ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

EXAMEN COMPLEXIVO

PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE:

“MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LA FÍSICA”

TEMA

MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LA PROPAGACIÓN DE CALOR CON EL USO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES Y DIFERENCIAS FINITAS.

AUTOR

JOSÉ ORLANDO DÍAZ SANTAMARÍA

Guayaquil - Ecuador

2015

DEDICATORIA

A Dios, porque nunca me abandona, me acompaña y es mi guía

A mi padre y madre que aunque no están con nosotros sé que desde el cielo al lado de Dios siempre nos bendice y protege a toda mi familia.

A ti Anita que con tu amor incondicional siempre me has apoyado y ayudado en este transcurrir de la vida.

A mi familia, mis hermanos Mónica, Verónica, Patricia, Santiago, Janeth Anita María, Patricia, Clemen, Lizet mi cuñada, mis sobrinos Mateo, Matías, Aarón y Amelia por estar siempre conmigo y a todas las personas que me han brindado su amistad y apoyo.

José Orlando Díaz Santamaría

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios por el todo lo que hace por mí, la sabiduría y protección que me brinda.

A la Escuela Superior Politécnica del Litoral y a la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la ciudad de Guayaquil de manera especial a Postgrados en Física con sus autoridades, docentes y administrativos, han permitido lograr alcanzar mi meta.

A mis asesores Máster Bolívar Flores, Máster Francisca Flores y Máster Jorge Flores amigos quien con su sabiduría y don de gente me ayudaron en todos los aspectos.

Mi agradecimiento además a mi Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE por brindarme todo el apoyo para la realización de este trabajo.

A ti Anita amor mío, a mi familia y a todos los amigos y amigas que con su apoyo incondicional me han servido de soporte para realizar este trabajo.

José Orlando Díaz Santamaría

DECLARACIÓN EXPRESA

La responsabilidad por los hechos y doctrinas expuestas en este proyecto de examen complexivo, me corresponde exclusivamente; el patrimonio intelectual del mismo a la **Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Departamento de Ciencias Físicas** de la Escuela Superior Politécnica del Litoral.

Orlando D

JOSÉ ORLANDO DÍAZ SANTAMARÍA

TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

FRANCISCO VERA ALCIVAR Ph.D.
NICOLALDEPRESIDENTE DEL TRIBUNAL
COMPLEXIVO

M.Sc. BOLIVAR FLORES
DIRECTOR DEL EXAMEN

Francisca Flores N.

M.Sc. FRANCISCA FLORES NICOLALDE

VOCAL DEL TRIBUNAL

AUTOR DEL PROYECTO DE GRADUACIÓN

Orlando D.

JOSÉ ORLANDO DÍAZ SANTAMARÍA

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

OBJETIVO GENERAL

Resolver la propagación de calor en una placa rectangular metálica homogénea mediante la ecuación de Laplace con condiciones de frontera establecido en régimen estacionario.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Elaborar una guía instruccional del método analítico para encontrar el modelo matemático de la propagación de calor en régimen estacionario.

Elaborar una guía instruccional del método aproximado de diferencias finitas para encontrar el modelo matemático de la propagación de calor en régimen estacionario.

Visualizar y comparar con la ayuda de la simulación computacional la propagación de calor en régimen estacionario por los dos métodos mencionados.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se propone un modelo matemático para la propagación de calor en una placa rectangular en régimen estacionario para los estudiantes que estudian la Unidad de Termodinámica por cuanto resulta un problema complejo de analizar.

El modelo matemático se basa en la ecuación diferencial de Laplace, considerando las condiciones de frontera dada y en régimen estacionaria:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Existe una técnica analítica para la resolución de esta ecuación conocida como el método de separación de variables (Haberman, 2013).

Dependiendo del tipo de coordenadas en la que se defina el problema, en nuestro caso coordenadas rectangulares, el desarrollo de las soluciones conduce a series infinitas de Fourier. [1]

Alternativamente, pueden usarse métodos de aproximación numérica para hallar la distribución de temperaturas en la placa rectangular. Entre los más desarrollados y usados se pueden citar el método de diferencias finitas.

Por lo antes expuesto este documento también busca, explorar y presentar el método de diferencias finitas y sus ecuaciones de recurrencia para aplicarlo al estudio de propagación de calor en una placa rectangular en régimen estacionario (Vargas ,2013).

En el método de diferencias finitas, el problema con las condiciones de borde, de un dominio continuo se discretiza de tal modo que las variables dependientes existen sólo en puntos discretos. Las derivadas se aproximan mediante diferencias, lo que da origen a una representación algebraica de las ecuaciones diferenciales parciales convirtiéndose en un problema de álgebra matricial, dando un sistema de ecuaciones que debe ser resuelto. [2]

Los resultados de las soluciones de ambos métodos pueden ser comparados y visualizados con ayuda de técnicas de información, en este caso con una simulación computacional realizada en MATLAB, que permite ver la concentración de la distribución discreta de la temperatura en la placa rectangular. Se utilizó MATLAB porque es una herramienta computacional que permite mejorar el análisis y visualización de los resultados (Álvarez, 2012).

Para mejor comprensión, se realizó guías instruccionales para los estudiantes en donde se detalla, pasa a paso cada uno de los métodos y la simulación computacional.

CAPÍTULO 1

1. PROBLEMA

1.1. Contexto del problema

En la práctica docente de Física, cuando se enseña la unidad de Termodinámica y se explican problemas complejos como es el caso de la propagación de calor, se observan en los estudiantes las dificultades que estos presentan en su aprendizaje debido a una mala instrucción o inadecuada aplicación de una guía que sirva de tutoría o de soporte para comprender de mejor manera uno de los tópicos tratados, en forma cualitativa y cuantitativa. Por esta razón se vuelve imprescindible la aplicación de la modelación de la física matemática para lograr el interés del estudiante, y una mejor comprensión del tópico estudiado. La modelación matemática brinda esta posibilidad, y con ello, un mejor entendimiento del fenómeno físico.

Esta causa puede incidir en el aprendizaje del estudiante y una desmotivación en del mismo en este tópico y dejar de aprender algo útil para su vida profesional.

De acuerdo a estudios de especialistas, como (Ibarra, 2012), (Álvarez ,2012) y, (Fernández, 2012) entre otros, se sugiere la aplicación de la modelación matemática en la resolución de problemas complejos para obtener mejores resultados y que sirva de apoyo en los estudiantes en la asignatura de Física.

1.2 Declaración del problema

Debido a que el estudio de la propagación de calor es un fenómeno físico complejo de entender para los estudiantes de Física, el propósito de este estudio ha sido elaborar un modelo matemático para la propagación de calor en una placa rectangular con condiciones de borde conocidos y en régimen estacionario, el cual se aplicó a una universidad pública estatal de la provincia de Pichincha, en la unidad de Termodinámica, con el fin de que los estudiantes desarrollen competencias profesionales en el área de Ingeniería.

1.3 Preguntas de investigación

En el desarrollo de este estudio, se ha planteado la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo un docente puede contribuir en el aprendizaje de los estudiantes, en el estudio de un problema físico complejo, relacionado a la propagación de calor en una placa rectangular con condiciones de borde conocidos y en régimen estacionario?

1.4. Justificación e importancia del problema

Este proyecto es relevante a nivel superior en donde el universitario inicia un proceso de pensamiento crítico y manejo de matemáticas superiores, cuando empieza a preguntarse en la parte experimental, el porqué de algunos errores significativos y cómo se explican ciertos fenómenos que no son observables, permitiéndole desarrollar el pensamiento abstracto con problemas complejos aplicados a la Ingeniería.

En la universidad, como parte de la preparación científica de la enseñanza superior, la física permite formar conocimientos sólidos, destrezas matemáticas y a desarrollar pensamiento abstracto para explicar fenómenos físicos complejos para aplicarlos a la Tecnología.

En la Educación Superior, la enseñanza de la Física busca fortalecer en el estudiante los conocimientos científicos de la Ingeniería, aplicando modelos matemáticos para describir y simular con ayuda de las Tics el estado de las variables en régimen estacionario y permanente que describen un fenómeno, así como tener los resultados y presentarlos de mejor forma, permitiéndole así comprender y asimilar mejor los conceptos, leyes, teorías y principios relacionados a un fenómeno físico.

Por esta razón, la modelación matemática de un fenómeno físico complejo, es una de las tareas que permite lograr mayor activación del pensamiento en los estudiantes. Se debe prestar especial atención al análisis físico y matemático desde ejemplos sencillos hasta los más complejos.

El enseñar y aprender a resolver problemas complejos como la propagación de calor se identifica con la aplicación de conceptos físicos y la aplicación de matemáticas superiores. Una de las causas dela baja asimilación de la explicación del fenómeno radica en el hecho de no dar respuestas contundentes, a la explicación del fenómeno, la falta de desarrollo de las matemáticas superiores y el poco uso de herramientas de técnicas de información.

CAPÍTULO 2

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Conceptos Termodinámicos

2.1.1. Temperatura

La temperatura es una magnitud referida a las nociones comunes de caliente, tibio, frío que puede ser medida, específicamente, con un termómetro. En Física, se define como una magnitud escalar relacionada con la energía interna de un sistema termodinámico, definida por el principio cero de la termodinámica.

2.1.2. Calor

El calor es el paso de transferencia de energía entre diferentes cuerpos o diferentes zonas de un mismo cuerpo que se encuentran a distintas temperaturas. Energía asociada a los movimientos de las partículas del sistema, sea en un sentido traslacional, rotacional, o en forma de vibraciones. Esta oleada siempre ocurre desde el cuerpo de mayor temperatura hacia el cuerpo de menor temperatura, ocurriendo la transferencia hasta que ambos cuerpos se encuentren en equilibrio térmico.

En el siglo XIX Thompson y Joule establecieron que el trabajo se convirtió en calor es decir es una forma de energía [3]

2.2. Formas de transmisión de Calor

El calor se transmite por conducción, convección y radiación. En este trabajo la forma de transmitir será por conducción que es un proceso de transferencia de energía entre dos sistemas basado en el contacto directo de sus partículas sin flujo neto de materia y que tiende a igualar la temperatura dentro de un cuerpo o entre diferentes cuerpos en contacto por medio de transferencia de energía cinética de las partículas.

Esta transferencia lo haremos en una placa rectangular de un material conductor con características específicas sobre el cual vamos a determinar la temperatura.[4]

2.3. Determinación de parámetros del modelo matemático

Dentro de las matemáticas utilizaremos la conducción térmica dada por la ley de Fourier.

$$q = -k\nabla u \tag{1}$$

Donde k es la conductividad térmica cuyas unidades en el sistema internacional de medidas $Wm^{-1}K^{-1}$ y,

$\boldsymbol{\nabla} u$ Gradiente de temperatura del campo interior del material sus unidades Km^{-1}.

El calor que atraviesa una superficie S por unidad de tiempo es:

$$\frac{dQ_S}{dt} = \int_S q.ds = -k\int_S \nabla u\,.ds \tag{2}$$

Expresada como ecuación diferencial

$$\alpha \nabla u^2 + \frac{\dot{q}_g}{\rho . c_p} = \frac{\delta u}{\delta t} \tag{3}$$

Donde $\alpha = \frac{k}{\rho . c_p}$ donde ρ es la densidad del material y c_p el calor especifico del cuerpo.

En condiciones estacionarias, condiciones de borde conocidas y en coordenadas rectangulares x e y, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

2.4. Determinación en forma analítica de la solución de la ecuación diferencial de Laplace

En el presente proyecto se trabaja sobre el tipo elíptico ya que sus características matemáticas son distintas a las otras. La ecuación del calor en régimen estacionario y bidimensional se lo realiza con la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Analizando las condiciones de frontera dadas, se resuelve el problema por el método de separación de variables [5], [6].

$$u = XY$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \tag{5}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{6}$$

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0 \tag{7}$$

Se hallan soluciones funcionales para X e Y con constantes desconocidas las cuales se irán encontrando con la aplicación de las condiciones de frontera y las series de Fourier.

2.5. Determinación de la solución de la ecuación diferencial de Laplace utilizando una aproximación numérica diferencias finitas

Para el método de aproximación numérica, diferencias finitas, se parte de la misma ecuación diferencial de Laplace

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; modelo de propagación de temperatura en régimen estacionario

Para el análisis se diferencias finitas se discretiza la placa rectangular con pasos constantes tanto en el largo como la altura. Figura 1:

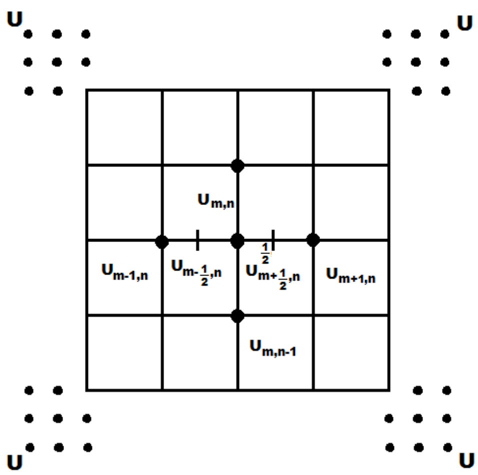


Figura1. Placa para explicar las diferencias finitas.

Autor. José Díaz Santamaría

En la Figura 2 se muestra la variación de la temperatura en función de un valor diferencial, obteniendo las derivadas de la función general con respecto a x.

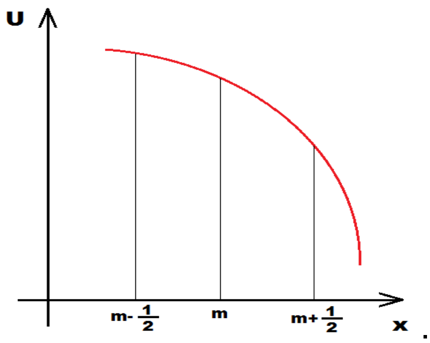


Figura 2. Variación de Temperatura de acuerdo a x.

Autor. José Díaz Santamaría

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{m+½} - u_{m-½}}{\Delta x}; \quad (8)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right| m - ½ = \frac{u_{m,n} - u_{m-1,n}}{\Delta x}; \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right| m + ½ = \frac{u_{m+1,n} - u_{m,n}}{\Delta x} \quad (9)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\right| m, n = \frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right| m+½,n - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right| m-½,n}{\Delta x} = \frac{u_{m+1,n} + u_{m-1,n} - 2u_{m,n}}{\Delta x^2} \quad (10)$$

Si se aproxima $\Delta x = \Delta y$ se tiene en forma análoga para y, su derivada segunda será:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\bigg| m,n = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|m,n+½ - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|\, m,n-½}{\Delta y} = \frac{u_{m,n+1}+u_{m,n-1}-2u_{m,n}}{\Delta y^2} \qquad (11)$$

Con estas derivadas $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\Big| m,n$, $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\Big| m,n$ aproximadas se reemplazan en la ecuación de Laplace obteniéndose el modelo matemático en diferencias finitas:

$$u_{m,n+1} + u_{m,n-1} + u_{m+1,n} + u_{m-1,n} - 4u_{m,n} = 0$$

$$u_{m,n+1} + u_{m,n-1} + u_{m+1,n} + u_{m-1,n} = 4u_{m,n} \qquad (12)$$

Para determinar las ecuaciones se procede a ubicar las condiciones de borde aumentado dos filas y dos columnas.

Luego se encuentran se encuentran las ecuaciones en las posiciones desconocidas aplicando diferencias finitas: Figura 4.

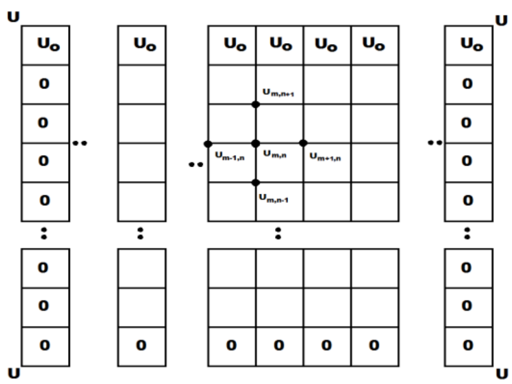


Figura 3. Matriz con condiciones de borde y valores de temperatura desconocidos

Autor. José Díaz Santamaría

2.6. Determinación del error de la comparación de los métodos utilizados de la solución de la ecuación diferencial de Laplace y el método de las diferencias finitas

Para la comparación de los dos métodos se utilizó la teoría de errores

Se calculó el **error** del método MA (analítico) y MDF (diferencias finitas) con respecto a un valor de su correspondiente matriz, cuyo resultado se utilizó en la simulación. [7].

Error absoluto (Err)

$$Err = \|U_{Exat} - U\| \quad 13)$$

U_{Exact}=Solución analítica

U= Solución cualquier método

Error cuadrático medio (Ecm)

$$Ecm = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(U_{Exat} - U)^2} \quad (14)$$

Error cuadrático relativo (Emcr) un error con respecto a la unidad

$$Emcr = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{U_{Exat}-U}{U_{Exat}}\right)^2} \quad (15)$$

CAPÍTULO 3

3. METODOLOGÍA

3.1. Metodología para encontrar las soluciones de la ecuación de Laplace

El presente trabajo se propone el planteamiento de un problema físico, que es la propagación de calor en una placa metálica rectangular con condiciones de borde conocido y en régimen estacionario, por el método analítico y diferencias finitas, cuyos resultados son visualizados con un simulador computacional.

La metodología se divide en tres partes:

Determinación del modelo matemático (ecuación de Laplace) en forma analítica.

Determinación del modelo matemático (ecuación de Laplace) con diferencias finitas.

Simulación computacional, las cuales se detallan a continuación:

3.1.1. Determinación del modelo matemático (ecuación de Laplace) en forma analítica.

Para determinar las ecuaciones del modelo matemático de la propagación de calor en régimen estacionario, plantearemos el siguiente problema en el cual describiremos paso a paso el desarrollo de la ecuación diferencial hasta encontrar la solución analítica. Se adjunta la guía instruccional (Anexo 1).

Problema

Encontrar la ecuación de propagación de calor en régimen estacionario en una placa rectangular, cuyas condiciones de frontera están determinadas en la gráfica.

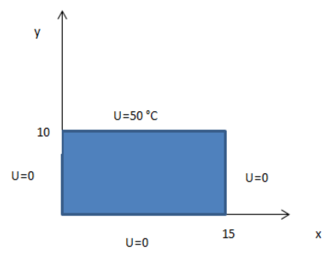


Figura 4. Placa rectangular con las condiciones de frontera.

Autor. José Díaz Santamaría

Ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Condiciones de frontera

$u(15, y) = 0$

$u(x, 10) = Uo$ $\qquad$ $u(0, y) = 0$

Solución con separación de variables

$u = XY$

$\frac{X^{''}}{X} + \frac{Y^{''}}{Y} = 0$

$X^{''} + \lambda^2 X = 0$

$Y^{''} - \lambda^2 Y = 0$

Se halla las funciones X e Y en función de constantes desconocidas.

$X=C_1\cos \lambda x+C_2\text{sen } \lambda x$

$Y=C_3\text{senh } \lambda x+C_4 \cosh\lambda x$

$U= (C_1\cos \lambda x+C_2\text{sen } \lambda x) (C_3\text{senh } \lambda y+C_4\cosh \lambda y)$

Se halla las constantes reemplazando las condiciones de frontera.

U(0,y)=0

$C_1\cos \lambda 0+C_2\text{sen } \lambda 0=0$

$C_1=0$

U(x,0)=0

$0= C_3\text{senh } \lambda 0+C_4 \cosh \lambda 0$

C4=0

$X=C_2\text{sen } \lambda x$

U(15,0)=0

$\text{sen}\lambda 15=\text{sen} n\pi$

$\lambda = \frac{n\pi}{15}$

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C \text{ sen} \frac{n\pi x}{15} \, . \text{senh } \frac{n\pi y}{15}$$

En la condición de frontera queda una serie de Fourier.

U(x,10)=Uo=f(x)

$$\mathrm{U(x,10)} = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{C\ sen}\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}.\mathrm{senh}\ \frac{\mathrm{n\pi 10}}{15}$$

Para determinar bn se tiene:

$$b_n = \frac{2}{15}\left[\int_0^{15} Uosen\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}dx\right]$$

$$\int_0^{15} sen\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}dx = -\left.\frac{cos\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}}{\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}}\right|_0^{0.1} = -\frac{(cosn\pi - 1)}{\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}}$$

El coeficiente n impar

$$b_n = \frac{2}{15}Uo\left[\frac{2}{\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}}\right]$$

$$b_n = \frac{4U_o}{\pi n}$$

$$\mathrm{C\,.\,senh}\ \frac{\mathrm{n\pi 10}}{15}=\frac{4U_o}{\pi n}$$

$$u(x,y) = 4Uo\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\pi n\mathrm{senh}\frac{\mathrm{n\pi 2}}{3}}\ .sen\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}.(\ \mathrm{senh}\ \frac{\mathrm{n\pi y}}{15}) \qquad (16)$$

Si Uo=50 ^{o}C

$$u(x,y) = 200\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\pi n \operatorname{senh}\frac{\text{n}\pi 2}{3}} \cdot sen\frac{\text{n}\pi\text{x}}{15} \cdot \operatorname{senh}\frac{\text{n}\pi\text{y}}{15} \quad (17)$$

El coeficiente n par

$$b_n = 0$$

La función no existiría.
El coeficiente n impar.

La función para valores impares es:

$$u(x,y) = 200\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\pi(2.n-1)\operatorname{senh}\frac{(2.n-1)\pi 2}{3}} \cdot sen\frac{(2.n-1)\pi\text{x}}{15} \cdot \operatorname{senh}\frac{(2.n-1)\pi\text{y}}{15} \quad (18)$$

3.1.2. Determinación del modelo matemático (ecuación de Laplace) con diferencias finitas.

El mismo problema se planteará para ser desarrollado con diferencias finitas Se adjunta guía instruccional (Anexo 2)

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

Modelo de propagación de calor en el cual desaparecen los criterios de calor generado y calor almacenado generando la propagación de calor como una distribución de temperatura.

El análisis de diferencias se discretiza la placa rectangular con pasos constantes tanto para el largo como la altura.

Para nuestra demostración didáctica plantearemos una matriz de 4x5, obteniéndose 20 nodos y representando en la matriz.

$$\begin{bmatrix} U_0 & U_0 & U_0 & U_0 & U_0 \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} & 0 \\ 0 & U_{32} & U_{33} & U_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Se plantea las ecuaciones con el siguiente modelo de diferencias finitas.

$$u_{m,n+1} + u_{m,n-1} + u_{m+1,n} + u_{m-1,n} = 4u_{m,n}$$

Las ecuaciones obtenidas son las siguientes

$-4u_{22} + u_{23} + u_{32} = -U_o$ (20)

$u_{22} - 4u_{23} + u_{33} = -U_o$ (21)

$u_{22} - 4u_{32} + u_{33} = 0$ (22)

$u_{23} + u_{32} - 4u_{33} = 0$ (23)

$u_{23} + u_{33} - 4u_{23} = -U_o$ (24)

$u_{24} + u_{33} - 4u_{32} = 0$ (25)

Luego se resuelve el sistema de ecuaciones.[8]

3.1.3. Simulación computacional

El objetivo de este trabajo no es enseñar a programar en MATLAB sino, contribuir en función del estudiante a través del uso de las técnicas de información, para que visualice el fenómeno de la propagación de calor con solución analítica y diferencias finitas.

3.1.3.1. Simulación en MATLAB método analítico

Se elabora un programa en MATLAB [9] para encontrar la temperatura en función de las posiciones.

Es fundamental obtener la parte gráfica del comportamiento de los parámetros físicos en este caso, temperaturas y posiciones en la placa.

Se utilizará matrices para discretizar las temperaturas en las diferentes posiciones y llenando esta matriz con la solución analítica encontrada.

Los resultados de simulación pueden verificarse en la Figura 5. En donde se puede observar claramente cómo va de una temperatura mayor a una temperatura menor.

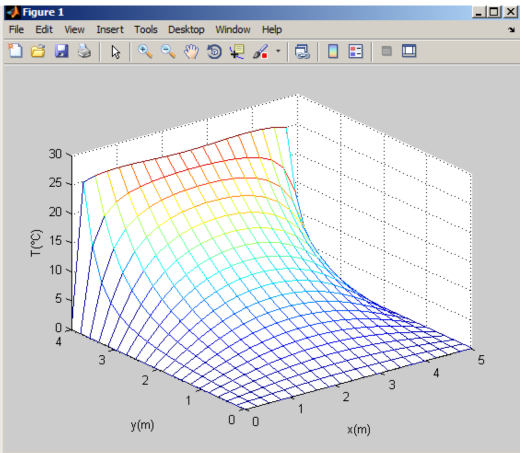


Figura 5. La temperatura en función de la posición x e y

Autor. José Díaz Santamaría

Se adjuntan otras formas de visualización contorno y continuo.(Anexo 3.1).

3.1.3.2. Simulación en MATLAB con diferencias finitas

Para la simulación computacional con diferencias finitas se procede a discretizar la placa con el largo y la altura de la misma con paso constante de uno.

Se encera la matriz de la placa y se aumenta las condiciones de frontera llenando dos filas y dos columnas. La matriz resultante su dimensión aumenta en uno en fila y columna.

Para cada una de las posiciones de la placa se aplican las diferencias finitas obteniéndose las ecuaciones de recurrencia, las cuales son resueltas encontrándose el valor de las temperaturas desconocidas.

Se procede a visualizar los resultados en forma continua como se indica en la Figura 6.

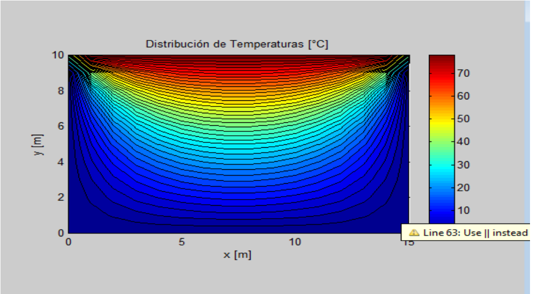


Figura 6. Distribución de la temperatura en función de la posición x e y

Autor. José Díaz Santamaría

Se adjuntan otras formas de visualización mallado y contorno.(Anexo 3.2).

3.1.3.3. Calculo del error

Se determina el error comparando las dos metodologías solución analítica y diferencias finitas, con un valor de temperatura especifico.

Para una placa de 15 cm de largo 10 cm de altura sometido a una temperatura de 50 ºC, condiciones de borde establecida y a una distancia x e y de 7.0 cm por 7.0 cm, se calculará el error y se podrá verificar el resultado en el simulador.

3.2. Resumen de la metodología

La metodología constade cuatro fases importantes. La primera fase, consta dela elaboración de la guía de instrucción para el método analítico y la segunda fase la elaboración de la guía del método de diferencias finitas para resolver la ecuación diferencial de Laplace, con el fin de tener los parámetros necesarios para realizar la tercera etapa que es la simulación computacional. Finalmente, una cuarta fase, en la que se comparan y visualizan los resultados de la modelación matemática y donde se elaboran las conclusiones.

CAPÍTULO 4

4. RESULTADOS OBTENIDOS

4.1. Análisis del resultado del método analítico para resolver la ecuación de Laplace.

Como se conoce la ecuación diferencial de Laplace es una ecuación no lineal cuya solución para la propagación de calor en una placa rectangular de 15 cm por 10 cm con las condiciones de frontera dadas sale una serie infinita de Fourier como la siguiente.

$$u(x,y) = 200\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\pi(2.n-1)\mathrm{senh}\frac{(2.n-1)\pi 2}{3}} .sen\frac{(2.n-1)\pi x}{15} . \mathrm{senh}\ \frac{(2.n-1)\pi y}{15}$$

Realizando una simulación de n= 150 recomendable y una temperatura en la parte superior de la placa de U_0=50 ºC y para una distancia de x= 7.0 cm y una altura de 7.0 cm se obtiene una temperatura de 29.8115 º C parámetro que puede ser utilizado para determinar propiedades físicas del fenómeno a analizar.

4.2. Análisis del resultado del método de aproximación numérica diferencias finitas para resolver la ecuación de Laplace.

Como se conoce la ecuación diferencial de Laplace por diferencias finitas es una ecuación no lineal cuya solución para la propagación de calor en una placa rectangular de 15 cm por 10 cm con las condiciones de frontera dadas, emerge una serie de ecuaciones lineales recurrentes cuya solución la tomamos de la simulación computacional.

Realizando una simulación de una matriz de axb en pasos de 1 cm recomendable y una temperatura en la parte superior de la placa de U_0=50 ºC y para una distancia de x= 7.0 cm y una altura de 7.0 cm se obtiene una temperatura de 29.5128 º C parámetro que puede ser utilizado para determinar propiedades físicas del fenómeno a analizar.

4.3. Análisis del resultado del error cometido entre ambos métodos.

Para una placa de 15 cm de largo 10 cm de altura sometido a una temperatura de 50 ºC, condiciones de borde establecida y a una distancia x e y de 7.0 cm por 7.0 cm, se obtuvieron los siguientes resultados. Tabla 1.

Método	T ºC	Err	Ecm	Emcr
MA	29.815	0.2987	0.2987	0.01
MDF	29.5128			

Tabla 1.Error entre el método analítico y diferencias finitas.

Autor. José Díaz Santamaría

4.4 Resultado del análisis de la simulación computacional gráfica.

Para visualizar los resultados de la propagación de calor en una placa rectangular con condiciones de borde conocidos y en régimen estacionario en el método analítico, vemos que observa tres tipos de representaciones mallado contorno y continúo. ANEXO 3.1

Para visualizar los resultados de la propagación de calor en una placa rectangular con condiciones de borde conocidos y en régimen estacionario por el método de diferencias finitas vemos que observa también los tres tipos de representaciones, mallado, contorno y continúo. ANEXO 3.2.

CAPÍTULO 5

5.1. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1.1. Conclusiones

Analizando los resultados obtenidos para encontrar la solución del problema planteado, se concluye lo siguiente:

1) Se encontró el modelo matemático en forma analítica y diferencias finitas para la propagación de calor en una placa rectangular con condiciones de borde establecido y régimen estacionario.

2) Se elaboró guías instruccionales de cada método para ser aplicado a los estudiantes para mejorar su aprendizaje.

3) Se comparó y visualizo (mallado, contorno y continuo) la propagación de calor con condiciones de borde conocida y en régimen estacionario con un simulador computacional realizado en MATLAB mejorando la comprensión del fenómeno.

Es importante recalcar que las actividades anteriormente descritas responden a la pregunta de investigación declarada en esta investigación, en donde el docente busca contribuir en el aprendizaje de los estudiantes, en el estudio de la propagación de calor en una placa rectangular con condiciones de borde conocidos y en régimen estacionario.

La modelación matemática en la enseñanza y aprendizaje de la Física es una herramienta importante en Ingeniería. (Faviere, 2010).

El análisis de los resultados son factores importantes que influyen en el aprendizaje. (Corona, Martínez, 2011).

El presente trabajo es de interés para los estudiantes y servirá de guía para una mejora en la enseñanza de la Física en la educación superior.

5.1.2. Recomendaciones

Incluir estas guías de instrucción como una nueva técnica de enseñanza y aprendizaje en modelos que requieren ecuaciones diferenciales parciales en la enseñanza de la Física en la unidad de Termodinámica.

Capacitación en Análisis Numérico y manejo de Tics a docentes para un mejor desenvolvimiento de esta técnica educacional.

Asistir a Congresos y seminarios de Modelación de Física Matemática.

Seguimiento y mejoramiento de la instrucción del modelamiento matemático del fenómeno de la propagación de calor. Compartir con los docentes experiencias tanto internamente como con otras universidades.

Con el nuevo cambio en la educación superior en que la cátedra tiene tres componentes los cuales son componente docente, componente práctico y componente autónomo, se quiere fomentar la investigación y las competencias profesionales por lo que esta metodología considero es apropiada.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Zill D. Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado. Sexta Edición .México2002.

[2]. Ibarra M. La ecuación del calor de Fourier: resolución mediante métodos de análisis en variable real y en variable compleja Facultad de Ingeniería, UNaM.(2012).

[3]. Yunin A, Cengel & Micahel A Bolt. Termodinámica Capítulo 2 y 3.(2010)

[4]. Valderrama, J.O. Apuntes de Termodinámica Básica, (2009).

[6]. Serway R, Jewtt J. W. Física para Ciencias de Ingeniería. Séptima edición. (2010.)

[5] Haberman, R, Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de contorno. Madrid España. Pearson Educación S.A. Tercera Edición.(2003).

[6] Trench. W Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado. Tercera Edición USA.(2002).

[7] Stanoyevitch, A, Introduction to Numerical Ordinary and Partial Differential Equations using Matlab, Hobokeand. New Jersey. Published by Wiley & BSons, Inv. (2005).

[8] Zill D. Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado. Sexta Edición .México,2012.

[9] Pérez C. Matlab y sus Aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería.Pearson Prentice Hall, 2002.

[10]. Normad M. Laurendean .Stastistical Thermodynamics.(2000).Capítulo 8,9,10 y11.

[11].A, Kikoin . Física Molecular Termodinámica.(2000). Capítulo 1.2-47.

[12].MackelveyJ .P, Grotch H. Física para Ciencias de la Ingeniería (2000).

[13].Fernández J. Neurociencias y Enseñanza de la Matemática.(2012)

http://www.rieoei.org/expe/3128FdezBravo.pdf

[14].Favieri A. Transformada de Laplace y Fourier con software Mathematica (2010).

file:///C:/Users/Home/Downloads/emnus2010favieri-140126162354-phpapp01.pdf

[15].Adrián Corona Cruz, Guillermo Martínez Peña.Conducción térmica en una varilla de cobre. (México 2011.)

http://www.lajpe.org/dec11/LAJPE_574_Adrian_Corona_preprint_corr_f.pdf

[16].Galeano J .Solución numérica de ecuaciones diferenciales. Colombia (2013).

ANEXOS

ANEXO 1

GUÍA INSTRUCCIONAL

DETERMINACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO EN FORMA ANALÍTICA EN LA PROPAGACIÓN DE CALOR UTILIZÁNDOLA ECUACIÓN DE LAPLACE.

1. **Plantear un problema de propagación de calor por conducción en régimen estacionario y con condiciones de frontera dada en una diapositiva o escribiendo en la pizarra como se muestra a continuación.**

Problema

Encontrar la ecuación de propagación de calor en una placa rectangular en régimen estacionario y cuyas condiciones de frontera están determinadas en la gráfica.

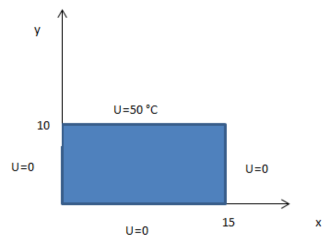


Figura 1. Placa rectangular con las condiciones de frontera.

Autor. José Díaz Santamaría

2. **Poner un video con ayuda de la simulación computacional sobre las formas de transmisión de calor.**

3. **Mediante debate o planteando preguntas afianzar los conceptos de transmisión de calor y en especial la conducción de calor en una placa metálica.**

4. **Plantear la ecuación que modela la propagación de calor y explicar cada uno de los términos.**

5. **Escoger la ecuación de Laplace para encontrar la propagación de calor en régimen estacionario**.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

6. **Poner las condiciones de frontera de acuerdo al problema dado**

$u(15, y) = 0$

$u(x, 10) = Uo$ $u(0, y) = 0$

7. **Describir el método de separación de variables para encontrar la solución analítica de la ecuación de Laplace**

$u = XY$

$$\frac{X^{''}}{X} + \frac{Y^{''}}{Y} = 0$$

$X^{''} + \lambda^2 X = 0$

$Y^{''} - \lambda^2 Y = 0$

8. **Encontrar la solución del funcional X e Y en función de sus constantes y variables respectivas**

$X=C_1\cos \lambda x+C_2\text{sen } \lambda x$

$Y=C_3\text{senh } \lambda x+C_4 \cosh\lambda x$

$U= (C_1\cos \lambda x+C_2\text{sen } \lambda x) (C_3\text{senh } \lambda y+C_4\cosh \lambda y)$

9. **Aplicar las condiciones de frontera adecuada para encontrar las respectivas constantes desconocidas**

U(0,y)=0

$C_1\cos \lambda 0 + C_2 \operatorname{sen} \lambda 0 = 0$

$C_1=0$

U(x,0)=0

$0= C_3 \operatorname{senh} \lambda 0 + C_4 \cosh \lambda 0$

C4=0

$X=C_2 \operatorname{sen} \lambda x$

U(15,0)=0

$\operatorname{sen}\lambda 15 = \operatorname{sen} n\pi$

$$\lambda = \frac{n\pi}{15}$$

1. **Poner la solución en función de sus constantes conocidas y en función de las series con nuevas constantes desconocidas**

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{15} . \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{15}$$

2. **Aplicar la condición de frontera que se ajuste al cálculo de las constantes de la serie de Fourier**

U(x,10)=Uo=f(x)

$$U(x,10) = \sum_{n=1}^{\infty} C \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{15} . \operatorname{senh} \frac{n\pi 10}{15}$$

3. Encontrar las constantes de la serie de Fourier

Para determinar bn se tiene:

$$b_n = \frac{2}{15}\left[\int_0^{15} Uosen\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}dx\right]$$

$$\int_0^{15} sen\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}dx = -\frac{cos\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}}{\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}}\Bigg|_0^{0.1} = -\frac{(cosn\pi - 1)}{\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}}$$

El coeficiente n impar

$$b_n = \frac{2}{15}Uo\left[\frac{2}{\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}}\right]$$

$$b_n = \frac{4U_o}{\pi n}$$

4. Encontrar las constantes de la serie de la solución total

$\mathrm{C\,.\,senh}\ \frac{\mathrm{n\pi 10}}{15} = \frac{4U_o}{\pi n}$

$u(x,y) = 4Uo\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\pi n \mathrm{senh}\frac{\mathrm{n\pi 2}}{3}}\ .sen\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}.(\ \mathrm{senh}\ \frac{\mathrm{n\pi y}}{15})$

5. Con los datos dados por el problema encontrar el modelo matemático para encontrar la temperatura en diferentes posiciones de la placa

Si Uo=50 °C

$$u(x,y) = 200\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\pi n \mathrm{senh}\ \frac{\mathrm{n\pi 2}}{3}}\ .sen\frac{\mathrm{n\pi x}}{15}.\mathrm{senh}\ \frac{\mathrm{n\pi y}}{15}$$

El coeficiente n par

$$b_n = 0$$

La función no existiría

El coeficiente n impar

La función existiría

$$u(x,y) = 200 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\pi(2.n-1)\text{senh}\ \frac{(2.n-1)\pi 2}{3}} \,.\, sen \frac{(2.n-1)\pi x}{15} . \text{senh}\ \frac{(2.n-1)\pi y}{15}$$

6. **Proponer el mismo problema pero cambiando las condiciones de frontera.**

7. **Hacer una evaluacion con ayuda del simulador computacional a través de una prueba elaborada para ver el nivel de aprendizaje alcanzado.**

8. **Retroalimentar en las partes donde el conocimiento a tenido dificultad ayudados conel simulador computacional.**

ANEXO 2

GUÍA INSTRUCCIONAL

DETERMINACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO EN FORMA DIFERENCIAS FINITAS DE LA PROPAGACIÓN DE CALOR

1. **Plantear un problema de propagación de calor por conducción en régimen estacionario y con condiciones de frontera dada en una diapositiva o escribiendo en la pizarra como se muestra a continuación.**

Problema

Encontrar la ecuación de la propagación de calor en una placa rectangular en régimen estacionario y cuyas condiciones de frontera están determinadas en la gráfica.

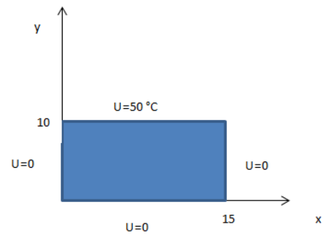


Figura 1. Placa rectangular con las condiciones de frontera.

Autor. José Díaz Santamaría

1. **Escoger la ecuación de Laplace para encontrar la propagación de calor en régimen estacionario.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$; modelo de propagación de temperatura.

2. Descripción del modelo de aproximación numérica de diferencias finitas

3. Para el análisis se diferencias finitas se discretiza la placa rectangular con pasos constantes tanto en el largo como la altura. Figura 2:

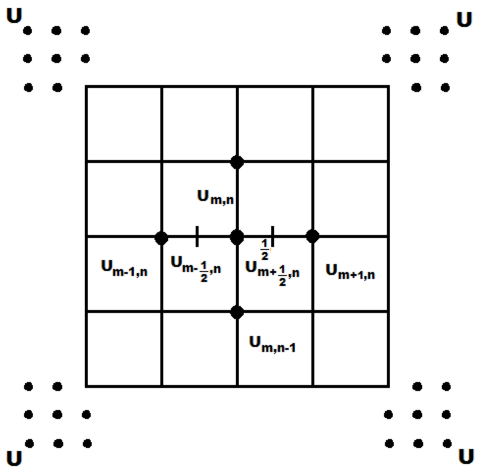


Figura 2. Placa para explicar las diferencias finitas.

Autor. José Díaz Santamaría

4. En la Figura 3 se muestra la variación de la temperatura en función de un valor diferencial, obteniendo las derivadas de la función general con respecto a x.

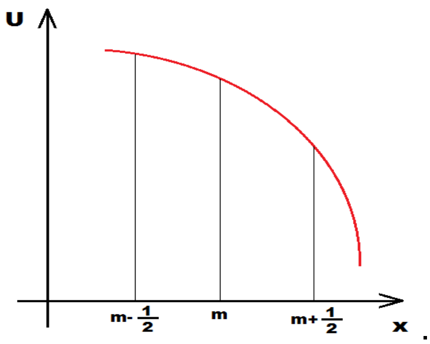


Figura 3. Variación de Temperatura de acuerdo a x.

Autor. José Díaz Santamaría

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{m+½} - u_{m-½}}{\Delta x}$;

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|\ m - ½ = \frac{u_{m,n} - u_{m-1,n}}{\Delta x}; \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|\ m + ½ = \frac{u_{m+1,n} - u_{m,n}}{\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\bigg| m, n$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Big| m + ½, n - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|\ m - ½, n}{\Delta x} = \frac{u_{m+1,n} + u_{m-1,n} - 2u_{m,n}}{\Delta x^2}$$

Si se aproxima $\Delta x = \Delta y$ se tiene en forma análoga para y, sus derivada segunda será:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\bigg| m, n = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Big| m, n + ½ - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|\ m, n - ½}{\Delta y} = \frac{u_{m,n+1} + u_{m,n-1} - 2u_{m,n}}{\Delta y^2}$$

Con estas derivadas $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\Big| m, n$, $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\Big| m, n$ aproximadas se reemplazan en la ecuación de Laplace obteniéndose el modelo matemático en diferencias finitas:

$$u_{m,n+1} + u_{m,n-1} + u_{m+1,n} + u_{m-1,n} - 4u_{m,n} = 0$$

$$u_{m,n+1} + u_{m,n-1} + u_{m+1,n} + u_{m-1,n} = 4u_{m,n}$$

5. **Para determinar las ecuaciones se procede a ubicar las condiciones de borde aumentado dos filas y dos columnas.**

6. **Luego se encuentran se encuentran las ecuaciones en las posiciones desconocidas aplicando diferencias finitas: Figura 4.**

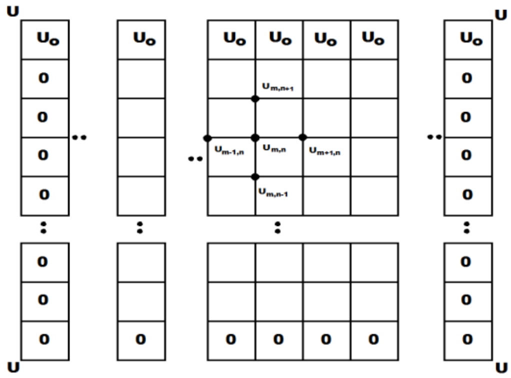


Figura 4. Matriz con condiciones de borde y valores de temperatura desconocidos. **Autor.** José Díaz Santamaría

7. **Escoger una matriz 5x4 y aplicar las condiciones de frontera en una demostracion didáctica.**

Para nuestra demostración didáctica plantearemos una matriz de 4x5, obteniéndose 20 nodos y representando en la matriz.

$$\begin{bmatrix} U_0 & U_0 & U_0 & U_0 & U_0 \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} & 0 \\ 0 & U_{32} & U_{33} & U_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. **Se plantea las ecuaciones con el siguiente modelo de diferencias finitas.**

$$u_{m,n+1} + u_{m,n-1} + u_{m+1,n} + u_{m-1,n} = 4u_{m,n}$$

Las ecuaciones obtenidas son las siguientes

$-4u_{22} + u_{23} + u_{32} = -U_o$ (1)

$u_{22} - 4u_{23} + u_{33} = -U_o$ (2)

$u_{22} - 4u_{32} + u_{33} = 0$ (3)

$u_{23} + u_{32} - 4u_{33} = 0$ (4)

$u_{23} + u_{33} - 4u_{23} = -U_o$ (5)

$u_{24} + u_{33} - 4u_{32} = 0$ (6)

9. Luego se resuelve el sistema de ecuaciones.

10. Mediante la simulación computacional encontrar los valores de temperatura desconocido y visualizarlos (mallado contotno y continuo).

11. Repetir el procedimiento para la propagación de calor régimen estacionario para otras condiciones de frontera.

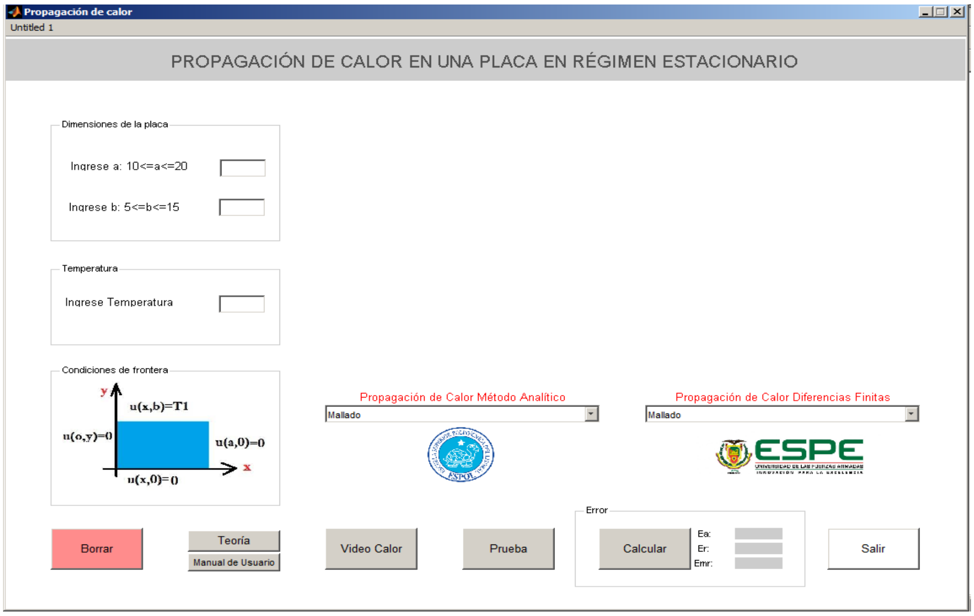
12. Hacer una evaluacion con ayuda del simulador computacional a través de una prueba elaborada para ver el nivel de aprendizaje alcanzado.

13. Retroalimentar en las partes donde el conocimiento a tenido dificultad ayudados conel simulador computacional.

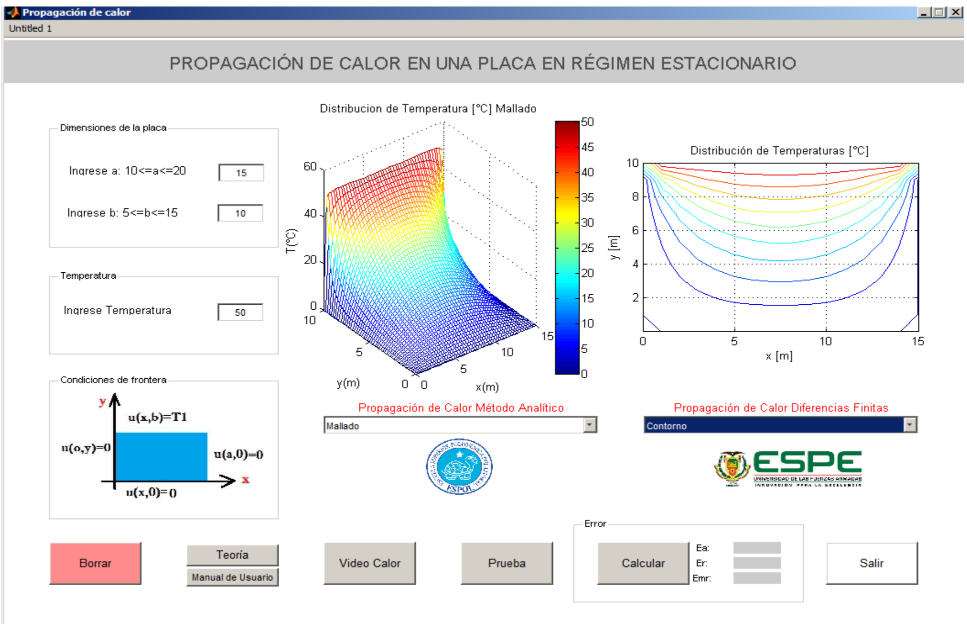
ANEXO 3

SIMULACIÓN COMPUTACIONAL

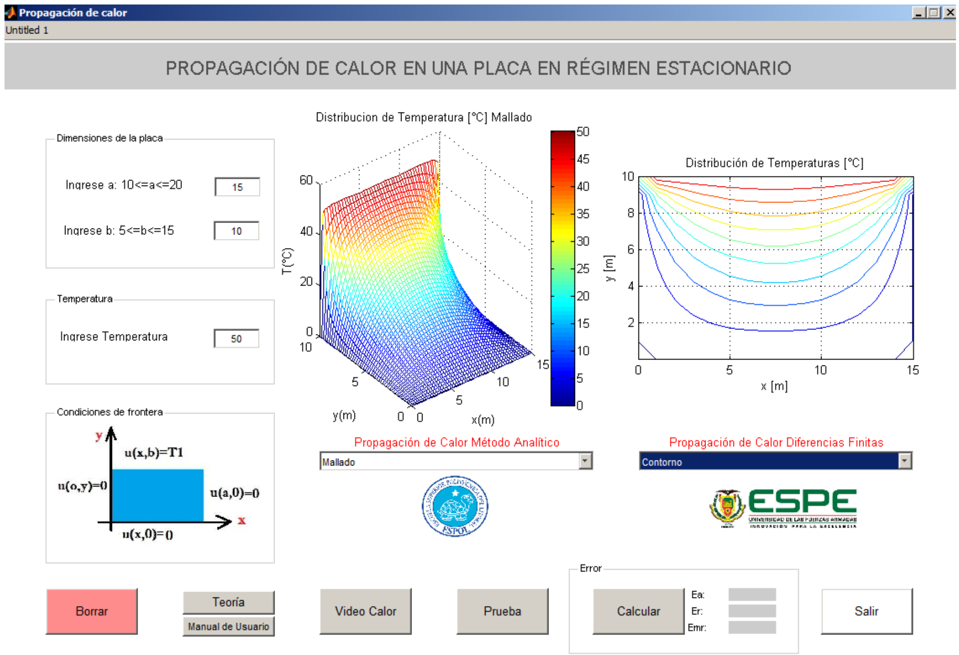
1. **Realizamos la corrida del programa realizado en MATLAB y sale un menu de opciones como el que se observa a continuación.**

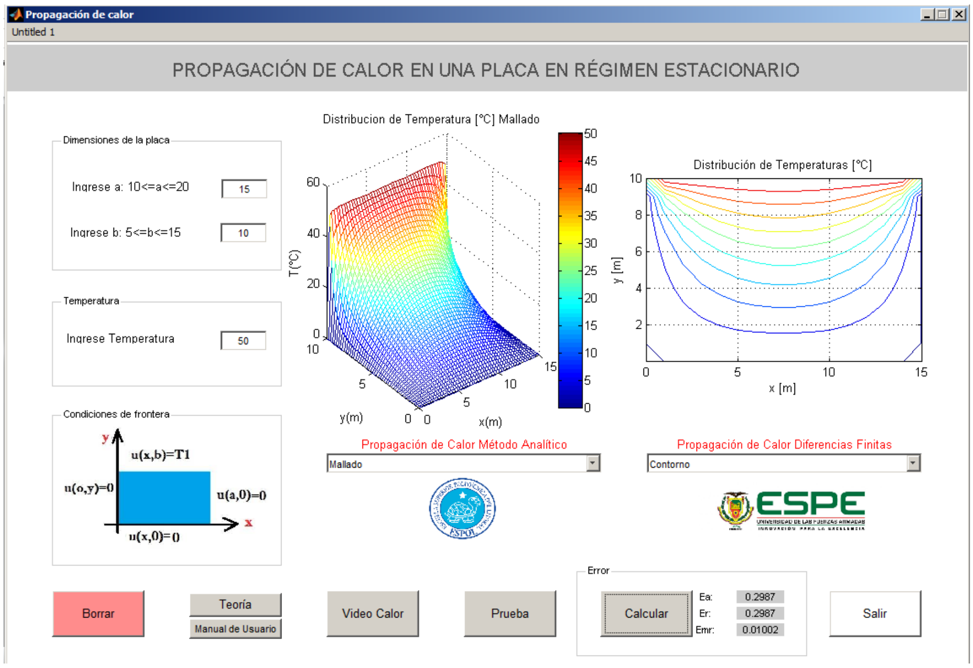


2. **Escogemos el tamaño de la placa en nuestro caso resolver para a=15 y b=10 y T_o=50 y escoger el tipo de gráfica tanto para el método analítico y método de aproximación numérica .**

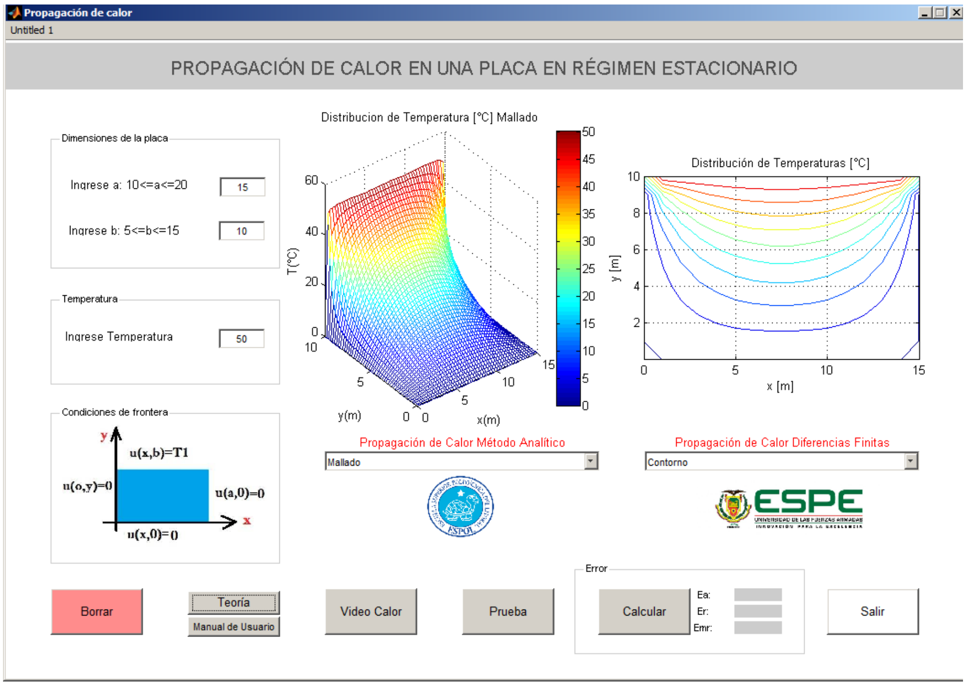


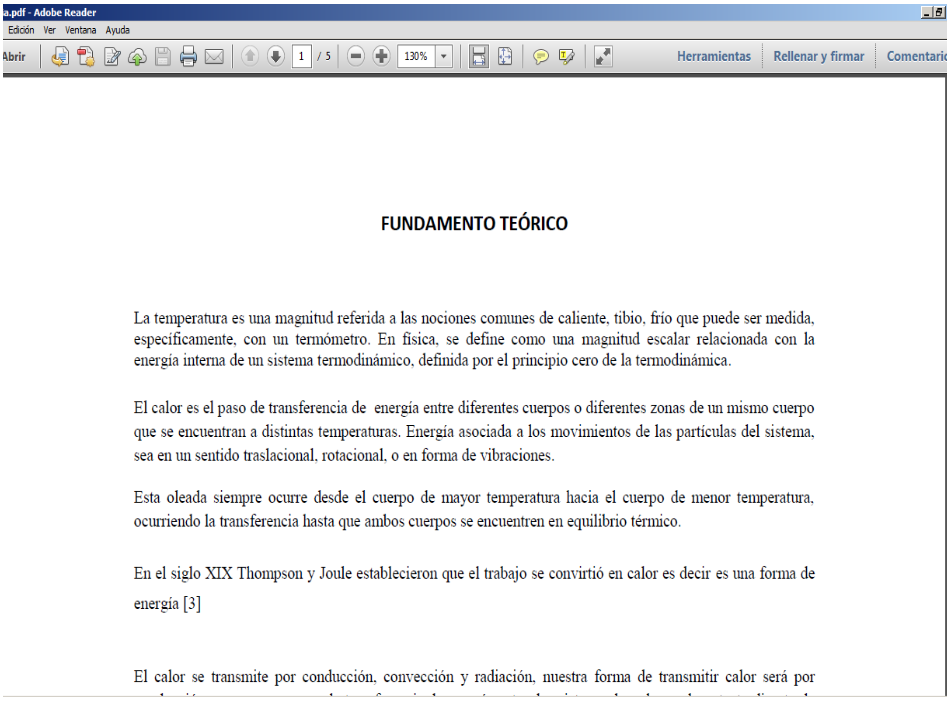
3. Escogemos el boton calcular y obtenemos el error.





4. Escogemos el botón teoría y obtenemos el pdf de la teoría.





FUNDAMENTO TEÓRICO

La temperatura es una magnitud referida a las nociones comunes de caliente, tibio, frío que puede ser medida, específicamente, con un termómetro. En física, se define como una magnitud escalar relacionada con la energía interna de un sistema termodinámico, definida por el principio cero de la termodinámica.

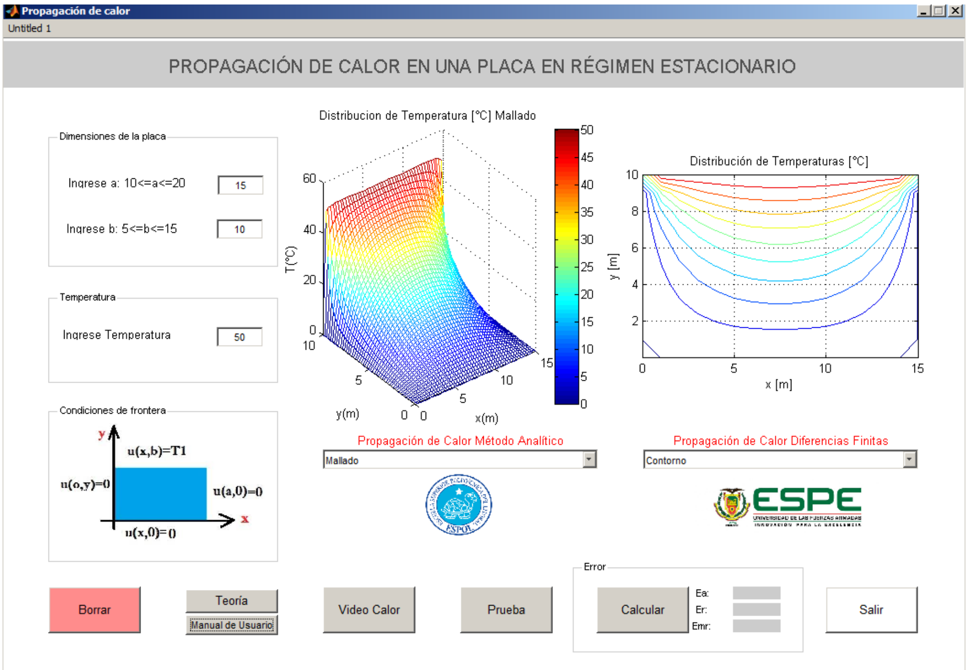
El calor es el paso de transferencia de energía entre diferentes cuerpos o diferentes zonas de un mismo cuerpo que se encuentran a distintas temperaturas. Energía asociada a los movimientos de las partículas del sistema, sea en un sentido traslacional, rotacional, o en forma de vibraciones.

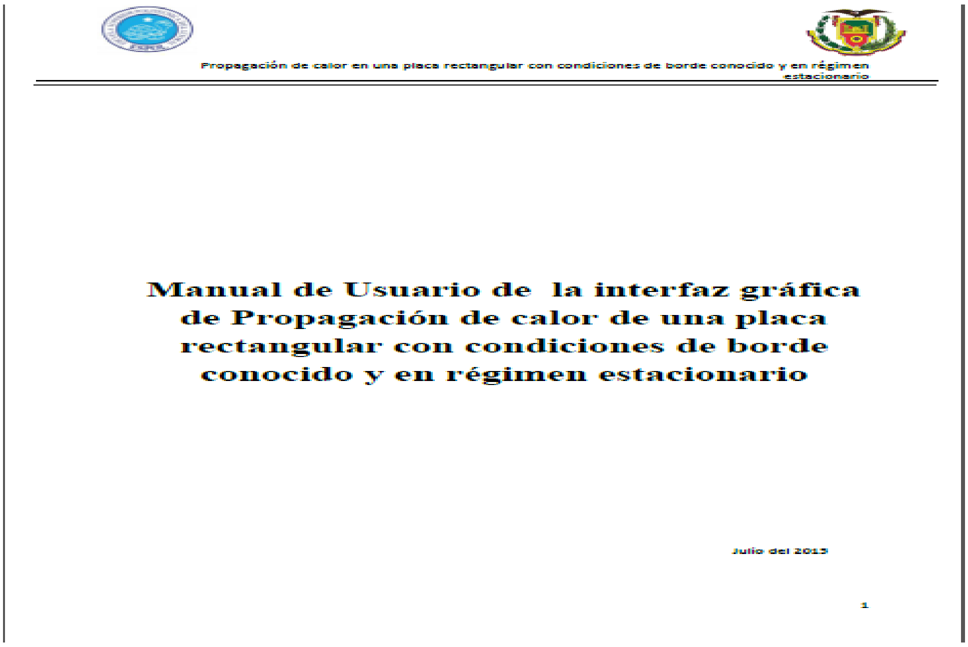
Esta oleada siempre ocurre desde el cuerpo de mayor temperatura hacia el cuerpo de menor temperatura, ocurriendo la transferencia hasta que ambos cuerpos se encuentren en equilibrio térmico.

En el siglo XIX Thompson y Joule establecieron que el trabajo se convirtió en calor es decir es una forma de energía [3]

El calor se transmite por conducción, convección y radiación, nuestra forma de transmitir calor será por

5. **Escogemos el botón manual de usuario y obtenemos el pdf del manual de usuario.**



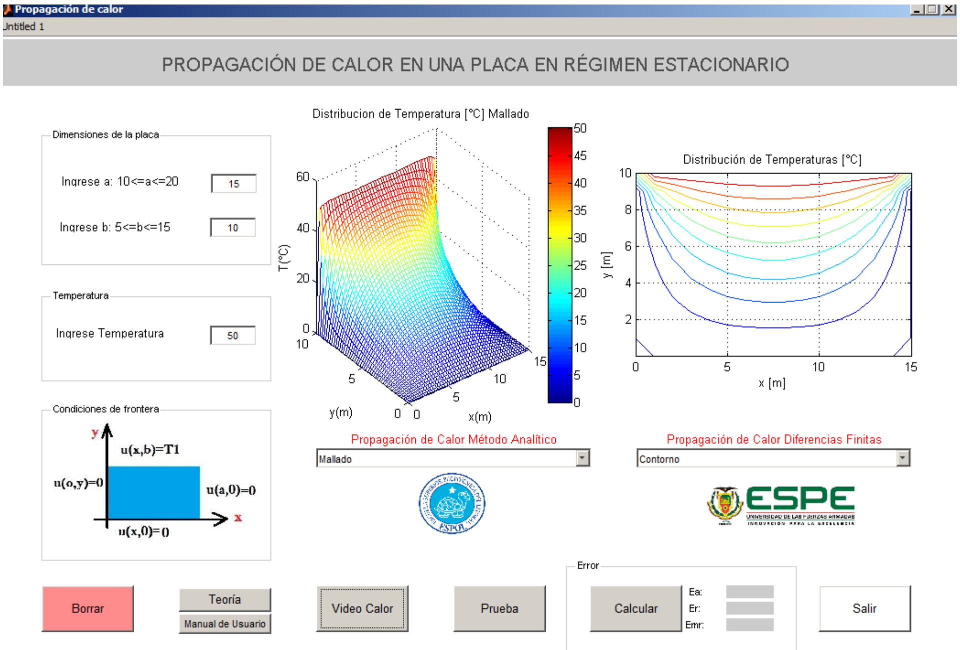

Propagación de calor en una placa rectangular con condiciones de borde conocido y en régimen estacionario

Manual de Usuario de la interfaz gráfica de Propagación de calor de una placa rectangular con condiciones de borde conocido y en régimen estacionario

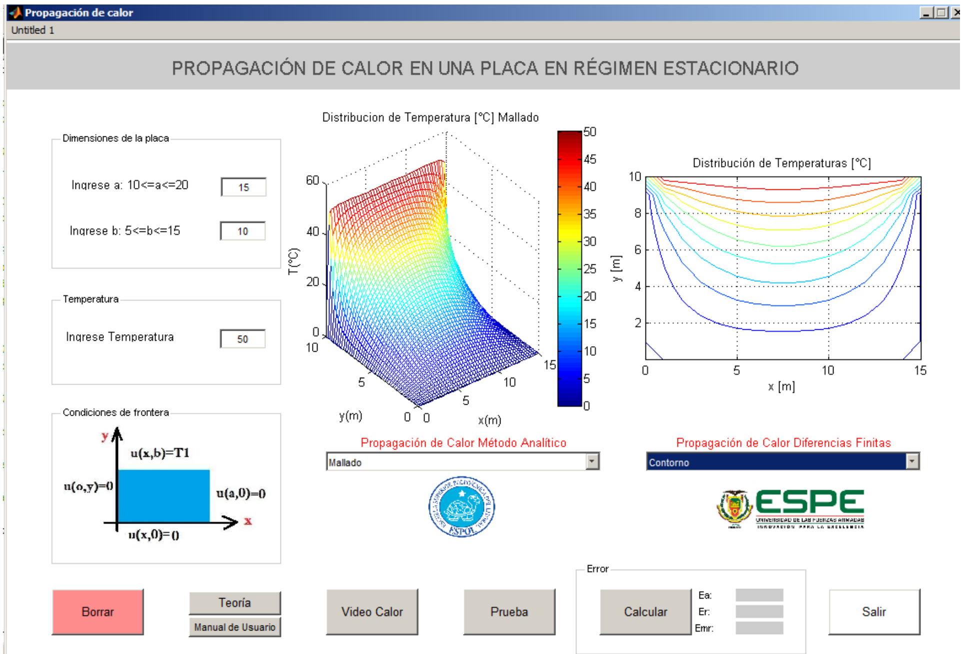
Julio del 2015

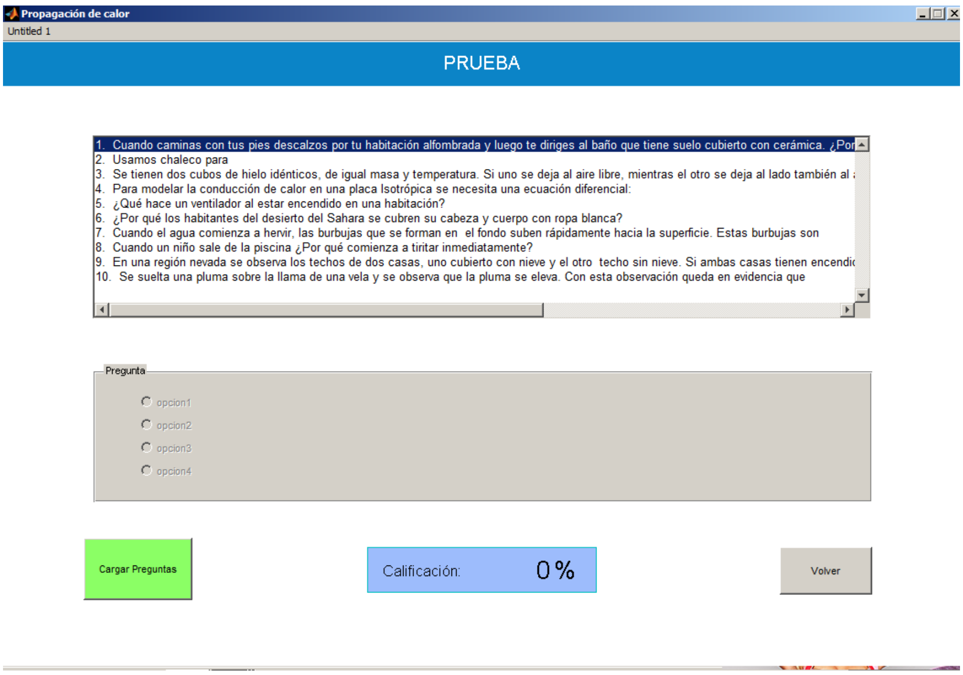
1

6. Escogemos el botón video calor y obtenemos .

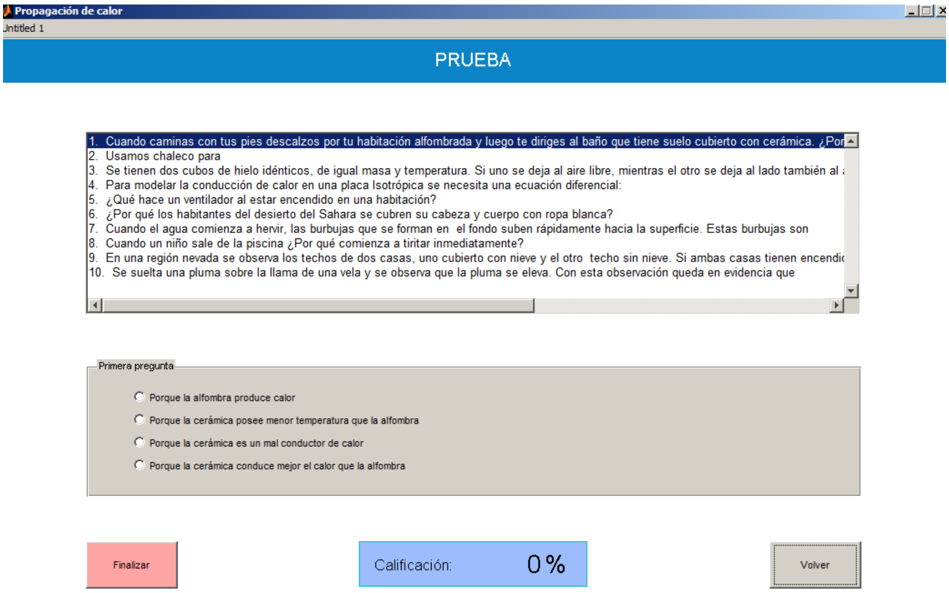


7. Escogemos el botón prueba y obtenemos la prueba a desarrrollar.

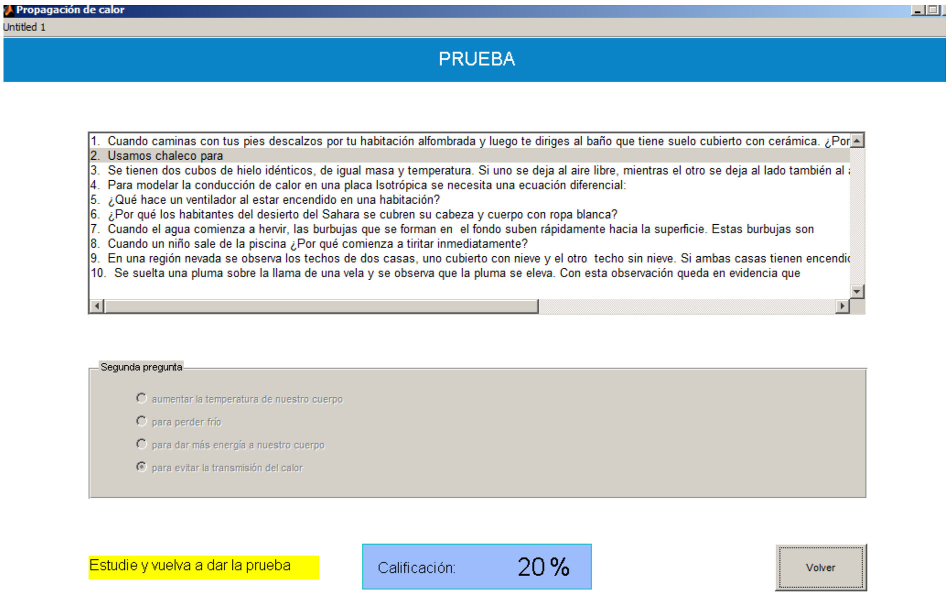




Cargar preguntas



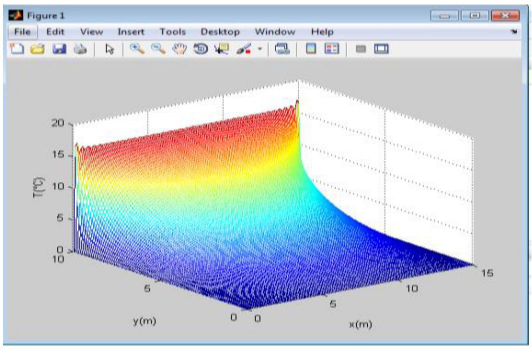
Contestamos las preguntas



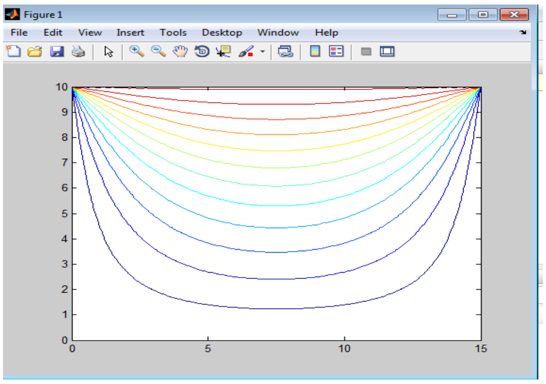
ANEXO 3.1

SIMULACIÓN COMPUTACIONAL MÉTODO ANALÍTICO

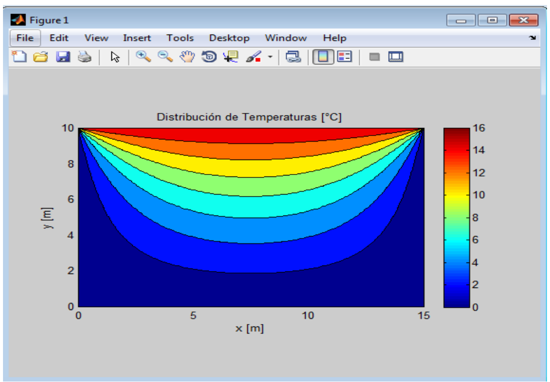
1. Visualización tipo mallado



2. Visualización tipo contorno



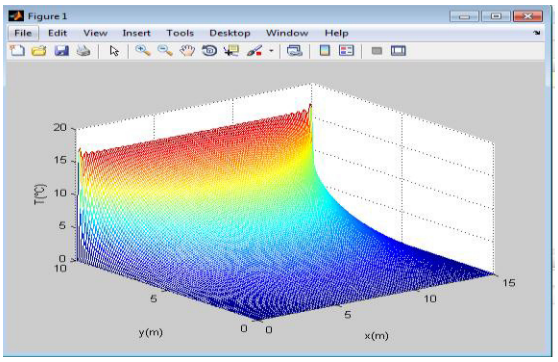
3. Visualización tipo continuo



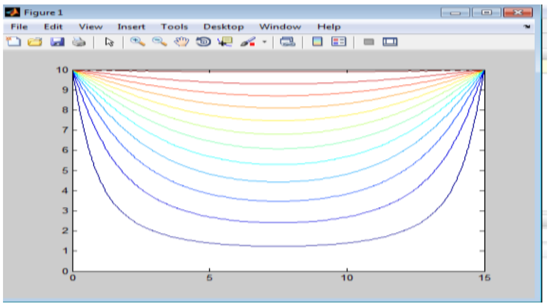
ANEXO 3.2

SIMULACIÓN COMPUTACIONAL MÉTODO APROXIMACIÓN NUMÉRICA DIFERENCIAS FINITAS

1. Visualización tipo mallado



2. Visualización tipo contorno



3. Visualización tipo continuo