considerará a la fuerza de amortiguamiento cuyo efecto es retirar energía del sistema, la cual es disipada en forma de calor o de radiación, además es el resultado en gran parte por la resistencia que ofrece el aire y fricciones internas.

Por lo general su descripción matemática es bastante complicada y no adecuada, sin embargo nos delimitaremos nuestro estudio utilizando el modelo de amortiguamiento viscoso, tal como lo hemos representado anteriormente, el mismo que conduce a soluciones matemáticas manejables.

Las propiedades de amortiguación de los materiales están listadas en muchas maneras diferentes, que dependen de las áreas técnicas en donde se las aplica. El coeficiente de pérdida para mayoría de los materiales varían de 0,001 a la unidad, dependiendo del material y las condiciones en que se realizan las pruebas, por ello como una asunción razonable hemos dispuesto valores a las constantes de amortiguamiento que inciden en nuestro sistema dentro de los límites tolerables, tal como lo describimos a continuación.

Parámetro	Descripción	Valor
M	Masa del Carro	0.425 Kg.
m	Masa del Péndulo	0.270 Kg.
L	Longitud del Péndulo	0.33 m.
b	Constante de amortiguamiento debido al Carro	0.1 N/m/s.
B	Constante de amortiguamiento debida al Péndulo	0.05 N.m/rad/s.

**TABLA 1-1:** PARÁMETROS DEL SISTEMA FÍSICO PÉNDULO INVERTIDO

Por lo expuesto, creamos un archivo-M, copiando el siguiente texto para modelar la función de transferencia y si obtener la respuesta ante tales condiciones.

```

%...Respuesta del Sistema a Lazo Abierto ante una...
%...Señal Escalón.....
M = 0.425;
m = 0.270;
b = 0.1;
B = 0.05;
g = 9.8;
l = 0.165;           %..Longitud media del péndulo
I = m*l^2/3;        %..Inercia del péndulo
q = (M+m)*(l+m*l^2)-(m*l)^2; %..Variable utilizada
num = [m*l/q 0];
den = [1 (B*(M+m)+b*(l+m*l^2))/q (B*b-(M+m)*m*g*l)/q -b*m*g*l/q];
pend = tf(num,den) %..Función de transferencia
t = 0:0.01:5;
impulse(num,den,t) %..Gráfica
axis([0 1 0 90])

```

**TABLA 1-2:** INSTRUCCIONES DE MATLAB CON EL USO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

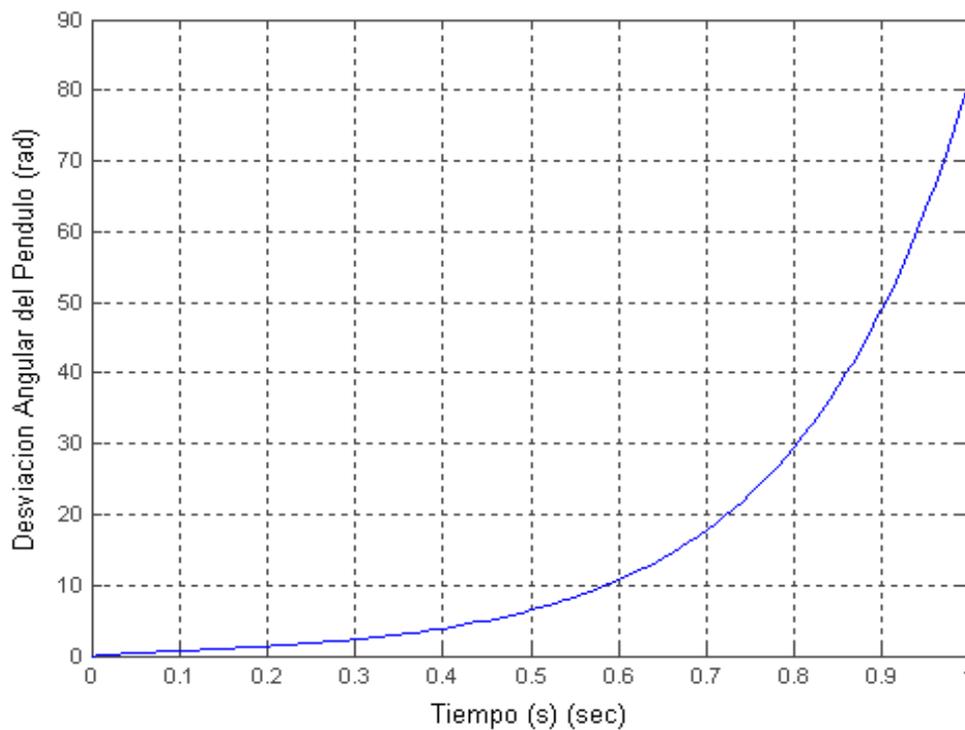
Como resultado de ejecutar tal archivo en Matlab, obtenemos como resultado la Función de Transferencia

$$9.229 s$$

---


$$s^3 + 7.402 s^2 - 61.83 s - 9.045$$

y la siguiente respuesta del sistema



**FIGURA 1-2:** COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL SISTEMA A LAZO ABIERTO ANTE UNA SEÑAL IMPULSO CON USO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.

Como podemos observar en la gráfica, la respuesta es completamente insatisfactoria, por lo que no es estable a lazo abierto además es notorio que

la amplitud de la salida sobrepasa 60 radianes, la cual viola uno de los principales principios establecidos, por lo que el modelo es solo válido para pequeños valores de  $\theta$ . En realidad el péndulo parará de rotar cuando este golpee con el carro ( $\theta=90^\circ$ ) debido a la restricción mecánica que esta impone, no obstante nos proporciona una idea de la inestabilidad existente.

### **Análisis de la Respuesta a Lazo Abierto del Sistema Péndulo Invertido mediante el Espacio de Estados usando MATLAB.**

La teoría de control moderna contrasta con la teoría de control convencional en que la primera se aplica a sistemas con entradas y salidas múltiples, que pueden ser lineales o no lineales, en tanto que al segundo sólo se aplica a sistemas lineales con una entrada y una salida e invariante con el tiempo. Sin embargo antes de continuar, debemos definir estado, variables de estado, vector de estado y espacio de estados.

**Estados.**- El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (denominada variables de estado de modo que el conocimiento de estas variables en  $t = t_0$ , junto con el conocimiento de la entrada para  $t \geq t_0$ , determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ .

**Variables de estado.-** Las variables de estado de un sistema dinámico son las que forman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico.

**Vector de estado.-** Si se necesitan  $n$  variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas  $n$  variables de estado, se consideran los  $n$  componentes de un vector  $X$ . Tal vector se denomina *vector de estado*. Por tanto un vector de estado es aquel que determina de manera única el estado del sistema  $X(t)$  para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ , una vez que se obtiene el estado en  $t = t_0$  y se especifica la entrada  $\mu(t)$  para  $t \geq t_0$ .

**Espacio de estados.-** El espacio de  $n$  dimensiones cuyos ejes coordenados están formados por el eje  $x_1$ , el eje  $x_2, \dots$ , el eje  $x_n$ , se denomina espacio de estados. Cualquier estado puede representarse mediante un punto en el espacio de estados.

**Ecuaciones en el espacio de estados.-** En el análisis en el espacio de estados, nos concentraremos en tres tipos de variables involucradas en el modelado de sistemas dinámicos: variables de entrada, variables de salida y variables de estado. La representación en el espacio de estados no es única para un sistema determinado, excepto que las variables de estado es igual para cualquiera de las diferentes representaciones en el espacio de estados del mismo sistema.

La cantidad de variables de estado necesarias para definir completamente la dinámica del sistema es igual a la cantidad de integradores que contiene el sistema. Suponga que un sistema de entradas y salidas múltiples contiene  $n$  integradores. También suponga que existen  $r$  entradas  $\mu_1(t), \mu_2(t); \dots, \mu_r(t)$  y  $m$  salidas  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ . Se define las  $n$  salidas de los integradores como variables de estado:  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . A continuación el sistema se describe mediante

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r; t) \end{aligned} \quad (1-25)$$

Las salidas  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ , del sistema se obtiene mediante

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r; t) \\ &\vdots \\ y_n(t) &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r; t) \end{aligned} \quad (1-26)$$

las ecuaciones (1-25) y (1-26) se convierten en

$$\dot{x}(t) = f(x, \mu, t) \quad (1-27)$$

$$y(t) = g(x, \mu, t) \quad (1-28)$$

en donde la ecuación (1-27) es la ecuación de estado y la ecuación (1-28) es la ecuación de la salida. Si las funciones  $\mathbf{f}$  y/o  $\mathbf{g}$  involucra explícitamente el tiempo  $t$ , el sistema se denomina sistema variante con el tiempo, caso contrario fuese invariante con el tiempo y en donde este último cae dentro nuestro estudio. Si se linealizan las ecuaciones (1-27) y (1-28) alrededor del estado de operación, tenemos las siguientes ecuaciones de estado y salida linealizadas:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mu(t) \quad (1-29)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mu(t) \quad (1-30)$$

en donde  $\mathbf{A}$  se denomina matriz de estado,  $\mathbf{B}$  matriz de entrada,  $\mathbf{C}$  matriz de salida y  $\mathbf{D}$  matriz de transición directa. El primer paso a seguir, es el de la obtención matricial de las ecuaciones del sistema péndulo invertido en el espacio de estado, para ello nos remitiremos al resultado de la sección anterior, en base a la restricción de oscilaciones pequeñas por parte del péndulo, en donde las ecuaciones que describen la dinámica del sistema se describen a continuación:

$$(\mathbf{M} + m)\ddot{\mathbf{x}} + b\dot{\mathbf{x}} - m\ell\ddot{\theta} = u$$

$$(\mathbf{I} + m\ell^2)\ddot{\theta} + B\dot{\theta} - mg\ell\theta = m\ell\ddot{\mathbf{x}}$$

Definiendo las variables de estado  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  y  $\chi_4$  mediante:

$$\chi_1 = \theta$$

$$\chi_2 = \dot{\theta}$$

$$\chi_3 = X$$

$$\chi_4 = \dot{X}$$

Considerando que el ángulo  $\theta$  indica la rotación de la barra del péndulo con respecto al punto P, y que X es la ubicación del carro. Consideramos  $\theta$  y X como salidas del sistema, o

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_3 \end{bmatrix}$$

(Observe que tanto  $\theta$  como X son cantidades que se miden fácilmente). Así a partir de la definición de las variables de estado y las ecuaciones que definen su comportamiento dinámico, obtenemos:

$$\dot{\chi}_1 = \chi_2$$

$$\dot{\chi}_2 = \frac{(M+m)m\ell}{q} g\chi_1 - \frac{B(M+m)}{q} \chi_2 - \frac{m\ell b}{q} \chi_4 + \frac{m\ell}{q} \mu$$

$$\dot{\chi}_3 = \chi_4$$

$$\dot{\chi}_4 = \frac{(m\ell)^2}{q} g\chi_1 - \frac{Bm\ell}{q} \chi_2 - \frac{b(I+m\ell^2)}{q} \chi_4 + \frac{(I+m\ell^2)}{q} \mu$$

En donde

$$q = [(M + m)(I + m\ell^2) - (m\ell)^2]$$

En términos de las ecuaciones matriciales, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}_1 \\ \dot{\chi}_2 \\ \dot{\chi}_3 \\ \dot{\chi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M + m)m\ell}{q}g & -\frac{B(M + m)}{q} & 0 & -\frac{m\ell b}{q} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(m\ell)^2}{q}g & -\frac{Bm\ell}{q} & 0 & -\frac{b(I + m\ell^2)}{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{bmatrix} \quad (1-31)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m\ell}{q} \\ 0 \\ \frac{I + m\ell^2}{q} \end{bmatrix} \mu$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mu \quad (1-32)$$

Una vez establecido las ecuaciones de estado y de salida linealizadas, realizamos las sustituciones pertinentes para determinar la matriz de estado "A", la matriz de entrada "B", matriz de salida "C" y la matriz de transmisión directa "D", haciendo uso de MATLAB en base a la correlación siguiente:

$$\dot{x} = Ax + B\mu$$

$$y = Cx + D\mu$$

Adicionalmente, con base a la misma señal de entrada, es decir a la aplicación de una fuerza impulso al carro, procederemos a la observación de la velocidad de respuesta del sistema, salvo el hecho que esta vez tendremos control de respuesta del ángulo del péndulo como de la posición del carro. Todo lo expuesto bajo la ejecución del siguiente archivo-M.

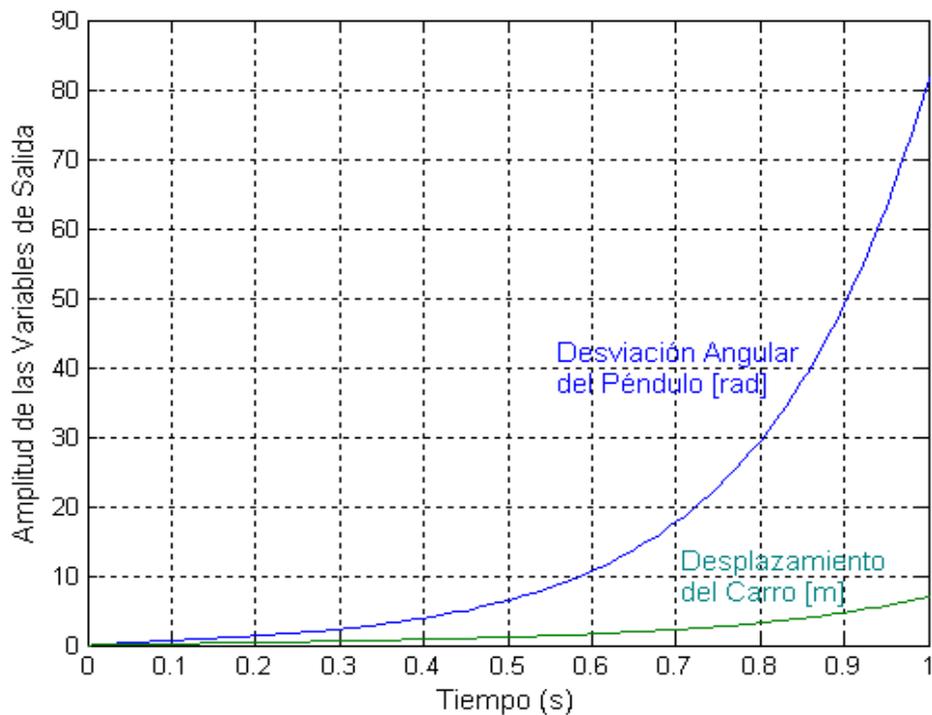
```

%...Respuesta del Sistema a Lazo Abierto ante una..
%...Impulso Unitario..
M = 0.435;
m = 0.270;
b = 0.10;
B = 0.05;
g = 9.8;
l = 0.165;                %..Longitud Media del péndulo
l = m*l^2/3;
q = (M+m)*(l+m*l^2)-(m*l)^2;
A = [0                1                0                0;
      (M+m)*m*l*g/q  -B*(M+m)/q      0                -m*l*b/q;
      0                0                0                1;
      (m*l)^2*g/q     -B*m*l/q       0                b*(l+m*l^2)/q]
B = [ 0;
      m*l/q;
      0;
      (l+m*l^2)/q]
C = [1 0 0 0; 0 0 1 0]
D = [0; 0]
pend = ss(A,B,C,D);      %...Modelo del sistema
T = 0:0.05:10;          %...Tiempo de simulación
[Y,T,X]=impz(pend,T);
plot(T,Y)                %...Simulación y grafica de respuesta
axis[0 1 0 90]

```

**TABLA 1-3:** INSTRUCCIONES EN MATLAB CON EL USO DE ESPACIO DE ESTADOS

Una vez ejecutado el archivo-M en MATLAB, obtenemos la pertinente gráfica de la velocidad de respuesta del sistema ante una fuerza impulso como entrada.



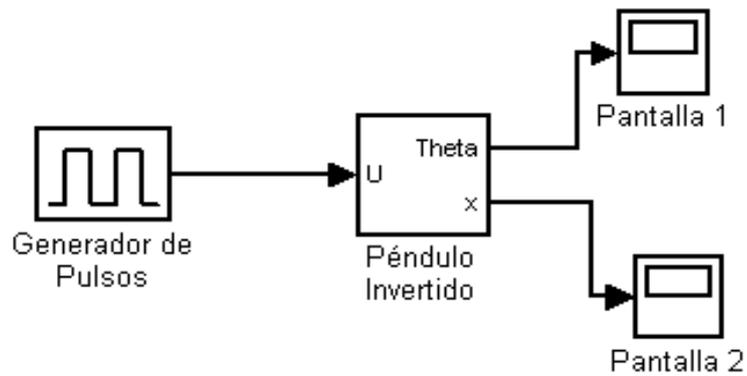
**FIGURA 1-3:** COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL SISTEMA A LAZO ABIERTO ANTE UNA SEÑAL IMPULSO EN EL ESPACIO DE ESTADOS.

Es notorio la inestabilidad intrínseca del sistema péndulo invertido, por lo cual se hace factible el análisis y diseño de un sistema de control que modifique la dinámica del mismo, dentro de los cuales incluiremos diversas metodologías para llevar a cabo lo propuesto, sin embargo antes de proceder por lo expuesto, haremos hincapié al simulación, análisis a través de Simulink.

## **Análisis de la respuesta a Lazo Abierto del Sistema Péndulo Invertido mediante Simulink.**

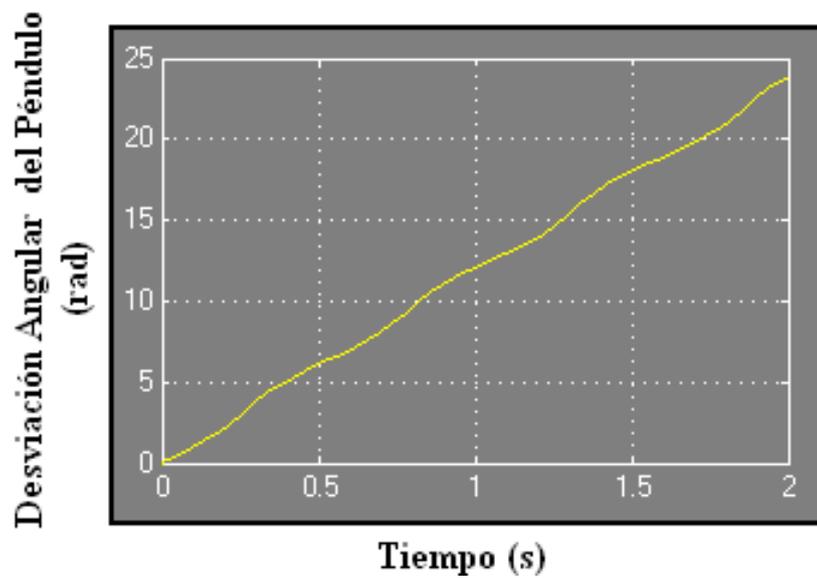
Para generar una respuesta a lazo abierto del sistema Péndulo Invertido, es necesario contener a el modelo antes descrito en un bloque del subsistema, en la cual la perturbaremos con una función impulso, y su respuesta se visualizará es los **pantallas** concernientes.

A continuación presentaremos la configuración del bloque del subsistema, resultante con sus respectivas entradas y salidas utilizadas, no sin antes mencionar que un impulso no puede ser simulada exactamente en Simulink, en lugar de ello usaremos un generador de pulsos de onda cuadrada para producir pulsos finitos pero grandes en una lapso de tiempo finito en intervalos pequeños, que se aproxima a la definición de una función impulso, la cual se cataloga como una señal infinita para un tiempo infinitesimal, cuya integral es igual a 1. Por lo mencionado, modificando para una amplitud de 1000 a la onda cuadrada por un ancho de pulso de 0.001, logramos así aproximar el efecto de un impulso unitario. Obteniendo lo siguiente:

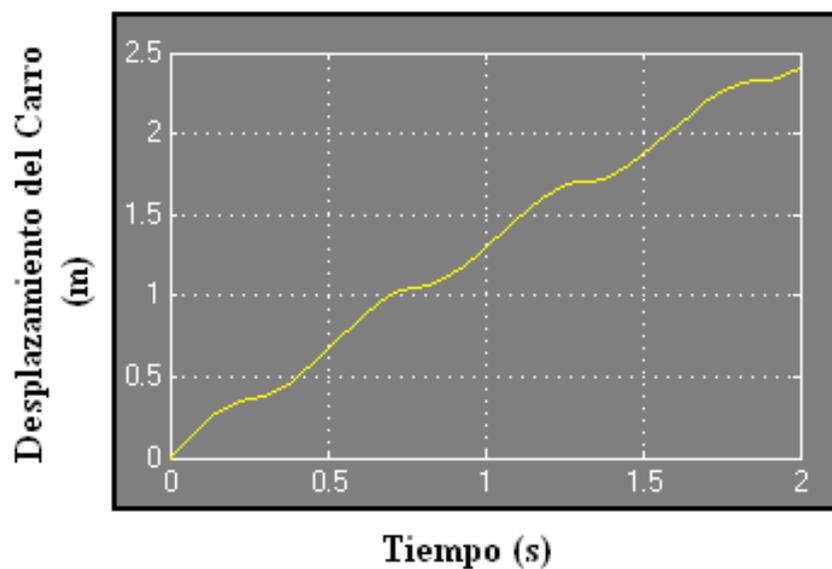


**FIGURA 1-4:** SUBSISTEMA DEL MODELADO DEL SISTEMA PÉNDULO INVERTIDO EN SIMULINK.

Antes de empezar la simulación, debemos proceder a ingresar los parámetros conocidos del sistema en análisis, el cual es ingresado previamente, recalando como solo estamos interesados en el primer impulso y así obtener las respuestas ante las condiciones impuestas, como lo detallamos a continuación:



**FIGURA 1-5:** RESPUESTA DE LA DESVIACIÓN ANGULAR DEL PÉNDULO ANTE UNA SEÑAL IMPULSO COMO DISTURBIO EN SIMULINK.



**FIGURA 1-6:** RESPUESTA DEL DESPLAZAMIENTO DEL CARRO ANTE UNA SEÑAL IMPULSO COMO DISTURBIO EN SIMULINK.

He aquí nuestro punto de partida para la evaluación y comprobación de las diversas metodologías de control a usarse en este. Nótese que el comportamiento es distinto a la expuesto en MATLAB, esto se debe a que Simulink permite la simulación de sistemas no lineales como lo es realmente nuestro caso (con respecto a  $\theta$ ), sin embargo la conclusión es la misma debido a la inestabilidad inherente de nuestro sistema a lazo abierto, por lo que se hace necesario el análisis y diseño de control proyecto.

#### **1.4. Estrategias de Control.**

Nosotros deseamos reducir el efecto no deseado de entrada, conocido como **disturbio**, que tiene su efecto sobre la señal de salida, para ello un sistema de control a lazo abierto no es satisfactorio, ya que su condición de operación es fija, independientemente de la presencia o no de la perturbación externa, de ahí el hecho de recurrir a un Sistema de Control de Lazo Cerrado o Realimentado.

Un **Sistema a Lazo Cerrado** usa la medida de la señal de salida y produce a la comparación con la señal deseada para generar una señal de error que es aplicada al actuador por medio de una ley de control a definir. Su aplicación a mas de la ventaja presentada denotaremos sus característica que lo hacen conveniente en nuestra aplicación.

### **Control de la Respuesta Transitoria para el Sistema de Control.**

Una de las más importantes características de los Sistemas de Control es su respuesta transitoria. La **respuesta transitoria** es la respuesta de un Sistema a una función de tiempo. Debido a que el propósito del Sistema de Control es proporcionar una respuesta deseada, la respuesta transitoria del Sistema de Control a menudo debe ser ajustado hasta ser satisfactorio. Si un sistema de control a lazo abierto no suministra una respuesta satisfactoria, entonces el proceso debe ser reemplazado por un proceso conveniente. Por lo contrario, un sistema a lazo cerrado puede a menudo ser ajustado para rendir la respuesta deseada ajustando los parámetros del lazo de realimentación.

### **Señales de Disturbio en un Sistema de Control Realimentado.**

Un factor adicional considerado importante en los efectos de realimentación en un sistema de control, es el control y la eliminación parcial de los efectos de las señales de disturbio.

Una **señal de disturbio** es una señal de entrada indeseada que afecta las señales de salida del sistema. Muchos sistemas de control son sujetos a señales de disturbios extraños que cause que el sistema proporcione una salida inexacta.

Los amplificadores electrónicos tiene ruido inherente generado entre los circuitos integrados o transistores, provocando con ello señales no deseadas debido a los elementos no lineales. Los sistemas realimentados tiene una aspecto benéfico ante los efectos de distorsión, ruido y perturbaciones no deseadas las cuales pueden ser efectivamente reducidas.

### **Error en Estado Estable.**

Un sistema de control realimentado es valioso debido a que proporciona al ingeniero la habilidad de ajustar la respuesta transitoria. Además, de antemano podemos aseverar que la sensibilidad del sistema y los efectos de las perturbaciones pueden ser reducido significativamente. No obstante, como un requisito mas distante, uno debe examinar y comparar el error de estado estable final. El **error en estado estable** es el error después que la respuesta transitorio ha decaído, partiendo únicamente en una respuesta continua. Este dependerá básicamente del tipo de sistema a tratar.

### **El Costo de la Realimentación.**

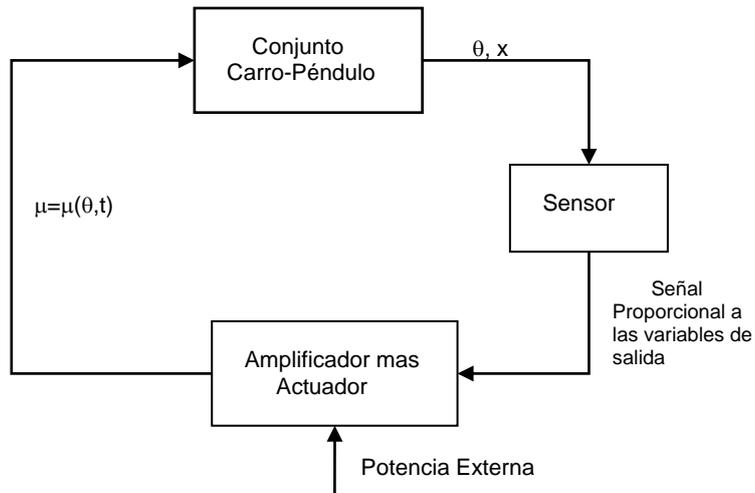
La adición de la realimentación para un sistema de control resulta una serie de ventajas como la hemos descrito. Naturalmente, sin embargo, estas ventajas tienen un costo complementario. El costo de la realimentación es primero manifestado en el incremento del número de **componentes** y **complejidad** del sistema. Agregar la realimentación, es necesario considerar varios componentes de realimentación, de la cual el componente de medición (sensor) es uno de los más importantes. El sensor es a menudo el componente más caro en un sistema de control. Además el sensor introduce ruido e inexactitudes al sistema.

El segundo costo de la realimentación es la **pérdida de ganancia**, cuya factor es exactamente el que reduce la sensibilidad del sistema a variaciones paramétricas y perturbaciones. Nosotros debemos percibir que es la ganancia salida-entrada que es reducida. El sistema de control retiene la ganancia sustancial de energía de fuerza del amplificador y actuador, en la cual es totalmente usada en el sistema de control a lazo cerrado.

Finalmente un costo de realimentación es la incorporación de la posibilidad de **inestabilidad**. La pregunta de estabilidad de un sistema a lazo cerrado será referida más adelante donde podrá ser tratada más en detalle.

La adición de la realimentación para el sistema dinámico resulta en varios problemas adicionales para el diseñador. Sin embargo, para la mayoría de los casos, las ventajas pesan más que las desventajas en el uso de un sistema realimentado. Por consiguiente es necesario considerar la complejidad adicional y el problema de inestabilidad cuando diseñamos un sistema de control.

La estrategia de control a seleccionar debe cumplir con el objeto de mantener el péndulo “lo más cerca de la posición vertical”; la misma que debe ser relativamente fácil de implementar en la práctica; y su efecto sobre el comportamiento del sistema se debe poder predecir con facilidad. Al inclinarse por una configuración de lazo cerrado; la(s) variable(s) de entrada a medir para su realimentación deben realizarse, por medio de sensores analógicos apropiados, según sea la metodología de control a seguir. Esta información será transmitida hacia el actuador mediante una ley de control a establecer que a la vez será el encargado de producir la fuerza de control  $\mu(\theta,t)$  que nos conllevará a los planteamientos propuestos.



**FIGURA 1.7: SISTEMA RETROALIMENTADO**

Existen muchas soluciones posibles, de la cual analizaremos en el presente proyecto los siguientes:

- a. Método del Lugar Geométrico de las Raíces.
- b. Ubicación de Polos.
- c. Regulador Cuadrático Lineal.

## **CAPITULO 2**

### **2. METODO DEL LUGAR GEÓMETRICO DE LAS RAÍCES PARA EL ANALISIS EN EL DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL.**

El desempeño de un sistema Realimentado puede ser descrito en términos de la localización de las raíces de la ecuación característica en el plano-s, conociendo de antemano que la respuesta del sistema puede ser ajustado a lograr el desempeño deseado de uno o mas parámetros del sistema. El método del lugar geométrico de las raíces, consiste en la gráfica de las raíces de esta ecuación característica para todos los valores de un parámetro del sistema, en la que por lo general el parámetro es la ganancia, aunque es posible usar cualquier otra variable de la función de transferencia en lazo abierto.

Mediante el método del lugar geométrico de las raíces, el diseñador puede predecir los efectos que tiene en la ubicación de los polos en lazo cerrado, variar el valor de la ganancia o agregar polos y/o ceros en lazo abierto. Dicha gráfica muestra claramente cómo contribuye cada polo o cero en lazo abierto a las posiciones de los polos en lazo cerrado, además el lugar geométrico de las raíces es una gráfica de los puntos del plano complejo que sólo satisfacen la condición de ángulo. Las raíces de la ecuación característica (los polos en lazo cerrado) que corresponden a un valor específico de la ganancia se determinan a partir de la condición de magnitud.

Al diseñar un sistema de control lineal, encontramos que el método del lugar geométrico de las raíces resulta muy útil, dado que indica la forma en la que deben modificarse los polos y los ceros en lazo abierto para que la respuesta cumpla las especificaciones de desempeño del sistema. Este método es particularmente conveniente para obtener resultados aproximados con mucha rapidez.

## 2.1 Determinación de la Función de Transferencia del Controlador.

A continuación el problema de diseño se centra en la selección de un valor de ganancia adecuada, y si el ajuste de la ganancia no produce por si solo un resultado conveniente, será necesario agregar al sistema un compensador, pero no sin antes resaltar, la función de transferencia y requerimientos de desempeño al igual del diagrama de bloques pertinentes a nuestro sistema.

La función de transferencia del sistema en análisis es:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{\frac{m\ell}{q}S}{S^3 + \left[ \frac{B(M+m) + b(I + m\ell^2)}{q} \right] S^2 + \left[ \frac{Bb - (M+m)mg\ell}{q} \right] S - \frac{bmgl}{q}}$$

donde.

$$q = \left[ (M+m)(I + m\ell^2) - (m\ell)^2 \right]$$

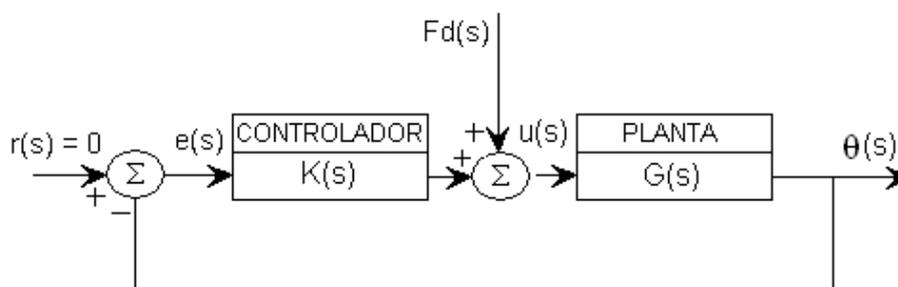
El sistema de control a diseñar se diseña para realizar una tarea específica, por lo cual los requerimientos impuestos sobre el mismo se detallaran como especificaciones de desempeño que por lo general se refieren a la precisión, estabilidad relativa y velocidad de respuesta, dichas especificaciones de desempeño la presentaremos en términos de valores numéricos, tales como

- Tiempo de estabilización de alrededor de 2 segundos con una tolerancia permisible del 2% en el error de estado estable.
- El péndulo no debe moverse mas de 0.05 radianes lejos de la posición vertical.

Todo esto sobre la base de una perturbación externa sobre el carro, en forma de una señal de Impulso, por ser de características mas recurrentes a nuestro sistema..

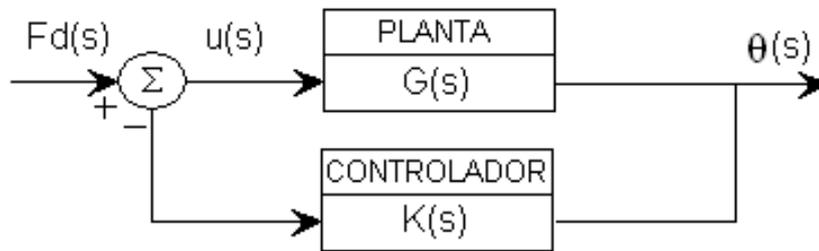
### Diagrama de Bloques del Sistema Péndulo Invertido.

El control de este problema es un poco diferente que los problemas de control estándar que uno puede estar acostumbrado a resolver. Desde que nosotros estamos intentando controlar la desviación angular del péndulo en donde esta debe retornar a la posición vertical dado una perturbación ( $F_d$ ), la referencia que nosotros debemos fijar es el cero, en lo referente a la posición angular, por lo que el diseño es de tipo regulador. Además, puede agregarse la fuerza aplicada al carro como una perturbación de un agente externo mas la fuerza de control. El desarrollo esquemático se semejante a lo siguiente:



**FIGURA 2-1:** DIAGRAMA DE BLOQUES DEL SISTEMA PÉNDULO INVERTIDO

Será más fácil determinar la función de transferencia apropiada para ingresar a MATLAB si nosotros primero reordenamos el esquema de la forma siguiente:



**FIGURA 2-2:** DIAGRAMA DE BLOQUES SIMPLIFICADO DEL SISTEMA PÉNDULO INVERTIDO

Ahora, partiendo de lo expuesto podemos fácilmente determinar la Función de Transferencia de lazo cerrado.

$$\theta(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} F_d(s)$$

**Análisis mediante el Método del Lugar Geométrico de las Raíces con el uso de Matlab.**

Una aproximación para el trazo de la trayectoria del lugar geométrico de las raíces puede ser obtenido aplicando Matlab para obtener una gráfica exacta.

Sin embargo no se debe incitar a confiar solamente en el software mientras olvidamos los pasos manuales en el desarrollo de la graficación manual. Los conceptos fundamentales detrás del método de LGR son integrados en los

pasos manuales y es esencial para comprender completamente su aplicación.

Las funciones **rlocus** y **rlocfind** son usadas para obtener la gráfica del LGR y el valor del parámetro usado respectivamente, ya sea con el uso de las ecuaciones en el espacio de estados o por la función de transferencia. No obstante, por simplicidad el uso de la función de transferencia es llevada a cabo, donde el primer paso es la obtención de la ecuación característica para luego incurrir a la generación de la gráfica concerniente y así observar la trayectoria para el análisis inicial sin la inclusión de algún compensador, únicamente la consideración de una ganancia proporcional, ya que el establecimiento de la ganancia es el primer paso encaminado a ajustar el sistema para un desempeño satisfactorio.

Si fuese el caso en que el solo ajuste de la ganancia no proporciona una alteración suficiente del sistema para cumplir las especificaciones dadas, es necesario la adición de un dispositivo denominado compensador, que tiene como finalidad la modificación de la dinámica del sistema, realizada para satisfacer las especificaciones determinadas.

## Especificaciones de Desempeño

Con frecuencia, las características de desempeño de un sistema de control se especifica en términos de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitaria, dado que esta es fácil de generar y es suficientemente drástica, además si se conoce la respuesta a una entrada escalón, es matemáticamente posible calcular la respuesta para cualquier entrada.

Acorde a nuestros criterios de diseño antes mencionada, en que el tiempo de asentamiento debe ser alrededor de los dos segundos, bajo una banda de tolerancia del 2% (criterio que toman las oscilaciones en desaparecer dentro del 2%), se tiene que:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma} \quad (\text{criterio del 2\%}) \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{4}{t_s} = \frac{4}{2} = 2$$

y adicionalmente el sobrepaso máximo, no debe de exceder los 0.05 radianes, es decir:

$$0.05 = e^{-\left(\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi} \quad \square \quad \zeta \cong 0.7$$

Por lo último expuesto podemos afirmar que nuestra solución radica en una respuesta subamortiguada, donde cualquier valor que se le asigne a la ganancia, las partes reales de los polos complejos son siempre iguales para conservar el tiempo de asentamiento a un único valor. Sin embargo vale aclarar que el tiempo de asentamiento y sobre paso máximo descritos corresponde a un **sistema de segundo orden** el cual contradice las expectativas realizadas para con nuestro sistema, ya que el mismo es de **tercer orden**, para ello nos plantearemos la interrogante de que tan válidas son las suposiciones de segundo orden para nuestro sistema al determinar los parámetros que cumplen las especificaciones planteadas de nuestro sistema de control, el mismo que tendrá lugar al final. Con el objeto de centrarnos en el hecho de que los polos complejos dominantes deben sentarse en base a un valor fijo parte de la componente real, procedemos a la adición de una función extra, **sigrid**, que cumpla con tal condición.

A continuación solventándonos en la ejecución del lugar geométrico de las raíces con ayuda de MATLAB escribimos el siguiente texto que incluye de alguna manera los requisitos a la que estamos encaminados para llevar a cabo el cumplimiento de las especificaciones de desempeño planteadas.

```

%..Control Convencional..
%...Método del LGR...
M = 0.435;
m = 0.270;
b = 0.10;
B = 0.05;
g = 9.8;
l = 0.165;
l = m*l^2/3;
q = (M+m)*(l+m*l^2)-(m*l)^2;      %..Variable utilizada
num = [m*l/q 0];
den = [1 (B*(M+m)+b*(l+m*l^2))/q (B*b-(M+m)*m*g*l)/q -b*m*g*l/q];
roots(num)      %..Ceros de la FT Directa
roots(den)      %..Polos de la FT Directa
pend = tf(num,den)
rlocus(pend)
sigrid(2)

```

**TABLA 2-1:** INSTRUCCIONES EN MATLAB PARA EL TRAZO DEL LGR.

La ejecución de este archivo-M, proporciona el siguiente resultado:

**Cero =**

0

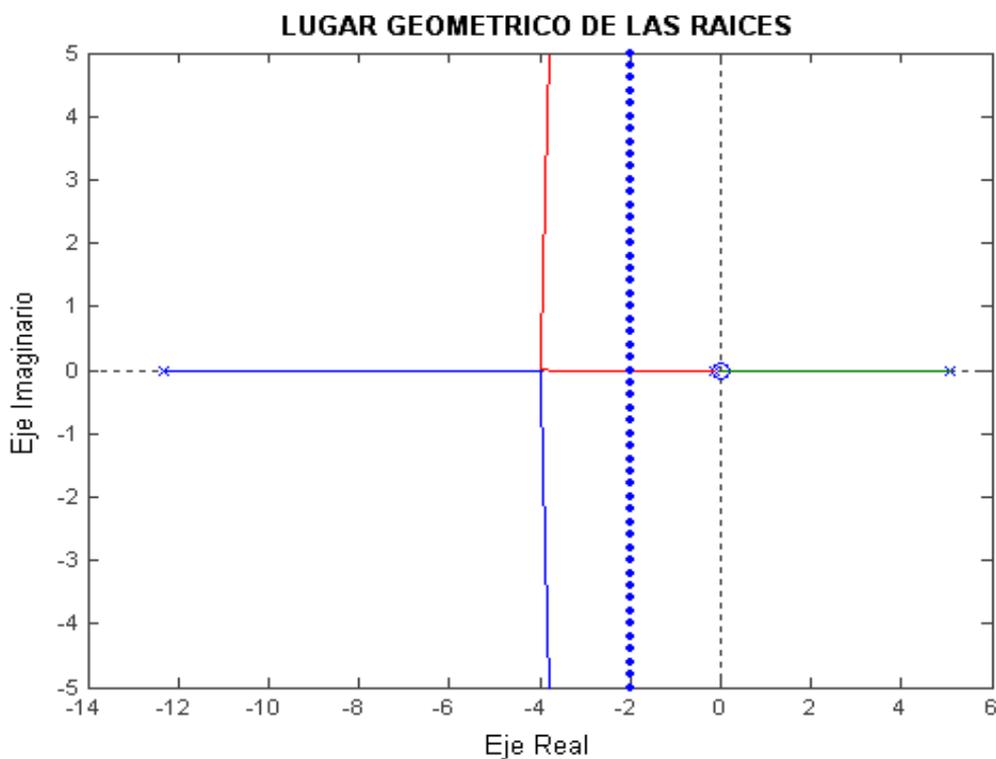
**Polos =**

-12.2973

5.0828

-0.1418

en adjunto a la siguiente gráfica



**FIGURA 2-3:** TRAZO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES USANDO MATLAB.

Como podemos darnos cuenta, una de las raíces (polos) de la función de transferencia a lazo abierto se ubica en el semiplano derecho, eso implica que el sistema será inestable, para ello solo basta observar la gráfica para denotar el por qué, ya que existe un lugar geométrico comprendido entre el origen y el polo en el semiplano derecho, como resultado, **sin importar que gananciaelijamos nosotros siempre tendremos un polo en la mencionada región provocando inestabilidad al sistema**, por ende la inclusión de un compensador es de vital importancia.

Para evitar el uso de prueba y error en la determinación de la función de transferencia del compensador, es necesario cimentarnos en el análisis matemático para lograr descifrar las condiciones de estabilidad que cumplan con nuestras medidas de desempeño impuestas al sistema de control. Ahora procederemos a detallar el análisis en la sección venidera.

### **Ley de Control Proporcional.**

Remitiéndonos al diagrama de bloques, podemos percibir fácilmente la expresión en función del tiempo de la fuerza de control que comandará el actuador, considerando la posible presencia de una perturbación dada por algún agente externo y la proporcionalidad a la señal de error que tomará el controlador para esta posible solución, es decir:

$$\mu(t) = k_p e(t) + f_d(t)$$

Donde  $e(t) = 0 - \theta(t)$ ; y reordenando tenemos entonces que:

$$\mu = f_d - k_p \theta \tag{2-1}$$

y a este último resultado, lo sustituimos en las ecuaciones linealizadas del modelo de nuestro sistema, en la cual para fines prácticos se ha omitido las constantes de amortiguación, entonces se obtiene:

$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta} - m\ell\ddot{x} - mg\ell\theta = 0 \quad (2-2)$$

$$(M + m)\ddot{x} - m\ell\ddot{\theta} + k_p\theta = f_d \quad (2-3)$$

Eliminando el diferencial de segundo orden de  $x$ , con el consecuente conocimiento de la función perturbadora es un impulso unitario debido a las restricciones de desempeño impuestas por lo que se obtiene la siguiente ecuación diferencial para  $\theta$  :

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{k_p - (M + m)g}{q} \right) m\ell\theta = \left( \frac{m\ell}{q} \right) \delta(t) \quad (2-4)$$

Donde:

$$q = [(M + m)(I + m\ell^2) - (m\ell)^2]$$

Como resultado, obtuvimos una ecuación diferencial lineal de segundo grado con coeficientes constantes y no homogénea, por lo que su resolución radicaría en la superposición de la solución homogénea mas la particular, es decir:

$$\theta(t) = \theta_{\text{hom og}}(t) + \theta_{\text{part}}(t) \quad (2-5)$$

Para definir las ecuaciones mas compactas, definamos:

$$\omega_o^2 \equiv \left( \frac{k_p - (M + m)g}{q} \right) m\ell \quad ; \quad \frac{\omega_o^2}{k} = \left( \frac{m\ell}{q} \right)$$

$$a \equiv \frac{I + m\ell^2}{m\ell}$$

Entonces, obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_o^2 \theta(t) = \frac{\omega_o^2}{k} \partial(t) \quad (2-6)$$

$$\ddot{x}(t) = a\ddot{\theta}(t) - g\theta(t) \quad (2-8)$$

Notar que la primera igualdad no contiene el término  $x$  explícitamente, por lo tanto  $\theta$  es independiente de  $x$ , o sea que el movimiento angular  $\theta$  es independiente del movimiento traslacional  $x$ . Lo contrario, no es verdad, es decir  $x$  si depende de  $\theta$ .

Asumiendo condiciones iniciales:

$$x(0) = \dot{x}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$$

$$\theta(0) = \theta_o$$

Ahora nos resta determinar la solución particular, para lo cual haremos uso de la transformada de Laplace por la sencillez que este representa:

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_o^2 \theta(t) = \frac{\omega_o^2}{k} \mathcal{L}(t)$$

$$s^2 \theta(s) - s\theta_o + \omega_o^2 \theta(s) = \frac{\omega_o^2}{k}$$

$$\theta(s) = \frac{\omega_o}{k} \left( \frac{\omega_o}{s^2 + \omega_o^2} \right) + \theta_o \left( \frac{s}{s^2 + \omega_o^2} \right)$$

Ejecutando la inversa de la transformada de Laplace obtenemos finalmente la solución que describe el comportamiento dinámico de la desviación angular omitiendo las amortiguaciones presentes en base al uso de un controlador proporcional.

$$\theta(t) = \frac{\omega_o}{k} \text{Sen} \omega_o t + \theta_o \cos \omega_o t \quad (2-11)$$

Remitiéndonos a la ecuación (2-8), y substituyendo el último resultado, llegamos a obtener la solución que describe el comportamiento dinámico que posee el carro bajo las condiciones iniciales antes descritas:

$$x(t) = \left( \frac{a\omega_o^2 + g}{k\omega_o} \right) \text{Sen}\omega_o t + \theta_o \left( \frac{a\omega_o^2 + g}{\omega_o^2} \right) \text{Cos}\omega_o t \quad (2-12)$$

Por lo que podemos concluir que; tanto  $\theta$  como  $x$  tienen soluciones periódicas si la frecuencia angular es real, es decir:

$$k_p > (M + m)g$$

Denominando al valor límite  $(M+m).g$  de  $k_p$ , como la ganancia crítica  $k_{cr}$ :

$$k_{cr} = (M + m)g$$

entonces, podemos distinguir tres casos:

**CASO 1:**  $k_p > k_{cr}$ , ganancia supercrítica, donde:

$$\theta(t) = \frac{\omega_o}{k} \text{Sen}\omega_o t + \theta_o \text{cos}\omega_o t$$

$$x(t) = \left( \frac{a\omega_o^2 + g}{k\omega_o} \right) \text{Sen}\omega_o t + \theta_o \left( \frac{a\omega_o^2 + g}{\omega_o^2} \right) \text{Cos}\omega_o t$$

**CASO 2:**  $k_p = k_{cr}$ , ganancia crítica (se obtiene de la solución anterior donde la frecuencia natural tiende a cero), es decir:

$$\theta(t) = \theta_o$$

$$x(t) = \theta_o \frac{gt^2}{2}$$

**CASO 3:**  $k_p < k_{cr}$ , ganancia subcrítica, donde

$$\theta(t) = \frac{|\omega_o|}{k} \text{Senh}|\omega_o|t + \theta_o \text{cosh}|\omega_o|t$$

$$x(t) = \left( \frac{a\omega_o^2 - g}{k|\omega_o|} \right) \text{Senh}|\omega_o|t + \theta_o \left( \frac{a\omega_o^2 - g}{\omega_o^2} \right) \text{Cosh}|\omega_o|t$$

Esto último nos permite afirmar, que sin importar que valor a la ganancia proporcional ( $k_p$ ) le asignemos, la inestabilidad es inevitable si solo nos limitamos al uso de un controlador proporcional, tal como fue corroborado también al hacer uso del análisis en el lugar geométrico de las raíces.

Si la ganancia proporcional toma valores pequeños, el péndulo cae súbitamente, ya que la fuerza de control aplicada por el actuador es

relativamente pequeña, y como consecuencia una inestabilidad inherente en este caso. Para ganancias mayores a la crítica, el péndulo oscila armónicamente alrededor de la posición vertical con una amplitud constante. El péndulo no cae hasta cierto punto, pero tampoco se mantiene vertical, mientras que el carro también posee oscilaciones horizontales, cuya amplitud paulatinamente se hace mayor.

Para mejorar la estabilidad relativa del sistema, una posible opción es la adición de un cero a la función de transferencia directa (control PD), ya que la misma aleja hacia la izquierda el lugar geométrico del plano complejo  $s$ , sin embargo su eficacia o no, para mejorar la estabilidad, lo comprobaremos en la siguiente sección.

### **Ley de Control Proporcional - Derivativo.**

La acción derivativa provoca que el actuador tome acción antes de que la desviación angular ocurra, por lo que esta solución va a generar un mejor control sobre este parámetro, teniendo entonces un fuerza de control  $\mu(t)$ :

$$\mu = f_d - (k_p \theta + k_d \dot{\theta}) \quad (2-13)$$

Para implementar esta estrategia de control, se requiere un sensor que mida la desviación angular  $\theta$  (puede ser un potenciómetro), y otro que mida la razón de cambio con respecto al tiempo de la desviación angular  $d\theta/dt$  (tacómetro).

Esto último provoca que las ecuaciones de movimiento se conviertan en:

$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta} - m\ell\ddot{x} - mg\ell\theta = 0$$

$$(M + m)\ddot{x} - m\ell\ddot{\theta} + k_p\theta + k_d\dot{\theta} = f_d$$

Eliminando el diferencial de segundo orden de  $x$ , al igual de la consideración de un impulso unitario como la perturbación externa presente, obtenemos que:

$$\ddot{\theta}(t) + \left(\frac{m\ell k_d}{q}\right)\dot{\theta}(t) + \left(\frac{k_p - (M + m)g}{q}\right)m\ell\theta(t) = \left(\frac{m\ell}{q}\right)\delta(t)$$

Donde:

$$q = [(M + m)(I + m\ell^2) - (m\ell)^2]$$

a la vez, relacionando con la ecuación general diferencial de segundo orden, resulta:

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_o\dot{\theta} + \omega_o^2\theta = \frac{\omega_o^2}{K}\delta(t) \quad (2-14)$$

donde:

$$2\zeta\omega_o = \frac{m\ell k_d}{q}$$

Realizando la transformada de Laplace respectiva, podemos aseverar que:

$$s^2\theta(s) - s\theta_o + 2\zeta\omega_o s\theta(s) - 2\zeta\omega_o\theta_o + \omega_o^2\theta(s) = \frac{\omega_o^2}{k}$$

$$\theta(s) = \frac{s\theta_o + 2\zeta\omega_o\theta_o + \omega_o^2/k}{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2}$$

Ahora procediendo a tomar la inversa de la transformada de Laplace, obtenemos la ecuación que describe la desviación angular del péndulo en base al control PD con un impulso unitario como disturbio externo, e decir:

$$\theta(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_o t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [(2\zeta\theta_o + \omega_o/k)\text{Sen}\omega_a t - \theta_o\text{Sen}(\omega_a t - \phi)]$$

Donde:

$$\omega_a = \omega_o \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)$$

Tomando el mismo criterio de resolución en base a las mismas condiciones iniciales, que la ecuación diferencial anterior, la solución para la descripción del comportamiento dinámico por parte del péndulo, es distinguida bajo la consideración de siguientes casos, tal como lo detallamos a continuación:

**CASO:**  $\zeta < 1$ ; amortiguamiento subcrítico, donde:

$$\theta(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_o t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left[ (2\zeta\theta_o + \omega_o/k) \text{Sen}\omega_a t - \theta_o \text{Sen}(\omega_a t - \phi) \right]$$

Donde:

$$\omega_a = \omega_o \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)$$

**CASO 2:**  $\zeta > 1$ : amortiguamiento supercrítico

$$\theta(t) = \frac{\theta_0}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_0 t} - \left( \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_0 t} \right] + \frac{1}{2k\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_0 t} - e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_0 t} \right]$$

Podemos resaltar algunos puntos relevantes de acuerdo a los resultados obtenidos. Haciendo la comparación pertinente con el control proporcional, observamos que el control PD es en cierto grado superior, ya que su implementación produce una oscilación armónica decreciente hasta llegar a un valor diferente de cero (toma el valor de la solución particular), por lo que podemos concluir que **este tipo de implementación (control PD) generaría una condición de estabilidad**, bajo la premisa de omisión de los factores de amortiguación, no obstante si este aspecto es significativo un control PD no es lo suficiente por lo que se aleja de tomarla como una posible alternativa de solución, tal cual como lo denotaremos a continuación mediante un enfoque ilustrativo. Vale recalcar un aspecto sumamente importante en la cual **“si no se tomaría en consideración los efectos de amortiguamiento,**

**esta solución sería prácticamente factible con la consecuente error en estado estable dentro de los límites permisibles, no obstante nosotros trataremos de realizar un diseño más realista”.**

Esta última consideración puede fácilmente ser corroborada por el término independiente de la expresión del denominador de la función de transferencia, en donde es una cantidad negativa en función únicamente del coeficiente de amortiguamiento debido al carro. A continuación para asentar lo mencionada nos basaremos en el uso del siguiente archivo\_M, en donde se considerará los valores apropiados acorde a nuestro último análisis referente a la ganancia proporcional y la ganancia derivativa y observaremos tanto las funciones de transferencia como sus respuestas ante una señal entrada escalón, respectivamente y así establecer sus diferencias;

```

%...Lugar Geomertico de las Raices..
%....Ley de Control PD...
M = 0.435;
m = 0.270;
b = 0.0;                               %..Sin considerar amortiguación
B = 0.0;
g = 9.8;
l = 0.165;
I = m*l^2/3;                            %..Inercia del péndulo
q = (M+m)*(l+m*l^2)-(m*l)^2;           %..variable utilizada
num = [m*l/q 0];
den = [1 (B*(M+m)+b*(l+m*l^2))/q (B*b-(M+m)*m*g*l)/q -b*m*g*l/q];
pend = tf(num,den)                       %..función de transferencia del sistema
Kp = 100;                                 %..Ganancia proporcional
Kd = 20;                                  %..Ganancia Derivativa
contr=tf([Kd Kp],1);
sys_cl=feedback(pend,contr)
impulse(sys_cl)                           %..entrada impulso unitario, grafica

```

**TABLA 2-2:** INSTRUCCIONES EN MATLAB PARA OBTENER LA RESPUESTA DEL SISTEMA ANTE UNA SEÑAL ESCALÓN COMO DISTURBIO OMITIENDO LOS EFECTOS DE AMORTIGUACIÓN

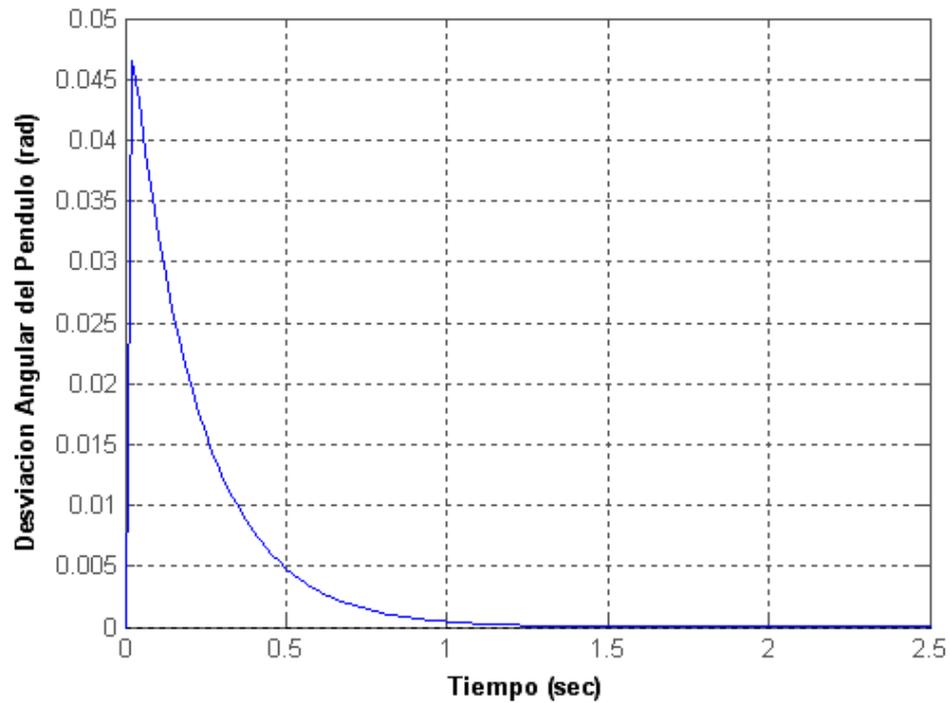
La aplicación de las instrucciones últimas genera:

Función de Transferencia:

**9.046 s**

-----  
**s<sup>3</sup> + 180.9 s<sup>2</sup> + 842.1 s**

Adjunto a la siguiente gráfica



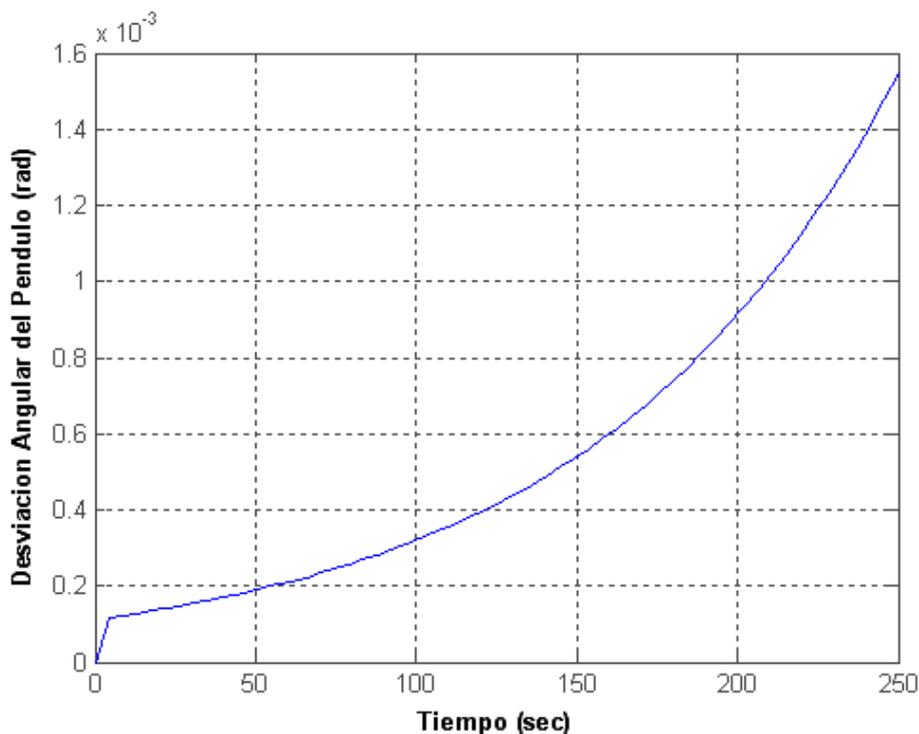
**FIGURA 2-4:** RESPUESTA DEL SISTEMA ANTE UNA SEÑAL IMPULSO COMO DISTURBIO OMITIENDO LOS EFECTOS DE AMORTIGUAMIENTO.

La velocidad de respuesta del sistema, fue predecida con anterioridad mediante el análisis matemático correspondiente, sin embargo esta condición de estabilidad empeora al considerar los efectos de amortiguación por parte del sistema, para ello haremos uso de idéntica manera del mismo archivo\_M, en donde únicamente se les asignando valores a los parámetros antes mencionados ( $b = 0.1$  y  $B = 0.05$ ), obteniendo los siguientes resultados:

## Función de Transferencia

$$9.046 s$$

$$s^3 + 188.3 s^2 + 843.1 s - 8.865$$



**FIGURA 2-5:** RESPUESTA DEL SISTEMA ANTE UNA SEÑAL IMPULSO COMO DISTURBIO CONSIDERANDO LOS EFECTOS DE AMORTIGUAMIENTO.

El comportamiento claramente difiere del precedente, la misma que es significativa desde el punto de vista funcional, ya que esta última posee una inestabilidad completa, de ahí el hecho de que no pueda considerarse como posible solución un controlador PD desde un punto de vista más realista. Tal aseveración puede evidenciarse aplicando el criterio de Routh, donde

observamos que unos de los términos de polinomio del denominador de la función de transferencia es negativo, y por ende su inestabilidad intrínseca.

Una solución para una posible mejora en la estabilidad relativa del sistema, será el agregar un control integral, por lo que el controlador resultante sería un PID. Tal análisis lo detallamos a continuación.

### **Ley de Control PID**

Por lo general, nuestro objetivo es diseñar una respuesta que tenga un sobrepaso en porcentaje deseable y un tiempo de asentamiento corto, por lo que, para obtener una mejoría en el error en estado estable y la respuesta transitoria *independientemente*, es cimentarnos al hecho de que la para la primera condición es necesario la adición de una integración y para la restante la diferenciación. El error en estado estable puede mejorar mesurablemente sin perjudicar el desempeño de los requerimientos de respuesta transitoria a partir del uso de un compensador en atraso, donde el polo se aproxime al origen (controlador PI) mientras que un compensador en adelanto o diferenciador mejoraría la respuesta transitoria.

En este proyecto primero diseñamos para la respuesta transitoria y luego para el error en estado estable, cuya mejoría simultanea es relativa. La diferenciación básicamente acelera la respuesta e incrementa la estabilidad

del sistema con la adición de un cero, y la integración (incremento de un polo) mejora la precisión en estado estable del sistema, pero reduce la velocidad de la respuesta.

Si se desea mejorar tanto la respuesta transitoria como la respuesta en estado estable, debe usarse en forma simultánea un compensador integral ideal (controlador PI) y un compensador diferencial (controlador PD) resultando un controlador PID, que combina tales ventajas, por lo que su diseño se limita a establecer las constantes de proporcionalidad, derivativa e integral.

Remitiéndonos a la ecuación característica de la función de transferencia a la lazo cerrado, donde previamente se substituyo los valores respectivos. obtenemos que:

$$1 + \frac{9.046 \cdot K \cdot S}{(S + 12.2973)(S + 0.1418)(S - 5.0828)} = 0$$

donde K es el parámetro de ajuste o ganancia.

Al desear establecer el diseño para un controlador PID, debemos localizar los polos dominantes a partir del requerimientos del desempeño para nuestro sistema, es decir:

El porcentaje de sobrepaso máximo es de 5%, por lo que

$$0.05 = e^{-\left(\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi} \quad \square \quad \zeta \cong 0.7$$

y el tiempo de asentamiento alrededor de los 2 segundos, entonces:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma} \quad (\text{criterio del } 2\%) \Rightarrow \sigma = \frac{4}{t_s} = \frac{4}{2} = 2$$

De lo último podemos aseverar que nuestro par de polos dominantes que satisfacen los requerimientos impuestos es  $-2 \pm 2i$ . A continuación, diseñaremos el compensador PD, con el uso de la geometría que se ilustra, calculando la ubicación del polo del compensador. Si se usa el programa del lugar geométrico de las raíces, que la suma de los ángulos desde los polos y ceros del sistema no compensado hasta el polo dominante compensado deseado es  $-173.12^\circ$ . Así la aportación necesaria desde el cero del compensador debe ser lo suficientemente alejada del origen.

Así, el controlador PD es

$$G_{PD}(s) = (s + 100)$$

Una vez diseñado el controlador PD, diseñamos el compensador integral ideal para reducir el error en estado estable. Cualquier compensador integral ideal con un cero cercano al origen funcionará, mientras el cero se coloque cerca del origen. Seleccionando que el compensador integral ideal sea

$$G_{PI}(s) = \frac{s + 0.5}{s}$$

trazamos el lugar geométrico de las raíces para el sistema compensado con el PID, mediante el siguiente archivo\_M:

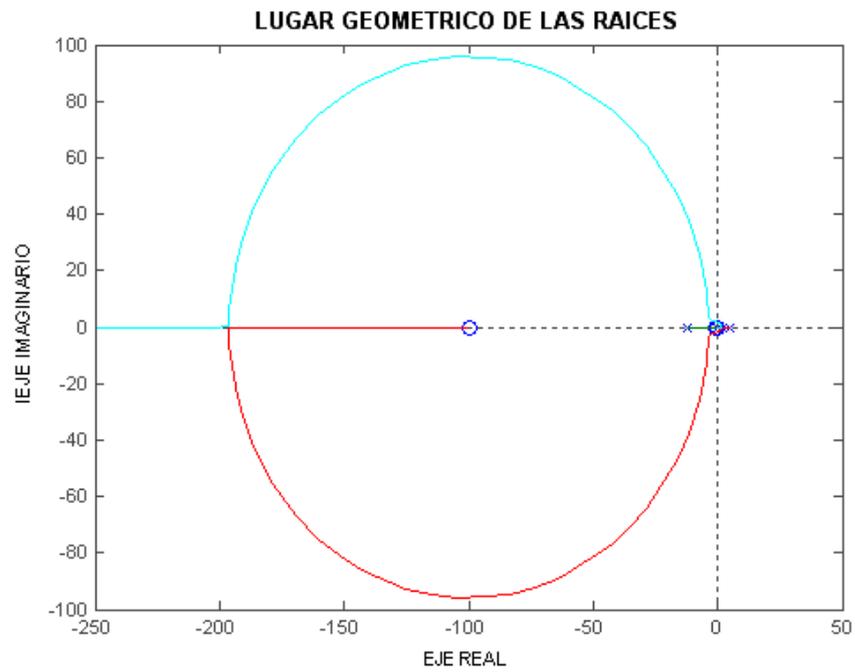
```

%..Control Convencional..
%...Metodo del LGR...
M = 0.435;
m = 0.270;
b = 0.10;
B = 0.05;
g = 9.8;
l = 0.165;
l = m*l^2/3;
q = (M+m)*(l+m*l^2)-(m*l)^2;      %..variable utilizada
num = [m*l/q 0];
den = [1 (B*(M+m)+b*(l+m*l^2))/q (B*b-(M+m)*m*g*l)/q -b*m*g*l/q];
PD = tf([1 100],[1]);           %..Compensador PD
PI = tf([1 0.5],[1 0]);        %..Compensador PI
pend = tf(num,den)
rlocus(PD*PI*pend)
figure
rlocus(PD*PI*pend)
axis([-4 4 -4 4])
sgrid(2)
sgrid(0.7,2.86)
[k,poles]=rlocfind(PI*PD*pend)
sys_cl=feedback(pend,PI*PD)
figure
T = 0:0.05:10;                  %..tiempo de simulacion = 10 seg.
impulse(sys_cl,T)

```

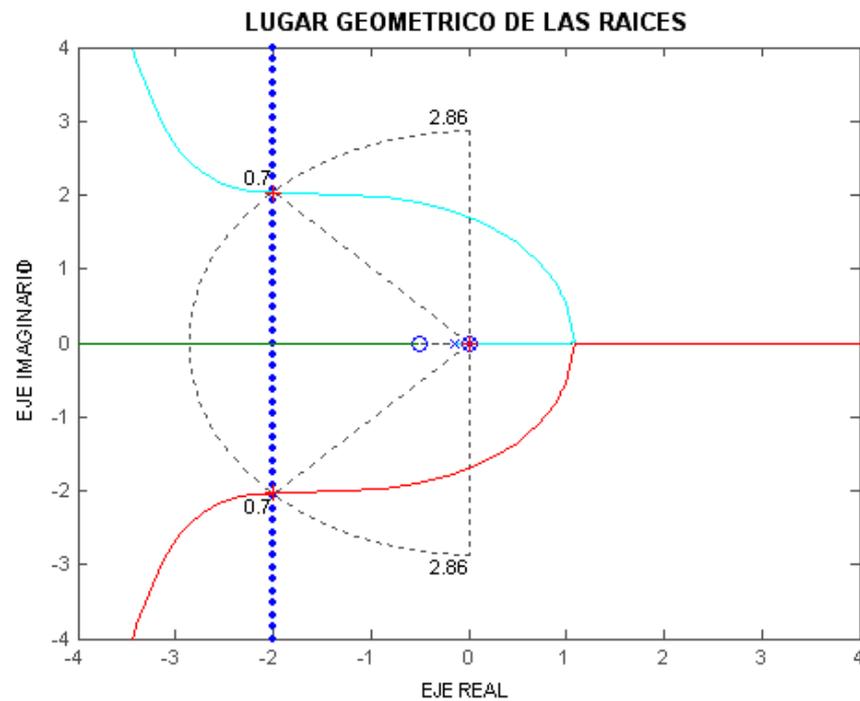
**TABLA 2-3:** INSTRUCCIONES EN MATLAB PARA ESTABLECER EL PARÁMETRO DE AJUSTE CON LAS ESPECIFICACIONES DE DESEMPEÑO EN BASE AL CRITERIO DE ROUTH Y AL LGR.

Cuya implementación se detalla a continuación:



**FIGURA 2-6:** TRAZO DEL LGR PARA ESTABLECER EL PARÁMETRO DE AJUSTE.

Realizando el acercamiento pertinentes alrededor de la zona de interés, tenemos:



**FIGURA 2-7:** TRAZO DEL LGR AMPLIFICADO PARA ESTABLECER EL PARÁMETRO DE AJUSTE

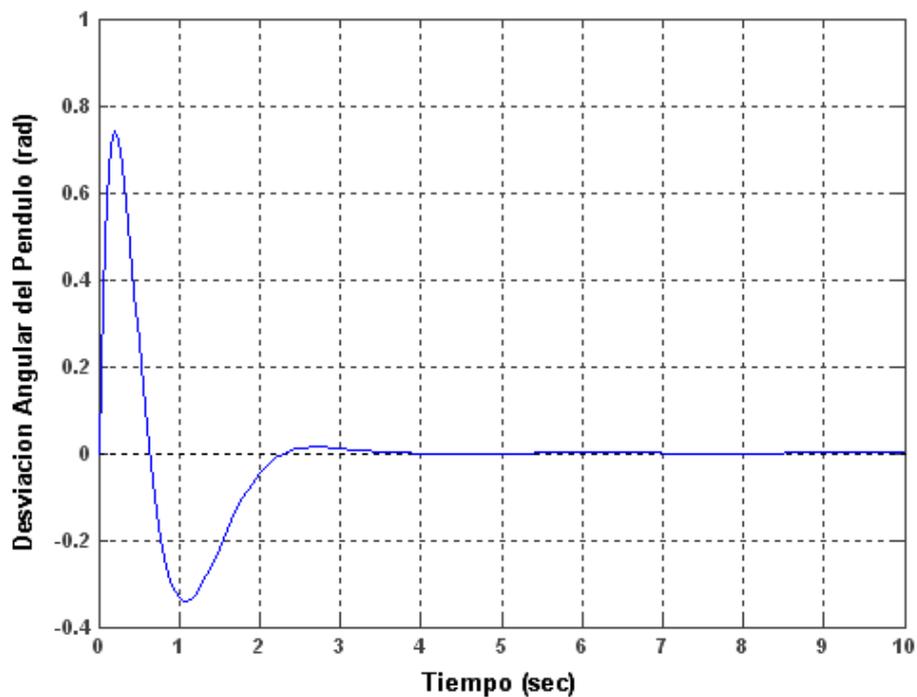
Mediante la condición de magnitud y del ángulo para el LGR se puede verificar los valores siguientes que Matlab nos proporciona.

**k =**  
0.0951

**ceros =**  
0  
0

**polos =**  
0  
-4.2118  
-2.0024 + 2.0244i  
-2.0024 - 2.0244i

Denotamos que no existe una incidencia notoria por parte de los polos dominantes, ya que estos para ser denominando como tales debe representar aproximadamente una cantidad mayor a cinco veces su valor real. Por consiguiente la respuesta transitoria no será el fiel reflejo de nuestra predicción tal cual lo ilustramos a continuación.



**FIGURA 2-8:** RESPUESTA DEL SISTEMA DE CONTROL BAJO UNA SEÑAL IMPULSO COMO DISTURBIO EN BASE AL MÉTODO DEL LGR.

Debemos considerar de que las expresiones utilizadas para describir el sobrepaso en porcentaje y tiempo de asentamiento, se dedujeron solo para sistemas con dos polos complejos y sin ceros. Si un sistema tienen mas de

dos polos y ceros, no podemos usar las fórmulas para calcular las especificaciones de desempeño antes mencionadas, pero, bajo ciertas condiciones, un sistema con mas de dos polos o con ceros se puede aproximar como un sistema de segundo orden que tienen solo dos **polos dominantes** complejos. Una vez que no se justificó esta aproximación, no podemos validar la aplicación de las fórmulas para sobrepaso en porcentaje y el tiempo de asentamiento a este sistemas de orden superior usando la ubicación de los polos dominantes.

Bajo la premisas de los siguientes argumento, estableceremos las constantes que identifican a un controlador PID. Un valor considerable de  $k_p$  poseerá el efecto de reducir el tiempo de levantamiento y reducirá (pero nunca eliminará) el error en estado estable. El control integral ( $k_i$ ) tendrá el efecto de eliminar el error en estado estable, pero provocará una distorsión negativa de la respuesta transitoria. Si el control integral es para ser usado, un valor pequeño de  $k_i$  deberá ser siempre ser tratado primero. El control derivativo generará el efecto de aumentar la estabilidad del sistema, reduciendo el sobresalto y mejorando la respuesta transitoria. Los efectos sobre las respuestas a lazo cerrado de añadir un controlador PID son puestas a consideración mediante la siguiente tabla:

	$t_r$	$M_p$	$t_s$	$e_{ss}$
$K_p$	Disminuye	Incrementa	No altera	Disminuye
$K_i$	Disminuye	Incrementa	Incrementa	Incrementa
$K_d$	No altera	Disminuye	Disminuye	No altera

**TABLA 2-4:** COMPORTAMIENTO HABITUAL DE  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  EN LA RESPUESTA TRANSITORIA DE UN SISTEMA

Note que estas correlaciones no son exactas, debido a que  $k_p$ ,  $k_d$ ,  $k_i$  son relacionadas entre si. Cambiando una de estas variables puede cambiar el efecto de las otras dos. Por esta razón la tabla es solo usada como referencia al momento de estimar los valores en términos de prueba y error.

El diseño de un controlador PID, infiere a identificar la constantes proporcional, diferencial e integral. Partiendo del hecho de que la diferenciación mejora la respuesta transitoria, optamos por construir el siguiente archivo\_M y seleccionar una gamma de valores que se ajuste a nuestros requerimientos:

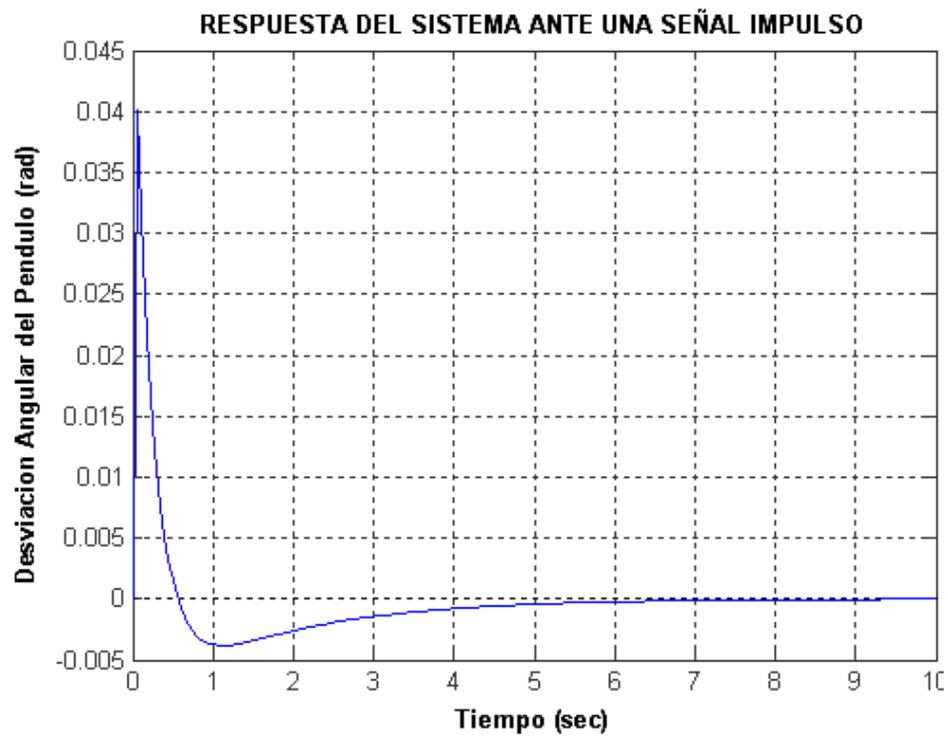
```

%...LEY DE CONTROL PID....
M = 0.435;
m = 0.270;
b = 0.10;
B = 0.05;
g = 9.8;
l = 0.165;
l = m*l^2/3;
q = (M+m)*(l+m*l^2)-(m*l)^2;    %..variable utilizada
num = [m*l/q 0]
den = [1 (B*(M+m)+b*(l+m*l^2))/q (B*b-(M+m)*m*g*l)/q -b*m*g*l/q]
pend = tf(num,den);
Kp=100;
Kd=20;
Ki=50;
contr =tf([Kd Kp Ki],[1 0]);    %..controlador PID
sys_cl=feedback(pend,contr)
t=0:0.01:10;
impulse(sys_cl,t)

```

**TABLA 2-5:** INSTRUCCIONES EN MATLAB PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS RESPUESTA TRANSITORIA EN BASE AL CONTROLADOR PID SELECCIONADO

Obteniendo la siguiente respuesta transitoria, tal implementación:



**FIGURA 2-9:** RESPUESTA TRANSITORIA PARA UNA SEÑAL IMPULSO CON EL USO DEL CONTROLADOR PID.

Así, finalmente podemos transcribir la función de transferencia de nuestro controlador PID, la cual adquiere la forma:

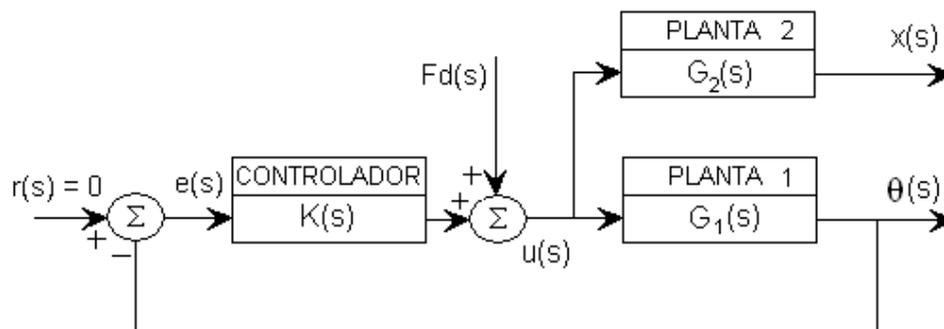
$$PID(S) = 20 \cdot S + 100 + \frac{50}{S}$$

## **2.2 Análisis de la Variable no Controlada.**

El diagrama expuesto anteriormente no fue del todo completo, ya que se omitió la incidencia que posee la posición del carro sobre el, debido específicamente a que el mismo no representaba un factor a no considerara dentro de las perspectivas de control. Sería interesante darnos una idea de que ha sucedido con la posición del carro cuando el controlador del ángulo del péndulo a sido implementado. Para observar aquello, debemos considerar el diagrama de bloques del sistema actual.

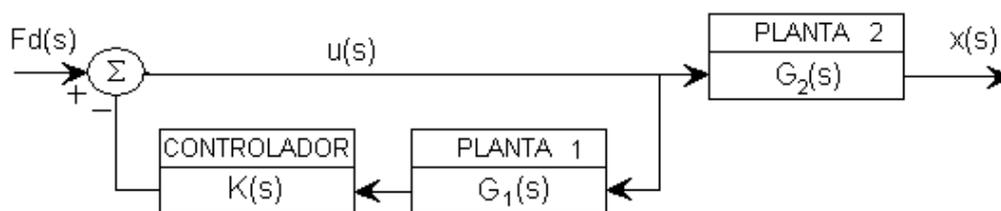
### **Diagrama de Bloques del Sistema Péndulo Invertido en su totalidad.**

A continuación presentaremos el diagrama de bloques que hace énfasis tanto a la variable controlada (desviación angular del péndulo) y la no controlada (posicionamiento del carro), donde denotaremos claramente , que no existe lazo de realimentación para este último, es decir:



**FIGURA 2-10:** DIAGRAMA DE BLOQUES GLOBAL DEL SISTEMA PÉNDULO INVERTIDO.

Reordenando un poco, obtendríamos el siguiente diagrama de bloques:



**FIGURA 2-11:** DIAGRAMA DE BLOQUES SIMPLIFICADO GLOBAL DEL SISTEMA PÉNDULO INVERTIDO.

El lazo de retroalimentación representa el controlador que nosotros hemos diseñado para el péndulo. La función de transferencia de la posición del carro para un impulso de fuerza, con el control de realimentación la cual nosotros diseñamos, se da como sigue:

$$x(s) = \frac{G_2(s)}{1 + K(s)G_1(s)}$$

Ahora que tenemos la función de transferencia del sistema referente al posicionamiento del carro, dirigiremos una mirada a su respuesta. Primero necesitaremos la función de transferencia que describe la posición del carro en la cual, para conseguir esto necesitamos remitirnos a la transformada de Laplace del sistema de ecuaciones y determinar la expresión de posicionamiento  $U(s)$  a  $X(s)$ , el cual se la detalla a continuación

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\frac{(I + m\ell^2)}{q}s^2 + \frac{B}{q}s - \frac{mgl}{q}}{s^4 + \left[ \frac{b(I + m\ell^2) + B(M + m)}{q} \right]s^3 + \left[ \frac{Bb - (M + m)mgl}{q} \right]s^2 - \frac{bmgl}{q}s}$$

Donde

$$q = \left[ (I + m\ell^2)(M + m) - (m\ell)^2 \right]$$

Ahora, fundamentándonos en el siguientes instrucciones del archivo\_M, podemos tener una idea clara sobre lo que ocurre entre las variables antes citadas.

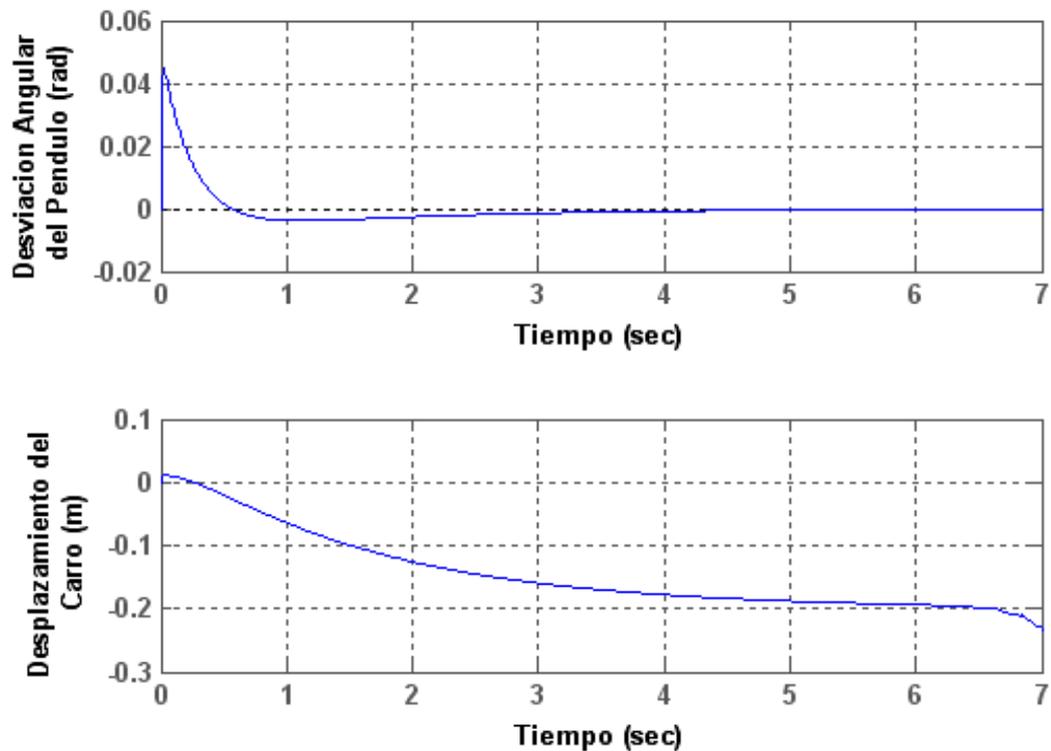
```

%..Metodo del Lugar Geometrico de las Raices
%...Analisis de la variable no controlada..
M = 0.435;
m = 0.270;
b = 0.10;
B = 0.05;
g = 9.8;
l = 0.165;;
l = m*l^2/3;           %..Inercia del pendulo
q = (M+m)*(l+m*l^2)-(m*l)^2;   %..variable utilizada
num1 = [m*l/q 0];
den1 = [1 (B*(M+m)+b*(l+m*l^2))/q (B*b-(M+m)*m*g*l)/q -b*m*g*l/q];
pend = tf(num,den);
PID=tf([20 100 50],[1 0]);
sys_cl= feedback(pend,PIDr)
num2 = [(l+m*l^2)/q B/q -m*g*l/q];
den2 = [1 (B*(M+m)+b*(l+m*l^2))/q (B*b-(M+m)*m*g*l)/q -b*m*g*l/q 0];
G2 = tf(num2,den2);
figure;
t = 0:0.01:10;           % simulation time = 10 seg
subplot(2,1,1);
impulse(sys_cl,t)
subplot(2,1,2);
xpos = feedback(1,PID*pend)*G2
impulse(xpos,t)

```

**TABLA 2-6:** INSTRUCCIONES EN MATLAB PARA EL ANÁLISIS DE LA VARIABLE NO CONTROLADA

Su ejecución sobre MATLAB, genera la siguiente gráfica donde se percibe las respuestas transitorias:

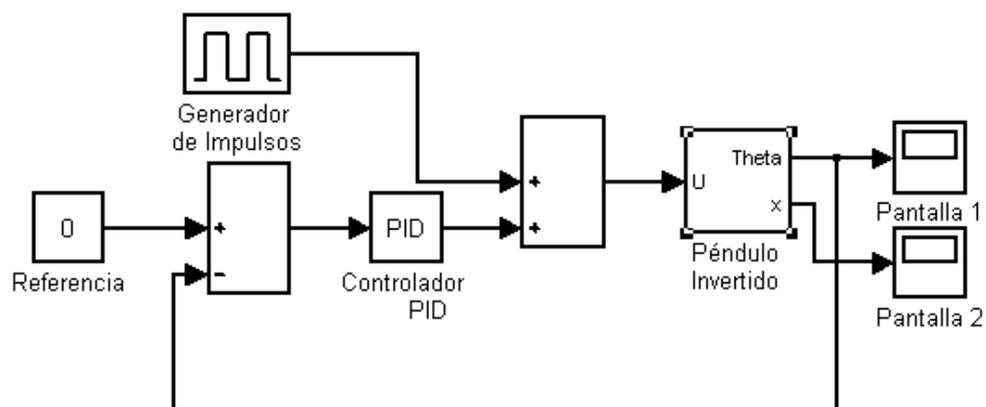


**FIGURA 2-12:** RESPUESTA DE LAS VARIABLES DE SALIDA DEL SISTEMA DE CONTROL ANTE UNA SEÑAL IMPULSO COMO DISTURBIO.

La primer curva representa desviación angular del péndulo y la segunda, la posición del carro. Como uno puede denotar, el carro se mueve levemente al principio, entonces alrededor de hasta los 2 segundos se estabiliza para entonces inestabilizarse (aspecto inherente a la omisión de esta condición en nuestro modelado para la resolución del problema). Es posible que la fricción cause que la posición del carro se estabilice, pero tenga presente que si de hecho, esto es verdad, es debido a la suerte mas nada más, desde que la posición del carro no fue incluido en el diseño de control.

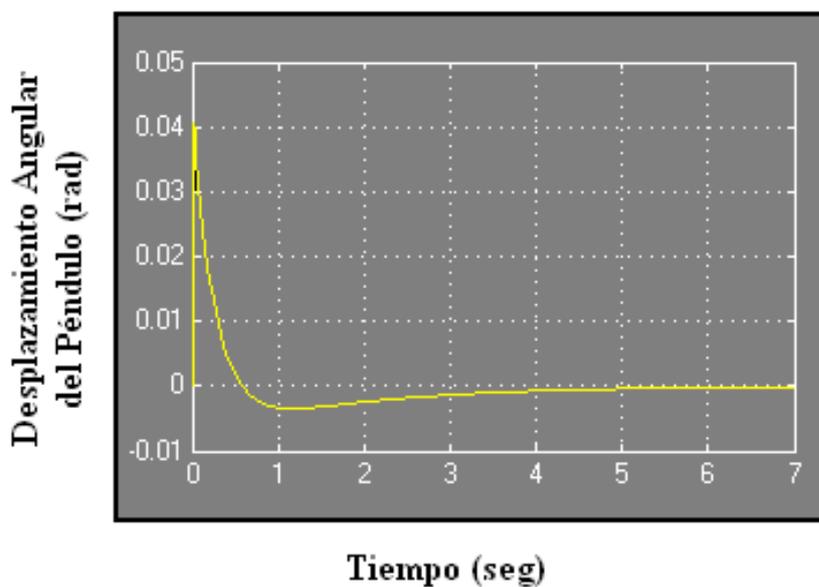
### **2.3 Modelado en SIMULINK del Sistema de Control Obtenido.**

Simulink es un software que le permite modelar, simular y analizar sistemas cuyas salidas cambian con el tiempo. Tales sistemas son a menudo referidos como sistemas dinámicos. Además Simulink puede ser usado para explorar el comportamiento de un amplio rango de sistemas dinámicos reales, incluyendo circuitos eléctricos, amortiguadores, sistemas de frenado, y otros sistemas eléctricos, mecánicos y termodinámicos y en nuestro caso no es la excepción, por lo que una vez obtenida la función de transferencia, nos resta proceder a su respectiva simulación teniendo en cuenta que implementamos subsistemas para simplificar el diagrama del modelo y así crear sistemas reusables (un subsistema es un grupo de bloques que es representado por un bloque del subsistema) como consecuencia llegamos a la siguiente configuración.

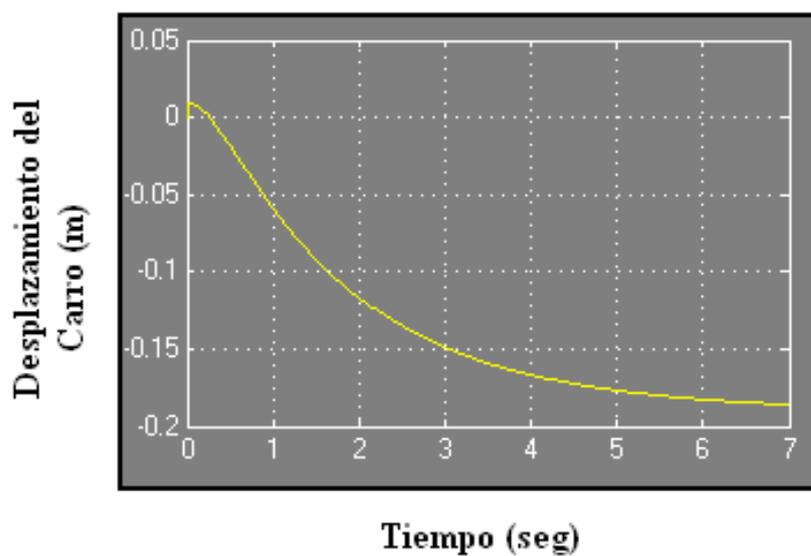


**FIGURA 2-13:** CONFIGURACIÓN RESULTANTE DEL SISTEMA DE CONTROL UTILIZANDO SIMULINK.

El inicio de la simulación obtuvo como consecuencias las siguientes ilustraciones:



**FIGURA 2-14:** VELOCIDAD DE REPUESTA DEL DESPLAZAMIENTO ANGULAR DEL PÉNDULO POR MEDIO DE SIMULINK EN PRESENCIA DE UNA SEÑAL IMPULSO.



**FIGURA 2-15:** VELOCIDAD DE RESPUESTA DEL DESPLAZAMIENTO LINEAL DEL CARRO POR MEDIO DE SIMULINK EN PRESENCIA DE SEÑAL IMPULSO.

Haciendo la respectiva comparación entre las gráficas obtenidas, tanto mediante el uso de `archivo_M` en MATLAB y Simulink, podemos dar cuenta de ciertos aspectos relevantes, como el comportamiento relativamente semejantes para la respuesta transitoria respecto a la desviación angular del péndulo, la cual se debe a que forzamos a que adquiera el mismo valores pequeñas, de ahí la razón fundamental de linealizar un modelo y lograr un resultado tolerable ya que Simulink no realiza ninguna clase de linealización, sin embargo no se puede decir lo mismo para la posición del carro, ya que esta variable no fue objeto de control y su comportamiento difieren significativamente, la misma en la que podemos denotar que a partir del tiempo de establecimiento esta adquiere una aceleración constante, la cual tiene sentido, debido a que la señal perturbante en términos teóricos desaparece.

# CAPITULO 3

## **3. METÓDO DE UBICACIÓN DE POLOS PARA EL ANÁLISIS EN EL DISEÑO DEL SISTEMA DEL TIPO REGULADOR.**

El método de Espacio de Estados, al igual que los métodos por medios de la Función de Transferencia o relación entrada-salida, son simplemente herramientas para analizar y diseñar sistema de control realimentados. Con todo, es posible aplicar las técnicas en el Espacio de Estados a una clase más amplia de sistemas que los métodos convencionales. Los sistemas no linealidades, así como los sistemas de entradas y salidas múltiples, son sólo dos de los candidatos para los métodos de Espacio de Estado.

Uno de los inconvenientes de los métodos en el dominio de frecuencia, utilizando ya sea técnicas del lugar geométrico de las raíces o de respuesta en frecuencia, es que después de diseñar por ubicación del par de polos dominantes de segundo orden, cruzamos los dedos en espera de que los polos de orden superior no afecten la aproximación de segundo orden. Los métodos de diseño del dominio de la frecuencia no nos permiten especificar

todos los polos en sistemas de orden mayor que dos, porque no permite un número suficiente de parámetros desconocidos para poner todos los polos en lazo cerrado de manera única. Una ganancia por ajustar, un polo o un cero del compensador por seleccionar, no da un número suficiente de parámetros para poner todos los polos en lazo cerrado en los lugares deseados.

Los métodos en el Espacio de Estados resuelven este problema al introducir en el sistema 1) otros parámetros ajustables y 2) la técnica para hallar estos valores de los parámetros, de modo que podamos poner apropiadamente todos los polos del sistema en lazo cerrado. Esta es una ventaja mientras sepamos en dónde ubicar los polos de orden superior, que no es siempre el caso. Un curso de acción es ubicar los polos de orden superior lejos de los polos dominantes de segundo orden, o cerca del cero del polo en lazo cerrado, para mantener válido el diseño del sistema de segundo orden.

Una aspecto importante a resaltar es esta capítulo, es de que los sistemas de control pueden ser divididos en dos extensas categorías: **Sistemas Reguladores y Sistemas de Seguimiento**. El primero procura mantener la salida del sistema constante en presencia de algún disturbio externo o interno, en donde el criterio primario de diseño se acentúa en base de la respuesta transitoria deseada. Un Sistema de Seguimiento, la salida debe seguir, con un mínimo de error, un trayecto prescrito representado por una entrada variante con el tiempo. En este clase de sistemas, tanto la respuesta

transitoria como la respuesta en estado estable deben caer entre ciertos límites tolerables.

Este capítulo se centrara por obvias razones, únicamente al diseño de Sistemas Reguladores, nosotros limitaremos nuestra discusión al control de la respuesta transitoria, debido principalmente a que la respuesta transitoria del sistema es determinado por la localización de los polos, el diseño regulador involucra movimiento de los polos en lazo abierto a localizaciones deseadas mediante el uso de la retroalimentación. A continuación destacaremos diversa definiciones que nos facilitarán una comprensión mejor a los largo del desarrollo del proyecto.

### **3.1 Controlabilidad y Observabilidad.**

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad, juegan un papel importante en el diseño de los sistemas de control en el espacio de estados. De hecho, las condiciones de controlabilidad y observabilidad determinan la existencia de una solución completa para un problema de diseño de un sistema de control. Tal vez no exista una solución a este problema si el sistema considerado es no controlable.

Aunque la mayor parte de los sistemas físicos son controlables y observables, los modelos matemáticos correspondientes tal vez no posean la propiedad de controlabilidad y observabilidad. En este caso es necesario conocer las condiciones bajo las cuales un sistema es controlable y observable.

**Controlabilidad** .- Se dice que un sistema es controlable en el tiempo  $t_0$  si se puede llevar de cualquier estado inicial  $x(t_0)$  a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito

Considere el siguiente sistema en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax + B\mu \quad (3-1)$$

en donde:

$X$ = vector de estados (vector de dimensión  $n$ )

$\mu$  = señal de control (escalar)

$A$ = matriz de  $n \times n$  (matriz de estado)

$B$ = matriz de  $n \times 1$  (matriz de entrada)

Se dice que el sistema es de estado completamente controlable, dado cualquier condición inicial si y solo si el rango de la matriz de  $n \times n$

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

sea  $n$  o los vectores  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$  son linealmente independientes. La matriz se la denomina por lo común, *matriz de controlabilidad*.

**OBSERVABILIDAD.-** Se dice que un sistema es observable en el tiempo  $t_0$  si, con el sistema en el estado  $x(t_0)$ , es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

Considere el sistema escrito mediante

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\mu \\ y &= Cx + D\mu \end{aligned}$$

en donde

$X$  = vector de estado (vector de dimensión  $n$ ).

$\mu$  = vector de control (vector de dimensión  $r$ )

$y$  = vector de salida (vector de dimensión  $n$ )

$A$  = matriz de  $n \times n$ .

$B$  = matriz de  $n \times r$

$C$  = matriz de  $m \times n$

$D$  = matriz de  $m \times r$

En donde la condición para la observabilidad completa del sistema descrito es, si y solo si la matriz de  $n \times nm$

$$\begin{bmatrix} C^* & : & A^* C^* & : & \dots & : & (A^*)^{n-1} C^* \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

Es de rango  $n$ , o tiene  $n$  vectores columna linealmente independientes. Ésta se denomina matriz de observabilidad ( $A^*$ , indica que se trata de la transpuesta conjugada de la matriz  $A$ ).

### **3.2 Análisis del Sistema de Control mediante la Realimentación del Estados con Observado de Orden Completo.**

El enfoque de la ubicación de polos, tal cual lo usaremos posteriormente, para el diseño de sistema de control, supone que todas las variables de estado están disponibles para su realimentación, sin embargo en la práctica no todas las variables de estado están disponibles para su realimentación. Tal aseveración nos permite hacer hincapié a la comparación entre el diseño del observador de orden completo y el orden mínimo, en la cual el primero será objeto de análisis en este capítulo, mientras que el segundo se lo considerara en el siguiente, y en la cual ambos serán abordados en mas detalle respectivamente.

Vale destacar que **el diseño mediante la ubicación de polos y el diseño del observador son independientes el uno del otro**, por lo que diseñaremos por separado sin inconvenientes. en la cual finalmente los combinaremos para formar el sistema de control mediante la realimentación del estado observado.

Los polos en lazo cerrado deseados que generará la realimentación del estado (la ubicación de polos) se eligen de tal forma que el sistema satisfaga los requerimientos de desempeño. Por lo general los polos del observador se seleccionan para que la respuesta del observador sea mucho más rápida que la respuesta del sistema. Una regla práctica es elegir una respuesta del observador las menos 2 o 5 veces más rápida que la respuesta del sistema. A continuación presentaremos de una manera minuciosa lo planteado.

### **3.2.1 Diseño del Sistema de Control en el Espacio de Estados mediante Ubicación de Polos.**

En esta sección presentaremos un método de diseño conocido comúnmente como técnica de ubicación o de asignación de polos. Suponemos que todas las variables de estado son medibles y que están disponibles para la realimentación, en la que, si el sistema considerado es de estado completamente controlado (condición necesaria y suficiente), los polos del sistema en lazo cerrado se pueden ubicar en cualquier posición deseada mediante una realimentación del estado a través de una matriz de ganancias de realimentación del estado.

La técnica de diseño actual empieza con la determinación de los polos en lazo cerrado deseados a partir de la respuesta transitoria, y/o los requerimientos de la respuesta en frecuencia, tales como la velocidad, el factor de amortiguamiento relativo, o el ancho de banda al igual que los requerimientos en estado estable.

El diseño mediante realimentación de las variables de estado para la ubicación de polos en lazo cerrado consiste en igualar la ecuación característica de un sistema en lazo cerrado, con una ecuación característica deseada y luego hallar los valores de las ganancias de realimentación  $K$ , para ello haremos uso de una fórmula muy conocida, como es la de Ackermann. A continuación describiremos los puntos relevantes de la misma.

### **3.2.1.1 Fórmula de Ackermann para la determinación de la Matriz de Ganancias de Realimentación del Estado.**

Considere el sistema obtenido mediante la ecuación (3-1), que puede describirse como:

$$\dot{x} = Ax + B\mu$$

Suponemos que este sistema es estado completamente controlable.

También suponemos que los polos en lazo cerrado deseados están en  $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$ . El uso de un control mediante realimentación del estado

$$\mu = -Kx$$

modifica la ecuación del sistema a

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (3-5)$$

Cuya solución es:

$$x(t) = e^{(A-BK)t} x(0)$$

en donde  $x(0)$  es el estado inicial provocado por perturbaciones externas. La estabilidad y las características de la respuesta transitoria se determina mediante los valores característicos de la matriz exponencial  $A-BK$ . Si se elige la matriz  $K$  en forma adecuada, la matriz exponencial se convierte en una matriz asintóticamente estable para todos los valores de  $x(0)$ . Los valores característicos de la matriz  $A-BK$  se denominan **polos reguladores**, y donde nuestro problema radica en ubicar los polos en lazo cerrado en las posiciones adecuados, la cual concuerdan con los polos reguladores.

Definamos

$$\tilde{A} = A - BK$$

La ecuación característica deseada es

$$\begin{aligned} sI - A + BK &= sI - \tilde{A} = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

dado que el teorema de Cayley-Hamilton plantea que  $\phi$  satisface su propia ecuación característica, tenemos que

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{A} + \alpha_n I = 0 \quad (3-6)$$

Por lo que a través de serie de pasos matriciales algebraicos, generamos la matriz de ganancia de realimentación del estado  $\mathbf{K}$  deseada.

Para un entero positivo arbitrario  $n$ , tenemos que

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \cdot [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]^{-1} \phi(A) \quad (3-7)$$

Esta ecuación se la denomina como fórmula de Ackermann para la determinación de la matriz ganancia de realimentación del estado  $\mathbf{K}$ . Donde

$$\phi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I$$

Esta metodología para determinar la matriz de ganancia de realimentación de estados la emplearemos por su simplicidad en el diseño del sistema de control mediante la ubicación de polos, tal como lo presentamos a continuación.

### **3.2.1.2 Diseño del Sistema de Tipo Regulador mediante Ubicación de Polos para el Péndulo Invertido.**

Remitiéndonos nuevamente al Sistema Péndulo Invertido, en donde el objetivo se centra es mantener el péndulo lo mas verticalmente posible ante acciones perturbantes ya sean interiores o exteriores, bajo una señal de control que vincula directamente a un actuar para tomar la acción correctiva apropiada.

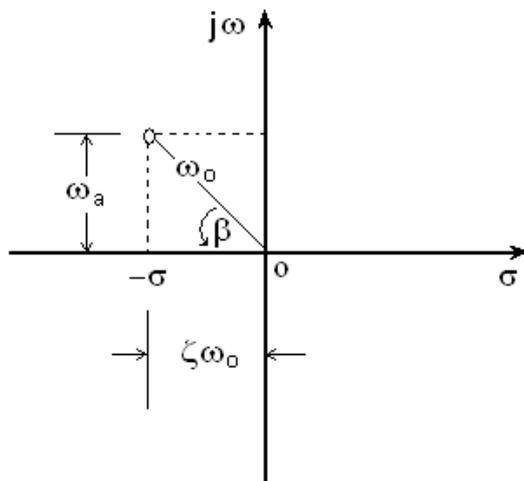
A más del control de la desviación angular del Péndulo, el posicionamiento del carro será otra variable a controlar, para ello, al final de cada proceso de control, se pretende regresar al carro a la posición de referencia, de ahí el hecho de que se trate de un Sistema Regulador, por la condición de que nuestra referencia es invariante en el tiempo.

El diseño de nuestro sistema de control debe tolerar los siguientes aspectos, bajo la incidencia de una Señal Escalón de 1N:

- Dada cualquier disturbio sea interno o externo, el péndulo debe permanecer lo mas verticalmente posible.
- El carro debe regresar a la posición de referencia ( $x = 0$ ) rápidamente.
- Tiempo de estabilización por parte de las variables a controlar, alrededor de los dos segundos.
- El péndulo no debe moverse mas de 0.05 radianes lejos de la posición vertical.
- Amortiguamiento razonable en la que los polos dominantes en lazo cerrado tengan  $\zeta = 0.5$ .
- Error en estado estable alrededor del 2%.

El diseño del controlador mediante el uso computacional, específicamente Matlab, se enfocará en el método de control mediante la realimentación del estado a través de la técnica de la ubicación de polos, tomando en consideración que la condición necesaria y suficiente para la ubicación arbitraria de los polos es de que el sistema es de estado completamente controlable.

Para lograr lo propuesto, se plantea el siguiente archivo\_M, donde el comando “**plyvalm**” calcula la ecuación característica deseada evaluada para la matriz de estados  $\phi(A)$ , para poder así aplicar la fórmula de Ackerman de manera conveniente. Sin embargo nos resta determinar los polos deseados para nuestra función de transferencia a Lazo cerrado, para ello no basaremos en la siguiente figura:



**FIGURA 3-1:** PLANO COMPLEJO S

Bajo las consideraciones de las medidas de desempeño impuestas a nuestro sistema de control, tales como, tiempo de asentamiento alrededor de los dos segundos y un amortiguamiento razonable de aproximadamente 0.5, podemos aseverar que nuestro par de polos dominantes es de  $2 \pm \sqrt{3}i$ , cuyos polos restantes deben estar a una proporción mayor a cinco para poder catalogarlos a los primeros polos como dominantes.

```

%.. Diseño del Sistema de Control de un Péndulo Invertido
%.... mediante la Ubicación de Polos en base al uso
%....de la formula de Ackermann para determinar la
%....Matriz de Ganancias de Realimentación de Estados
M = 0.435;
m = 0.270;
b = 0.10;
B = 0.05;
g = 9.8;
l = 0.165;
l = m*l^2/3;
q = (M+m)*(l+m*l^2)-(m*l)^2; % Denominador para las Matrices A y B
A = [0 1 0 0;
      (M+m)*m*l*g/q -B*(M+m)/q 0 -m*l*b/q;
      0 0 0 1;
      (m*l)^2*g/q -B*m*l/q 0 b*(l+m*l^2)/q];
B = [ 0; m*l/q; 0; (l+m*l^2)/q];
C = [1 0 0 0;
      0 0 1 0];
D = [0;0];
M = [B A*B A^2*B A^3*B];
rank(M) % Constar controlabilidad completa
J = [-2+2*sqrt(3)*i 0 0 0;
      0 -2-2*sqrt(3)*i 0 0;
      0 0 -20 0;
      0 0 0 -20];
JJ = poly(J) % polinomio característico deseado
Phi = polyvalm(poly(J),A); % polinomio característico Phi
K = [0 0 0 1]*inv(M)*Phi % matriz de ganancias
AA = A-B*K;
sys_cl=ss(AA,B,C,D);
T = 0:0.01:10; % Tiempo de simulación = 10 seg
U = ones(size(T)); % u = 1, Señal Escalón de Estrada
X0 = [0.0 0 0 0]; % Condiciones iniciales
[Y,T,X]=lsim(sys_cl,U,T,X0); % Simulación
plot(T,Y) % Grafica variables de salida vs tiempo
legend('pendulum','cart')

```

**TABLA 3-1:** INSTRUCCIONES EN MATLAB, PARA DETERMINAR LA MATRIZ DE GANANCIAS DE REALIMENTACIÓN DE ESTADOS.

La implementación del archivo\_M, a mas de establecer que el sistema posee controlabilidad completa, permite determinar el valor de la matriz de

ganancias de realimentación de estados ( $K$ ) que forza a obtener los valores deseados por parte de los polos a lazo cerrado con la obtención de la respectiva respuesta transitoria tal como lo describimos a continuación:

**$K =$**

$$135.3076 \quad 12.6423 \quad -72.1959 \quad -38.8514$$

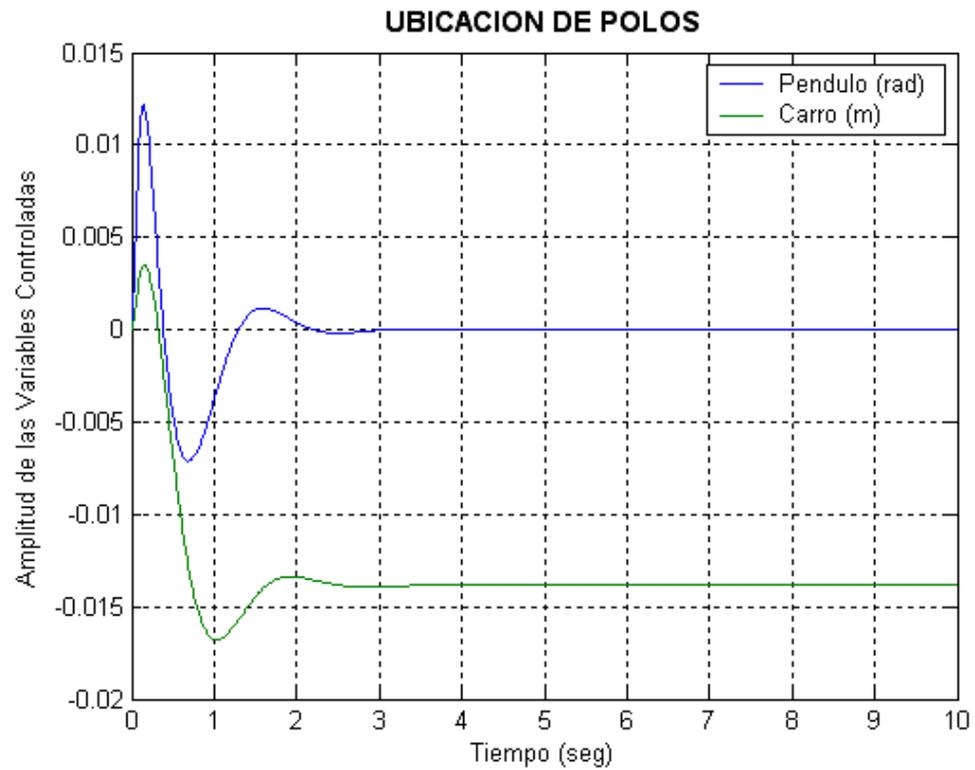
por lo que la señal de control final tomaría la forma siguiente:

$$\mu = -Kx \Rightarrow$$

$$\mu = -135.3076 \cdot \theta - 12.6423 \cdot \dot{\theta} + 72.1959 \cdot x + 38.8514 \cdot \dot{x}$$

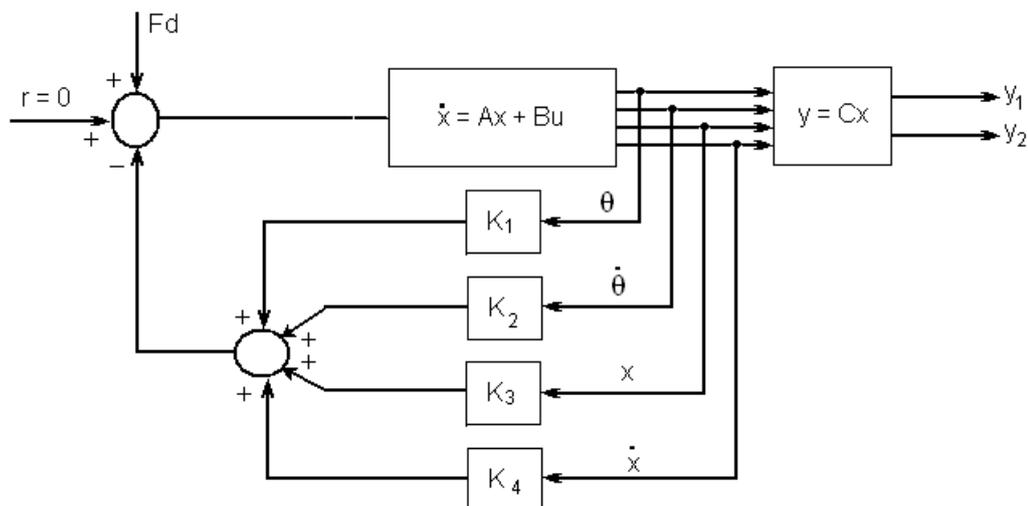
Observe que éste es un Sistema Regulador, el ángulo deseado siempre es cero y la ubicación deseada del carro siempre es cero. Por tanto, las entradas de referencia son cero. Además podemos percibir que en sistemas realimentados no siempre involucra realimentación negativa

El uso de la matriz de realimentación de estados determinada provoca el siguiente comportamiento en la respuesta transitoria del sistema.



**FIGURA 3-2:** VELOCIDAD DE RESPUESTA MEDIANTE EL USO DEL MÉTODO DE UBICACIÓN DE POLOS.

Nuestro esquema de control final mediante la realimentación del estado para el sistema péndulo invertido, tendría la siguiente configuración:



**FIGURA 3-3:** DIAGRAMA DE BLOQUES USANDO REALIMENTACIÓN DEL ESTADO

### 3.2.2 Observadores de Estado.

En el enfoque de ubicación de polos para el diseño de sistemas de control, supusimos que todas las variables de estado estaban disponibles para su realimentación. Sin embargo, en la práctica no todas las variables de estado están disponibles para su realimentación. Es importante señalar que debemos evitar diferenciar una variable de estado para generar otra, ya que siempre decrementa la relación señal a ruido, porque este último por lo general fluctúa más rápidamente que la señal de comando.

Existen métodos para estimar las variables de estado que no se miden sin un proceso de diferenciación, dicha estimación se denomina **observación**. Un dispositivo que estima u observa las variables de estado se llama **observador de estado o estimador**. Si el observador de estado capta todas las variables de estado del sistema, sin importar si algunas están disponibles para una medición de las variables del estado del sistema, se denomina **observador de estado de orden completo**, no obstante si considera las variables de salida que están en relación lineal con las variables de estado se denomina **observador de estado de orden mínimo**.

Un observador de estado estima las variables de estado con base en las mediciones de las variables de salida y de control. Aquí tiene una función importante el concepto de observabilidad, ya que los observadores de estado pueden diseñarse si y sólo si se satisface la condición de observabilidad.

El diseño del observador es separado del diseño del controlador. Semejante al diseño del vector de controlador  $\mathbf{K}$ , el diseño del observador consiste en evaluar el vector constante,  $\mathbf{L}$  (matriz de ganancia del observador), de modo que la respuesta transitoria del observador sea más rápida que la respuesta del lazo controlado para obtener rápidamente una estimación actualizada del

vector de estado. A continuación denotaremos a breves rasgos la metodología del diseño.

Nuestro análisis en esta sección se centrará al diseño de un observador de estado de orden completo, sin embargo en la siguiente sección por su practicidad se considerará el otro tipo de observador.

### 3.2.2.1 Observador de Estado de Orden Completo.

Considere el sistema definido mediante

$$\dot{x} = Ax + B\mu \quad (3-8)$$

$$y = Cx \quad (3-9)$$

Bajo el supuesto en que el estado  $x$  se aproximará mediante el estado  $\hat{x}$  del modelo dinámico

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\mu + L(y - C\hat{x}) \quad (3-10)$$

que representa al observador de estado, donde la matriz L funciona como una matriz de ponderación. Para obtener la ecuación de error del observador, restamos la ecuación (3-10) de la ecuación (3-8)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \\ \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\end{aligned}\tag{3-11}$$

Definiendo el vector error la diferencia entre  $\mathbf{x}$  y  $\hat{\mathbf{x}}$ , tenemos:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(0)\tag{3-12}$$

A partir de la ecuación (3-12) vemos que el comportamiento dinámico del vector de error se determinan mediante los valores característicos de la matriz exponencial  $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ . Si esta matriz es estable, el vector error convergerá a cero para cualquier vector error inicial  $\mathbf{e}(0)$ , de ahí el hecho de que por lo general los polos del observador se seleccionan para que la respuesta del observador sea mucho más rápida que la respuesta del sistema

### 3.2.2.2 Observador de Estado de Orden Mínimo.

Los observadores analizados hasta ahora se diseñan para reconstruir todas las variables de estado. En la práctica, algunas de las variables de estado se miden con precisión. Tales variables de estado medidas con precisión no necesitan estimarse.

Suponga que el vector de estado  $\mathbf{x}$  es un vector de dimensión  $n$  y que el vector de salida  $\mathbf{y}$  es un vector de dimensión  $m$  medible. Dado que las  $m$  variables de salida son combinaciones lineales de las variables de estado, no necesitan estimarse  $n$  variables de estado, sino sólo  $n - m$  variables de estado. Así el observador de orden reducido se convierte en un observador de  $(n-m)$ -ésimo orden. Tal observador  $(n-m)$ -ésimo orden es el observador de orden mínimo.

Sin embargo, es importante considerar que, si la medición de las variables de salida implica ruido significativo y es relativamente impreciso, el uso del observador completo puede provocar un mejor desempeño.

Para ofrecer la idea básica del observador de orden mínimo, sin complicaciones matemáticas innecesarias, presentaremos el caso en que la salida es un escalar (es decir  $m = 1$ ) y obtendremos la ecuación de estado para el observador mínimo. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mu \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

en donde el vector de estado  $\mathbf{x}$  se divide en dos partes  $\mathbf{x}_a$  (un escalar) y  $\mathbf{x}_b$  [un vector de dimensión  $(n - 1)$ ]. Aquí la variable de estado  $\mathbf{x}_a$  es igual a la salida  $y$  y, por tanto, se mide directamente y  $\mathbf{x}_b$  es la parte que no se puede medir del vector de estado. De este modo, el estado y las ecuaciones de salida se vuelven

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dots \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & \vdots & A_{ab} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{ba} & \vdots & A_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ \dots \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ \dots \\ B_b \end{bmatrix} \mu \quad (3-13)$$

$$y = [1 \quad \vdots \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ \dots \\ x_b \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

en donde:

$$A_{aa} = \text{escalar}$$

$$A_{ab} = \text{matriz de } 1 \times (n - 1)$$

$$A_{ba} = \text{matriz de } (n - 1) \times 1$$

$$A_{bb} = \text{matriz de } (n - 1) \times (n - 1)$$

$$B_a = \text{escalar}$$

$$B_b = \text{matriz de } (n - 1) \times 1$$

A partir de la ecuación de estados, la ecuación para la parte medida del estado se vuelve

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + A_{ab}x_b + B_a\mu$$

o bien

$$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a\mu = A_{ab}x_b \quad (3-15)$$

Los términos del primer miembro de la ecuación (6-1) se pueden medir. La ecuación (6-1) funciona como la ecuación de salida. Nuevamente a la ecuación de estados, la ecuación de la parte no medida se convierte

$$\dot{x}_b = A_{ba}x_a + A_{bb}x_b + B_b\mu \quad (3-16)$$

Considerando que los términos  $A_{ba}x_a$  y  $B_b\mu$  son cantidades conocidas, la ecuación (3-16) describe la dinámica de la parte no medida del estado.

A continuación presentaremos un método para diseñar un observador de orden mínimo. El procedimiento de diseño se simplifica si utilizamos la técnica de diseño desarrollada para el observador de orden completo, en donde se compara la ecuación de estado para el observador de orden completo con el observador de orden mínimo.

Observador de Estado de Orden Completo	Observador de Estado de Orden Mínimo
$\hat{x}$	$\hat{x}_b$
A	$A_{bb}$
Bu	$A_{ba}x_a + B_b u$
y	$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u$
C	$A_{ab}$
L (matriz $n \times 1$ )	L [(matriz de $n - 1$ ) $\times 1$ ]

**TABLA 3-2:** LISTA DE SUSTITUCIONES NECESARIAS PARA ESCRIBIR LA ECUACIÓN PARA EL OBSERVADOR DE ORDEN MÍNIMO.

Por lo que

$$\dot{\tilde{\eta}} = (A_{bb} - LA_{ab})\tilde{\eta} + [(A_{bb} - LA_{ab})L + A_{ba} - LA_{aa}]y + (B_b - LB_a)\mu \quad (3-17)$$

se define como la ecuación del observador de orden mínimo, donde

$$\tilde{\eta} = \tilde{x}_b - Ly \quad (3-18)$$

El procedimiento se reduce a determinar la matriz de ganancias del observador.

### 3.2.2.3 Problema Dual

El problema de diseñar un observador de orden completo (y por ende el de orden mínimo), se convierte en determinar la matriz de ganancias del observador  $\mathbf{L}$  tal que la dinámica del error definida mediante la ecuación (3-12) sea asintóticamente estable con una velocidad de respuesta suficiente. (La estabilidad asintótica y la velocidad de respuesta de la dinámica del error da los valores característicos de la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ ). Por tanto, el diseño del observador de orden completo se centra en determinar un  $\mathbf{L}$  apropiado tal que  $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$  tenga valores característicos deseados.

Por tanto, aquí el problema se convierte en un caso análogo al de ubicación de polos analizado anteriormente.

Considere el sistema definido mediante

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B\mu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Al diseñar el observador de estado de orden completo, resolvemos el problema dual, es decir solucionamos el problema de ubicación de polos para el sistema dual

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A^*z + C^*v \\ n &= B^*z\end{aligned}$$

Suponiendo que la señal de control  $v$  es

$$v = -Kz$$

Si el sistema dual es de estado completamente controlable, la matriz de ganancias de realimentación del estado  $K$  se determina del modo que la matriz  $A^* - C^*K$  produzca un conjunto de los valores característicos deseados.

Si  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  son los valores característicos de la matriz del observador de estado, tomando los mismo  $\mu_i$  que los valores característicos deseados de la matriz de ganancias de realimentación del estado del sistema dual, obtenemos

$$|sI - (A^* - C^* K)| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n)$$

Considerando que los valores característicos de  $A^* - C^* K$  y los de  $A - K^* C$  son iguales,

$$|sI - (A^* - C^* K)| = |sI - (A - K^* C)|$$

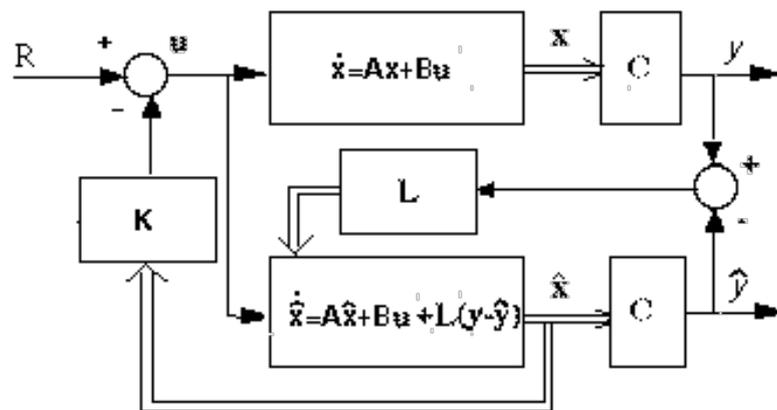
Comparando el polinomio característico del primer miembro de la última expresión y el segundo miembro para el sistema observador, encontramos que  $L$  y  $K^*$  se relacionan mediante

$$L = K^*$$

Por tanto, usando la matriz  $K$  determinada mediante el enfoque de ubicación de polos en el sistema dual, la matriz de ganancias del observador  $L$  para el sistema original se determina a partir de la relación  $L = K^*$ .

### 3.2.2.4 Diseño del Observador de Estado de Orden Completo para el Sistema Péndulo Invertido.

Cuando nosotros no podemos medir todas las variables de estado (como lo es nuestro caso –disponemos solamente del establecimiento de la variables de salida-), debemos construir un observador para estimarlos. La configuración del diagrama incluyendo el Observador, es como sigue.



**FIGURA 3-4:** DIAGRAMA DE BLOQUES INCLUYENDO EL OBSERVADOR DE ORDEN COMPLETO.

El observador es básicamente una copia de la planta., tiene la misma entrada y casi la misma ecuación diferencial. Un término extra compara la salida medida real y la salida estimada, esto causará los estados estimados para aproximarse a los valores de los estados reales  $x$ . La dinámica del error del observador es dada por los polos de  $(A-L*C)$ .

Primero necesitamos nosotros escoger la ganancia del observador  $L$ , considerando que deseamos que la dinámica del observador debe ser más rápida que el propio sistema, nosotros necesitamos poner por lo menos de **dos o cinco veces más lejos los polos a la izquierda que los polos dominantes del sistema.**

Si nosotros queremos usar el comando `place`, nosotros debemos colocar los tres observadores en diversas localizaciones. De antemano establecimos que los polos dominantes del sistema a lazo cerrado es de  $-2 \pm 2\sqrt{3}j$ , por lo que podemos afirmar, nuestros valores característicos deseados de la matriz del observador.

$L1 = -10;$   
 $L2 = -11;$   
 $L3 = -12;$   
 $L4 = -13;$

La misma fórmula de Ackermann usada para determinar la matriz de ganancias de realimentación de estados puede ser también usada para determinar la matriz de ganancias del observador de orden completo, fundamentados en el principio de dualidad entre la controlabilidad y la observabilidad, sin embargo para propósitos de establecer una metodología diferente a la de Ackerman, utilizaremos el comando **place** con ayuda de Matlab para determinar la matriz de ganancias del observador, considerando

de antemano la combinación entre la planta, controlador y observador que toma la forma siguiente en lo referente a la ecuación matricial de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - Lc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

esto último nos conduce al siguiente archivo\_M:

```

% Diseño del Sistema de Control de un Péndulo Invertido
%...Determinación de las matrices K y L.
M = 0.435;
m = 0.270;
b = 0.10;
B = 0.05;
g = 9.8;
l = 0.165;
l = m*l^2/3;
q = (M+m)*(l+m*l^2)-(m*l)^2; % Denominador para las Matrices A y B
A = [0 1 0 0;
      (M+m)*m*l*g/q -B*(M+m)/q 0 -m*l*b/q;
      0 0 0 1;
      (m*l)^2*g/q -B*m*l/q 0 b*(l+m*l^2)/q];
B = [ 0;
      m*l/q;
      0;
      (l+m*l^2)/q];
C = [1 0 0 0;
      0 0 1 0];
D = [0;0];
M = [B A^2*B A^3*B];
rank(M) % Constar controlabilidad completa
J = [-2+2*sqrt(3)*i 0 0 0;
      0 -2-2*sqrt(3)*i 0 0;
      0 0 -10 0;
      0 0 0 -10];
JJ = poly(J) % Polinomio característico deseado
Phi = polyvalm(poly(J),A); % Polinomio matricial característico Phi
K = [0 0 0 1]*inv(M)*Phi % Matriz de ganancias de realimentación de
estados
P = [-10 -11 -12 -13]; %Designación de los polos del estimador
L=place(A',C',P)'
Ace = [A-B*K B*K;
        zeros(size(A)) (A-L*C)];
Bce = [ B;
        zeros(size(B))];
Cce = [C zeros(size(C))];
Dce = [0;0];
est_cl = ss(Ace,Bce,Cce,Dce);
T = 0:0.01:10; % Tiempo de Simulación = 10 seg
U = ones(size(T)); % u = 1, Señal Escalon
X0 = [0.02 0 0 0 0 0 0]; % Condiciones iniciales
[Y,T,X]=lsim(est_cl,U,T,X0); %Simulación
plot(T,Y)
legend('Pendulo (rad)','Carro (m)')

```

**TABLA 3-3:** INSTRUCCIONES EN MATLAB PARA DETERMINAR K Y L.

Su implementación genera los siguientes resultados:

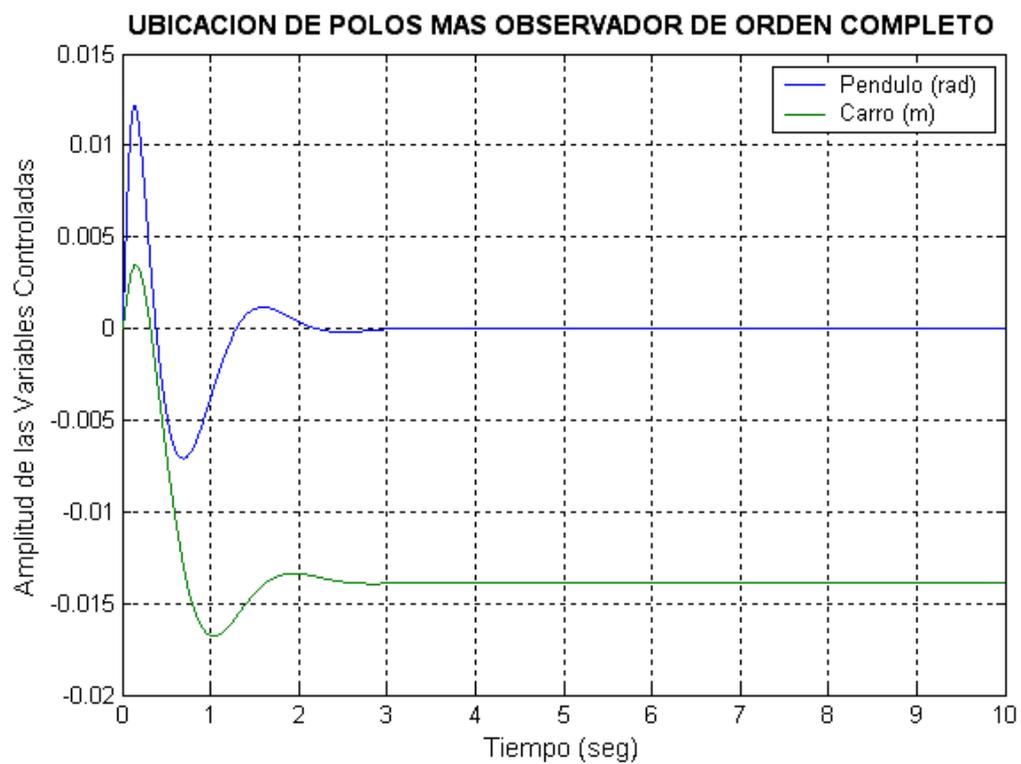
**L =**

```

15.0940 -1.2452
78.9617 -16.6433
-1.7567 23.9477
-18.3909 145.4249

```

en complemento a la siguiente figura que denota la velocidad de respuesta de las variables controladas ante el uso de las matrices K y L.



**FIGURA 3-5:** VELOCIDAD DE RESPUESTA DE LAS VARIABLES CONTROLADAS CON EL USO DE UN OBSERVADOR DE ORDEN COMPLETO.

Como podemos apreciar la respuesta es significativamente similar a la obtenida sin estimador. Todos los requisitos del diseño se han cumplido con la mínima cantidad de esfuerzo de control, para que ninguna iteración más se necesite.

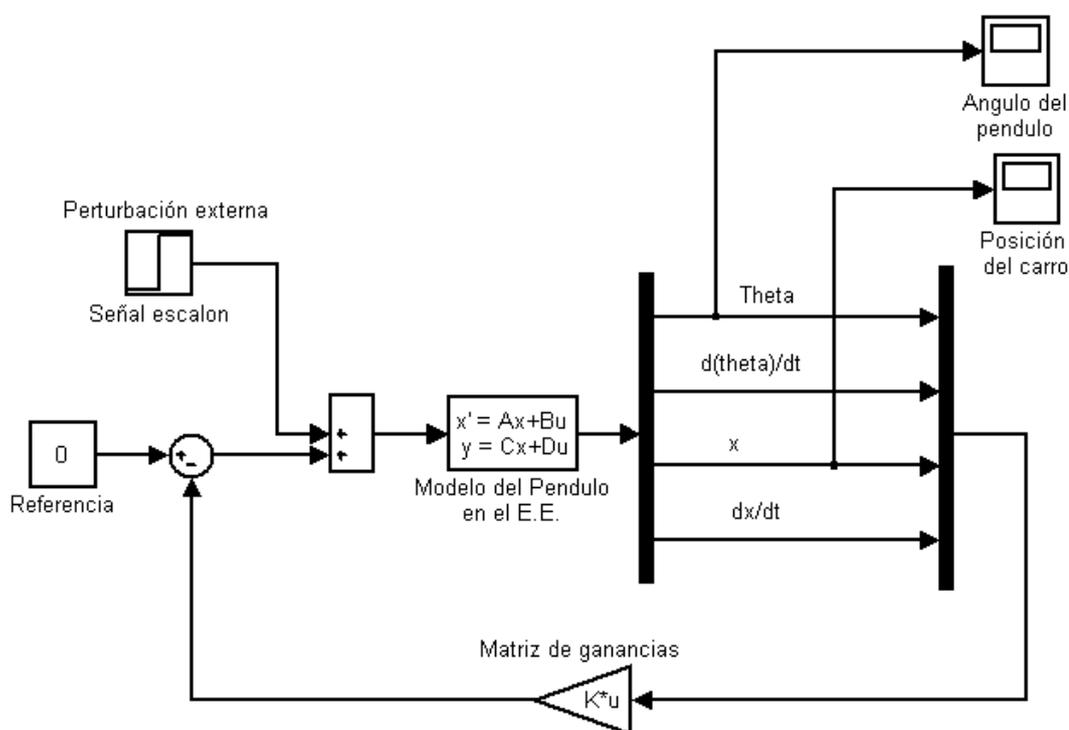
Nosotros no hemos usado las variables de salidas (ángulo del péndulo y la posición del carro), para estimar las variables de estado. Vale recalcar que el sistema no tendría la característica de observable solo considerando el ángulo del péndulo como salida, la cual tiene sentido ya que si solo puede medir el ángulo del péndulo, bajo ningún concepto podría inferir en la determinación del posicionamiento del carro.

Como podemos notar, es mucho más fácil para el control de sistemas de múltiples entradas o múltiples salidas con el método de espacio de estados que con cualquier de los otros métodos.

### **3.3. Modelado en SIMULINK del Sistema de Control Obtenido.**

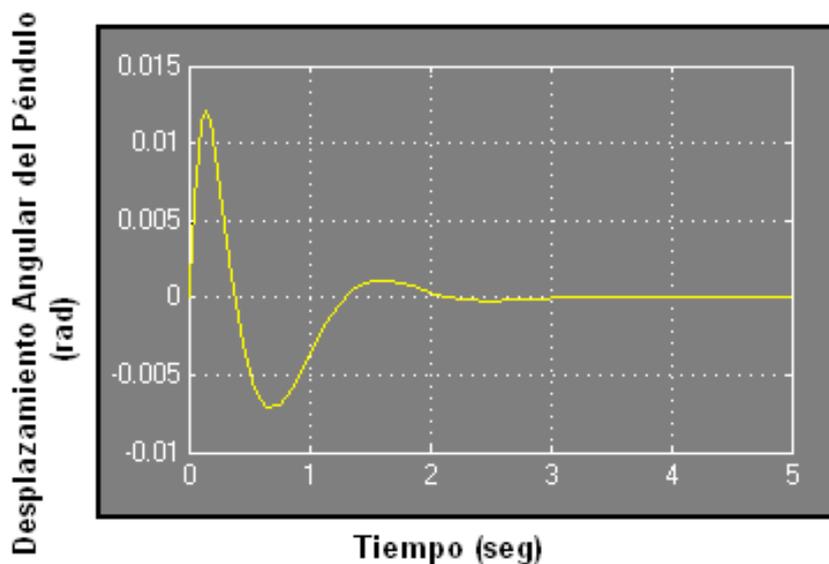
El simular un sistema dinámico se refiere al proceso de computar los estados de un sistema y salida sobre el lapso de tiempo especificado, usando información proporcionada por el modelo de propio sistema.

El modelo implementado usa subsistemas para simplificar el diagrama del modelo y así crear sistemas re-usables, dando paso a la siguiente configuración.

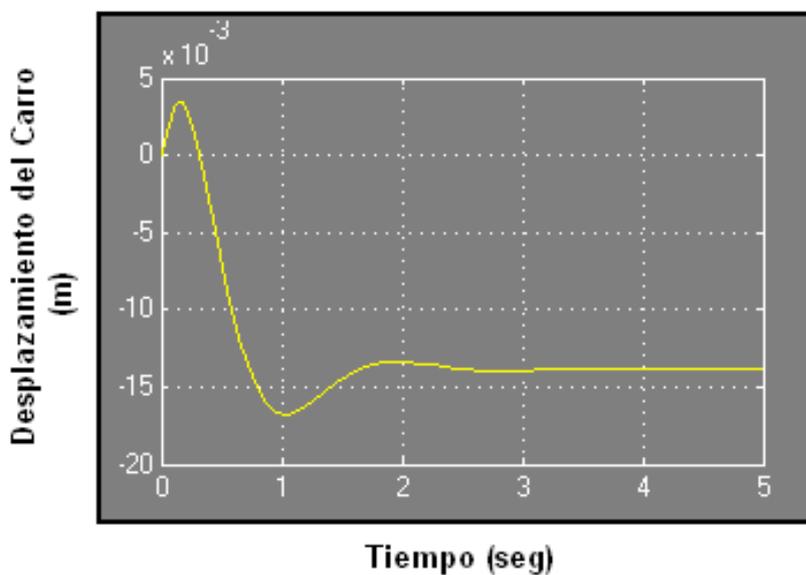


**FIGURA 3-6:** DIAGRAMAS DE BLOQUES DEL SISTEMA PÉNDULO INVERTIDO EN SIMULINK, USANDO REALIMENTACIÓN DE ESTADO.

Como podemos denotar, las condiciones de simulación son similares a todas las realizadas, esto se debe a que ello permite el establecimiento de los criterios individuales de desempeño que cada una de ellas ofrece. Además vale aclarar que se omitió el uso del Observador por obvias razones, su comportamiento es indistinto. Su implementación proporciona los siguientes resultados



**FIGURA 3-7:** VELOCIDAD DE RESPUESTA DEL DESPLAZAMIENTO ANGULAR DEL PÉNDULO USANDO REALIMENTACIÓN DE ESTADO Y UNA SEÑAL ESCALÓN COMO DISTURBIO



**FIGURA 3-8:** VELOCIDAD DE RESPUESTA DEL DESPLAZAMIENTO DEL CARRO USANDO REALIMENTACIÓN DE ESTADO Y UNA SEÑAL ESCALÓN COMO DISTURBIO.

Las repuestas transitorias concuerdan con las proporcionas en MATLAB, las mismas que cumplen a cabalidad los requerimientos de desempeño impuestas al diseño. Además podemos percibir la existencia de un margen de error en estado estable, ello se debe principalmente que el sistema en relación con el carro es un sistema de tipo cero.

# CAPITULO 4

## 4. REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL EN EL DISEÑO FINAL DEL SISTEMA DE CONTROL .

El sistema péndulo invertido, es un sistema SIMO no lineal con alto grado de acoplamiento entre las variables cuya resolución en términos de control automático puede obtener un sin número de soluciones, tal cual hemos visto. No obstante, para fines prácticos, nuestra implementación final radicará en base a la obtención que se acerque lo más posible a la óptima, de ahí el hecho de la necesidad de recurrir al Control Óptimo en base a la resolución del problema tipo regulador, donde es conocido que la ley de control es una función invariante en el tiempo de los estados o salidas del sistema.

Además de lo expuesto vale aclarar que la distancia del carro en relación a un sistema referencial., y el ángulo del péndulo, serán medidas directamente,

no obstante las primeras derivadas de las variables antes citadas no procederemos a medirlas, por lo que en ausencia de una medición directa de estas variables, es necesario obtener una aproximación de los valores de estas variables de estado, de ahí la necesidad de usar estimadores de orden mínimo.

Para obtener un diseño definitivo, debemos incluir un aspecto inevitable en todo proceso de control, cuyo factor lo hemos ignorado hasta ahora, el cual es básicamente el elemento correctivo o **actuador**, el mismo que es un dispositivo de potencia que produce la entrada para la planta de acuerdo con la señal de control, a fin de que la señal de salida se aproxime a la señal de entrada de referencia.

En la siguiente sección consideraremos aspectos pertinentes para una selección adecuada para nuestro actuador, en el cual debe regirse dentro de los factores tales como seguridad, costo, disponibilidad, confiabilidad, precisión, peso y tamaño.

#### **4.1 Selección del Actuador**

Los actuadores son dispositivos capaces de generar una fuerza a partir de líquidos, de energía eléctrica y gaseosa.

El actuador recibe la orden de un regulador o controlador y da una salida necesaria para activar a un elemento final de control como lo es el carro para nuestro caso. Las características a considerar son entre otras: Potencia, Controlabilidad, Peso y volumen, precisión, velocidad, mantenimiento y coste.

Se clasifican en tres grandes grupos, según la energía que utilizan:

- Neumáticos.
- Hidráulicos.
- Eléctricos

Los actuadores neumáticos, utilizan el aire comprimido como fuente de energía y son muy indicados en el control de movimientos rápidos, pero de precisión limitada. No obstante este tipo de sistemas son restringidos a aplicaciones en las cuales se requiere una respuesta dinámica lenta como opción conveniente, de ahí el hecho de que nuestras exigencias de diseño no involucrarían este tipo de solución. Los motores hidráulicos son recomendables en los manipuladores que tienen una gran capacidad de carga, junto a una precisa regulación de velocidad.

Los motores eléctricos son los mas utilizados, por su fácil y preciso control, así como por otras propiedades ventajosas que establecen su funcionamiento, como consecuencia del empleo de la energía eléctrica.

<b>Características de los distintos tipos de actuadores</b>			
	<b>Neumático</b>	<b>Hidráulico</b>	<b>Eléctrico</b>
Energía	Aire a presión (5-10 bar)	Aceite mineral (50-100 bar)	Corriente eléctrica
Opciones	Cilindros Motor de paletas Motor de pistón	Cilindros Motor de paletas Motor de pistones axiales	Corriente continua Corriente alterna
Ventajas	Baratos Rápidos Sencillos Robustos	Rápidos Alta relación potencia-peso Autolubricantes Alta capacidad de carga Estabilidad frente a cargas estáticas	Precisos Fiables Fácil control Sencilla instalación Silenciosos
Desventajas	Dificultad de control continuo Instalación especial (compresor, filtros) Ruidoso	Difícil mantenimiento Instalación especial (filtros, eliminación aire) Frecuentes fugas Caros	Potencia limitada

**TABLA 4-1:** ALTERNATIVAS DE ACTUADORES PARA NUESTRO SISTEMA.

Podemos percibir claramente de la tabla, que la utilización de un actuador eléctrico sería el mas conveniente en nuestra aplicación, por ello los motores

de corriente continua en la actualidad son los mas usados por su facilidad de control, además, específicamente en los motores DC controlado por armadura se produce un efecto estabilizador de la velocidad de giro originado por la realimentación intrínseca que posee a través de la fuerza contraelectromotriz. Por este motivo, de los tipos de motores DC –controlado por armadura y controlado por campo-, es el controlado por armadura el que se usará en el accionamiento del sistema de control del Péndulo Invertido.

Debido a su difícil control, los motores de AC no han tenido aplicaciones en este campo hasta hace algunos años. Sin embargo, las mejoras que se han introducido en las maquinas síncronas hacen que se presente como un claro competidor de los motores de corriente continua. Esto se debe principalmente a tres factores:

1. La construcción de los motores sin escobillas.
2. Uso de convertidores estáticos que permiten variar la frecuencia (y así la velocidad de giro) con la facilidad y precisión.
3. El empleo de la microelectrónica que permiten una gran capacidad de control.

En los motores síncronos la velocidad de giro depende únicamente de la frecuencia de la tensión que alimenta el inducido. Para poder variar esta

precisión, el control de velocidad se realiza mediante un convertidor de frecuencia. Para evitar el riesgo de pérdida de sincronismo se utiliza un sensor de posición continuo que detecta la posición del rotor y permite mantener en todo momento el ángulo que forman los campos del estator y rotor. Este método de control se conoce como autosíncrono o autopilotado. No obstante la implementación de una alternativa no es viable dentro de los aspectos de complejidad y costo

Por su simplicidad, **un motor DC de imán permanente**, el cual es un motor DC cuyos polos están hechos de imanes permanentes, es una alternativa tentativa, debido a que estos ofrecen muchos beneficios en comparación con los motores DC en derivación, serie o de compensación. Uno de ellos, es de que el motor DC de imán permanente no requiere circuito de campo externo y con ello no posee las pérdidas en el cobre del circuito de campo, además de que al no requerir del devanado de campo, estos motores pueden ser más pequeños que los correspondientes motores DC restantes. Los motores DC de imán permanente son muy comunes en tamaños pequeños de caballaje fraccional y subfraccional, en los cuales no puede justificarse el costo y el espacio de un circuito separado de campo.

Un motor DC de imán permanente es básicamente la misma máquina que un motor DC en derivación, excepto que el flujo de un motor DC de imán permanente es fijo, por tanto, no es posible controlar la velocidad de este tipo de motor variando la corriente o flujo de campo (controlado por campo). Los únicos métodos de control de velocidad disponibles para este tipo de motor son los de control de voltaje del inducido y control de la resistencia del inducido (controlado por armadura), por lo que en nuestra implementación de diseño final, solo nos restringiremos al uso de la variación de voltaje del inducido.

### **Consideraciones Preliminares de Diseño.**

Como es conocido, el objetivo de este problema clásico es para mantener el péndulo lo mas verticalmente posible y a la vez tener control sobre la posición del carro, por lo que su dependencia radica en el movimiento horizontal del carro ante una señal de control apropiada por parte del controlador, el cual a la vez debe retornar a la posición de referencia mediante el uso de un motor DC de imán permanente, tal cual como lo hemos justificado.

La señal de control se diseñara en base a la medición única de las salidas (desviación angular del péndulo, y el posicionamiento del carro), por lo cual se requiere hacer uso del diseño de un observador de orden mínimo, tal objeto de medición se llevara a cabo a través de uso de dos potenciómetros.

La conexión actuador-carro, será mediante el uso de un juego de poleas y una cuerda inelástica, donde previamente existirá una caja reductora, cuyo implementación es indispensable para un buen desempeño del sistema, tal como lo justificaremos en la posterioridad. Muchos controladores pueden ser electrónicos, hidráulicos, neumáticos o una combinación de ellos, sin embargo incluyendo aspectos tales como seguridad, costo, disponibilidad, confiabilidad, precisión, peso y tamaño, el electrónico cubre mayor expectativas en relación con los demás, es notorio que debido a la sencillez de la transición al transformar la señal no eléctricas a señales eléctricas incluyendo aspectos como mayor precisión, mayor confiabilidad, más facilidad de compensación, etcétera queda el resaltar la utilización de un **controlador electrónico**, tal consideración a final del capítulo se detallara su construcción.

A continuación, haremos énfasis a aspectos tales como potencia requerida por parte del motor, necesidad de reducción de velocidad del motor y el modelo dinámico de la conexión péndulo invertido mas actuador

### **Potencia Requerida por el Motor**

Ahora nuestra atención se centra en un aspecto por demás importante en diseño, donde cualquier sistema ingenieril de energía requiere el manejo de una carga o requerimientos de energía para su salida. Nosotros guiaremos al sistema péndulo invertido a través de un motor DC, por lo que necesitaremos determinar que proporción de energía que el motor debe tener. Según las especificaciones planteadas, el carro (dispositivo físico que permite la interacción entre el vector control y el sistema) requerirá de un movimiento de adelante y hacia tras, tratando de compensar las fuerzas perturbantes incidentes en el sistema en un movimiento similar al sinusoidal amortiguada con un máximo desplazamiento de 0.3 m, el cual es impuesta tanto por aspectos físicos como de control y así consideraremos la máxima condición de esfuerzo que el motor debe ser sometido.

Bajo suposiciones estrictamente dentro de los límites tolerables, estableceremos una función que describirá el comportamiento dinámico del

carro (desplazamiento) a partir de las consideraciones de respuesta transitoria que imponemos a nuestro diseño preliminar.

Como una aproximación valedera de una ecuación diferencial de segundo grado, obtenemos una solución sinusoidal decreciente, es decir:

$$x(t) = \frac{X_o}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega t} \text{Sen}\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2} \cdot t + \varphi\right) \quad (4-1)$$

$$\varphi = \cos^{-1}(\zeta) \quad (4-2)$$

Substituyendo los parámetros correspondientes a requerimientos de respuesta transitoria razonables, donde el tiempo de estabilización fluctuó por los dos segundos para una tolerancia del 2%; es decir  $\zeta\omega = 2$ , y un factor de amortiguamiento razonable ( $\zeta = 0.5$ ) con un desplazamiento máximo de 0.3, entonces obtenemos que:

$$x(t) = 0.35 \cdot e^{-2t} \text{Sen}\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (4-3)$$

Adviértase, que la exactitud de esta última expresión radica en la respuesta transitoria por parte del desplazamiento del carro, la misma que tiene incidencia directa con la clase de perturbación impuesta al mismo, sin

embargo su comportamiento puede considerarse como una aproximación satisfactoria.

Además, queremos determinar los requerimientos de energías como una función del tiempo del movimiento sinusoidal, para ello procedemos a obtener la velocidad instantánea del carro, diferenciando la ecuación antes descrita

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 0.7 \left[ \text{Cos}\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) - \text{Sen}\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \right] \cdot e^{-2t} \quad (4-4)$$

y la aceleración, diferenciándola una vez más

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -1.4e^{-2t} \cdot \text{Cos}\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (4-5)$$

Ahora, debemos proceder a sustituirla esta última igualdad en la fuerza requerida para generar el movimiento deseado al carro, donde

$$F(t) - b \frac{dx}{dt} = (M + m) \frac{d^2x}{dt^2} \quad (4-6)$$

entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
 F(t) = & -1.4(M + m).e^{-2t}.\text{Cos}\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \\
 & + 0.7 \cdot b \cdot \left[ \text{Cos}\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) - \text{Sen}\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \right].e^{-2t}
 \end{aligned}
 \tag{4-7}$$

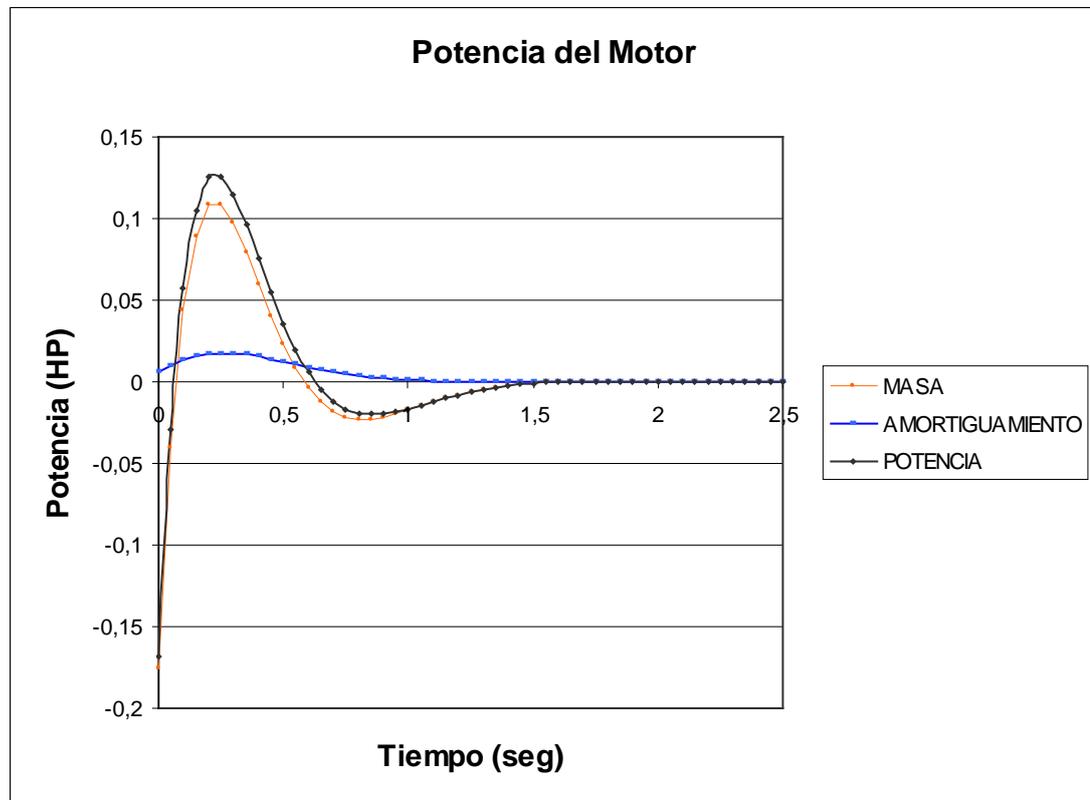
Se ha colocado la fuerza de amortiguamiento al lado derecho de la ecuación para indicar que es la variable dependiente. La potencia,  $F(t) \times v(t)$ , puede ser obtenida multiplicando las ecuaciones (7-3) y (7-5). Esto es

$$\text{Pot}(t) = F(t) \times v(t)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Pot}(t) = & \\
 & -0.7 \cdot \left[ \text{Cos}^2\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) - \text{Sen}\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \text{Cos}\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \right].e^{-4t} \\
 & + 0.05 \cdot \left[ \text{Cos}\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) - \text{Sen}\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \right]^2 e^{-4t}
 \end{aligned}
 \tag{4-8}$$

Podemos percibir que esta ecuación esta compuesta de dos términos para la cuantificación de la potencia requerida, una de ellas es asociada con el amortiguamiento  $b$  existente en el carro y la otra con las masa total del sistema a controlar.

Rigiéndonos a nuestro sistema, en donde la masa total es de 0.705 Kg , un coeficiente de amortiguamiento  $b$  de 0.1 N.seg/m, y en donde estableceremos como periodo mínimo al cumplimiento de un periodo alrededor del tiempo de estabilización que establece las especificaciones de desempeño (2 seg). Además la amplitud la impondrá la restricción física que posee el sistema para moverse libremente, en la que para nuestro caso es de 0.3 m, tal como se lo menciono anteriormente. Remitiéndonos a la ecuación de potencia, en donde con ayuda de una hoja electrónica, procedemos a evaluarla para un ciclo completo, utilizando los parámetros ya descritos, en donde obtenemos los siguientes resultados.



**FIGURA 4-1:** ILUSTRACIÓN QUE MUESTRA LA ENERGÍA REQUERIDA POR EL MOTOR

Cuyos resultados globales son:

Potencia Promedio	0.00836 HP [6.23 watts]
Potencia Máxima	0,12573 HP [93.8 watts]

**TABLA 4-2:** POTENCIA DEL MOTOR.

Podemos denotar en la gráfica que la potencia fluctúa entre un pico positivo y dos picos negativos durante un ciclo. Para entender esto, se procedió a

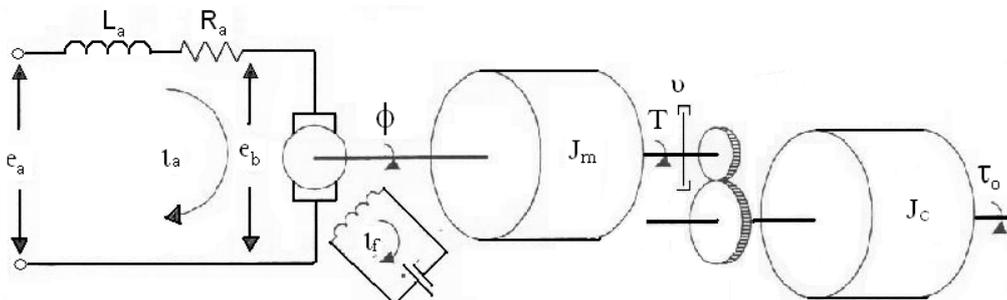
graficar las componentes de energía debido a la masa y a la amortiguación. La masa, por supuesto es un dispositivo de almacenamiento de energía por lo que absorbe y devuelve la potencia. El amortiguador, por otro lado, siempre consume potencia.

Las características de carga mostradas en la figura, es típico de una carga que contiene un llamado elemento **reactivo**- que es un elemento de energía de almacenamiento. Si la carga fuera **puramente resistivo**, la fuerza estaría en fase con la velocidad, generando un comportamiento de la potencia requerida que varía de cero a un valor pico por lo cual nos proporcionaría una potencia promedio mucho mayor al obtenido para un elemento reactivo, que debe ser la salida para el sistema que es entonces disipada para la carga resistiva.

Por otro lado, si la carga fuerza **puramente reactiva** (esto es, no contiene elementos de disipación de energía), entonces la fuerza y la velocidad estarían desfasados  $90^\circ$ , en la que la potencia requerida por el sistema sería prácticamente nulo, el cual es el resultado de promediarlo. Para sistemas reales cae en alguna parte entre estos dos casos extremos.

### Modelado Dinámico del Motor DC.

Para el sistema conectado Péndulo – Motor, la fuerza externa  $F$  (como se muestra en la figura), la cual permite que el sistema se equilibre ante un perturbación externa, es generada por el torque del motor de corriente continua, donde la fuerza aplicada al carro del péndulo se obtiene del par desarrollado por un motor de imán permanente, el cual se controla variando el voltaje de armadura, donde la corriente de campo se mantienen constante (ver figuras)



**FIGURA 4-2:** CIRCUITO EQUIVALENTE DE UN MOTOR DC CONTROLADO POR ARMADURA.

El par desarrollado por el motor esta dado por:

$$T = K\psi i_a \quad (4-9)$$

donde:

$\psi$  : flujo en el entrehierro

$K$  : constante

A su vez,  $\psi$  es directamente proporcional a la corriente de campo, es decir:

$$\psi = K_f i_f \quad (4-10)$$

donde nuevamente,  $k_f$  es una constante. Así se obtiene una nueva expresión para el par:

$$T = K_f i_f K i_a \quad (4-11)$$

Si la corriente de campo es constante, el flujo se vuelve constante, y por tanto:

$$T = K_1 i_a \quad (4-12)$$

Donde  $K_1$  es una constante del par motriz

Note que si el signo de la corriente  $i_a$  se invierte, se invierte a su vez el signo del par  $T$ , lo que se manifiesta en la inversión del sentido de rotación del motor. Al girar la armadura, se induce en ella una fuerza contra-electromotriz  $e_b$ , la cual es directamente proporcional a la velocidad angular; es decir:

$$e_b = K_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (4-13)$$

donde  $(d\phi/dt)$  es la velocidad angular, y  $K_2$  es la constante de fuerza contra-electromotriz. La ecuación diferencial para el circuito de armadura es:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \quad (4-14)$$

Una hipótesis frecuente, es considerar que la inductancia  $L_a$ , es despreciable, primordialmente por el hecho de que la constante de tiempo mecánica es mucho mayor a la constante eléctrica del motor, entonces.

$$i_a = \frac{e_a - K_2 \frac{d\phi}{dt}}{R_a} \quad (4-15)$$

Con lo cual se obtiene

$$T = K_1 \left( \frac{e_a - K_2 \frac{d\phi}{dt}}{R_a} \right) \quad (4-16)$$

Por otra parte, aplicando la segunda ley de Newton, es posible obtener la ecuación diferencial que relaciona la aceleración con el par producido por el motor, la cual es:

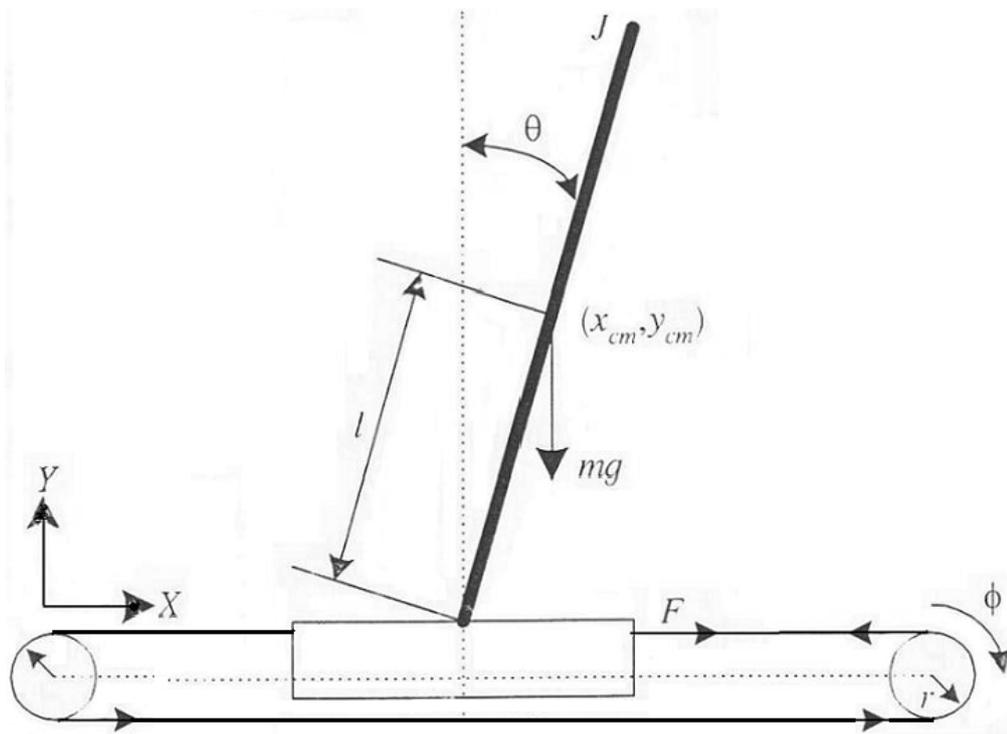
$$\left( J_m + \frac{J_c}{n^2} \right) \frac{d^2\phi}{dt^2} + v \frac{d\phi}{dt} = T \quad (4-17)$$

Finalmente, obtenemos el modelo del motor de c.c.

$$\left( J_m + \frac{J_c}{n^2} \right) \frac{d^2\phi}{dt^2} + v \frac{d\phi}{dt} = \left( \frac{e_a - K_b \frac{d\phi}{dt}}{R_a} \right) K_1 \quad (4-18)$$

### Conexión Dinámica del Péndulo-Motor

Ahora se procederá a dimensionar la transmisión que conectará al motor con el carro, en donde la figura descrita a continuación muestra un bosquejo de una de las muchas formas en la cual el motor DC podría ser usado para conducir el carro, en la que este último es enlazado con una cable inelástico que esta sujeto tanto a una polea conducida y una impulsora-no mostrada en la figura-.



**FIGURA 4-3:** CONEXIÓN DINÁMICA PÉNDULO-MOTOR.

Para el sistema conectado Péndulo–Motor, la fuerza externa  $F$ , la cual permite que el sistema se equilibre ante una perturbación externa, generada por el torque del motor de DC cuya relación fuerza-torque esta dado por

$$F = \frac{\tau_o}{d} = \frac{K_1 i_a}{d} \quad (4-19)$$

mientras que la relación entre  $\phi$ ,  $T$  y  $F$  como se muestra en la figura es

$$\left( J_m + \frac{J_c}{n^2} \right) \ddot{\phi} = J_o \ddot{\phi} = T - Fd \quad (4-20)$$

donde  $T$  es el par del motor,  $F$  es la fuerza lineal que produce el motor para equilibrar al péndulo invertido,  $J_o$  es el momento de inercia equivalente al eje del motor reductor y,  $d$  es el diámetro de la polea.

De la ecuación (4-16) y (4-20)

$$T = K_1 \left( \frac{e_a - K_2 \frac{d\phi}{dt}}{R_a} \right) \quad \text{y} \quad J_o \ddot{\phi} = T - Fd$$

se obtiene que la fuerza del motor es

$$F = -\frac{J_m}{2r} \ddot{\phi} + \frac{K_1}{2r} \left( \frac{e_a - K_2 \dot{\phi}}{R_a} \right) = -\frac{J_0}{2r^2} \ddot{x} - \frac{K_1 K_2}{2R_a r^2} \dot{x} + \frac{K_1}{2R_a r} e_a \quad (4-21)$$

Donde se utilizan las relaciones

$$\dot{x} = r \dot{\phi} \quad \text{y} \quad \ddot{x} = r \ddot{\phi}$$

Para efectos prácticos, el momento de inercia motor-reductor ( $J_0$ ) puede ser despreciable, no obstante su aproximación puede ser interpretado como una perturbación interna del sistema, por lo que la nueva expresión se reduce a

$$F = \frac{K_1}{2R_a r} e_a - \frac{K_1 K_2}{2R_a r^2} \dot{x} - \frac{J_0}{2r^2} \ddot{x} \quad (4-22)$$

Las ecuaciones linealizadas para el péndulo invertido básico son

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - m\ell\ddot{\theta} &= F \\ (I + m\ell^2)\ddot{\theta} + B\dot{\theta} - mg\ell\theta &= m\ell\ddot{x} \end{aligned}$$

Substituyendo la ecuación concerniente a la fuerza debida al motor y reordenando, resulta que:

$$\ddot{x} + \frac{(I + m\ell^2) \left( b + \frac{K_1 K_2}{2R_a r^2} \right)}{q} \dot{x} - \frac{(m\ell)^2 g}{q} \theta + \frac{Bm\ell}{q} \dot{\theta} = \frac{K_1 (I + m\ell^2)}{2R_a r q} e \quad (4-23)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{B \left( M + m + \frac{J_o}{2r^2} \right)}{q} \dot{\theta} - \frac{m\ell \left( M + m + \frac{J_o}{2r^2} \right)}{q} g \theta + \frac{\left( b + \frac{K_1 K_2}{2R_a r^2} \right) m\ell}{q} \dot{x} = \frac{m\ell K_1}{2R_a r q} e \quad (4-24)$$

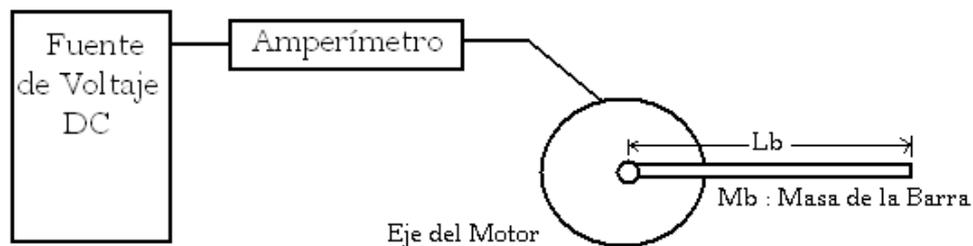
En donde

$$q = \left[ \left( M + m + \frac{J_o}{2r^2} \right) (I + m\ell^2) - (m\ell)^2 \right]$$

El modelo final será puesto en la forma de espacio de estado, para ello se denotará en la próxima sección después de que las constantes presentes en las expresiones hallan sido determinadas.

### Determinaciones de los Parámetros del Motor DC.

La masa del carro,  $M$ , la masa del péndulo,  $m$ , la longitud media del péndulo  $l$ , radio de la polea  $r$ , son todas medidas directamente al igual de las estimaciones hechas para las constantes de amortiguación,  $b$  y  $B$ . Los parámetros del motor  $k_1$ ,  $k_2$  y  $R_a$  son establecidas con un desarrollo experimental, como se muestra en la figura.



**FIGURA 4-4:** EQUIPO DE PRUEBA PARA LA DETERMINACIÓN DE LA CONSTANTE PAR MOTRIZ.

La constante,  $K_1$ , es medida enlazando un péndulo, de masa  $M_b$  y longitud  $L_b$  conocidos para el eje del motor. Un voltaje es aplicado al motor hasta que el péndulo sea suspendida horizontalmente, en ese punto, el motor esta generando un torque que es igual al torque producido por el péndulo. ´

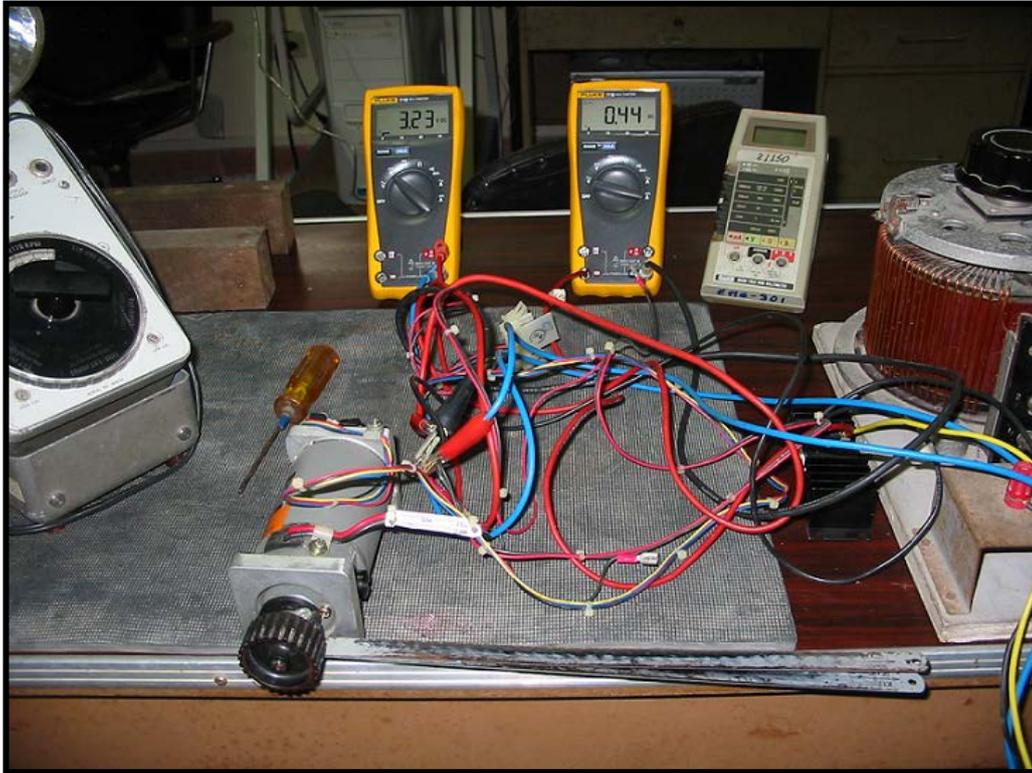
Midiendo la corriente a este voltaje nos permite determinar el parámetro  $K_1$ .

$$K_1 = \frac{T}{i_a} = \frac{1/2M_b g L_b}{i_a} \quad (4-25)$$

Para medir  $K_2$ ; debemos medir la velocidad del motor para un voltaje aplicado dado y tomar la razón promedio de esos valores. En este proyecto, la velocidad del motor será medida a través de un estroboscopio.

La última constante del motor, la resistencia de armadura ( $R_a$ ), puede ser encontrado del mismo experimento que determina  $K_2$ , donde medimos simplemente la corriente de armadura así como el voltaje de armadura y tomar el promedio de la razón voltaje a corriente.

Para una mejor ilustración del procediendo llevado, expondremos la siguiente ilustración que demuestra los implementos utilizados, tales como Voltímetro, Amperímetro, Rectificador de Diodos de onda completa y un Autotransformador de relación de vueltas variable, siendo este último el que nos permite la variación fija de voltaje.



**FIGURA 4.5:** ILUSTRACIÓN DE LOS EQUIPOS USADOS PARA DETERMINAR LAS CONSTANTES DEL MOTOR.

A continuación presentaremos los valores obtenidos, para los procedimientos anteriormente detallados:

e [voltios]	$i_a$ [A]	T [N.m]	$K_1=T/i_a$ [N.m/A]	$\bar{K}_1$
1,812	0,22	0,05978	0,27173	0,27173
3,230	0,44	0,11856	0,27173	

**TABLA 4-3:** PARÁMETROS PARA DETERMINAR LA CONSTANTE PAR MOTRIZ.

e [voltios]	$i_a$ [A]	$\omega$ [rpm]	$K_2=e/\omega$ [V/rad/s]	$\bar{K}_2$
6,3	0,18	370	0,16262	0,15584
12,0	0,19	700	0,16367	
15,4	0,44	1080	0,14057	

**TABLA 4-4:** PARÁMETROS PARA DETERMINAR LA CONSTANTE DE FUERZA ELECTROMOTRIZ..

Vale recalcar que para el experimento que conlleva a la determinación de la constante  $K_2$ , se base en las lecturas puestas sin cargas al eje del motor por ende existe una aproximación del voltaje inducido y el aplicado a la armadura del motor DC.

e [voltios]	$i_a$ [A]	$\omega$ [rpm]	$R_a=(e-K_2)/i_a$ [ $\Omega$ ]	$\bar{R}_a$
8,04	0,40	400	3,78	3,69
8,15	0,45	400	3,60	

**TABLA 4-5:** PARÁMETROS PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA DE ARMADURA.

Finalmente, debemos encontrar las ganancias de los sensores a usarse, que convierten el ángulo del péndulo y la posición del carro a voltajes. Debido a que el ángulo del péndulo será medido con un potenciómetro de una sola vuelta, es cuestión simple convertir el ángulo del eje para el potenciómetro a voltaje de salida. La ganancia del sensor para ángulo del péndulo es

determinada el voltaje aplicado para el ángulo de rotación del potenciómetro máxima,

$$K_{\theta} = \frac{V_{\max}}{350^{\circ}} = \frac{V_{\max}}{0.97 \times 2\pi} \text{ (V / rad)} \quad (4-26)$$

La posición del carro es medida con un potenciómetro de diez vueltas, la cual es acoplado a una polea, y esta a su vez es utilizada para función de deslizamiento del carro sobre una superficie. En este caso, debemos tomar el paso adicional de convertir el ángulo de rotación de la polea a la posición horizontal del carro. Esto conduce a

$$K_x = \frac{V_{\max}}{3600^{\circ}} \cdot \frac{360}{\pi d} \text{ (V / m)} \quad (4-27)$$

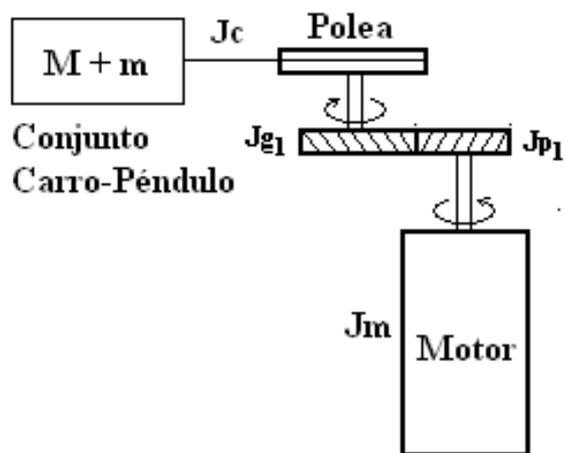
donde  $d$  es el diámetro de la polea.

## **Reductor**

Los trenes de engranaje o caja reductora son ampliamente usado en sistemas de control realimentados principalmente para lograr una reducción de velocidad y una magnificación por parte del torque, y secundariamente por efectos económicos en peso, espacio y costo. Ellos son para el sistema mecánico como el transformador lo es para el sistema eléctrico. Como el caso del transformador las pérdidas y no-linealidades en engranes podría interferir con el desempeño del sistema en conjunto, de modo que debajo de algunas condiciones ellos podrían ser poco atractivos para su aplicación.

La repercusión negativa (“backlash”) en engranes es uno de los mas serios problemas que se enfrentan en su aplicación para sistemas de control. La repercusión negativa es la cantidad de movimiento de un engrane cuando el otro se sostiene rápidamente. Este efecto tiende a hacer al sistema inestable, puesto que durante este periodo no hay ninguna carga presente para el actuador, la cual es, por si mismo inestable. Una forma de minimizar los efectos de repercusión negativa es adicionar alguna fricción para el sistema, pero esto es poco atractivo en algunos casos.

La fricción es otro serio problema, por lo que la fuerza friccional podría tender a disfrazar los efectos de la carga completamente de manera que todo el motor “observa” un carga de fricción. Como un comentario general, el uso de los trenes de engranes son justificables si el momento de inercia de carga cubre la inercia agregada debido a los engranes por si mismo. En tal caso el torque es amplificado sin efectos de desempeño global. Por otro lado, cuando la inercia de carga son pequeñas, la respuesta del sistema global puede ser disminuida por que la inercia adicional reflejada para la inercia de carga baja la frecuencia natural del sistema. Debido a que el motor está enlazado al carro a través de un reductor, debemos incluir la relación de diámetros que está involucra. Para este proyecto, la relación de reducción (reducción de velocidad) dependerá exclusivamente de la obtención de la reducción óptima para establecer la máxima aceleración de la carga, sin alejarnos de los criterios de estabilidad, el cual significa, que debe ser multiplicada por  $K_1$  por este valor. Para una mejor comprensión nos remitiremos a la siguiente ilustración tentativa para nuestro diseño:



**FIGURA 4-6:** ILUSTRACIÓN DE LA CAJA REDUCTORA.

Donde:

$J_m$  : Inercia del motor

$J_{p1}$  : Inercia del Piñón.

$J_{g1}$  : Inercia del Engrane

$J_c$  : Inercia de Carga

$T_m$  : Torque del Motor.

$T_c$  : Torque de carga.

$\omega_m$  : Velocidad angular de salida del Motor.

$\omega_c$  : Velocidad angular de salida del Reductor.

$d_1$  : Diámetro del piñon.

$d_2$  : Diámetro del engrane

$n$  : Razón de reducción.

Se puede demostrar que la ecuación del movimiento referida al eje del motor es:

$$T_m - \frac{T_c}{n} = \left( J_m + J_p + \frac{J_c + J_g}{n^2} \right) \alpha_m \quad (4-28)$$

Donde para efectos prácticos la inercia que compone el reductor se los omite, al igual que el torque de carga por ser valores pequeños, es decir:

$$T_m = \left( J_m + \frac{J_c}{n^2} \right) \alpha_m \quad (4-29)$$

Ahora nos resta expresar la última igualdad en términos de la aceleración de la carga.

$$T_m = \left( J_m + \frac{J_c}{n^2} \right) n \cdot \alpha_c = \left( n \cdot J_m + \frac{J_c}{n} \right) \alpha_c \Rightarrow$$

$$\alpha_c = \frac{T_m}{n \cdot J_m + \frac{J_c}{n}} \quad (4-30)$$

A razón de que el torque del motor puede aproximarse con una constante, procedemos a minimizar el denominador para obtener la máxima aceleración de carga, es decir:

$$\frac{d\left(n \cdot J_m + \frac{J_c}{n}\right)}{dn} = J_m - \frac{J_c}{n^2} = 0 \Rightarrow$$

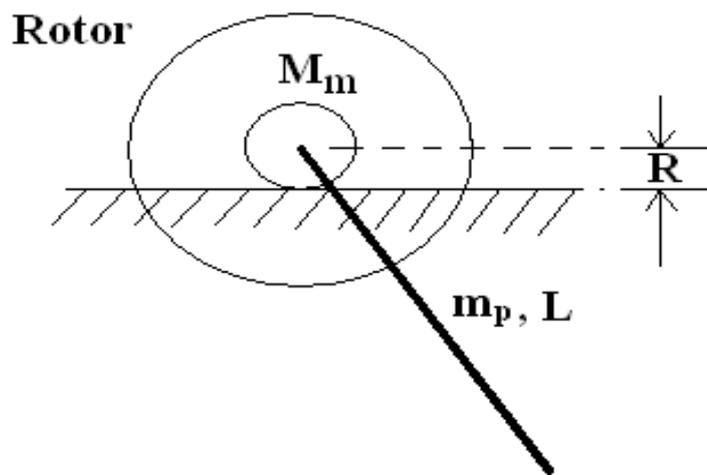
$$n_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{J_m}{J_c}} \quad (4-31)$$

El inconveniente ahora, es el establecer los parámetros que nos permiten la obtención de nuestra razón de reducción, tal punto lo detallamos a continuación.

#### **Determinación de la Inercia del Rotor del Motor DC.**

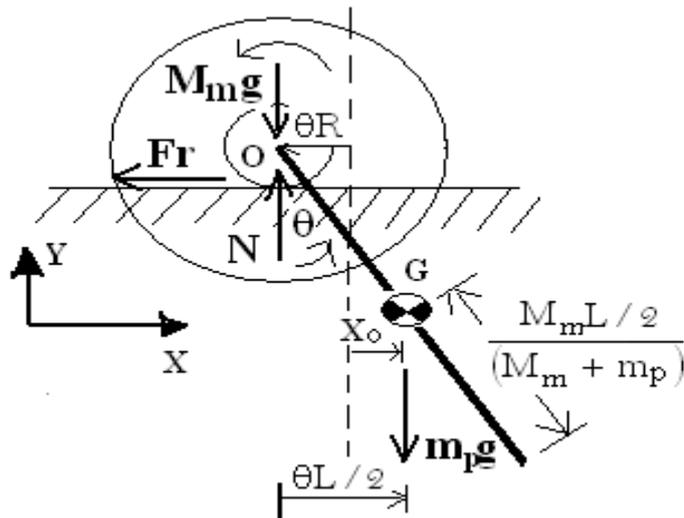
El momento de inercia,  $J_m$ , del rotor del motor DC de imán permanente de masa  $M_m$  será determinado añadiendo a su eje longitudinal la barra misma que hace la función de péndulo para nuestro problema, y cronometrando el período de oscilación.

La disposición de la prueba se muestra a continuación, notándose que se trata de un sistema de un grado de libertad, para ello obtendremos en función de los parámetros mostrados en la figura y el periodo de oscilación, una expresión para la inercia del rotor.



**FIGURA 4-7:** ILUSTRACIÓN DE LA PRUEBA PARA DETERMINAR LA INERCIA DEL MOTOR.

A continuación presentamos el bosquejo del diagrama de cuerpo libre del la ilustración anterior.



**FIGURA 4-8:** DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DEL ROTOR ADHERIDO A UNA BARRA.

Puesto que la Segunda Ley de Newton sólo es válida en un marco inercial (conjunto de ejes en que las Leyes de Newton son válidas deben tener un origen fijo y direcciones fijas para los ejes, puede ser también un marco cuyos ejes tienen una dirección fija mientras su origen se mueve a lo largo de una línea recta como una rapidez constante) se procede a su ejecución, denotando que la fuerza resultante es independiente del centro de referencia, no así el par resultante, tal como lo describiremos a continuación.:

$$\sum F_x = (M_m + m_p)X_G ; \text{ Si } X_G = \left[ \frac{m_p L / 2}{(M + m_p)} - R \right] \cdot \theta \Rightarrow$$

$$-F_r = \left( \frac{m_p L / 2 - R M_m - R m_p}{M_m + m_p} \right) \quad (4-32)$$

De idéntica manera, recurriendo al mismo principio, podemos afirmar que:

$$\sum \vec{M}_o - \vec{\rho}_o \times (M_m + m_p) \ddot{\vec{r}}_o = \frac{\partial(\vec{H}_o)}{\partial t} \quad (4-33)$$

Donde  $\rho_o$  es el vector de posición de o respecto al centro de masa G y  $H_o$  es el momento de la cantidad de movimiento. Bajo la premisa de que la desviación angular es pequeña, la solución se limita al campo escalar únicamente, es decir:

$$-m_p g L / 2\theta - F_r R - \left[ - \left( \frac{m_p L / 2}{M_m + m_p} \right) (M_m + m_p) R \ddot{\theta} \right] = (J_m + m_p L^2 / 3) \ddot{\theta} \rightarrow$$

$$-m_p g L / 2\theta + \left[ m_p R L / 2 - R^2 (M_m + m_p) \right] \ddot{\theta} + m_p R L / 2 \ddot{\theta} = (J_m + m_p L^2 / 3) \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} \left[ J_m + m_p L^2 / 3 + R^2 (M_m + m_p) - m_p R L \right] + m_p g L / 2\theta = 0$$

$$\therefore \omega_n^2 = \frac{4\pi^2}{\tau_o^2} = \frac{m_p g L / 2}{J_m + m_p L^2 / 3 + R^2 (M_m + m_p) - m_p R L} \Rightarrow \quad (4-34)$$

$$J_m = \frac{\tau_o^2 m_p g L / 2}{4\pi^2} - m_p L^2 / 3 - R^2 (M_m + m_p) + m_p R L \quad (4-35)$$

Omitiendo los efectos de amortiguamiento del sistema y procediendo a cronometrar para diferentes períodos de oscilación y procediendo a promediarla, obtuvimos que:

Nº Experimentación	1º Período de Oscilación	2º Período de Oscilación
1	1.08 seg.	1.79 seg.
2	0.97 seg.	1.69 seg.
3	0.95 seg.	1.72 seg.
<b>Promedio</b>	<b>1.00 seg.</b>	<b>1.73 seg.</b>

**TABLA 4-6:** VALORES EXPERIMENTALES PARA DETERMINAR LA INERCIA DEL MOTOR

En términos prácticos el primer periodo de oscilación se aproxima mas al real, debido a las aspectos friccionales inherentes en nuestro sistema de ahí el hecho de considerar solo este valor para la cuantificación de la inercia del motor, cuya resultante es:

$M_m$ (Kg)	$m_p$ (Kg)	$L$ (m)	$R$ (m)	$g$ (m/s <sup>2</sup> )	$\tau_0$ (s)	$J_m$ (Kg.m <sup>2</sup> )
1.34	0.20	0.29	0.00425	9.8	0.95	<b>1.78e-3</b>

**TABLA 4-7:** PARÁMETROS PARCIALES FÍSICOS DEL SISTEMA.

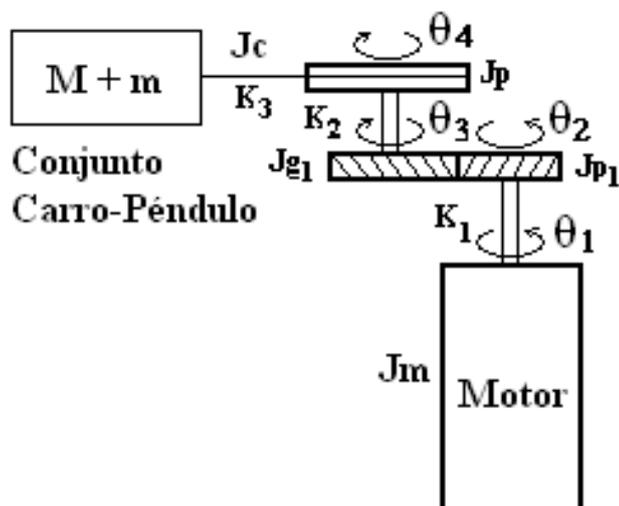
### **Determinación de la Inercia de Carga.**

El método de energía puede ser utilizado para sistemas con masa concentradas o distribuidas siempre que, el movimiento de cada punto del sistema sea conocido, tal cual es nuestra situación.

En sistemas en las cuales las masa están unidas por conectores rígidos, palancas o engranajes, el movimiento de las diferentes masas pueden expresarse en términos del movimiento  $\chi$  de algún punto específico y el sistema, es simplemente de un grado de libertad, puesto que una sola coordenada es necesaria. La energía cinética puede escribirse como

$$K_c = \frac{1}{2} m_{\text{eff}} \dot{\chi}^2 \quad (4-36)$$

en donde  $m_{\text{eff}}$  es la masa efectiva o una masa equivalente concentrada en un punto específico. Remitiéndonos a la siguiente ilustración



**FIGURA 4-9:** SISTEMA MOTOR, REDUCTOR Y CONJUNTO CARRO-PÉNDULO.

La dinámica del sistema puede expresarse en términos del movimiento angular del eje del motor, tal como lo detallamos a continuación.

La expresión de la energía cinética del sistema es:

$$K_c = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_P \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} J_P \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} (M + m) r_p^2 \dot{\theta}_4^2$$

Por efectos didácticos se considera a la desviación angular como nula para un mismo eje, por lo que podemos aseverar que:

$$K_c = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{P1} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{J_{G1}}{N_1^2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{J_P}{N_1^2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(M + m) \cdot r_p^2}{N_1^2 N_2^2} \dot{\theta}^2$$

$$\therefore J_{\text{eff}} = J_o = J_m + \left( J_{P1} + \frac{J_{G1}}{n^2} \right) + \frac{J_P + (M + m) \cdot r_p^2}{n^2} \quad (4-37)$$

Por lo que, la inercia de carga, considerando despreciable la inercia del engrane y la de la polea, por efectos de simplicidad es:

$$J_c = (M + m) \cdot r_p^2 \quad (4-38)$$

Ahora nos resta establecer el diámetro de la polea, el cual esta ligada directamente a la ganancia del potenciómetro que permite la determinación del desplazamiento del carro. Los efectos del potenciómetro sobre el sistema control a establecer deberá influir lo mínimo posible, eso se logra haciendo que la ganancia del sensor se aproxime o se iguale a 1, no obstante su aplicación práctica no es posible porque necesitaríamos de un diámetro de polea significativa, de ahí el hecho de utilizar un diámetro practico con base a estos principios, el cual es 0.075 m, por lo que:

$$J_c = (0.435 + 0.270) \cdot 0.075^2 / 4 = 9.90e - 4 \text{ kg.m}^2$$

Ahora substituyendo en la expresión que nos permite establecer la reducción óptima tenemos:

$$n_{opt} = \sqrt{\frac{J_m}{J_c}} = \sqrt{\frac{1.78e - 3}{9.90e - 4}} = 1.34$$

El efecto de implementar la solución determinada nos conlleva a la obtención de la máxima aceleración de carga permisible, la cual nos proporciona una idea de cuan próximo o alejado podemos estar de tal condición bajo el supuesto de hacer uso de varia razones de reducción para propósitos didácticos, ya que desde el punto de vista de control es difícil establecer a ciencia cierta cual es la razón de reducción óptima para un sistema de control. De ahí nuestro punto de partida para considerar cuatro razones de reducción con propósito de evaluación del desempeño de control. Para ello haremos uso de método del LGR, en función de la razón de reducción, tal como lo detallaremos a continuación:

Remitiéndonos a las ecuaciones diferenciales que describen nuestro sistema, en donde previamente se incluye la dinámica de nuestro actuador tenemos que:

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - m\ell\ddot{\theta} = \frac{NK_1}{2R_a r} e - \frac{NK_1 K_2}{2R_a r^2} \dot{x} - \frac{J_0}{2r^2} \ddot{x}$$

$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta} + B\dot{\theta} - mg\ell\theta = m\ell\ddot{x}$$

Recurriendo a la simplicidad que causa el tomar la transformada de Laplace y obtener así la función de transferencia de nuestro sistema con base a la salida de mayor interés, como lo es la desviación angular a la vez de omitir los efectos de amortiguamiento por simplicidad práctica, tenemos que:

$$\frac{\theta(S)}{E(S)} = \frac{\frac{m\ell NK_1}{2R_a r q} S^2}{S^4 + \left[ \frac{\left( I + m\ell^2 \right) \left( \frac{NK_1 K_2}{2R_a r^2} \right)}{q} \right] \cdot S^3 - \left[ \frac{mg\ell \left( M + m + \frac{J_o}{2r^2} \right)}{q} \right] \cdot S^2 - \frac{mg\ell NK_1 K_2}{2R_a r^2 q} \cdot S}$$

Donde:

$$q = \left( I + m\ell^2 \right) \left( M + m + \frac{J_o}{2r^2} \right) - (m\ell)^2$$

Ahora, nuevamente considerando el hecho de disponer del controlador PID ( $K_p=100$ ,  $K_i=50$  y  $K_d=20$ ) antes diseñado con realimentación, por lo que la ecuación característica en función del factor de reducción toma la siguiente forma:

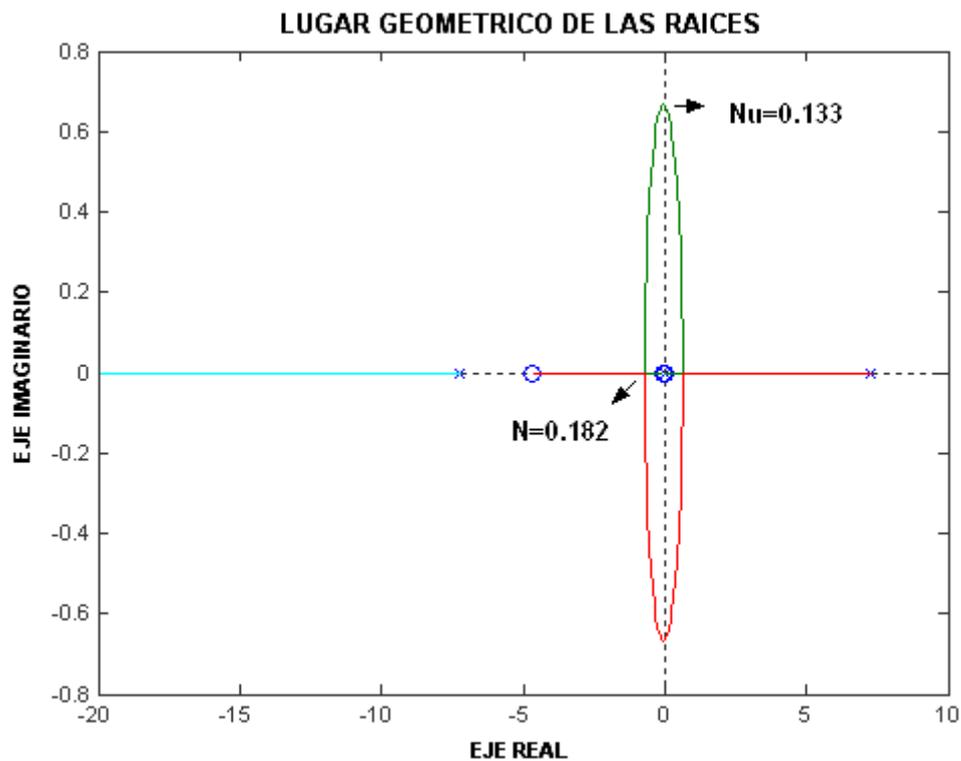
$$1 + \frac{N \left[ \left( \left( I + m\ell^2 \right) \left( \frac{K_1 K_2}{2R_a r^2 q} \right) + 20 \frac{m\ell K_1}{2R_a r q} \right) \cdot S^3 + 100 \frac{m\ell K_1}{2R_a r q} \cdot S^2 + \left( 50 \frac{m\ell K_1}{2R_a r q} - mg\ell \left( \frac{K_1 K_2}{2R_a r^2 q} \right) \right) \cdot S \right]}{S^4 - \frac{mg\ell}{q} \left( M + m + \frac{J_o}{2r^2} \right) \cdot S^2} = 0$$

(4-39)

Reordenando y factorizando,

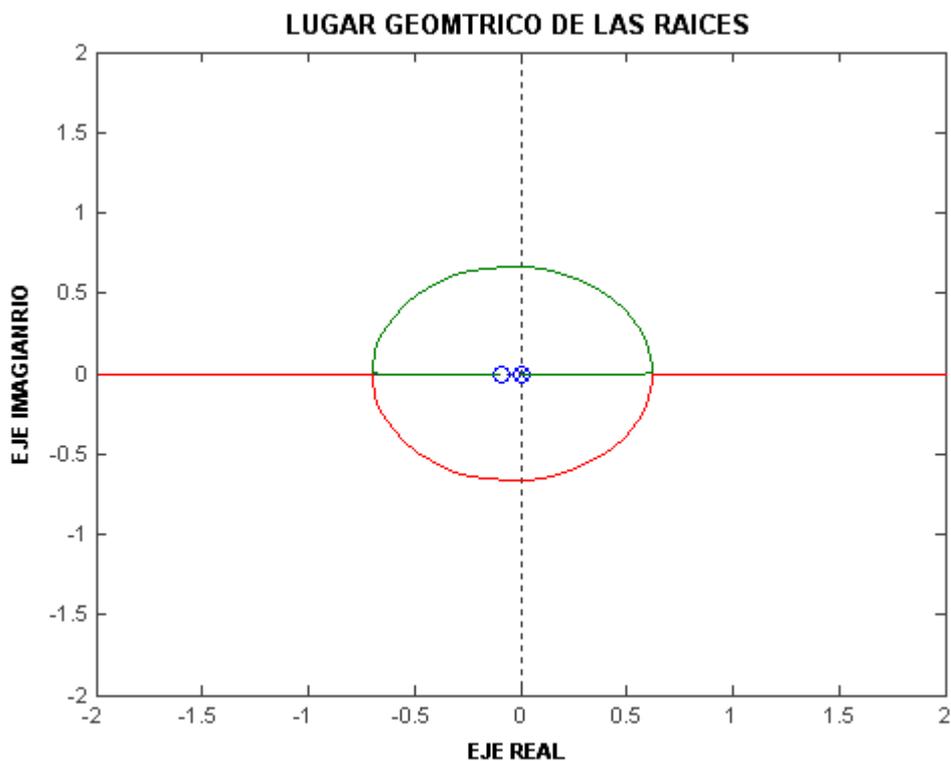
$$1 + (82.21 \cdot N) \frac{(S + 4.7112)(S + 0.0941)}{S \cdot (S + 7.245)(S - 7.245)} = 0$$

Ahora procediendo a trazar el LGR con ayuda de Matlab, tenemos:



**FIGURA 4-10:** TRAZO DEL LGR PARA DETERMINAR LA REDUCCIÓN ÓPTIMA

Estableciendo nuevas limitantes que visualicen una mejor forma del comportamiento del LGR, tenemos:



**FIGURA 4-11:** TRAZO DEL LGR PARA DETERMINAR LA REDUCCIÓN ÓPTIMA

Ahora para justificar el factor de ajuste o ganancia última (razón de reducción crítica), que delimita la región la estabilidad, es mediante el criterio de Routh con el uso de la ecuación característica del sistema:

$$S^3 - 52.49 \cdot S + N(82.21 \cdot S^2 + 395 \cdot S + 36.45) = 0 \quad (4-40)$$

Reagrupando en función decreciente del grado del polinomio

$$S^3 + (82.21 \cdot N)S^2 + (395 \cdot N - 52.49)S + 36.45 \cdot N = 0$$

Entonces las condiciones de estabilidad serian:

$$N > 0, \quad N > 0.134, \quad \text{y} \quad 82.21(395 \cdot N - 52.45) > 36.45 \cdot N$$

Por lo que la ganancia crítica es

$$N > 0.133 \Rightarrow N_u = 0.133$$

De la misma manera para establecer el punto exacto donde se produce la bifurcación del LGR, debemos resolver la siguiente expresión:

$$\frac{dN}{dS} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dS} \left( -\frac{S^3 - 52.49 \cdot S}{82.21 \cdot S^2 + 395 \cdot S + 36.45} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$(3 \cdot S^2 - 52.49)(82.21 \cdot S^2 + 395 \cdot S + 36.45) - (164.42 \cdot S + 395)(S^3 - 52.49 \cdot S) = 0$$

(4-41)

La última expresión genera los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 & -4.7660 + 5.5499i \\
 & -4.7660 - 5.5499i \\
 & -0.6993 \\
 & 0.6219
 \end{aligned}$$

Denótese que los números complejos corresponden a soluciones extrañas y en donde el único valor de nuestro interés es el número real negativo, por lo que a partir de aquel estableceremos la ganancia correspondiente, mediante la siguiente expresión:

$$\text{Valor de Ajuste} = \frac{\prod_{n}(\text{dist } x)}{\prod_{m}(\text{dist } o)} \Rightarrow \quad (4-42)$$

$$82.21 \cdot N = \frac{(7.245 - 0.7)(7.245 + 0.7)(0.7)}{(4.7112 - 0.7)(0.7 - 0.0941)} = 14.98 \Rightarrow$$

$$N = 0.182$$

Podemos inferir acorde a nuestros resultados que en función de la acogida de razones de reducción prácticas, **el comportamiento es sobreamortiguado debido a la oscilación del los polos dominantes para valores muy cercanos.**

Otra manera diferente de llevar a cabo lo antes planteado, es con la ayuda de la matriz de estado en donde se debe observar los eigenvalores de esta matriz ante las variaciones de la razón de reducción.

Como conclusión final, podemos afirmar que a medida que incrementamos la razón de reducción, mejora las condiciones en estado estable pero desmejora levemente la respuesta transitoria especialmente con el sobresalto de la misma. El hecho de no establecer una solución exacta mediante análisis antes expuesto, no conlleva a la consideración de establecer un reductor modular en base a la razón de reducción examinadas para propósitos didácticos.

Finalmente, podemos describir los parámetros que componen nuestro sistema:

PARÁMETRO	DESCRIPCIÓN	VALOR
M	Masa del Carro	0,435 Kg.
m	Masa del Péndulo	0,270 Kg.
$l$	Longitud media del Péndulo	0,165 m.
b	Coeficiente de Fricción Viscosa del Carro	0,1 N.s/m
B	Coeficiente de Fricción Viscosa del Péndulo	0,05 N.m/rad/s
$K_1$	Constante del Par Motriz	0,27173 N.m/A
$K_2$	Constante de la Fuerza Contra electromotriz	0,15584 V/rad/s
$R_a$	Resistencia de Armadura del Motor	3,69 $\Omega$
$K_\theta$	Ganancia del Potenciómetro del Péndulo	1,637 V/rad
$K_x$	Ganancia del Potenciómetro del Carro	4,244 V/m
d	Diámetro de la Polea	0,075 m
n	Reducción de la caja Reductora	1.5, 3, 7, 10
$J_o$	Inercia reducida al eje del motor	2,77 e-3 Kg.m <sup>2</sup>

**TABLA 4-8:** PARÁMETROS FÍSICOS DEL SISTEMA PÉNDULO INVERTIDO.

## 4.2 Control Óptimo de un Sistema Lineal Regulador.

Como hemos expuesto nuestro, problema básicamente se caracteriza por ser de tipo regulador, es decir todas las variables de estado son sometidas a una señal de comparación de valor cero, por lo tanto únicamente el problema se centra al diseño de un regulador óptimo. Pero antes de proceder a la definición formal de un regulador óptimo, expondremos algunos conceptos de utilidad para una mejor comprensión.

### **Análisis de Estabilidad de Liapunov.**

El método de Liapunov para análisis de estabilidad es en principio muy general y poderoso. El inconveniente principal, la cual seriamente limita su uso en la práctica, es a menudo la dificultad con la construcción de la *función de Liapunov* o *Función-V* requerida para el método.

El sistema dinámico debe ser descrito mediante un modelo de espacio de estados, la cual es una descripción en términos de un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Por ejemplo, un sistema no lineal podría ser descrito por un conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-43)$$

finalmente puede ser escrita compactamente en la forma de un modelado de espacio de estados como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (4-44a)$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{bmatrix} \quad (4-44b)$$

El vector  $\mathbf{x}$ , es el vector de estado, y sus elementos son las variables de estado. El origen  $\mathbf{x} = 0$  ( $x_1 = \dots = x_n = 0$ ) del espacio de estados serán asumidos para ser una solución de equilibrio, donde  $\mathbf{f}_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

La función de Liapunov,  $V(x_1 = \dots = x_n = 0)$ , es una función escalar de las variables de estado. Para motivar a lo siguiente y hacer el teorema de estabilidad creíble, permita  $V$  ser seleccionado para ser

$$V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

aquí  $\|\mathbf{x}\|$  es la norma euclidiana de  $\mathbf{x}$ , la longitud del vector  $\mathbf{x}$  y la distancia al origen del espacio de estados.  $V$  es evidentemente positiva y  $V(0) = 0$ . Ahora permita

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n \quad (4-45)$$

ser calculada substituyendo la ecuación (4-43). Si  $dV/dt$  puede ser encontrada para ser siempre negativa con  $dV(0)/dt = 0$ , entonces  $V$  aparentemente decrece continuamente, y el estado debe culminar en el origen de los espacios de estados, implicando estabilidad asintótica.

Podría ser que  $dV/dt$  es solo negativa en una región suficientemente pequeña alrededor del origen. Esto nos conduce a establecer las siguientes distinciones

1. Un sistema es *globalmente estable asintóticamente* si se retorna a  $\mathbf{x} = 0$ , después de cualquier intensidad de disturbio.
2. Es *localmente estable asintóticamente* si logramos llegar al origen después de un suficientemente pequeño disturbio.

3. Es *estable* si para cualquier intensidad de disturbio dado, la solución permanece dentro de una cierta región.

Para desarrollar estos conceptos, las definiciones siguientes son usadas

1.  $V$  es *definida positiva (negativa)* en una región que contiene  $x = 0$  si es positiva (negativa) en cualquier parte excepto para  $V(0) = 0$ .
2.  $V$  es *semidefinida positiva (negativa)* en una región si es positiva (negativa) en todos los estados excepto en el origen y en ciertos otros estados, en donde es cero.
3.  $V$  es *indefinida* si ambos signos ocurren en la misma región.

El *teorema de Sylvester* es usado para encontrar tales propiedades de una forma cuadrática general

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}) \quad (4-46)$$

Esto puede ser escrito como

$$Q = x' A x$$

$$x' = [x_1, \dots, x_n]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4-47)$$

Aquí,  $\mathbf{x}'$  es la transpuesta de  $\mathbf{x}$ , y  $\mathbf{A}$  es una matriz simétrica.

### Teorema de Sylvester.

Q es definida positiva si y solo si todos los menores principales de la determinante  $|A|$  son mayores a cero:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad |A| > 0 \quad (4-48)$$

Si uno o mas son ceros, Q es semidefinida. Una matriz A, es definida positiva si la correspondiente forma cuadrática es definida positiva, y  $-A$  es entonces definida negativa.

**Teorema de Estabilidad de Liapunov.**

Si existe una matriz definida positiva  $V$ , y  $V \rightarrow \infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$ , el sistema es asintóticamente estable en la región en la cual  $dV/dt$  es definida negativa, y estable si  $dV/dt$  es semidefinida negativa. Las propiedades son globales si la región se extiende sobre todo el espacio de estados.

**Teorema de Inestabilidad de Liapunov**

Si existe una matriz  $V$  tal que  $dV/dt$  es definida negativa, y  $dV/dt \rightarrow -\infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$ , el sistema es inestable en la región en la cual  $V$  no es definida o semidefinida positiva.

**Problema del Regulador Óptimo.**

Nos restringiremos nuestra atención al problema de tipo regulador, donde nuestro sistema es asumido por estar en equilibrio y desear mantenerlo en tal condición – o “set point”- a pesar de la presencia de disturbios. Entonces, el objetivo se centra en minimizar los efectos de los disturbios sobre el sistema.

Esto puede ser realizado con problemas de tipo de seguimiento o servomecanismos, donde el objetivo es seguir una referencia dada o entrada externa. Puede ser demostrado que los problemas de seguimiento pueden ser convertidos a problemas tipo regulador.

El sistema descrito por la ecuación de estado:

$$\dot{x} = Ax + B\mu \quad (4-49)$$

es estable, si y solo si los eigenvalores de la matriz de estados, A, que son las raíces de la ecuación característica

$$|sI - A| = 0 \quad (4-50)$$

todas son localizadas en semiplano izquierdo del plano s. Por lo que dichos eigenvalores podrían ser colocados lejos del eje imaginario, haciendo la velocidad de respuesta arbitrariamente rápida. No obstante esto podría requerir una entrada de control grandes y por ende actuadores con facultad para asimilarlos. Esto implica un alto costo de control. Un **control óptimo** implica una equidad entre el desempeño y el costo de control, con ello además determina la alternativa deseada para los nuevos eigenvalores en la técnica de ubicación de polos. En el control óptimo, el control busca

minimizar el valor del índice de desempeño  $J$ , la cual toma a menudo la forma estándar:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mu' \mathbf{R} \mu) dt \quad (4-51)$$

El problema es minimizar  $J$  con respecto a la entrada de control  $\mu(t)$ . Esto es conocido como el problema **regulador cuadrático lineal** (LQR). Una simple interpretación de la función de costo es como la describiremos. Si el sistema es escalar (de primer orden), la función de costo se convierte:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (q x^2 + r \mu^2) dt \quad (4-52)$$

Ahora podemos notar que  $J$  representa la suma de energía total del estado y de control. Si  $r$  es muy grande en relación a  $q$ , la energía de control es penalizada muy fuerte. Esto físicamente se traduce en la implementación en la ley de control de mas pequeños usos de motores, actuadores y ganancias de amplificadores. Similarmente si  $q$  es mucho mas grande que  $r$ , el estado es penalizado fuertemente, resultando un sistema muy amortiguado que evita grandes fluctuaciones o sobresaltos en el estado del sistema

Remitiéndonos a la ecuación (4-51), nótese que  $\mathbf{Q}$  es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva (o semidefinida positiva),  $\mathbf{R}$  es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva y  $\mu$  no está restringido. Observe que el segundo término el segundo término del segundo miembro de la ecuación (4-51) considera el gasto de la energía de las señales de control. Las matrices  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  determinan la importancia relativa del error y del gasto de este sistema.

**Teorema del Regulador Óptimo.**- El control óptimo es una matriz de ganancia constante para retroalimentación de estados

$$\mu_{\text{opt}} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \qquad \mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} \qquad (4-53)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz del vector de control óptimo y  $\mathbf{P}$  es una matriz simétrica obtenida a través de la resolución de la ecuación matricial algebraica, conocida como **ecuación de Riccati**.

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} = 0 \qquad (4-54)$$

En casos muy simples, la ecuación de Riccati puede ser resuelta directamente, sin embargo usualmente se hace uso de un ordenador para

evitar tediosos cálculos, entre ellos disponemos de MATLAB, cuyo comando **lqr(A,B,Q,R)** resuelve el problema del regulador cuadrático lineal en tiempo continuo y la ecuación de Riccati asociada. Este comando calcula la matriz de ganancias de realimentación óptima **K**.

Es necesario observar que la elección de los eigenvalores para la ubicación de polos y de las matrices de control óptimo generalmente involucra ensayos y error hasta que el resultado sea satisfactorio desde el punto de vista de la respuesta transiente de los estados y la entrada de control, que para nuestro caso será una señal de prueba de tipo escalón.

#### **4.3 Diseño del Sistema de Control mediante la Realimentación de Estados con Observador de orden mínimo.**

El problema del péndulo invertido ya ha sido descrito, y analizado de diferentes perspectivas con el objeto de análisis y evaluación de los algunos de los diferentes de métodos de control. Ahora presentaremos en esta sección una componente adicional que requiere el desarrollo de este proyecto con fines prácticos de implementación.

Una vez que incluimos la dinámica del motor DC de imán permanente que controlara el carro de acuerdo a una señal de control ejercida por el controlador, adicionaremos como hemos mencionado, el diseño de un observador de orden mínimo tal cual se explico en el capítulo anterior.

Bajo el principio de separación, usado para determinar independientemente las ganancias del controlador y las ganancias del observador de orden mínimo, en donde el resultado final se lo implementará usando amplificadores operacionales, para ello primero obtendremos la representación de espacio de estados final.

Definiendo las variables de estado  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_3$  y  $\chi_4$  mediante:

$$\chi_1 = \theta$$

$$\chi_2 = \dot{\theta}$$

$$\chi_3 = X$$

$$\chi_4 = \dot{X}$$

Considerando que el ángulo  $\theta$  indica la rotación de la barrar del péndulo con respecto al punto P, y que X es la ubicación del carro. Consideramos  $\theta$  y X como salidas del sistema, o

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_3 \end{bmatrix}$$

(Observe que tanto  $\theta$  como  $X$  son cantidades que se miden fácilmente). Así a partir de la definición de las variables de estado y las ecuaciones que definen su comportamiento dinámico, obtenemos:

$$\dot{\chi}_1 = \chi_2$$

$$\dot{\chi}_2 = \frac{\left(M + m + \frac{J_0}{2r^2}\right)m\ell}{q}g\chi_1 - \frac{B\left(M + m + \frac{J_0}{2r^2}\right)}{q}\chi_2 - \frac{\left(b + \frac{NK_1K_2}{2R_a r^2}\right)m\ell}{q}\chi_4 + \frac{m\ell NK_1}{2qR_a r}e$$

$$\dot{\chi}_3 = \chi_4$$

$$\dot{\chi}_4 = \frac{(m\ell)^2}{q}g\chi_1 - \frac{Bm\ell}{q}\chi_2 - \frac{(I + m\ell^2)\left(b + \frac{NK_1K_2}{2R_a r^2}\right)}{q}\chi_4 + \frac{NK_1(I + m\ell^2)}{2qR_a r}e \quad (4-55)$$

En donde

$$q = \left[ \left( M + m + \frac{J_0}{2r^2} \right) (I + m\ell^2) - (m\ell)^2 \right]$$

En términos de las ecuaciones matriciales, donde el vector de estado  $x$  se divide en dos partes, un escalar y un vector, por lo que tenemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\left(M + m + \frac{J_o}{2r^2}\right)mg\ell}{q} & 0 & -\frac{B\left(M + m + \frac{J_o}{2r^2}\right)}{q} & -\frac{m\ell\left(b + \frac{NK_1K_2}{2R_ar^2}\right)}{q} \\ \frac{(m\ell)^2}{q} & 0 & -\frac{Bm\ell}{q} & -\frac{\left(I + m\ell^2\right)\left(b + \frac{NK_1K_2}{2R_ar^2}\right)}{q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m\ell NK_1}{2qR_ar} \\ \frac{NK_1(I + m\ell^2)}{2qR_ar} \end{bmatrix} \cdot \mu$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Sin desviarnos de la ratificación de inestabilidad del sistema, procederemos a corroborar tal condición para el sistema completo (carro-péndulo-actuador-elementos mecánicos) usando el siguiente archivo\_M:

```

%..PROBLEMA DEL REGULADOR CUADRATICO LINEAL...
%..Obtención de la matriz de estado y los eigenvalores
%..de la planta para el diseño final.....
M = 0.435;
m = 0.270;
b = 0.10;
B = 0.05;
g = 9.8;
l = 0.165;
l = m*I^2/3;           %...Inercia del péndulo
r = 0.0375;           %...Radio de la polea
K1 = 0.27173;
K2 = 0.15584;
Ra = 3.69;
N = 10;               %...ganancia del tren de engranajes
Jm = 0.00178          %...Inercia del motor
Jo = Jm+(M+m)*r^2     %...Inercia referida al eje del motor
E = 0.6;              %...ganancia de voltaje
q = (M+m+Jo/(2*r^2))*(l+m*I^2)-(m*I)^2; % Denominador para las Matrices A y B
A = [0                0        1        0;
      0                0        0        1;
      (M+m+Jo/(2*r^2))*m*I*g/q  0  -B*(M+m+Jo/(2*r^2))/q  -m*I*(b+(N*K1)*K2/(2*Ra*r^2))/q;
      (m*I)^2*g/q      0  -B*m*I/q  -(b+(N*K1)*K2/(2*Ra*r^2))*(l+m*I^2)/q]
B = [      0;
      0;
      E*m*I*N*K1/(2*q*Ra*r);
      E*(l+m*I^2)*N*K1/(2*q*Ra*r)]
C = [1 0 0 0; 0 1 0 0];
D = [0; 0];
p=eig(A)

```

**TABLA 4-9:** INSTRUCCIONES EN MATLAB PARA DETERMINAR LA ESTABILIDAD DEL SISTEMA EN LAZO ABIERTO POR MEDIO DE LOS EIGENVALORES DE LA MATRIZ DE ESTADO.

Siendo los eigenvalores resultantes los siguientes

**p =**

```

0
4.6230
-9.2392
-28.6706

```

por lo que podemos aseverar claramente que la planta es inestable a lazo abierto, debido a que uno de ellos se localiza a la semi-plano derecha del plano s.

Para completar la funcionalidad correcta a más de nuestro controlador y actuador debemos hacer uso de un circuito de potencia que a su vez cumpla con las funciones de amplificador de potencia y permita además la inversión de giro por parte del motor a través de el cambio de dirección de las corrientes de armadura conocido como “driver” que manejará el motor DC con un puente H implementado por medio de transistores, en donde además justificaremos el uso del valor de la ganancia de voltaje en el archivo\_M empleado últimamente.

### **Driver del Motor**

El propósito esencial de los amplificadores electrónicos consiste en aumentar la amplitud y la potencia de una señal de tal forma que pueda realizarse ya sea un trabajo útil o un procesamiento de información más fácilmente.

La potencia de la señal de salida es mayor que la potencia de la señal de entrada; la potencia adicional se suministra por intermedio de la fuente de polarización. La acción del amplificador es por tanto la conversión de energía en la cual la potencia de polarización se convierte en potencia de señal dentro del dispositivo.

En nuestro caso, el circuito de amplificación que implementaremos utilizará transistores de potencia (La beta " $\beta$ " de un transistor de potencia es por lo general menor de 100), con lo cual son capaces de manejar una gran potencia o corriente, aunque no proporcionan mucha ganancia de voltaje.

Las características principales de un amplificador de gran señal son la eficiencia de potencia del circuito, la cantidad máxima de potencia que es capaz de manejar el circuito y el acoplamiento de impedancias.

En nuestro caso práctico, usaremos la implementación de transistores para la obtención del "driver" que manejará al motor de DC, el cual será de tipo puente\_H de dispositivos bipolares complementarios que además hace uso de una retroalimentación local, en donde claramente se justifica el uso de un amplificador de potencia tipo AB. ( Ver apéndice B)

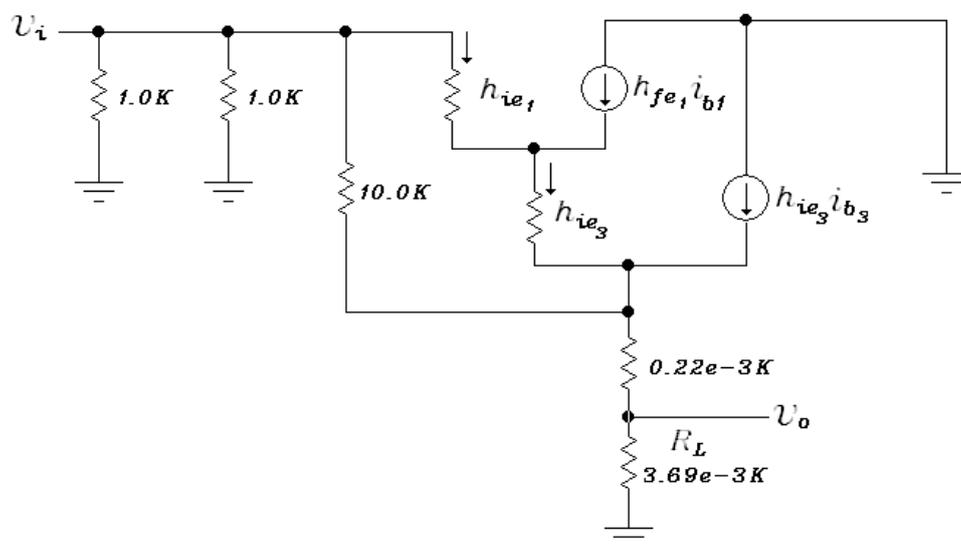
Con el uso de transistores complementarios (**nnp** y **npn**) es posible obtener una salida de ciclo completo a través de una carga usando medios ciclos de operación de cada transistor, como se muestra en la figura 4-10. La **distorsión de cruce** puede ser una desventaja de este circuito complementario el cual se refiere al hecho de que durante el cruce de la señal de positivo a negativo existe una falta de linealidad en la señal de salida como resultado del hecho de que el circuito no proporciona una conmutación exacta de un transistor apagado y otro encendido en la condición de cero voltaje. Polarizar los transistores en clase AB mejora esta operación, puesto que polariza ambos transistores para que permanezcan encendidos por un poco más de medio ciclo. La versión práctica en nuestro circuito en contrafase, acopla la carga como salida de seguidor de emisor, por lo que la resistencia de carga está además acoplada por la resistencia de salida baja de la fuente excitadora. *El circuito necesita transistores complementarios conectados en Darlington para proporcionar corriente de salida más alta y menor resistencia de salida.* Las resistencias acopladas a la configuración Darlington más el uso de los diodos, como se muestra en la figura garantiza la operación de los transistores y así provoca la eliminación del efecto de distorsión de cruce por cero debido a la caída de potencial que estos generan.

Si las condiciones de operación se altera, debido principalmente al incremento desmedido de temperatura, genera una alza significativa de corriente, demandando con ello una mayor potencia lo cual a su vez genera calor y a su vez perjudica de manera permanente a los transistores, fenómeno conocido como **avalancha térmica**. No obstante el uso de diodos y las resistencias acopladas a los transistores minimiza la posibilidad de ocurrir tal efecto.

### **Modelo Híbrido Equivalente Simplificado del Driver del Motor.**

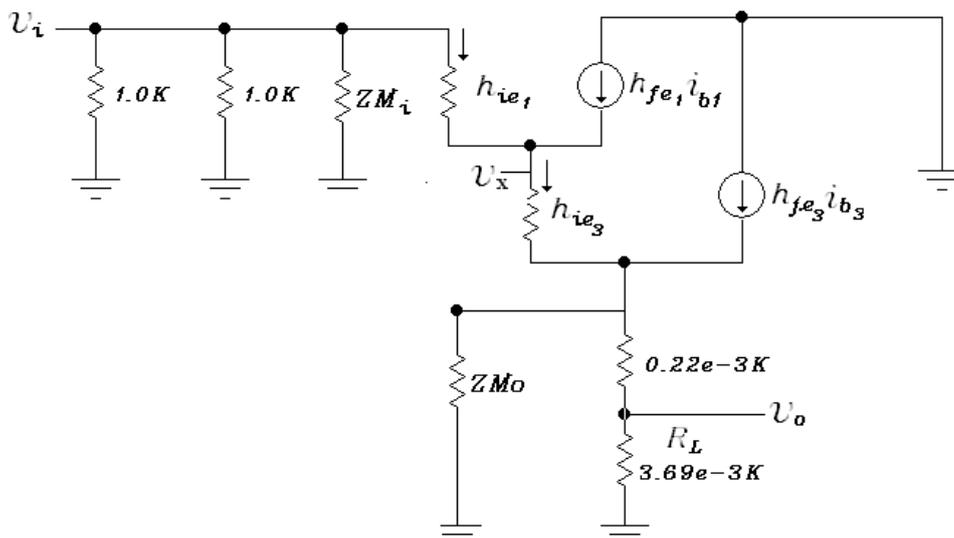
Las cantidades  $h_{ie}$  y  $h_{fe}$  se conocen como los parámetros híbridos y consisten en los componentes de pequeña señal del circuito equivalente simplificado en "ac", en otras palabras, los parámetros  $h$  están determinados en la región de operación para la señal aplicada, de tal forma que el circuito equivalente será el mas exacto que éste disponible. El parámetro  $h_{ie}$  se determina a partir de las características de entrada, mientras que el parámetro  $h_{fe}$  se obtiene desde la salida, no obstante no enfatizaremos la deducción de las expresiones que nos permiten obtener tales cantidades.

A continuación detallaremos el análisis en “ac” del amplificador clase AB “push-pull”, denotando de antemano que se trata de una configuración de base común, en donde se analiza únicamente los transistores que operan en medio ciclo.



**FIGURA 4-12:** MODELO AC DEL DRIVER DEL MOTOR MEDIANTE PARÁMETROS HÍBRIDOS.

Para simplificar el circuito anterior a través del teorema de Millar, y eliminar la impedancia de retroalimentación, tenemos:



**FIGURA 4-13:** MODELO AC DEL DRIVER DEL MOTOR CON PARÁMETROS HÍBRIDOS EN BASE AL TEOREMA DE MILLER.

Siendo:

$$ZM_o = Z \left( \frac{AV}{AV-1} \right), \quad ZM_i = \frac{Z}{1-AV} \quad \text{y} \quad h_{fe} = \beta$$

Analizando por separado las dos etapas amplificadoras y considerando que la impedancia de salida de Miller, es alta en relación a la impedancia situada en paralelo a la misma, por lo que podemos establecer:

$$AV_2 = \frac{V_o}{V_x} \approx \frac{R_L (\beta_3 + 1) \cdot i_{b3}}{h_{ie3} i_{b3} + R_L (\beta_3 + 1) i_{b3}} = \frac{1}{\frac{h_{ie3}}{R_L (\beta_3 + 1)} + 1}$$

Para una configuración de base común, el parámetro híbrido  $h_{ie}$  es insignificante, por lo que:

$$AV_2 \approx 1$$

Ahora, para el primer transistor, la ganancia de voltaje es:

$$AV_1 = \frac{V_x}{V_i} \approx \frac{h_{ie3}(\beta_1 + 1) \cdot i_{b1} + R_L(\beta_1 + 1)(\beta_3 + 1) \cdot i_{b1}}{h_{ie1}i_{b1} + h_{ie3}(\beta_1 + 1) \cdot i_{b1} + R_L(\beta_1 + 1)(\beta_3 + 1) \cdot i_{b1}}$$

$$\text{Si } h_{ie1} = \beta_1 h_{ie3}$$

Reordenado la expresión anterior, obtenemos:

$$AV_1 \approx \frac{1}{\frac{\beta_1}{(\beta_1 + 1) + \frac{R_L(\beta_1 + 1)(\beta_3 + 1)}{h_{ie3}}} + 1}, \quad \text{Si } h_{ie3} \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$AV_1 \approx 1$$

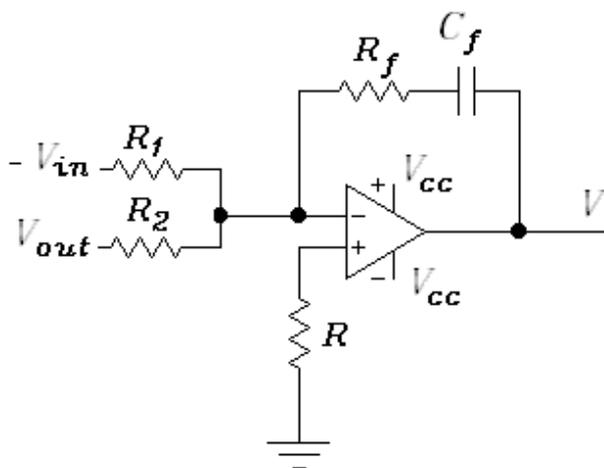
$$\therefore AV = AV_1 \times AV_2 \approx 1$$

Como podemos percibir la ganancia de voltaje no es prioridad de nuestro circuito amplificador, por lo que la ganancia de corriente compensara el

aumento de potencia, debida a la presencia de una impedancia de entrada significativa.

Remitiéndonos al amplificador del motor, observaremos la implementación de un controlador proporcional-integral (PI), la cual a su vez hace la función de cuan rápido quiero corregir la señal de error, siendo esta la diferencia entre el voltaje de entrada y el voltaje de salida, comparado este último a través del lazo de retroalimentación existente. La caída de potencial en la configuración Darlington es de 1.4 voltios provocando que la señal de salida difiera en esa cantidad a la entrada, de ahí el uso del controlador en lazo cerrado.

A continuación realizaremos un breve análisis al controlador PI utilizado, haciendo hincapié que existe un amplificador inversor unitario antes del controlador mencionado, por lo que:



**FIGURA 4-14:** AMPLIFICADOR OPERACIONAL SUMADOR INVERSOR.

Dado que la ganancia de un amplificador operacional es muy alta, es necesario tener una retroalimentación negativa de la salida, tal cual se observa en la figura para hacer estable el amplificador.

En el amplificador operacional ideal no fluye corriente en los terminales de entrada, y el voltaje de salida no se ve afectado por la carga conectada a la terminal de salida. En otras palabras la impedancia de entrada es infinita y la impedancia de salida es cero, por ende podemos afirmar lo siguiente:

Dado que la capacitancia en el lazo de retroalimentación es pequeña, su función es esencialmente la de actuar como filtro ante las señales de ruido tomadas por los potenciómetros, no obstante para efectos prácticos se despreciará tal factor por lo que resulta.

$$\frac{-V_i}{R_1} + \frac{V_o}{R_2} = -\frac{V}{R_f} \quad (4.56)$$

El uso de un inversor proporcional, provoca que la expresión anterior tome la forma

$$V = V_i \left( \frac{R_f}{R_1} \right) - V_o \left( \frac{R_f}{R_2} \right) \quad (4.57)$$

Remitiéndonos a los valores empleados para el controlador, la función de transferencia final será

$$V = 1.5(V_i - V_o) \quad (4-58)$$

Finalmente debida a la existencia de amplificador en conexión con un controlador PI en lazo cerrado, la función de transferencia del circuito amplificador global es

$$AV_G = \frac{1 \times 1.5}{1 + 1 \times 1.5} = 0.6 \quad (4-59)$$

### **Obtención de la Matriz de Ganancias de Realimentación del Estado.**

Partiendo del hecho de que se trata de una resolución de tipo regulador (problema del regulador cuadrático lineal) y bajo el principio de independencia del diseño de las matrices de ganancias de realimentación de estados y de la matriz de ganancias del observador, procedemos a la determinación de la primera matriz mencionada..

Teniendo en consideración que las matrices  $Q$  y  $R$  que definen la función cuadrática deben ser una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva. Esto último nos permite estimar las matrices adecuadas en función de prueba y error para lograr el mejor desempeño. A continuación la implementación final del archivo\_M correspondiente:

```

%.....Regulador Cuadrático Lineal para determinar K..
M = 0.435;
m = 0.270;
b = 0.10;
B = 0.05;
g = 9.80;
l = 0.165;
I = m*l^2/3;           %..Inercia del péndulo.
r = 0.0375;          %..Radio de la polea
K1 = 0.27173;
K2 = 0.15584;
Ra = 3.69;
N = 10;              %...ganancia del tren de engranajes
Jm = 0.00178        %...Inercia del motor
Jo = Jm+(M+m)*r^2   %...Inercia referida al eje del motor
E = 0.6;             %..amplificador del driver del motor
q = (M+m+Jo/(2*r^2))*(l+m*l^2)-(m*l)^2; % Denominador para las Matrices A y B
A = [0               0       1           0;
      0               0       0           1;
      (M+m+Jo/(2*r^2))*m*l*g/q  0  -B*(M+m+Jo/(2*r^2))/q  -m*l*(b+(N*K1)*K2/(2*Ra*r^2))/q;
      (m*l)^2*g/q      0       -B*m*l/q      -(b+(N*K1)*K2/(2*Ra*r^2))*(l+m*l^2)/q];
B = [ 0;
      0;
      E*m*l*N*K1/(q*Ra*r);
      E*(l+m*l^2)*N*K1/(q*Ra*r)];
C = [1 0 0 0; 0 1 0 0];
D = [0; 0];
x = 1000; % asignacion a prueba y error de las matrices Q y R.
y = 1000;
Q = [x 0 0 0;
      0 y 0 0;
      0 0 1 0;
      0 0 0 1];
R = 1;
K = lqr(A,B,Q,R)
Ac = [(A-B*K)];
Bc = [B];
Cc = [C];
Dc = [D];
p=eig(Ac)
sys_cl = ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
T = 0:0.01:4; % Tiempo de simulación = 10 seg
U = ones(size(T)); % u = 1, entrada escalón.
X0 = [0 0 0 0]; % condición inicial
[Y,T,X]=lsim(sys_cl,U,T,X0); % simulate
plot(T,Y)
legend('Pendulo [rad]','Carro [m]')

```

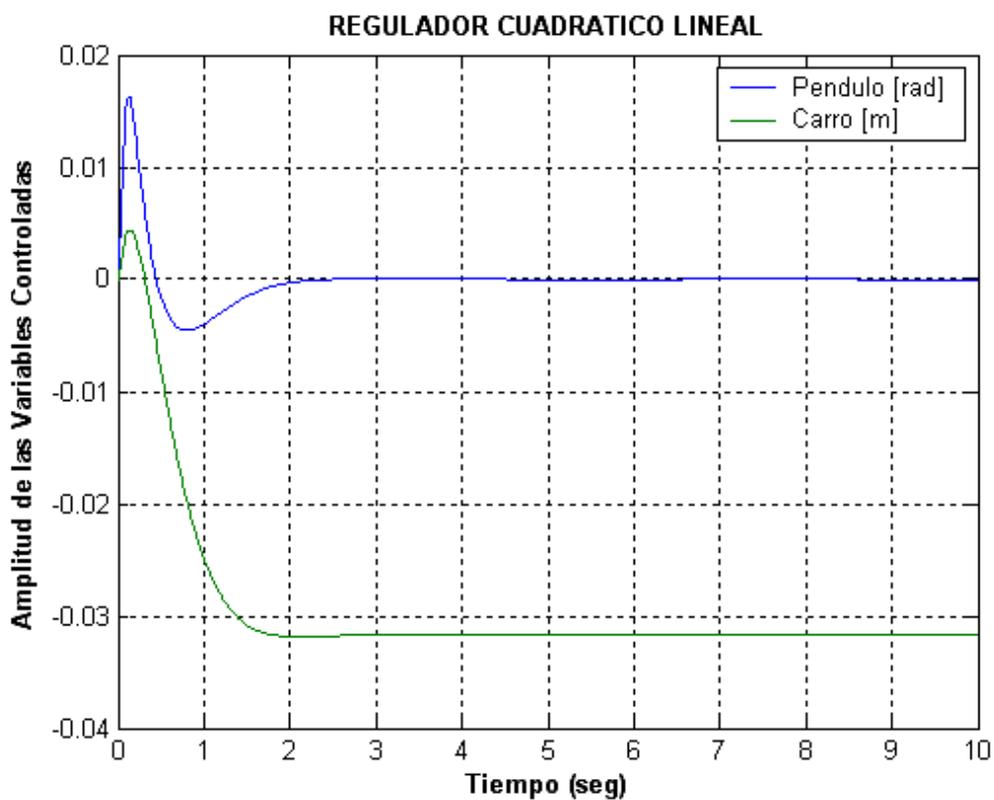
**TABLA 4-10:** INSTRUCCIONES EN MATLAB PARA DETERMINAR K.

La ejecución del archive genera los siguientes resultados.

**K =**

[87.7593 -31.6228 8.1430 -31.3855];

con la respectiva respuesta transitoria que ella conlleva:



**FIGURA 4-14:** RESPUESTA TRANSITORIA DEL SISTEMA DE CONTROL EN BASE AL LQR CON UNA SEÑAL ESCALÓN COMO PERTURBACIÓN.

Los resultados obtenidos satisfacen todas nuestras expectativas, por lo que podemos concluir el motor DC de imán permanente será controlado por:

$$\mu = -87.7593(\theta) - 8.1430(\dot{\theta}) + 31.6228(x) + 31.3855(\dot{x}) \quad (4-60)$$

y en donde los nuevos eigenvalores del sistema a lazo cerrado son ahora:

**p =**

-25.2911 + 3.0549i  
 -25.2911 - 3.0549i  
 -2.4943 + 1.5403i  
 -2.4943 - 1.5403i

La ley de control estabiliza el sistema y los polos dominantes indican que el sistema tiene un tiempo de establecimiento menos a los dos segundos tal cual lo podemos denotar en la gráfica.

### **Obtención de la Matriz de Ganancias del Observador de Orden Mínimo.**

La visión de nuestro diseño permiten que dos de las variables de estado se la puedan medir directamente con precisión, y por ende no necesitan estimarse.

Las mediciones a realizar son la desviación angular instantánea del péndulo y la posición del carro a través del uso de dos potenciómetros y así establecemos las variables de salidas descritas que concuerdan con dos de las variables de estado, de ahí la justificación del uso de un observador de orden mínimo.

Ahora, el motor deberá ser controlado por

$$\mu = -K\hat{x}$$

donde  $K$  es la matriz de ganancia de realimentación de estados y  $\hat{x}$  es la variables tanto estimada de los estados como las establecida de forma directa. Para ello como hemos mencionada deberemos determinar la matriz de ganancia del observador  $L$ , para lo cual haremos uso del siguiente archivo\_M, donde se hace énfasis al criterio que estableció Luenberger quien ha demostrado que la observabilidad del par  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  es equivalente a  $(\mathbf{A}_{ab}, \mathbf{A}_{bb})$ . Por consiguiente por dualidad,  $L$  puede ser elegido substituyendo  $\mathbf{A}_{bb}$  por  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}_{ab}$  por  $\mathbf{C}$ :

```

%..Regulador Cuadrático Lineal para determinar L..
M = 0.435;
m = 0.270;
b = 0.10;
B = 0.05;
g = 9.80;
l = 0.165;
l = m*l^2/3;
r = 0.0375;
K1 = 0.27173;
K2 = 0.15584;
Ra = 3.69;
N = 10;           %...ganancia del tren de engranajes
Jm = 0.00178     %...Inercia del motor
Jo = Jm+(M+m)*r^2 %...Inercia referida al eje del motor
E = 0.6;         %..amplificador del driver del motor
q = (M+m+Jo/(2*r^2))*(l+m*l^2)-(m*l)^2; % Denominador para las Matrices A y B
Aaa = [0 0; 0 0];
Aab = [1 0; 0 1];
Aba = [(M+m+Jo/(2*r^2))*m*l*g/q 0;
        (m*l)^2*g/q 0];
Abb = [-B*(M+m)/q  -m*l*(b+(N*K1)*K2/(2*Ra*r^2))/q;
        -B*m*l/q   -(b+(N*K1)*K2/(2*Ra*r^2))*(l+m*l^2)/q];
Ba = [0;0];
Bb = [ E*m*l*N*K1/(2*q*Ra*r);E*(l+m*l^2)*N*K1/(2*q*Ra*r)];
x = 10;           % asignación arbitrario de las matrices Q y R.
y = 10;
Qo = [x 0;
      0 y];
Ro = [1 0;0 1];
L = lqr(Abb',Aab',Qo,Ro)
P =eig(Abb-L*Aab)

```

**TABLA 4-11:** INSTRUCCIONES EN MATLAB PARA DETERMINAR L.

Donde la matriz de ganancia del observador es

**L =**

```

7.8260 -0.5693
-0.5693 0.1786

```

con sus respectivos polos

**P =**

$$-20.6457 + 1.5765i$$

$$-20.6457 - 1.5765i$$

Tal cual se puede apreciar, los polos del observador son muchos mas grande que la del sistema, por lo que cumplimos con unos de los fundamentos principales de diseño del observador.

Remitiéndonos a la ecuación que define el observador de orden mínimo, tenemos que:

$$\dot{\hat{\eta}} = (A_{bb} - LA_{ab})\hat{\eta} + [(A_{bb} - LA_{ab})L + A_{ba} - LA_{aa}]y + (B_b - LB_a)\mu$$

y procediendo al substitución correspondiente, obtenemos que:

$$\dot{\hat{\eta}} = \begin{bmatrix} -13.62 & -124.39 \\ 0.42 & -27.67 \end{bmatrix} \hat{\eta} + \begin{bmatrix} 14.82 & -14.46 \\ 20.35 & -5.18 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 17.10 \\ 3.96 \end{bmatrix} \mu$$

por lo que la solución detallada toma la forma:

$$\dot{\eta}_1 = -13.62 \cdot \eta_1 - 124.39 \cdot \eta_2 + 14.82 \cdot \theta - 14.46 \cdot x + 17.10 \cdot \mu \quad (4-61)$$

$$\dot{\eta}_2 = 0.42 \cdot \eta_1 - 27.67 \cdot \eta_2 + 20.35 \cdot \theta - 5.18 \cdot x + 3.96 \cdot \mu \quad (4-62)$$

A partir de la ecuación para las variables estimadas

$$\hat{x} = Ly + \hat{\eta}:$$

tenemos:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 7.86 & -0.57 \\ -0.57 & 0.18 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\eta}$$

este último resultado al combinar la ecuación de control  $\mu$  y la del estimador

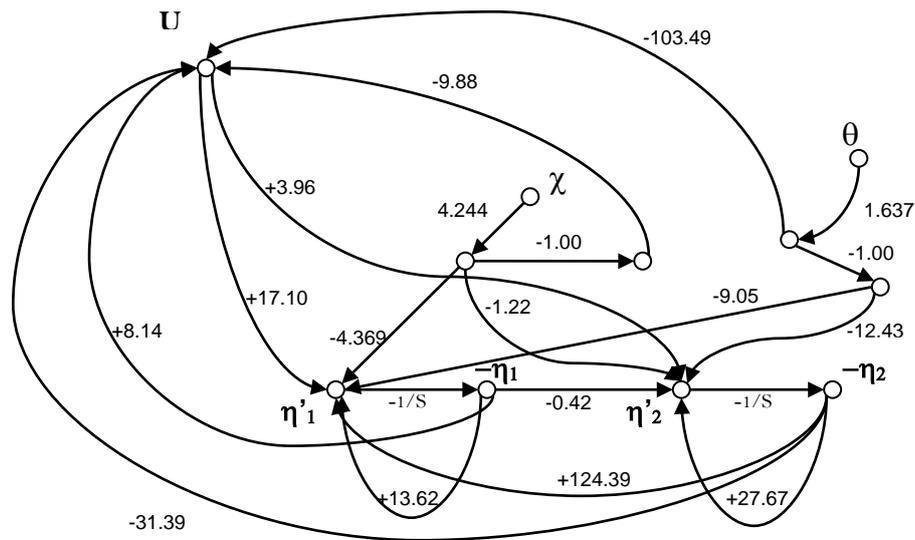
$\hat{x}$ , obtenemos que:

$$\mu = [-169.41 \quad 41.91] \cdot y + [-8.14 \quad 31.39] \cdot \hat{\eta}$$

$$\mu = -169.41(\theta) + 41.91(x) - 8.14(\eta_1) + 31.39(\eta_2) \quad (4-63)$$

El gráfico de flujo de señal del compensador se muestra a continuación basado en las expresiones establecidas por las igualdades (4-61), (4-62) y

(4-63). El diagrama incluye las ganancias de ambos sensores  $K_x$  y  $K_\theta$ , la cual es multiplicada para  $\theta$  y  $\chi$  en su retroalimentación.



**FIGURA 4-16:** DIAGRAMA DE LA SEÑAL DE FLUJO DEL CONTROLADOR PARA EL PÉNDULO INVERTIDO.

### Diseño del Compensador utilizando Amplificadores Operacionales.

Un amplificador operacional, u op-amp, es un amplificador diferencial con una ganancia muy alta, con una elevada impedancia de entrada y una impedancia de salida baja.

Los usos más típicos del amplificador operacional son proporcionar cambios de amplitud de voltaje (amplitud y polaridad), osciladores, circuitos de filtros y muchos otros tipos de circuitos de instrumentación. Un op-amp contiene varias etapas de amplificador diferencial para logra una ganancia de voltaje muy alta.

El op-amp puede conectarse en una gran cantidad de circuitos para proporcionar diversas características de operación, para lo cual en esta sección trataremos algunas conexiones básicas para obtener el circuito práctico que cumpla la función del controlador diseñado a partir de estos tipos de amplificadores. El esquema del circuito para nuestro controlador, es una implementación directa del gráfico de las señales de flujo mostradas. (Ver apéndice C)

### **Implementación del Diseño del Sistema Control Final en Simulink.**

Al igual que en los capítulos anteriores, procederemos a simular y analizar el diseño del sistema de control final a través de Simulink, haciendo hincapié al uso únicamente de la matriz de ganancias de realimentación del estado y no al diseño del observador por obvias razones.

No obstante hemos pasado por alto un aspecto sumamente importante relativo al funcionamiento del motor, tal cual es la “zona muerta” intrínseca en su operación, debido a la demanda de voltaje por parte del motor para vencer la inercia de carga mas de la de su propio eje. Esto no es mas que una región que se caracteriza por poseer una salida nula y en donde nos enfocaremos un poco mas en la siguiente sección.

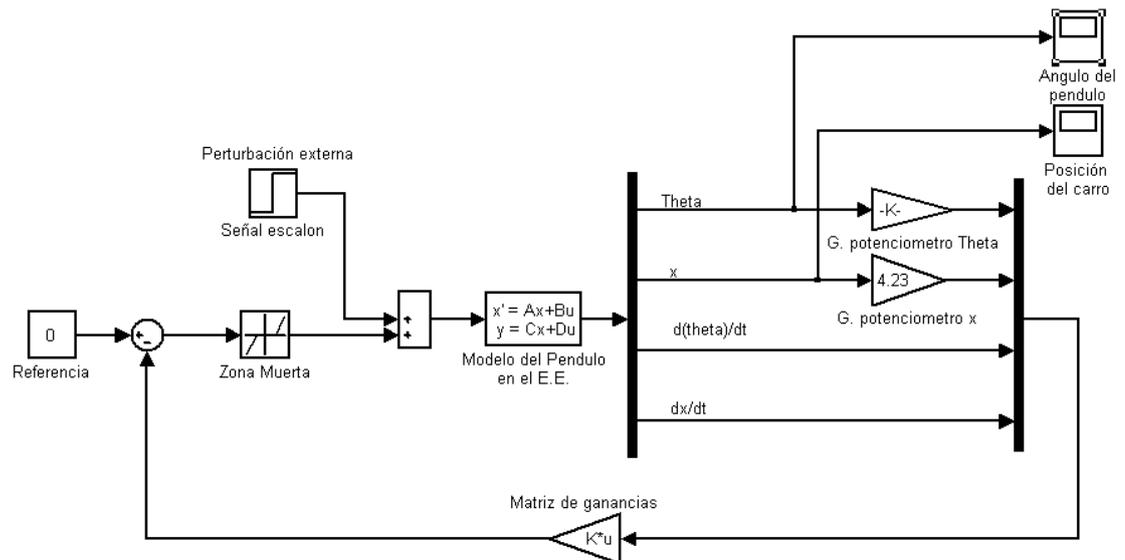
### **Zona Muerta del Motor.**

La zona muerta fue medida lentamente incrementando el voltaje en el motor y observado el mínimo voltaje requerido para hacer que el mismo gire. Este voltaje fue determinado para ser aproximadamente -1.2 V en la dirección a en contra de las manecillas del reloj y 1.8 en la dirección opuesta, observando con ello un comportamiento asimétrico.

Si es necesario, se hará uso de un circuito que compense esta no linealidad en el motor, la misma que debe regirse a la siguiente operación matemática, la cual, si el voltaje compensado fuese conocido exactamente, debemos salir exitosamente de la zona muerte.

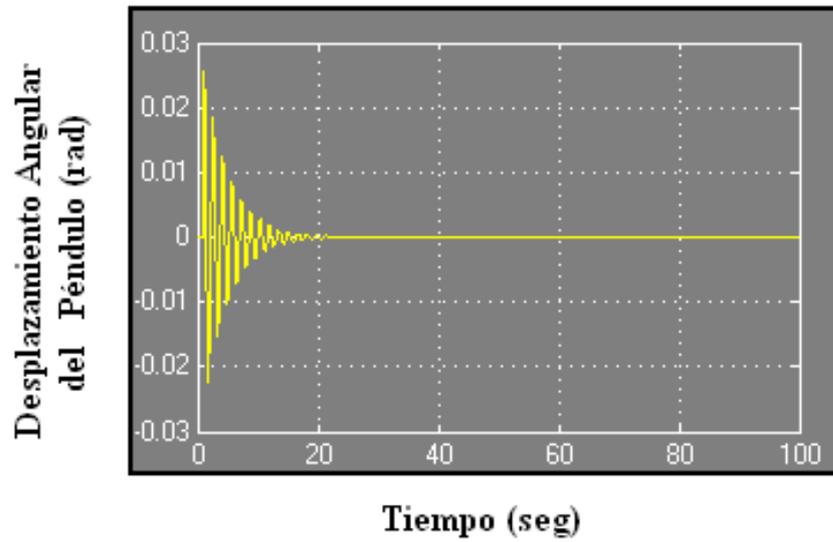
$$V_{\text{out}} = \begin{cases} V_{\text{in}} + 1.8V & \text{Si } V > 0 \\ V_{\text{in}} - 1.2V & \text{Si } V < 0 \end{cases}$$

La justificación de su utilidad radicará exclusivamente en las conclusiones que extraeremos a través de del análisis en Simulink, cuya configuración toma la siguiente forma:

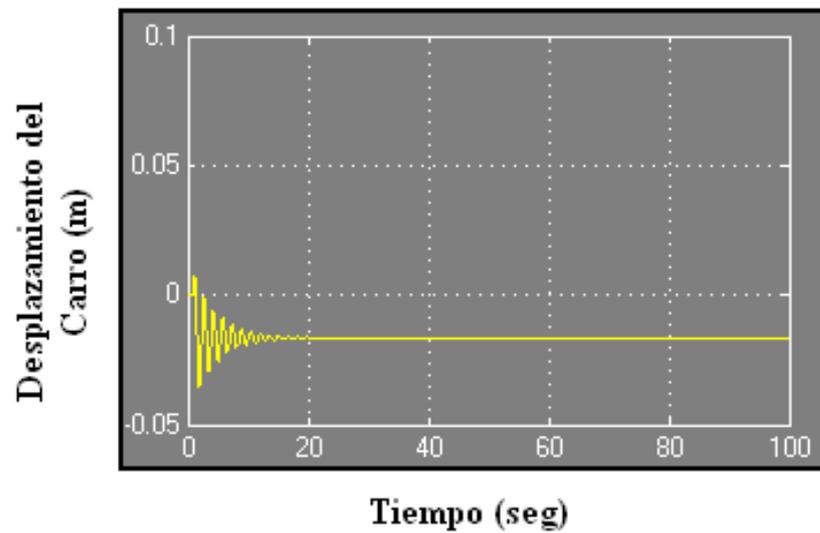


**FIGURA 4-17:** CONFIGURACIÓN DEL MODELO DEL SISTEMA PÉNDULO INVERTIDO EN SIMULINK CON LQR.

Ahora, la configuración antes descrita se asemeja mucho más a la real, debido a la inclusión tanto de las ganancias de los potenciómetros y de la zona muerta del motor, cuyo comportamiento transitorio se lo detalla a continuación:



**FIGURA 4-18:** COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL PÉNDULO CON BASE AL DISEÑO LQR Y UNA SEÑAL ESCALÓN COMO DISTURBIO EN SIMULINK.



**FIGURA 4-19:** COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL CARRO CON BASE AL DISEÑO LQR Y UNA SEÑAL ESCALÓN COMO DISTURBIO EN SIMULINK.

Podemos denotar claramente que existe una mayor subamortiguación del comportamiento del sistema al hacer hincapié en el uso de los factores antes descritos, cuya consideración se debe principalmente a que ellos desde el primer momento se consideraron como una perturbación interna para nuestro sistema, de ahí la no necesidad de un compensador extra que elimine la zona muerta.

### **Construcción del Equipo.**

El carro utilizado, fue adquirido a partir de las mejores condiciones físicas y operacionales que este implicó en el desarrollo del proyecto, tales como fricción mínima en las ruedas, adaptabilidad del péndulo, peso y tamaño, además fue una forma económica de construirlo. El péndulo fue montado directamente al eje del servo-potenciómetro. Para tener al sistema encendido, la parte electrónica del control del motor fue energizada mediante una fuente DC regulable. Los bosquejos para el compensador y el controlador del motor fueron mostrados en las figuras 4-16 y 4-10, respectivamente. El compensador fue una implementación directa de la gráfica de la señal de flujo de la figura 4-15. El amplificador del motor es una implementación puente-H de dispositivos complementarios bipolares y usa una realimentación local para el control de la ganancia. Una lista de los dispositivos usados se detalla en la siguiente tabla 4.12.

**CHASIS**

Carro  
 Potenciómetro, 10K  
 Una vuelta  
 Potenciómetro, 10K  
 Diez vueltas

**AMPLIFICADOR DEL DRIVER DEL MOTOR**

Amp-Ops, Dual  
 A1, A2  
 Transistor, NPN, 80V, 0.2A  
 Q1, Q7  
 Transistor, PNP, 80V, 0.2a  
 Q2, Q8  
 Transistor, NPN, 40V, 4A  
 Q3, Q5  
 Transistor, PNP, 40V, 2A  
 Q4, Q6  
 Diodo, 1AMP 600V  
 CR3, CR4, CR9, CR10  
 Resistencia, 0.22  $\Omega$  2 W 5%  
 R11, R12, R13, R14  
 Resistencia, 1.0 K $\Omega$  ¼ W 5%  
 R6, R7  
 Resistencia, 4.7 K $\Omega$  ¼ W 5%  
 R4, R8, R24  
 Resistencia, 10.0 K $\Omega$  ¼ W 5%  
 R5, R9, R10, R17, R18  
 Resistencia, 10.0 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R1, R2, R21, R22, R23  
 Resistencia, 15.0 K $\Omega$  ¼ W 5%  
 R24, R25  
 Capacitor, 39  $\mu$ F / 20 VDC  
 C1, C2  
 Capacitor, 220  $\mu$ F / 16 VDC  
 C3, C4  
 Capacitor, 0.033  $\mu$ F / 100 VDC  
 C5, C6

**COMPENSADOR**

Amp-Ops, Dual  
 A1, A2, A3  
 Resistencia, 680  $\Omega$  ¼ W 5%  
 R24

**COMPENSADOR**

Resistencia, 1.0 K $\Omega$  ¼ W 5%  
 R35, R43  
 Resistencia, 4.7 K $\Omega$  ¼ W 5%  
 R15, R47, R50, R52  
 Resistencia, 10.0 K $\Omega$  ¼ W 5%  
 R18  
 Resistencia, 1.0 M $\Omega$  ¼ W 5%  
 R25, R26, R36, R37  
 Resistencia, 1.0 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R29, R33, R39  
 Resistencia, 2.23 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R22  
 Resistencia, 3.30 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R41  
 Resistencia, 6.99 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R20  
 Resistencia, 9.13 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R51  
 Resistencia, 10.0 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R13, R14, R16, R17, R27  
 R28, R44, R45, R48, R49  
 Resistencia, 10.47 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R38  
 Resistencia, 12.71 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R40  
 Resistencia, 13.75 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R32  
 Resistencia, 17.27 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R30  
 Resistencia, 22.68 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R21  
 Resistencia, 27.67 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R23  
 Resistencia, 36.48 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R31  
 Resistencia, 65.88 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R19  
 Resistencia, 103.49 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R42  
 Resistencia, 110.0 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R3, R4, R5, R6, R9, R10, R11  
 R12  
 Resistencia 124.39 K $\Omega$  1/10 W 1%  
 R42  
 Capacitor, 1.0  $\mu$ F / 50 VDC; C5, C6

**TABLA 4-12: LISTA DE COMPONENTES**

# CAPITULO 5

## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

La realimentación de estados realizada en el proyecto requiere de la utilización de sensores ideales con ancho de banda infinita, no obstante los sensores usados son reales, las cuales poseen un limitado ancho de banda llegando a instancias de que si uno falla todo el sistema colapsaría. Además, que para todo el sistema o dispositivos físicos no se considero el hecho de que los mismos poseen limitantes sobre sus entradas y salidas, de ahí la necesidad de que nuestra señal de control debe regirse bajo cierto rango para evitar problemas de saturación, tal cual fue el aspecto que resalto como primeros resultados en el establecimiento de hardware del proyecto.

Para evitar tales desmanes, se procede al desarrollo experimental mediante ayuda del osciloscopio para disminuir el margen de ganancia en donde se la saturación era evidente y con ello el uso de aisladores y/o filtros para las señales provenientes de los sensores logrando resultados satisfactorios.

Otro aspecto relevante fue la evidente problemas de sobrecarga en el driver del motor, debido a corrientes excesivas por arranque y cambios de giro, debiéndose incorporar el uso de un OPA 548 ideal para esta aplicación que por sus características de excelente manejo para un amplia variedad de cargas, el mismo que internamente se protege contra sobre temperatura y sobrecargas. A mas de ello se hizo prescindible la utilización de una resistencia disipadora que hace la función de frenado a contracorriente o mas conocido como frenado dinámico indispensable para la inversión de giro con ayuda de reles que comandaba la ejecución del disipador para cada sentido de giro, como medida de protección del motor y la eliminación de voltajes remanentes.

Se debió además delimitar la región de actuación del actuador, por contribuir a un ruido excesivo y a disturbios internos que inestabilizaban en sistema, la cual se logro mediante el empleo de dos potenciómetros de precisión

Como recomendación final, para futuras mejoras al proyecto se hace necesario la obtención de ganancias significativas para la retroalimentación de estados medibles en zonas de baja frecuencia para lograr disminuir los efectos de los disturbios internos como externos además de la obtención de un excelente seguimiento. No obstante para regiones de alta frecuencia debe atenuarse la ganancia lo mas rápido posible a fin de reducir los efectos del

ruido, por lo que se hace indispensable además incursionar en las técnicas de control robusto, permitiendo en él lograr la estabilidad y desempeño en presencia de la dinámica desconocida o no considerada mediante la incorporación de incertidumbres acotadas en los modelos lineales sencillos usados, dando hincapié a la inclusión en el análisis de los disturbios externos, no linealidades, ruido, delimitación de las señales de control, dinámica de los diferentes componentes del sistema (actuadores, sensores, amplificadores, engranes, correas, etc.) y la consideración en las diferentes frecuencias.

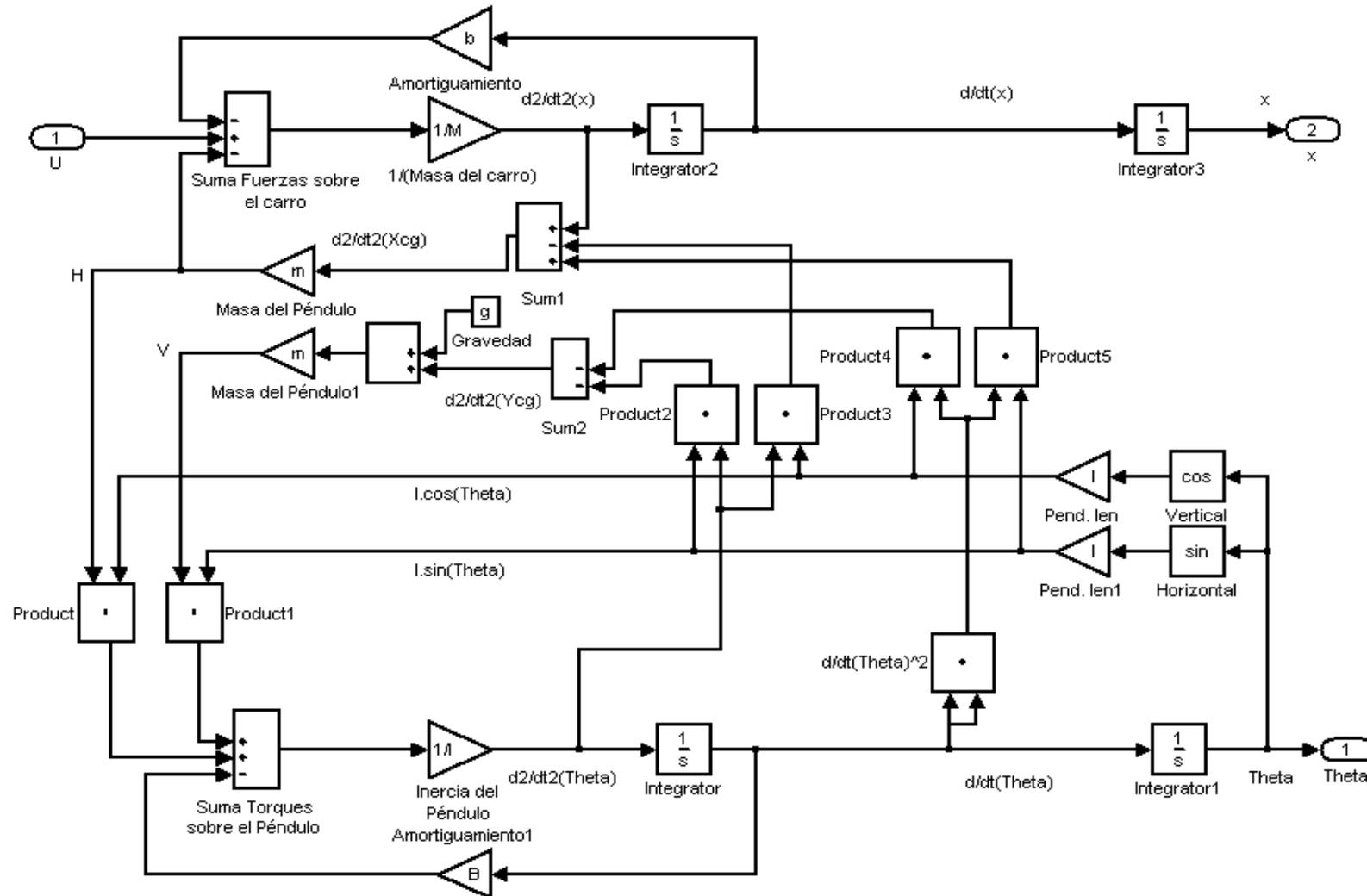
Un aspecto relevante del presente proyecto, es la incorporación de una metodología diferente a la planteada para el desarrollo del sistema de control de un Péndulo Invertido, con motivos de que a un futuro sea centro de análisis para un desarrollo mas avanzado en base a lo ya establecido. Tal incursión es la implementación de fluido presurizado como energía alternativa donde el actuador es un cilindro sin vástago gobernado por una válvula proporcional 5/3 la cual recibe las señales de control.



# APÉNDICES

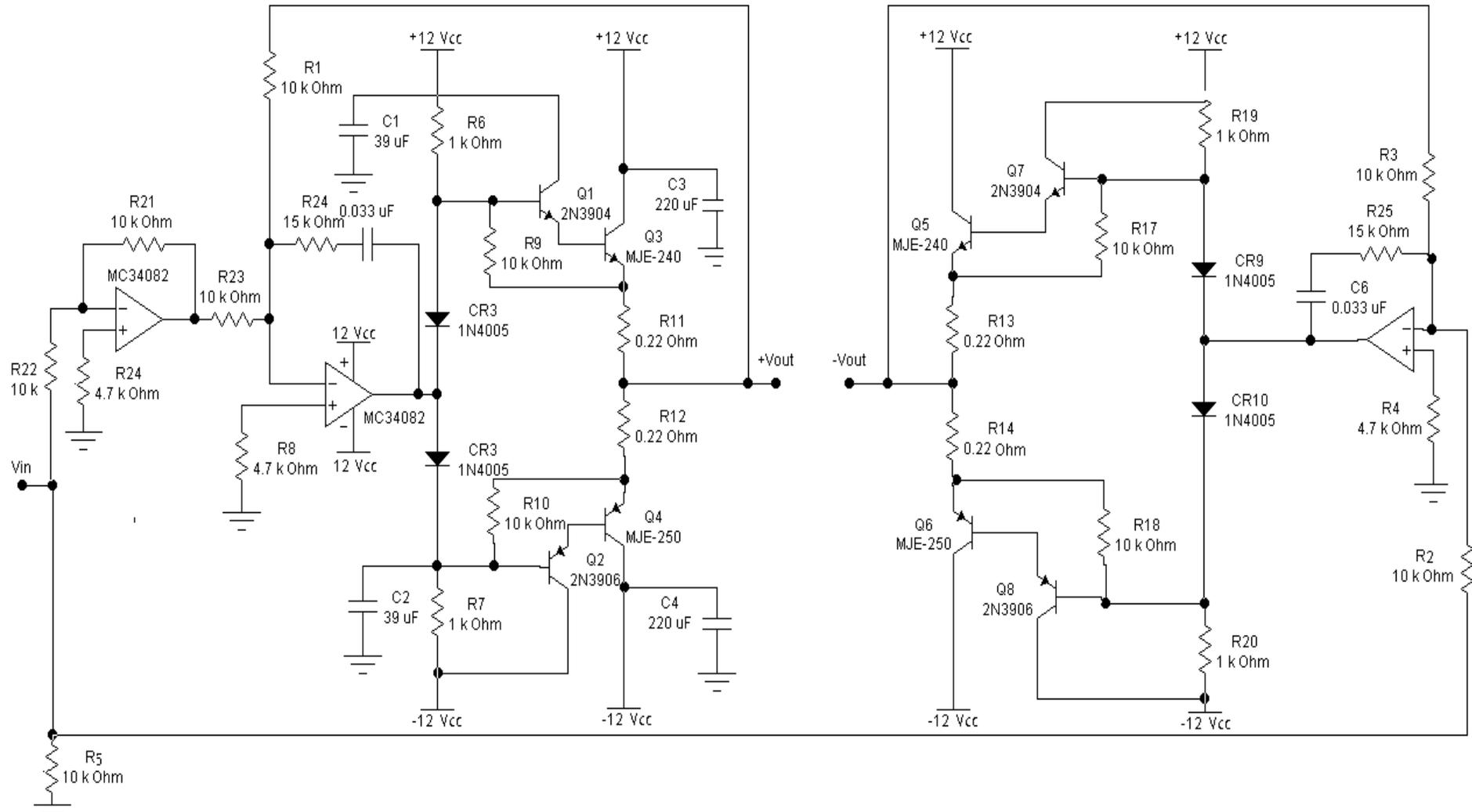
# APÉNDICE A

## REPRESENTACION DEL SISTEMA PÉNDULO INVERTIDO EN SIMULINK



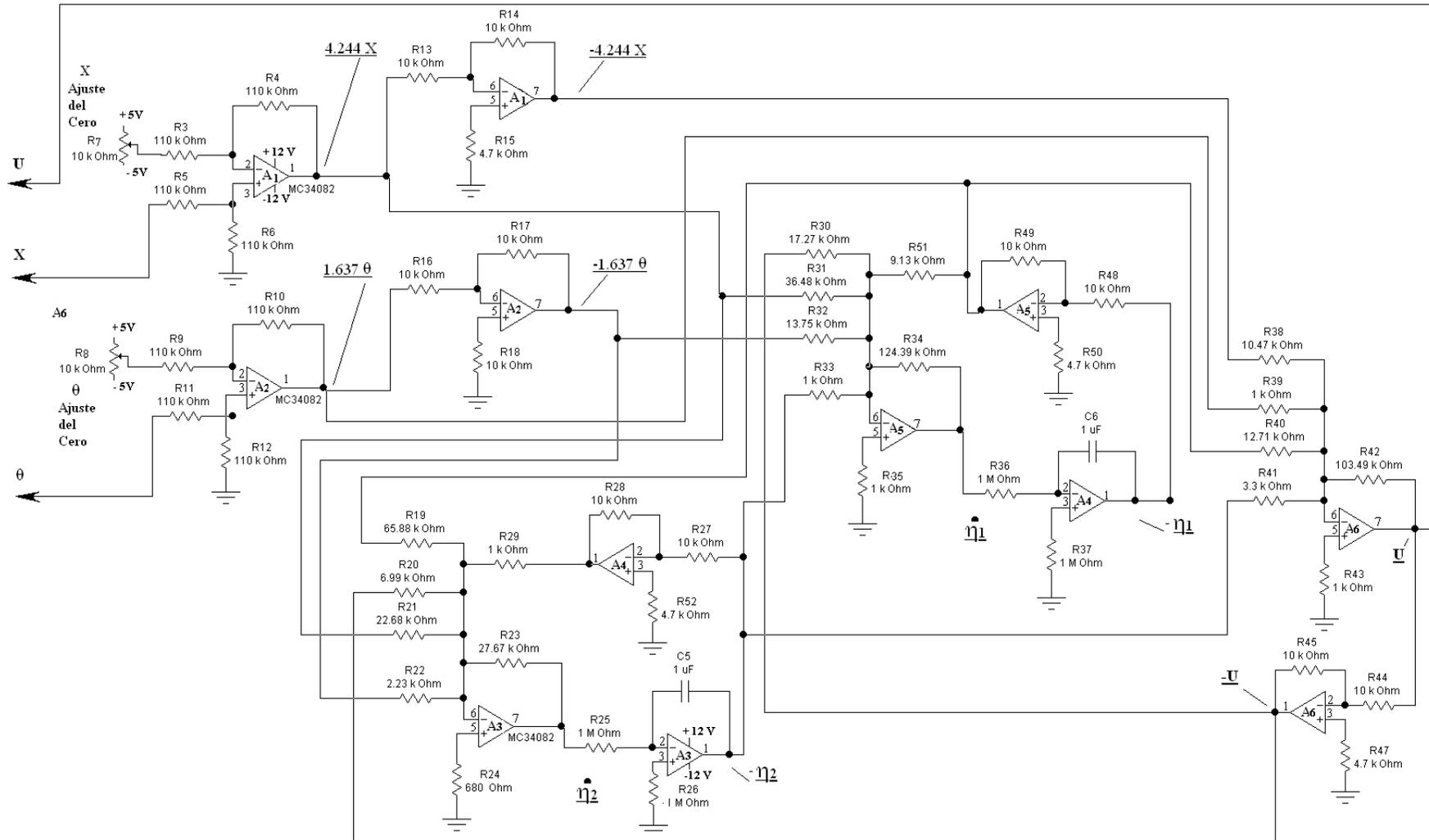
## APÉNDICE B

### ESQUEMA DEL “DRIVER” AMPLIFICADOR DEL MOTOR DC



# APÉNDICE C

## ESQUEMA DEL CIRCUITO ELECTRICO DEL COMPENSADOR



## APÉNDICE D

### ANÁLISIS EN EL DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL PARA UN PÉNDULO INVERTIDO USANDO ACTUADOR NEUMÁTICO

En esta sección, aplicaremos la construcción de un modelo y las técnicas de análisis para el problema del Péndulo Invertido. El sistema empleará mecánica trasnacional, neumática y electrónica, todo esto en un solo sistema, en donde el primer paso a seguir es el establecimiento de los modelos del actuador neumático y de la válvula de control a emplear, combinando con ello los aspectos mecánicos y eléctricos que este demanda. En general, los modelos de sistemas neumáticos son no lineales, de ahí el hecho de necesitar linealizar el modelo.

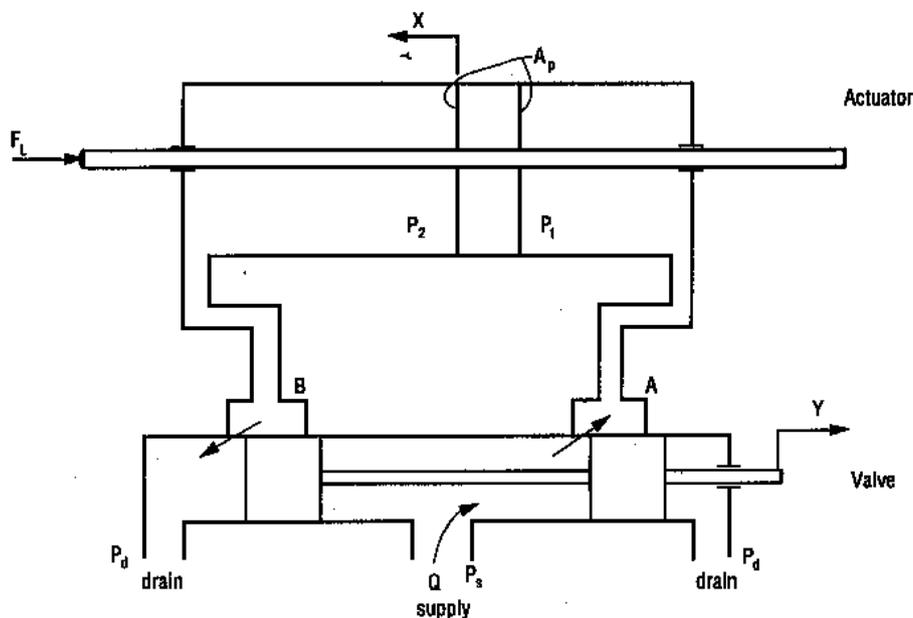


ILUSTRACIÓN D-1: ILUSTRACIÓN DE VÁLVULA NEUMÁTICA 5/2 Y ACTUADOR NEUMÁTICO DE DOBLE EFECTO

Comencemos en desarrollar el modelo matemático del actuador neumático y de la válvula neumática 5/2 actuada eléctricamente. La válvula proporcional, es una válvula que regula la presión y el caudal a través de un conducto por medio de una señal eléctrica, que puede ser de corriente o de voltaje. Su principal aplicación es el control de posición y de fuerza, ya que los movimientos son proporcionales y de precisión, lo que permite un manejo más exacto del paso de fluidos, en este caso del aire. A menudo la posición de la válvula neumática es controlada por un actuador eléctrico, la cual será objeto de análisis en su momento, pero por ahora consideraremos a la válvula actuada ya sea por palanca o manualmente.

Deseamos un modelo matemático que relacione la posición de salida del actuador,  $X$  (función que desempeña el carro para el péndulo invertido) y la posición de entrada para la válvula,  $Y$ . La figura muestra la abertura de la válvula. Como una primera aproximación, el flujo de la cámara de la válvula es estable y aplicamos la ecuación de Bernoulli a lo largo las líneas de corriente que existe entre el suministro a la cámara de la válvula y la abertura de salida de la misma. Esto nos conduce a

$$P_s + \frac{\rho}{2} V_s^2 = P_1 + \frac{\rho}{2} V_1^2 \quad (D-1)$$

Podemos asumir que la velocidad de suministro del fluido dentro de la cámara es mucho mas pequeño que la velocidad del fluido cuando deja la misma. Entonces podemos reescribir

$$\frac{\rho}{2} V_1^2 = P_s - P_1 \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_s - P_1)} \quad (D-2)$$

El caudal de flujo desde la cámara hasta la abertura es igual al producto del área efectiva de la abertura y la velocidad.

$$Q = V_1 A_e$$

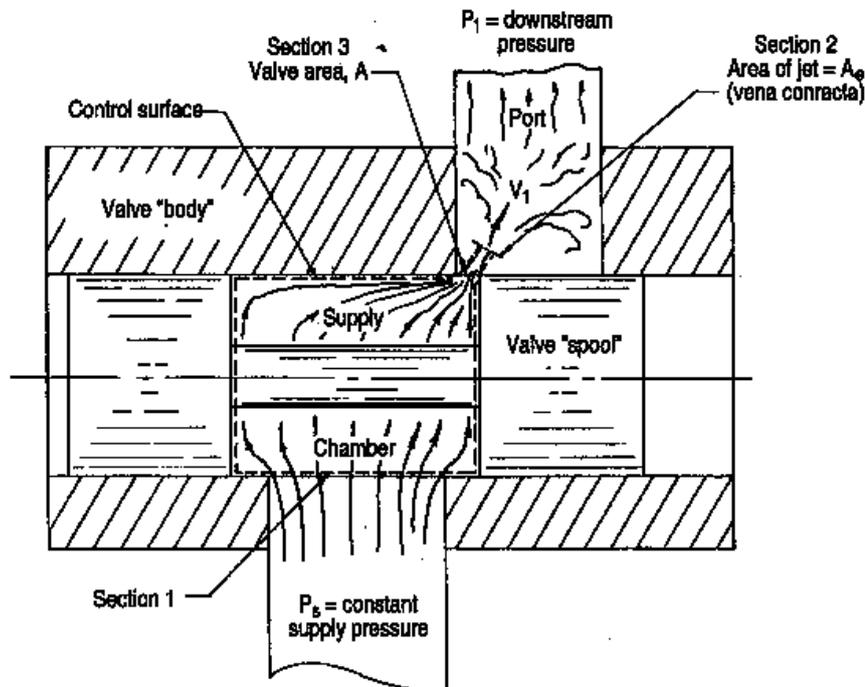


ILUSTRACIÓN D-2: ABERTURA DE LA VÁLVULA

El área geométrica de la abertura es igual a el producto de la semicircunferencia del carrete de la válvula,  $W$ , y el ancho de abertura  $Y$ . El área efectiva de la abertura no es igual al área geométrica. Se ha encontrado que el área efectiva por medio de la cual fluye el fluido es mucho mas pequeño que el área geométrica. La razón de esas dos áreas es llamada el coeficiente de descarga,  $C_d$ , y el área efectiva es expresada como

$$A_e = C_d W Y \quad (D-4)$$

El valor de  $C_d$  ha sido determinado experimentalmente por otros y su valor es igual a 0,625. Combinando las ecuaciones (D-2),(D-3) y (D-4) no genera el flujo para una sola abertura como

$$Q = C_d W Y \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_s - P_1)} \quad (D-5)$$

Esta última expresión es muy importante cuando trabajamos con sistemas de energía fluidicas. En el transcurso del análisis linealizaremos esta ecuación cuando procedamos a desarrollar nuestro modelo de sistema lineal, pero por ahora seguiremos con la forma no-lineal.

Note en (D-5) que  $C_d$ ,  $W$  y  $\rho$  son constantes por lo que podemos combinar en un solo término constante,  $C_v$ , y simplificar la ecuación a

$$Q = C_v Y \sqrt{P_s - P_1} \quad (D-6)$$

Donde

$$C_v = C_d W \sqrt{\frac{2}{\rho}} \quad (D-7)$$

Note en (D-6) que cuando la válvula posee su abertura máxima,  $Y_{\max}$ , y cuando  $P_1$  es cero, el fluido a través de la abertura obtiene su máximo valor.

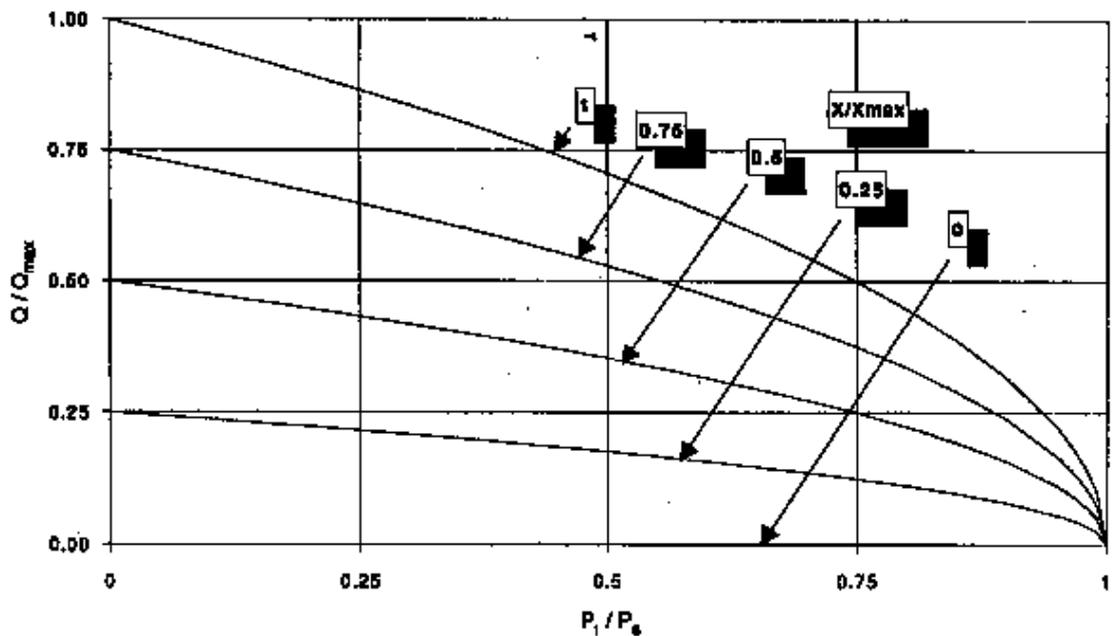
Podemos escribir este flujo máximo como

$$Q_{\max} = C_v Y_{\max} \sqrt{P_s} \quad (D-8)$$

Si ahora dividimos (D-6) para (D-8), obtenemos una expresión adimensional mas general para la válvula.

$$\left( \frac{Q}{Q_{\max}} \right) = \left( \frac{Y}{Y_{\max}} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{P_1}{P_s} \right)} \quad (D-9)$$

La figura muestra un gráfica de la igualdad (D-9). Muestra el flujo adimensional a través de una sola abertura de la válvula neumática como una función del decremento de presión y la abertura adimensional de la válvula.



**ILUSTRACIÓN D-3:** RAZÓN DE FLUJO VERSUS LA RAZÓN DE PRESION Y A LA RAZÓN DE ABERTURA DE LA VÁLVULA

De manera similar a lo hecho anteriormente, nosotros podemos escribir la ecuación de flujo para la abertura B de la válvula como

$$Q = C_d W Y \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_2 - P_d)}$$

Si asumimos que la presión de drenaje es cero y usando la constante de la válvula, podemos describir esta ecuación como

$$Q = C_v Y \sqrt{P_2}$$

Podemos notar que hemos usado el mismo símbolo para el flujo en esta ecuación como la usada en (D-6) debido a que asumimos que el fluido es incompresible y que no existe fugas. Esto es, el fluido que se dirige de la válvula por la abertura A al actuador es igual al fluido que se dirige al otro lado del actuador por donde drena mediante la abertura B.

Muchos fabricantes de válvulas neumáticas enlista las características de las válvulas en término de la presión de carga,  $P_L$ . La presión de carga es definida como

$$P_L = P_1 - P_2 \tag{D-11}$$

Nosotros podemos resolver las ecuaciones (D-6) y (D-10) para  $P_1$  y  $P_2$ , respectivamente y substituirlos en (D-11) como sigue

$$P_1 = P_s - \left( \frac{Q}{C_v Y} \right)^2 \tag{D-6} \text{ resuelto para } P_1$$

$$P_2 = \left( \frac{Q}{C_v Y} \right)^2 \tag{D-10} \text{ resuelto para } P_2.$$

Substituyendo en (D-11)

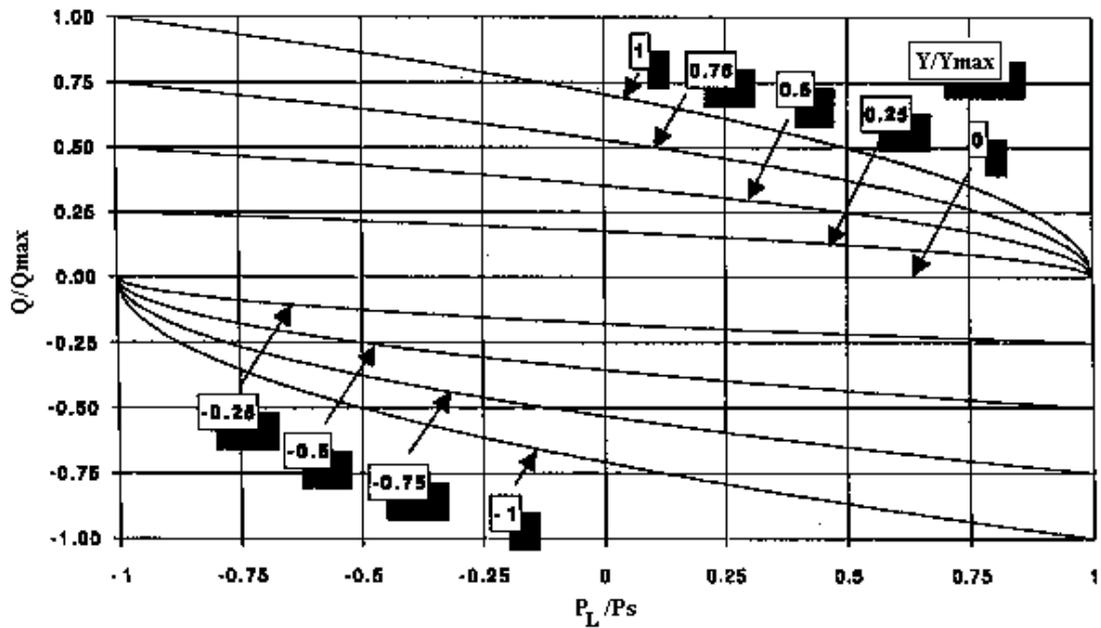
$$P_L = P_s - 2 \left( \frac{Q}{C_v Y} \right)^2$$

que puede entonces ser reordenado para dar

$$Q = C_v Y \sqrt{\frac{1}{2} (P_s - P_L)} \quad (D-12)$$

si dividimos la ecuación (D-12) para (D-8), obtenemos una ecuación adimensional para el flujo de la válvula neumática 5/2

$$\left( \frac{Q}{Q_{\max}} \right) = \left( \frac{Y}{Y_{\max}} \right) \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{P_L}{P_s} \right) \right]} \quad (D-13)$$



**ILUSTRACIÓN D-4:** RAZÓN DE FLUJO VERSUS RAZÓN DE PRESIÓN Y A LA ABERTURA PARA UNA VÁLVULA 5/2

La figura muestra esta igualdad en forma gráfica. Perciba que esta figura incluye tanto como desplazamientos positivos como negativos, además que la presión de carga pudiese alcanzar un valor negativo igual a la presión de suministro.

### **Modelo en estado estable para el actuador neumático**

Ahora desarrollemos un modelo matemático para el actuador neumático. Si el fluido es de hecho incompresible y si no existe fuga a través del pistón,

entonces el producto de la velocidad del pistón y su sección transversal debe ser igual al flujo del fluido en el actuador. Esto es,

$$Q = A_p \dot{X} \quad (D-14)$$

Percibir que el área del pistón referido en (D-14) es la sección transversal asociada con el diámetro exterior del pistón menos la sección transversal del vástago. Podemos escribir la siguiente ecuación del diagrama de cuerpo libre del pistón:

$$F_L = P_1 A_p - P_2 A_p = A_p (P_1 - P_2) \quad (D-15)$$

Donde  $F_L$ , es la fuerza de carga y nuestra fuerza de control final. Una vez mas notamos que el área del pistón referida en (D-15) es la sección transversal idéntica a la mencionada anteriormente. Podemos además escribir en la forma

$$F_L = A_p P_L \quad (D-16)$$

Realice una mirada a (D-14) y (D-16).  $Q$  y  $P_L$  son las variables de un sistema de fluido y  $F_L$  y  $dX/dt$  son las variables de un sistema de mecánica

traslacional. Consecuentemente, esas dos ecuaciones son un modelo matemático para una transmisión mecánica-fluidico o motor neumático lineal. Un actuador neumático toma la energía del fluido y lo convierte en una energía de mecánica translacional. Como podría imaginarse, hay además motores neumáticos rotatorios. Pensando en el actuador como un motor, nos permitirá hacer una fácil comparación.

### **Modelo en estado estable para el sistema válvula neumática y actuador.**

La ecuación (D-12), representa nuestro modelo matemático de la válvula, y la ecuación (D-14) y (D-16), representa nuestro modelo matemático del actuador, pudiendo ahora ser combinada como sigue:

$$Q = C_v Y \sqrt{\frac{1}{2}(P_s - P_L)}$$

$$A_p \dot{X} = C_v Y \sqrt{\frac{1}{2} \left( P_s - \frac{F_L}{A_p} \right)}$$

$$\dot{X} = \frac{C_v Y}{A_p} \sqrt{\frac{1}{2} \left( P_s - \frac{F_L}{A_p} \right)} \tag{D-17}$$

Este modelo matemático completamente describe la velocidad en estado estable del actuador como una función de la abertura de la válvula, la carga, y un número de particularidades relacionadas para la válvula, actuador y la presión de suministro neumático. Podemos definir una ecuación adimensional, donde inicialmente definimos la velocidad de pistón máxima usando (6-14).

$$Q_{\max} = A_p \dot{X}_{\max} \quad (\text{D-18})$$

y la fuerza de carga máxima usando (D-16)

$$F_{L\max} = A_p P_s \quad (\text{D-19})$$

Las expresiones (D-14), (D-16), (D-18) y (D-19) pueden ser substituidas en (D-13) para dar:

$$\left( \frac{\dot{X}}{\dot{X}_{\max}} \right) = \left( \frac{Y}{Y_{\max}} \right) \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{F_L}{F_{L\max}} \right) \right]} \quad (\text{D-20})$$

Compare (D-20) con (D-13), y usted podrá notar que son idénticas con la excepción de un cambio de variables.

## Dimensionamiento de la válvula y actuador neumático.

Un factor importante es determinar el punto de máxima eficiencia desde el punto de vista de carga en estado estable para ello usaremos la expresión del motor neumático (D-20) y la ecuación de la potencia para la mecánica trasnacional.

$$P_{ow} = F_L \dot{X} \quad (D-21)$$

Substituyendo (6-20) en la ecuación nos da que

$$P_{ow} = F_L \dot{X}_{max} \frac{Y}{Y_{max}} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{F_L}{F_{Lmax}} \right)} \quad (D-22)$$

Esta ecuación puede ser reordenada en la forma adimensional como

$$\left( \frac{P_{ow}}{F_L \dot{X}_{max}} \right) = \left( \frac{F_L}{F_{Lmax}} \right) \left( \frac{Y}{Y_{max}} \right) \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{F_L}{F_{Lmax}} \right) \right]} \quad (D-23)$$

Puede denotar que (D-23) podría generar una gamma de curvas de potencia para una abertura de la válvula en particular, no obstante solo estamos interesados únicamente en la correspondiente a la válvula de máxima apertura, es decir

$$\left(\frac{Y}{Y_{\max}}\right) = 1 \quad (\text{D-24})$$

Substituyendo (D-24) en (D-23) tenemos

$$\left(\frac{\text{Pow}}{F_{L\max} \dot{X}_{\max}}\right) = \left(\frac{F_L}{F_{L\max}}\right) \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{F_L}{F_{L\max}}\right)\right]} \quad (\text{D-25})$$

La condición para máxima potencia puede ser establecida mediante grafica o por diferenciación con respecto a  $(F_L/F_{L\max})$ , e igualando a cero y resolviendo para  $(F_L/F_{L\max})$ , es decir:

$$\frac{\partial \left(\frac{\text{Pow}}{F_{L\max} \dot{X}_{\max}}\right)}{\partial \left(\frac{F_L}{F_{L\max}}\right)} = \left(\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{F_L}{F_{L\max}}\right)\right]\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \left(\frac{F_L}{F_{L\max}}\right) \left(\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{F_L}{F_{L\max}}\right)\right]\right)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{F_L}{F_{L\max}} \right) \right] - \frac{1}{4} \left( \frac{F_L}{F_{L\max}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{F_L}{F_{L\max}} = \frac{2}{3}$$

por ende, la potencia máxima es

$$P_{\text{ow}} = \frac{\sqrt{6}}{9} F_{L\max} \dot{X}_{\max}$$

Entonces, ahora nosotros necesitamos determinar  $F_L$  y  $\delta(X_{\max})/\delta t$  a partir de la relación de fuerzas de carga determinados. Si sustituimos  $(F_L/F_{L\max}) = 2/3$  en (D-20)

$$\begin{aligned} \frac{\dot{X}}{\dot{X}_{\max}} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{F_L}{F_{L\max}} \right)} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

o también

$$\dot{X}_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A_p} = \frac{\sqrt{6}}{6} \dot{X} \tag{D-26}$$

Bajo la suposición de un comportamiento sinusoidal decreciente para la respuesta transiente por parte del vástago del actuador antes de llegar al estado estable, establecemos que

$$x(t) = \frac{X_o}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega t} \text{Sen}\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2} \cdot t + \varphi\right)$$

$$\varphi = \cos^{-1}(\zeta)$$

pero por razones de simplicidad, afirmamos que los efectos de amortiguamiento son despreciables, tenemos que:

$$X = X_o \text{Sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

de modo que

$$\dot{X} = \left| \frac{dX}{dt} \right| = \left| \frac{2\pi}{T} X_o \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right| = \frac{2\pi}{T} X_o$$

Considerando los mismos requerimientos de desempeño antes mencionados, tenemos que para un tiempo de asentamiento de alrededor de

2 segundos, bajos el criterio de 2% es estado estable, para una perturbación impulso y un desplazamiento lineal máximo de 0,2 m, tenemos que:

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2 \Rightarrow$$

$$T = 1/2$$

Substituyendo los valores dados

$$\dot{X} = \frac{2\pi}{T} X_o = \frac{2\pi}{0.5} \times 0.2$$

$$\dot{X} = \frac{4\pi}{5} \text{ m/seg}$$

La velocidad máxima del actuador neumático, se la establece por substitución en (D-26).

$$\frac{Q_{\max}}{A_p} = \frac{\sqrt{6}}{6} \dot{X} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{15} \text{ m/seg}$$

O bien

$$Q_{\max} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{15} A_p \tag{D-27}$$

Para obtener  $F_L$ , debemos asumir que la masa del vástago del pistón es despreciable igual que los efectos friccionantes, por lo que nos resta la masa del Péndulo la cual es dato de nuestro problema mas un factor de ponderación, (1.2 Kg.), es decir

$$F_L = m \left| \frac{d^2 X}{dt^2} \right| = m \left| -\frac{4\pi^2}{T^2} X_o \text{sen} \left( \frac{2\pi}{T} t \right) \right| = \frac{4\pi^2}{T^2} X_o m = \frac{4\pi^2}{0.5^2} (0.2)(1.2)$$

$$F_L = 37.9 \text{ N}$$

La máxima fuerza es entonces igual a

$$F_{L_{\max}} = \frac{F_L}{2/3} = \frac{37.9}{2/3} = 56.9 \text{ N} = P_s A_p$$

O bien

$$A_p = \frac{56.9}{P_s} \left[ \text{m}^2 \right] \tag{D-28}$$

Las ecuaciones (D-27) y (D-28) pueden ser ahora usados para seleccionar una válvula, un actuador, y una presión de suministro para un fluido neumático. Cuando seleccionamos el actuador, debemos considerar el área

efectiva del pistón, pues al escoger un actuador de doble efecto, el diámetro del vástago juega un rol importante, por lo que

$$A_p = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \quad (D-29)$$

Donde D es el diámetro del émbolo y d es el diámetro del vástago.

Recurriendo a catálogos de fabricantes de válvulas neumáticas se puede encontrar los detalles técnicos de una válvula proporcional 5/3 actuada eléctricamente. El fabricante FESTO proporciona la siguiente expresión para establecer el flujo de la válvula.

$$Q_R = K I_m \sqrt{P_v} \quad (D-30)$$

Donde:

$Q_R$  = razón de flujo (galones por minuto)

$K_v$  = constante de la válvula.

$I_m$  = corriente DC máxima de la válvula (4-20 mA).

$P_v$  =  $P_s - P_L$  = caída de presión en válvula (psi).

El fabricante proporciona sus válvulas asumiendo una caída de presión de 1 bar ( $P_v$ ) a través de la válvula para un flujo de 100 a 2000 litros/minuto. Nosotros ahora necesitamos determinar si esas válvulas operaran en nuestro diseño, para hacer esto, reordenamos (D-30) y sustituimos los valores del flujo para cada válvula. Empezando con 700 litros/minuto. ( $0.012 \text{ m}^3/\text{seg.}$ )

$$K_v = \frac{Q_R}{I_m \sqrt{P_v}} = \frac{0.012}{12\sqrt{1}} = 0.001 \frac{\text{m}^3/\text{seg}}{\text{mA} - \text{bar}^{1/2}}$$

Para nuestra aplicación, la aplicación de carga será

$$P_L = \frac{F_L}{A_p} = \frac{37.9}{1.14e-4} = 3.33 \text{ bar}$$

Donde  $A_p$  se la establece en relación a (D-28) con una presión de suministro de 5 bar. Para determinar si la válvula puede suministrar el flujo deseado. Nosotros sustituimos los valores conocidos en (D-30) y obtener el flujo a través de la válvula

$$Q = KI_m \sqrt{P_v} \\ = (0.001)(12)\sqrt{5 - 3.33} = 0.016 \text{ m}^3/\text{s}$$

Si el flujo requerido es

$$Q = \dot{X}A_p$$
$$= \frac{4\pi}{5} \times 1.14e - 4 = 0.0003 \text{ m}^3 / \text{s}$$

El flujo requerido es mucho menor que el impuesto, no obstante es una dimensionamiento aceptable ante futuras adaptaciones, bajo una presión de suministro de 5 bar, y el uso de un actuador con una área de pistón de aproximadamente  $0.1 \text{ cm}^2$  ( $\varnothing = 3.6 \text{ mm}$ ) con carrera mínima de 500 mm

### **Derivación del modelo matemático dinámico del sistema.**

Hasta ahora nosotros hemos solamente investigado el comportamiento en estado estable del sistema en su punto máximo de carga. En general, este es siempre el primer paso en un proceso de diseño y permite además su dimensionar los dispositivos a usar. El siguiente paso es investigar el desempeño dinámico del sistema para garantizar que el diseño en estado estable sea el adecuado. El paso final a seguir es determinar la función de transferencia de la señal de entrada (voltaje) y la señal de salida (fuerza de carga) del sistema válvula/actuador neumático.

## Modelo dinámico de la válvula neumática.

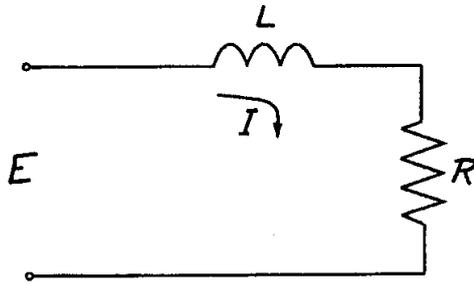
Como hemos visto previamente, la ecuación (D-30) es una ecuación en estado estable para el flujo máximo por medio de una válvula neumática actuada eléctricamente. Puede ser reescrito para cualquier flujo usando

$$Q = KI\sqrt{P_v} = KI\sqrt{P_s - P_I} \quad (D-31)$$

Donde

$$K_v = 0.001 \frac{\text{m}^3/\text{seg}}{\text{mA} - \text{bar}^{1/2}}$$

La válvula neumática actuada eléctricamente generalmente contiene un pequeño motor-torque que conduce una pequeña válvula piloto, la cual posiciona el principal carrete de válvula. El motor-torque consiste de un electromagneto, esto es una bobina que contiene una resistencia en serie como la mostrada en la figura.



**ILUSTRACIÓN D-5:** MODELO ESQUEMÁTICO DEL MOTOR EN LA VÁLVULA NEUMÁTICA.

Por ahora solo debemos poder escribir la igualdad relacionando el voltaje de entrada para la corriente de este circuito por inspección. La suma de los voltajes alrededor de un lazo debe ser igual a cero, entonces

$$E - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

la cual puede ser reordenado a

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$

Se la reconoce inmediatamente esta igualdad como una ecuación de primer orden, lineal, ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes.

Puede ser reescrito como

$$\tau \frac{dI}{dt} + I = \frac{1}{R} E \quad \text{ó}$$

$$(\tau D + 1)I = \frac{1}{R} E \tag{D-33}$$

donde  $\tau = L/R$  es la constante de tiempo del circuito. Para válvulas neumáticas 5/3 actuadas eléctricamente su constante de tiempo se localiza en un intervalo de 75 – 100 ms con una resistencia de 800  $\Omega$  de la bobina, según lo expuesto en el catalogo de ASCO. Por lo que, seleccionando el mayor tiempo de retardo, tenemos

$$0.1 \frac{dI}{dt} + I = \frac{1}{800} E \tag{D-34}$$

En estado estable,

$$\frac{dI_o}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad I_o = \frac{1}{R} E_o$$

Percátese que en estado estable ( $dI/dt=0$ ), la ecuación (D-34) indica aproximadamente que  $\pm 10$  voltios DC debe ser la salida de la válvula para una corriente de  $\pm 12$  mA. Esto es

$$E = 800 \times \pm 0.012 = \pm 10 \text{ voltios}$$

La ecuación (D-34) proporciona la corriente de la válvula como una función de la entrada de voltaje. No obstante por razones de que la constante de tiempo eléctrica es mucho menor a la mecánica la despreciaremos.

### **Modelo dinámico del actuador neumático.**

Las ecuaciones (D-14) y (D-16) constan del modelo matemático del actuador. Nosotros podemos usar (D-14) para obtener  $dX/dt$  dado  $Q$  y (D-16) para determinar  $PL$  dado  $FL$ .

### **Linealización del modelo dinámico del sistema válvula y actuador neumático.**

Empezaremos construyendo un modelo linealizado de la válvula neumática. El modelo matemático que nosotros hemos desarrollado hasta ahora consta de dos ecuaciones

$$\tau \frac{dI}{dt} + I = \frac{1}{R} E \quad (\text{D-33})_{\text{repetida}}$$

$$Q = KI\sqrt{P_s - P_L} = f(I, P_L) \quad (\text{D-31})_{\text{repetida}}$$

La ecuación (D-33) describe la corriente de la válvula como una función del voltaje de entrada, siendo la misma lineal y la ecuación (D-31) describe el flujo como una función de la corriente y la presión de carga, siendo la misma no lineal.

Hemos escrito en notación funcional para indicar se tiene dos variables  $I$  y  $P_L$  y dos constantes  $K$  y  $P_s$ . La ecuación debe ser linealizada expandiendo la función no lineal  $Q = f(I, P_L)$  sobre un punto de operación en estado estable  $(I_o, P_{Lo})$ , usando la serie de Taylor. Primero escribimos la expansión en la forma funcional notacional,

$$Q = f(I_o, P_{Lo}) + \left. \frac{\partial f}{\partial I} \right|_{I_o, P_{Lo}} (I - I_o) + \left. \frac{\partial f}{\partial P_L} \right|_{I_o, P_{Lo}} (P_L - P_{Lo}) \quad (\text{D-35})$$

La ecuación (D-35) luce un poco mas complicada de lo que realmente es.

Puede ser simplificada definiendo

$$f(I_o, P_{Lo}) = Q_q$$

$$(I - I_o) = i$$

$$(P_L - P_{Lo}) = p_L$$

$$(Q - Q_o) = q$$

Ahora nosotros podemos describir (D-35) como

$$q = \left. \frac{\partial f}{\partial I} \right|_{I_o, P_{Lo}} i + \left. \frac{\partial f}{\partial P_L} \right|_{I_o, P_{Lo}} p_L \quad (D-36)$$

$$q = C_1 i + C_2 p_{Lo}$$

La ecuación es ahora lineal. Las constantes C1 y C2, son obtenidas tomando la derivadas parciales y evaluando para el punto de operación de estado estable. Esto es

$$\frac{\partial f}{\partial I} = \frac{\partial (KI\sqrt{P_s - P_L})}{\partial I} = K\sqrt{P_s - P_L} \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial I} \right|_{I_o, P_{Lo}} = K\sqrt{P_s - P_{Lo}} \quad (D-37)$$

$$\frac{\partial f}{\partial P_L} = \frac{\partial (KI\sqrt{P_s - P_L})}{\partial P_L} = -\frac{1}{2}(KI)(P_s - P_L)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial P_L} \right|_{I_o, P_{Lo}} = -\frac{KI_o}{2\sqrt{P_s - P_{Lo}}} \quad (D-38)$$

Las ecuaciones (D-14) y (D-16) son nuestro modelo matemático para el actuador.

$$Q = A_p \dot{X} \quad (\text{D-14) repetida}$$

$$F_L = A_p P_L \quad (\text{D-16) repetida}$$

Las ecuaciones últimas ya son lineales, por consiguiente es fácil escribir las expresiones en términos de fluctuaciones sobre el punto de operación en estado estable. Rescribimos (D-14) como

$$\dot{X} = \frac{Q}{A_p} \quad \text{y} \quad \dot{X}_o = \frac{Q_o}{A_p}$$

De modo que se puede escribir

$$\dot{x} = \dot{X} - \dot{X}_o = \frac{Q}{A_p} - \frac{Q_o}{A_p} \Rightarrow$$

$$\dot{x} = \frac{1}{A_p} q \quad (\text{D-45})$$

En forma similar

$$f_L = F_L - F_{L0} = A_p P_L - A_p P_{L0} = A_p P_L \Rightarrow$$

$$P_L = \frac{1}{A_p} f_L \quad (D-46)$$

Debido a la asunción realizada desde el inicio en que el fluido es incompresible y que no existen fugas en el sistema válvula/actuador, en donde se realiza las substituciones correspondiente, obtenemos que

$$q = \left( K \sqrt{P_s - P_{L0}} \right) \dot{x} - \left( \frac{K I_0}{2 \sqrt{P_s - P_{L0}}} \right) P_L \Rightarrow$$

$$\dot{x} A_p = \left( \frac{K \sqrt{P_s - P_{L0}}}{R} \right) \dot{x} - \left( \frac{K E_0}{2 R A_p \sqrt{P_s - P_{L0}}} \right) f_L$$

Reordenado la última expresión en función de la fuerza de carga, tenemos

que

$$f_L = \left( \frac{K \sqrt{P_s - P_{L0}}}{R} \right) \dot{x} - \left( \frac{2 R A_p^2 \sqrt{P_s - P_{L0}}}{K E_0} \right) \dot{x} \quad (D-47)$$

**Obtención de la matriz de ganancias de realimentación del estado y la matriz de ganancia del observador de orden mínimo en base a la ubicación de polos.**

Bajo el principio de independencia del diseño de las matrices de ganancias de realimentación de estados y de la matriz de ganancias del observador, para lo cual teniendo presente como regla práctica de la elección de elegir una respuesta del observador de por lo menos 2 ó 5 veces mas rápida que la respuesta del sistema.

Para proceder a lo mencionado, debemos anticipadamente establecer la ecuaciones diferenciales que describe el sistema Péndulo Invertido, considerando esta vez la dinámica de la válvula y actuador neumático, es decir.

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - m\ell\ddot{\theta} = \left( \frac{K_v \sqrt{P_s - P_{Lo}}}{R} \right) e - \left( \frac{2RA_p^2 \sqrt{P_s - P_{Lo}}}{KE_o} \right) \dot{x}$$

$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta} + B\dot{\theta} - mg\ell\theta = m\ell\ddot{x}$$

Definiendo las variables de estado  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  y  $\chi_4$  mediante:

$$\chi_1 = \theta$$

$$\chi_2 = \dot{\theta}$$

$$\chi_3 = X$$

$$\chi_4 = \dot{X}$$

Considerando que el ángulo  $\theta$  indica la rotación de la barra del péndulo con respecto al punto P, y que X es la ubicación del carro. Consideramos  $\theta$  y X como salidas del sistema, o

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_3 \end{bmatrix}$$

(Observe que tanto  $\theta$  como X son cantidades que se miden fácilmente). Así a partir de la definición de las variables de estado y las ecuaciones que definen su comportamiento dinámico, obtenemos:

$$\dot{\chi}_1 = \chi_2$$

$$\dot{\chi}_2 = \frac{(M+m)m\ell}{q} g\chi_1 - \frac{B(M+m)}{q} \chi_2 - \frac{\left( b + \frac{2I_o A_p^2 \sqrt{P_s - P_{Lo}}}{K} \right) m\ell}{q} \chi_4 + \frac{\left( \frac{m\ell K_v \sqrt{P_s - P_{Lo}}}{qR} \right) e}{q}$$

$$\dot{\chi}_3 = \chi_4$$

$$\dot{\chi}_4 = \frac{(m\ell)^2}{q} g\chi_1 - \frac{Bm\ell}{q} \chi_2 - \frac{\left( I + m\ell^2 \right) \left( b + \frac{2I_o A_p^2 \sqrt{P_s - P_{Lo}}}{K} \right)}{q} \chi_4 + \frac{\left( I + m\ell^2 \right) \left( \frac{K_v \sqrt{P_s - P_{Lo}}}{R} \right)}{q} e$$

En donde

$$q = \left[ (M+m)(I + m\ell^2) - (m\ell)^2 \right]$$

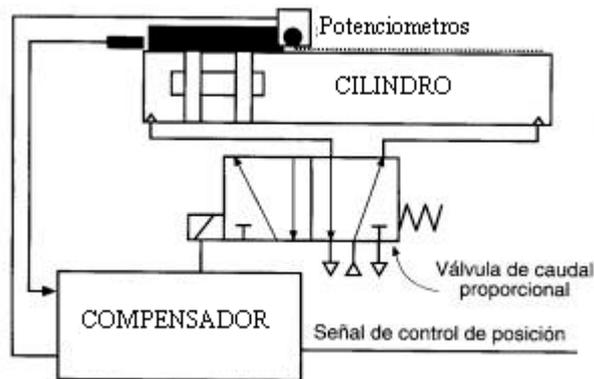
En términos de las ecuaciones matriciales, donde el vector de estado  $x$  se divide en dos partes, un escalar y un vector, por lo que tenemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)mg\ell}{q} & 0 & -\frac{B(M+m)}{q} & -\frac{m\ell \left( b + \frac{2I_o A_p^2 \sqrt{P_s - P_{Lo}}}{K_v} \right)}{q} \\ \frac{(m\ell)^2}{q} & 0 & -\frac{Bm\ell}{q} & -\frac{(I + m\ell^2) \left( b + \frac{2I_o A_p^2 \sqrt{P_s - P_{Lo}}}{K_v} \right)}{q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m\ell K_v \sqrt{P_s - P_{Lo}}}{qR} \\ \frac{(I + m\ell^2) \left( \frac{K_v \sqrt{P_s - P_{Lo}}}{R} \right)}{q} \end{bmatrix} \cdot \mu$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

La siguiente ilustración denota la configuración a seguir.



**ILUSTRACIÓN D-6:** ESQUEMA ACTUADOR, VÁLVULA PROPORCIONAL, COMPENSADOR

Por medio de una válvula proporcional podemos realizar un control de posición de lazo cerrado, donde el actuador es un cilindro sin vástago, los sensores dos potenciómetros que envía señales analógicas de acuerdo a la posición de dicho cilindro y del péndulo, y el controlador un procesador que gobierne el dispositivo en general.

La señal enviada por el controlador hacia la válvula proporcional depende de las señales análogas de los potenciómetros, que a la vez indican la distancia que falta para alcanzar la posición deseada. Cada vez que la presión del aire, la temperatura o cualquier otro parámetro de perturbación ocasione un cambio de posición, el controlador tendrá la capacidad de hacer pequeños ajustes para lograr la posición exacta del cilindro con el péndulo erguido. Nos resta, establecer los valores de puntos de operación  $P_{Lo}$  e  $l_0$ ; por lo que una

asunción razonable es de que una presión diferencial no debe existir y por ende la corriente que controla la válvula proporcional, resultando con ello

$$I_o = 0 \quad \text{y} \quad P_{Lo} = 0$$

Finalmente, podemos describir los parámetros que componen nuestro sistema:

PARÁMETRO	DESCRIPCIÓN	VALOR
M	Masa del Carro	0,10 Kg.
m	Masa del Péndulo	0,270 Kg.
$\ell$	Longitud media del Péndulo	0,165 m.
b	Coeficiente de Fricción Viscosa del Carro	0,1 N.s/m
B	Coeficiente de Fricción Viscosa del Péndulo	0,05 N.m/rad/s
$K_1$	Constante proporcional de la válvula electro neumática	$7 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/(\text{s.mA.bar}^{1/2})$
R	Resistencia de Electro válvula	800 $\Omega$
$K_\theta$	Ganancia del Potenciómetro del Péndulo	1,637 V/rad
$K_x$	Ganancia del Potenciómetro del Carro	4,244 V/m
$P_s$	Presión de Suministro	5 Bar
$I_o$	Valor de corriente en estado estable	0 mA
$P_{Lo}$	Valor de presión de carga en estado estable	0 Bar

**TABLA D-1:** VALORES QUE DESCRIBEN EL SISTEMA

Ahora denotaremos el siguiente archivo\_M, que nos permitira establecer la matriz de realimentación:

```

%.....Regulador Cuadrático Lineal para determinar K..
M = 0.55;
m = 0.270;
b = 0.10;
B = 0.05;
g = 9.80;
l = 0.165;
I = m*I^2/3;           %..Inercia del péndulo.
Ke = 0.001;          %..Coeficiente electrovalvula
R = 800;             %..Resistencia en electrovalvula
Io = 0.0;            %..Corriente en EE en electrovlavula
PLo= 0.0;           %..Presion de carga en EE.
Ps = 5.0;           %..Presion de suministro
D = 0.006;          %..Diametro del cilindro
Ap= 3.1415*D^2/4;    %..Area del cilindro
q = (M+m)*(l+m*I^2)-(m*I)^2; % Denominador para las Matrices A y B
A = [0           0           1           0;
      0           0           0           1;
      (M+m)*m*I*g/q  0           0       -B*(M+m)/q  -m*I*(b+(2*Io*Ap^2*(Ps-
      PLo)^0.5)/Ke)/q;
      (m*I)^2*g/q           0       -B*m*I/q  -(l+m*I^2)*(b*Ke+(2*Io*Ap^2*(Ps-
      PLo)^0.5)/(q*Ke))];
B = [ 0; 0; (m*I*Ke*(Ps-PLo)^0.5)/(q*R); (l+m*I^2)*Ke*(Ps-PLo)^0.5/q/R];
C = [1 0 0 0; 0 1 0 0];
D = [0; 0];
M = [B A*B A^2*B A^3*B];
rank(M)           % Constatar controlabilidad completa

J = [-2+2*sqrt(3)*i  0  0  0;
      0 -2-2*sqrt(3)*i  0  0;
      0  0 -20  0;
      0  0  0 -20];
JJ = poly(J)           % polinomio caracteristico deseado
Phi = polyvalm(poly(J),A); % polinomio matricial caracteristico Phi
K = [0 0 0 1]*inv(M)*Phi % matriz de ganancias de realimentacion de estados
P = [-10 -11 -12 -13]; %Designación de los polos del estimador
L=place(A',C',P)'
Ace = [A-B*K           B*K;
       zeros(size(A)) (A-L*C)];
Bce = [ B; zeros(size(B))];
Cce = [C zeros(size(C))];
Dce = [0;0];
est_cl = ss(Ace,Bce,Cce,Dce);
T = 0:0.01:10;         % Tiempo de Simulación = 10 seg
U = ones(size(T));     % u = 1, Señal Escalon
X0 = [0.02 0 0 0 0 0 0]; % Condiciones iniciales
[Y,T,X]=lsim(est_cl,U,T,X0); %Simulación
plot(T,Y)
legend('Pendulo (rad)','Carro (m)')

```

**TABLA D-3:** INSTRUCCIONES EN MATLAB, PARA DETERMINAR LA MATRIZ K Y L.

Generando los siguientes resultados:

**K =**

1.0e+007 \*

5.6297 -3.1741 0.5255 -1.5663

**Y**

**L =**

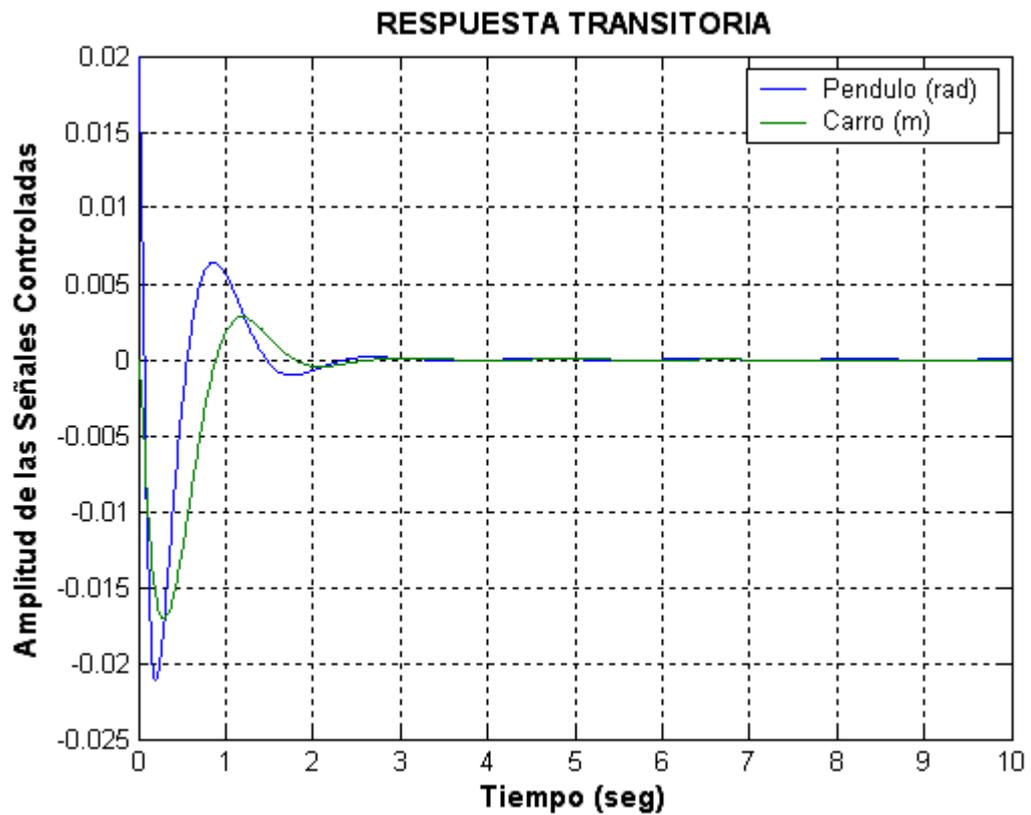
15.8454 -1.1616

-2.4196 23.3802

80.7322 -14.1831

-26.4658 136.3031

Podemos aseverar que la señal de control no considera el costo de energía que demanda para cumplir con los requerimientos que debe cumplir la respuesta transitoria de nuestro sistema dinámico.



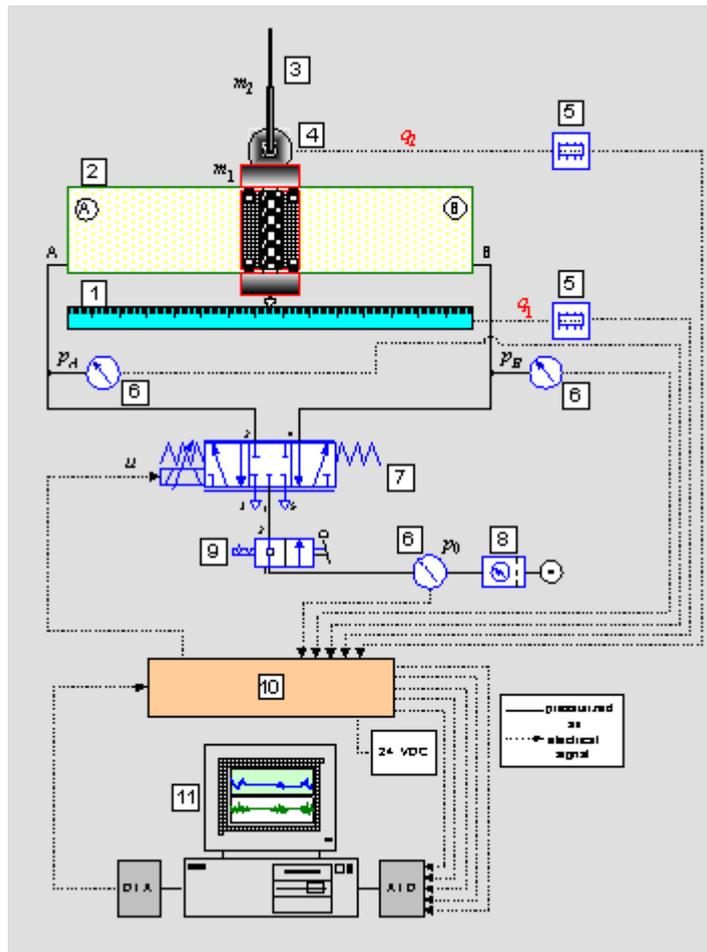
**GRÁFICA D-1: RESPUESTA TRANSITORIA DEL SISTEMA DE CONTROL OBTENIDO**

Para futuras mejoras debemos restringir el exceso de costo de energía que requiere nuestra señal de control, puesto que si optamos por la determinada problemas de saturación de los dispositivos físicos serán evidentes.

## **Descripción del sistema experimental.**

El actuador es un cilindro sin vástago por *SMC*, tipo CDY1S15H-500 con una carrera de 500 mm y un diámetro de 15 mm. El movimiento lineal del pistón sobre el cilindro es controlado por una válvula proporcional 5/3 de *FESTO*, tipo MPYE-5 1/8 HF-010B. La posición lineal del deslizador es medida por un potenciómetro lineal *FESTO* MLO-POT-500-TLF, y el ángulo del péndulo es medida por un servopotenciómetro rotacional de *SPECTROL*. Los transductores de presión son *SMC* ISE4-01-26. El controlador es implementado en el PC del computador vía PCL-821PG con una tarjeta adquirida con 12 bits convertidor A/D y D/A. La presión de trabajo es fijada en 6 bar. La masa deslizante es de 1.5 Kg. (vástago + carro).

El equipo contiene algunos otros componentes, como un par de válvulas proporcional de presión *SMC* VY1A00-M5 y un par de válvulas simples 3/2 on-off *SMC* EVT307-5D0-01F. Su aplicación (alguna otra aplicación de los métodos de control, como por ejemplo el método de control por modulación de ancho de pulso) puede ser a mas considerado una alternativa mas económica que el empleo de una válvula direccional proporcional.



**ILUSTRACIÓN D-7:** ESQUEMA DETALLADO DEL SISTEMA ACTUADOR, CONJUNTO CARRO-PENDULO, COMPENSADOR.

1. Potenciómetro lineal.
2. Cilindro lineal sin vástago.
3. Péndulo Invertido.
4. Servopotenciómetro rotacional.
5. tarjeta de referencia electrónica
6. Transductor de Presión
7. Válvula proporcional.
8. Unidad FLR.
9. Válvula suministro de aire.
10. Interfase electrónica.
11. PC del computador.

# BIBLIOGRAFIA

1. BOLTON WILLIAN, "Ingeniería de Control", Grupo Editorial Alfaomega. México D.F.
2. VAN DE VEGTE JOHN, "Feedback Control System", Prentice-Hall, New Jersey, 1986.
3. SHAHIAN BAHRAM and HASSUL MICHAEL, " Control System Design using Matlab", Prentice-Hall, New Jersey, 1993.
4. OGATA KATSUHIKO, "Ingeniería de Control Moderna", Tercera edición, Prentice-Hall Hispanoamérica, México D.F., 1995.
5. THOMSON WILLIAN T., "Teoría de Vibraciones", Editorial Prentice-Hall Internacional, España, 1983, pag. 1-78.
6. LEWIS JACK W., "Modeling Engineering System", HighText Publications, United Status of America, 1993.
7. ROBBINS TOM, "The Student Edition of Simulink", Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
8. MESSNER WILLIAM C, AND TILBURY DAWN M., "Control Tutorials for Matlab and Simulink", Addison Wesley Longman, Inc.
9. CHAPMAN STEPHEN J., "Máquinas Eléctricas", Tercera edición, McGraw-Hill Interamericana, Bogota, 2000, Pág. 546 – 576.
10. BRUNS & SAUNDERS, "Analysis of Feedback Control System", McGraw-Hill, New York, 1955, pag 40 -43.
11. BOYLESTAD ROBERT L., "Electrónica: Teoría de Circuitos", Sexta edición, Prentice-Hall Hispanoamérica, México, 1997.
12. DORF RICHARD, AND BISHOP ROBERT, "Modern Control Systems", Ninth Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2001.
13. SINGER FERDINAND L., "Mecánica para Ingenieros: Dinámica", Tercera edición, Harla S.A., México, 1982, Pág. 376 – 387.