ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

Instituto de Ciencias Matemáticas

Ingeniería en Estadística Informática

"Estimadores Jacknife para distintos tipos de población"

TESIS DE GRADO

Previa a la obtención del Título de:

INGENIERA EN ESTADÍSTICA INFORMÁTICA

Presentada por:

Raquel Patricia Plúa Morán

GUAYAQUIL – ECUADOR

AÑO

2003

AGRADECIMIENTO

A Dios,

a mi querida madre y

al Ing. Gaudencio Zurita.

DEDICATORIA

A Dios y

a mi recordado padre.

TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

Mat. Jorge Medina Sancho
DIRECTOR DEL ICM

M. Sc. Gaudencio Zurita H.
DIRECTOR DE TESIS

Ing. Yadira Moreno Medina
VOCAL

Ing. Marcos Mendoza Vélez
VOCAL

DECLARACIÓN EXPRESA

"La responsabilidad del contenido de esta tesis de grado, me corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL"

(Reglamento de graduación de la ESPOL)

Raquel Patricia Plúa Morán

RESUMEN

El presente trabajo de investigación desarrolla la estimación para los parámetros poblacionales de distribuciones continuas y discretas mediante el método Jacknife con el objetivo de determinar la bondad de este tipo de estimación en comparación con los métodos de estimación convencionales.

Para ello revisamos la metodología de la estimación Jacknife, su sesgo, y varianza. Posteriormente, desarrollamos el modelo de simulación, para el problema planteado, se generan 50 muestras aleatorias de tamaño n cada una a partir de poblaciones discretas y continuas, se estiman los parámetros poblacionales mediante el método Jacknife y el método convencional, así, obtenemos las principales medidas descriptivas para los 50 estimadores.

Al analizar los resultados del proceso de simulación pudimos apreciar que el método de estimación Jacknife funciona bastante bien para ciertas poblaciones y con determinados valores para los parámetros poblacionales, sin embargo debemos recalcar que el método Jacknife es un método de remuestreo o intensivo por computador y mientras la muestra aleatoria sea más grande el tiempo de ejecución del algoritmo para la obtención de este tipo de estimador será mayor. Para estimadores insesgados como la media muestral y la varianza, el método Jacknife y el método convencional proporcionan los mismos resultados con tres dígitos de precisión.

INDICE GENERAL

ABREVIATURAS

MATLAB	Matrix Laboratory
Jack	Jacknife
Lím. Inf.	Límite Inferior
Lím. Sup.	Límite Superior
Int.	Intervalo
Conf.	Confianza
Cos	Coseno
Arctan	Arcotangente
In	Logaritmo Natural

SIMBOLOGÍA

S^2	Estimador insesgado para la varianza.
S'^2	Estimador de máxima verosimilitud para la varianza.
$\bar{X}$	Estimador para la media poblacional
$X_{(1)}$	Mínimo Valor
$X_{(n)}$	Máximo Valor
$\tilde{X}$	Estimador para la mediana poblacional
$O(n)$	Orden del sesgo
σ^2	Varianza poblacional
μ	Media poblacional
θ	Parámetro poblacional
$\hat{\theta}$	Estimador del parámetro poblacional.
B	Sesgo de estimación
$\tilde{\theta}$	Estimador Jacknife
n	Tamaño muestral
ρ	Coeficiente de correlación
p	parámetro poblacional
E(X)	Valor Esperado de una variable aleatoria
μ_k'	Momento k-ésimo alrededor del origen
μ_k	Momento k-ésimo alrededor de la media
m_k'	Momento muestral k-ésimo alrededor del origen

m_k	Momento muestral k-ésimo alrededor de la media
L	Función de máxima verosimilitud
$\int$	Integral
d	Diferencial
e	Número neperiano
v_i	Puntos uniformemente distribuidos en un circulo unidad
F(X)	Función de distribución de una variable aleatoria
U_n	Sucesión de variables aleatorias
g	Tamaño de los grupos
t	Percentil de una distribución t-student
z	Percentil de una distribución Normal estándar
R_i	Números Aleatorios
i	Contador
j	Contador
N	Número finito de elementos
K	Parámetro poblacional
λ	Parámetro poblacional
γ	Parámetro poblacional
α	Parámetro poblacional
ω	Parámetro poblacional
β	Parámetro poblacional
Σ	Matriz de Covarianzas

R	Factorización de Cholesky
b(x,n,p)	Distribución Binomial con parámetros n y p
P(λ)	Distribución Poisson con parámetro λ
m(t)	Función generadora de momentos
ψ(t)	Función característica
Θ	Conjunto de parámetros
∂	Delta
N(μ,σ)	Distribución Normal con parámetros σ y μ
$\Gamma(n)$	Función Gamma
$|$	Factorial

INDICE DE GRÁFICOS Y CUADROS

INDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Al trabajar con muestras aleatorias de alguna población desconocida, tratamos de hacer inferencias respecto a la misma utilizando estimadores para los parámetros poblacionales, el “insesgamiento” de los estimadores para una muestra de tamaño n nos garantiza que en promedio éstos estarán muy cerca del valor del parámetro poblacional, la dificultad estriba cuando nos enfrentamos con estimadores sesgados o cuyo sesgo y varianza son difíciles de determinar. En estas últimas condiciones el método Jacknife, un método de remuestreo, resulta ser bastante útil, puesto que logra reducir el sesgo de estimación.

Por tanto, la hipótesis del presente trabajo de investigación es que al trabajar con estimadores para los parámetros poblacionales como la media, mediana, varianza, primer estadístico de orden y último estadístico de orden; mediante el método de estimación Jacknife, se logra reducir el sesgo de estimación; y, la varianza del estimador y la longitud de los intervalos de confianza son pequeñas. Siendo de gran utilidad este tipo de estimadores, especialmente para aquellos investigadores que requieren un grado de acuracidad pequeño, es decir que las estimaciones de los parámetros poblacionales estén muy cercanas al verdadero valor del parámetro poblacional.

CAPÍTULO 1

1. DISTRIBUCIONES POBLACIONALES

1.1 Introducción

En las secciones de este capítulo presentamos las principales definiciones a utilizar en el desarrollo del presente trabajo, teniendo así en la sección 1.2 la definición de parámetro poblacional, en la sección 1.3 la definición de estimador con las características principales deseadas los estimadores, en la sección 1.4 los momentos alrededor de la media y el origen poblacionales y muestrales y los coeficientes que se obtienen a partir de ellos como son el coeficiente de simetría, kurtosis, etc., en esta sección ilustramos con ejemplos lo expuesto anteriormente. En la sección 1.5 mostramos el método de la transformada inversa para la generación de números aleatorios, en la sección 1.6 se muestran e ilustran los métodos de estimación de máxima verosimilitud y de los momentos, en la sección 1.7 revisamos la definición de convergencia en distribución y en la sección 1.8 se hace referencia a las distribuciones discretas y continuas de las cuales presentamos su función de densidad y principales momentos poblacionales en el Anexo 1 y en el Anexo 2, respectivamente.

1.2 Parámetro poblacional

Sea X una variable aleatoria o población, discreta o continua; una constante θ, característica de esta población es denominada parámetro poblacional.

1.3 Estimador

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria tomada de una población X, sea θ un parámetro de dicha población; un estimador $\hat{\theta}$ de θ, es una función $\hat{\theta}: \Re^n \to \Re$ definida en términos de los valores de la muestra y que en su definición no incluye al parámetro θ.

Un parámetro poblacional de θ puede tener más de un estimador $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, etc.

1.3.1 Características de los estimadores

Existen ciertas características de los estimadores, que son deseables al momento de realizar inferencias estadísticas acerca de los parámetros poblacionales como son las siguientes:

Insesgadez

Sea $\hat{\theta}$ un estimador de un parámetro poblacional θ.

Se dice que $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ si $E(\hat{\theta}) = \theta$, caso contrario se dice que es sesgado.

Sesgo de estimación: El sesgo B de un estimador $\hat{\theta}$ de un parámetro poblacional θ está dado por:

$$B = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Si el sesgo de estimación es cero el estimador se denomina insesgado.

Eficiencia relativa

Sea $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ estimadores de un mismo parámetro poblacional θ y $\sigma^2_{\hat{\theta}_1}$ y $\sigma^2_{\hat{\theta}_2}$ las varianzas de los estimadores respectivamente.

Entonces se define:

$$\text{Eficiencia relativa} = \frac{\sigma^2_{\hat{\theta}_2}}{\sigma^2_{\hat{\theta}_1}}$$

Si la eficiencia relativa es mayor que 1 entonces $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$.

Consistencia

Sea $\hat{\theta}$ un estimador de un parámetro poblacional θ.

Se dice que $\hat{\theta}$ es consistente si:

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\hat{\theta}-\theta\right| \leq \xi) = 1, \forall \xi > 0$$

Se puede probar que, si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de un parámetro poblacional θ tenemos que es consistente si se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma^2_{\hat{\theta}} = 0$$

1.4 Momentos alrededor del origen y alrededor de la media.

Para poblaciones podemos obtener los momentos poblacionales alrededor de la media y del origen que también constituyen parámetros poblacionales de la variable aleatoria, análogamente se pueden obtener los momentos muestrales alrededor de la media y del origen que constituyen estimadores de los parámetros poblacionales respectivos, en esta sección presentamos las definiciones mencionadas.

1.4.1 Momento k-ésimo alrededor del origen:

Sea X una variable aleatoria continua con densidad f, se define el k-ésimo momento poblacional alrededor del origen como:

$$\mu_k^l = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

Sea X una variable aleatoria discreta con distribución f, se define el k-ésimo momento poblacional alrededor del origen como:

$$\mu_k^{\prime} = E(X^k) = \sum_x x^k f(x)$$

Para k=1, $\mu_1^{\prime}$ es la media poblacional.

Para estimar los momentos poblacionales alrededor del origen, se suelen utilizar los siguientes estimadores:

Sea X_1, X_2,…,X_n; una muestra aleatoria, entonces los momentos muestrales alrededor del origen se definen como:

$$m_k^{\prime} = \hat{\mu}_k^{\prime} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n}$$

1.4.2 Momento k-ésimo alrededor de la media

Sea X una variable aleatoria continua, se define el k-ésimo momento poblacional alrededor de la media como:

$$\mu_k = E((X-\mu)^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k f(x)dx$$

Sea X una variable aleatoria discreta, se define el k-ésimo momento poblacional alrededor de la media como:

$$\mu_k = E((X-\mu)^k) = \sum_x (x-\mu)^k f(x)$$

Para k=2, tenemos la varianza poblacional.

Para estimar los momentos poblacionales alrededor de la media, se suelen utilizar los siguientes estimadores:

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria, entonces :

$$m_k = \hat{\mu}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k}{n}$$

Se puede probar que, entre momentos poblacionales con respecto a la media y momentos con respecto al origen se dan las siguientes relaciones:

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$
$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3$$
$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_1'^2\mu_2' - 3\mu_1'^4$$

Con los momentos poblacionales de la variable aleatoria X, podemos obtener algunos coeficientes que nos dan una idea de la forma de la función de distribución, como por ejemplo el coeficiente de sesgo y el coeficiente de Kurtosis.

Sesgo de simetría: Es el grado de simetría de una distribución.

$$\text{Sesgo de simetría} = \frac{\mu_3}{\left(\sqrt{\mu_2}\right)^3}$$

Si este coeficiente es mayor a cero la distribución es asimétrica sesgada a la derecha, si es menor a cero la distribución es asimétrica sesgada a la izquierda y si es igual a cero la distribución es simétrica.

Kurtosis: Es el grado de apuntamiento de una distribución.

$$\text{Kurtosis} = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$$

Si este coeficiente es mayor a tres se dice que la distribución es leptocúrtica, si es menor a tres se dice que la distribución es platicúrtica y si es igual a tres se dice que la distribución es mesocúrtica.

Función de verosimilitud:

Sea $X_1,X_2,...,X_n$ variables aleatorias y $x_1, x_2,..., x_n$ n observaciones y Θ, el conjunto de parámetros poblacionales.

Si $X_1,X_2,...,X_n$ son variables aleatorias discretas entonces la función de verosimilitud $L(\Theta, x_1, x_2,..., x_n)$ es la probabilidad conjunta de $x_1, x_2,..., x_n$.

Si $X_1,X_2,...,X_n$ son variables aleatorias continuas entonces la función de verosimilitud $L(\Theta, x_1, x_2,..., x_n)$ es la función de densidad conjunta en $x_1, x_2,..., x_n$.

Ejemplos:

A continuación se presentan las funciones de probabilidad de dos variables aleatorias discretas, una simétrica y la otra asimétrica, así como las distribuciones de los estimadores de la media y la mediana con sus respectivas medidas descriptivas, tratadas en las secciones anteriores. Se trabaja con un tamaño muestral (n=3).

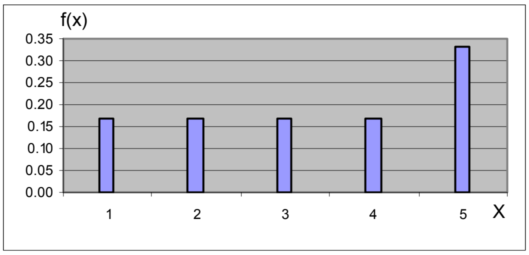
- **Población Asimétrica**

Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad f(x)=P(X=x).

$$f(x) = \begin{cases} 0.17, & x = 1 \\ 0.17, & x = 2 \\ 0.17, & x = 3 \\ 0.17, & x = 4 \\ 0.33, & x = 5 \end{cases}$$

Para esta función de probabilidad, el estadístico de primer orden es 1, el estadístico de último orden es 5, la media poblacional es 3.33, la mediana poblacional es 3.5 y la varianza poblacional es 2.22.

Gráfico 1.1
Estimación por el método Jacknife
Gráfico de la Función de Probabilidad de la Variable Aleatoria X Asimétrica



Elaboración: *R. Plúa*

A partir de la función de probabilidad descrita presentamos la función de probabilidad para sus principales estimadores.

Sea $\overline{X}$ la media muestral, $\hat{\tilde{X}}$ la mediana muestral, s^2 el estimador insesgado de la varianza, s'^2 el estimador de máxima verosimilitud de la varianza, $X_{(1)}$ el primer estadístico de orden y $X_{(n)}$ el n-ésimo estadístico de orden.

$$f_1(\overline{X}) = \begin{cases} 0.05, & \overline{x} = 2 \\ 0.05, & \overline{x} = 2.33 \\ 0.15, & \overline{x} = 2.67 \\ 0.15, & \overline{x} = 3 \\ 0.2, & \overline{x} = 3.33 \\ 0.15. & \overline{x} = 3.67 \\ 0.15, & \overline{x} = 4 \\ 0.05, & \overline{x} = 4.33 \\ 0.05, & \overline{x} = 4.67 \end{cases} \quad f_2(\hat{\tilde{X}}) = \begin{cases} 0.2, & \hat{\tilde{x}} = 2 \\ 0.3, & \hat{\tilde{x}} = 3 \\ 0.3, & \hat{\tilde{x}} = 4 \\ 0.2, & \hat{\tilde{x}} = 5 \end{cases} \quad f_3(s^2) = \begin{cases} 0.5, & s^2 = 1 \\ 0.3, & s^2 = 2 \\ 0.15, & s^2 = 3 \\ 0.05, & s^2 = 4 \end{cases}$$

$$f_4(s'^2) = \begin{cases} 0.05, & s'^2 = 0.22 \\ 0.05, & s'^2 = 0.8 \\ 0.2, & s'^2 = 0.67 \\ 0.3, & s'^2 = 1.55 \\ 0.05, & s'^2 = 2 \\ 0.1, & s'^2 = 2.67 \\ 0.2, & s'^2 = 2.89 \\ 0.05, & s'^2 = 3.56 \end{cases} \quad f_5(X_{(1)}) = \begin{cases} 0.5, & x_{(1)} = 1 \\ 0.3, & x_{(1)} = 2 \\ 0.15, & x_{(1)} = 3 \\ 0.05, & x_{(1)} = 4 \end{cases} \quad f_6(X_{(n)}) = \begin{cases} 0.05, & x_{(n)} = 3 \\ 0.15, & x_{(n)} = 4 \\ 0.8, & x_{(n)} = 5 \end{cases}$$

Las medidas descriptivas para cada uno de los estadísticos se muestran en la Tabla 1:

Tabla I
Estimación por el Método Jacknife
Parámetros de las funciones de probabilidad de los principales estimadores para la población X Asimétrica.

	Media muestral	Mediana Muestral	Primer estadístico de orden	Último estadístico de orden	Varianza muestral (Inses.)	Varianza muestral (máx. ver.)
Media	3.333	3.500	1.750	4.750	2.667	1.778
Mediana	3.333	3.500	1.500	5.000	2.333	1.556
Moda	3.333	3.000	1.000	5.000	2.333	1.556
Varianza	0.468	1.105	0.829	0.303	2.152	0.956
Curtosis	-0.377	-1.100	0.260	4.657	-1.176	-1.176
Asimetría	0.000	0.000	1.017	-2.239	0.156	0.156
Rango	2.667	3.000	3.000	2.000	5.000	3.333
Mínimo	2.000	2.000	1.000	3.000	0.333	0.222
Máximo	4.667	5.000	4.000	5.000	5.333	3.556

Elaboración: *R. Plúa*

Como podemos el valor esperado para la función de probabilidad de la media muestral coincide con el valor esperado de la función de probabilidad para la variable aleatoria X, por lo que la media muestral es un estimador insesgado para la media poblacional, el estimador de la mediana muestral también es insesgado ya que el valor esperado del mismo coincide con el valor de la mediana poblacional. La función de probabilidad de estos estimadores es simétrica, como se puede constatar al observar el coeficiente de asimetría, dado en la Tabla I.

El sesgo de estimación para el estadístico de primer orden es $B = 1.75 - 1 = 0.75$, el sesgo de estimación para el último estadístico de orden es de $B = 4.75 - 5 = -0.25$, el sesgo de estimación para la varianza muestral $B = 2.66 - 2.22 = 0.44$, y el sesgo de estimación para el estimador de la varianza obtenido por el método de máxima verosimilitud es $B = 1.77 - 2.22 = -0.44$; lo que indica que estos estimadores son sesgados. Las funciones de probabilidad para estos estimadores son asimétricas, como se muestra en la Tabla 1, el coeficiente de asimetría es diferente de cero.

- **Población Simétrica**

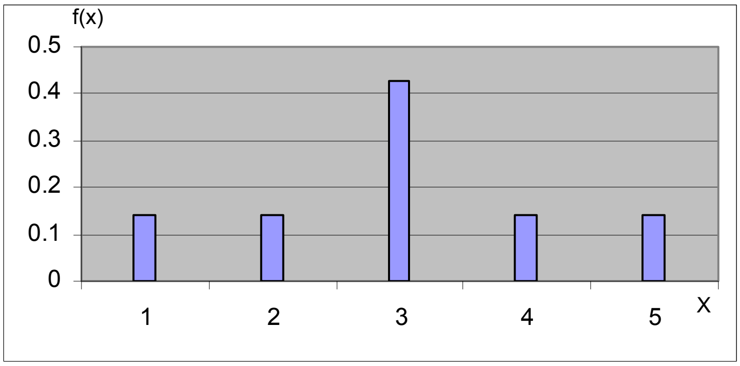
Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad f(x).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & x = 1 \\ \frac{1}{7}, & x = 2 \\ \frac{3}{7}, & x = 3 \\ \frac{1}{7}, & x = 4 \\ \frac{1}{7}, & x = 5 \end{cases}$$

Para esta función de probabilidad, el estadístico de primer orden es 1, el estadístico de último orden es 5, la media poblacional es 3, la mediana poblacional es 3 y la varianza poblacional es 1.4285.

A partir de la función de probabilidad descrita presentamos la función de probabilidad para sus principales estimadores:

Gráfico 1.2
Estimación por el método Jacknife
Gráfico de la Función de probabilidad f(X) Simétrica



Elaboración: *R. Plúa*

$$f_1(\overline{X}) = \begin{cases} \frac{3}{35}, & \bar{x} = 2 \\ \frac{4}{35}, & \bar{x} = 2.33 \\ \frac{7}{35}, & \bar{x} = 2.67 \\ \frac{7}{35}, & \bar{x} = 3 \\ \frac{7}{35}, & \bar{x} = 3.33 \\ \frac{4}{35}. & \bar{x} = 3.67 \\ \frac{3}{35}, & \bar{x} = 4 \end{cases} \qquad f_2(\hat{\tilde{X}}) = \begin{cases} \frac{5}{35}, & \hat{\tilde{x}} = 2 \\ \frac{25}{35}, & \hat{\tilde{x}} = 3 \\ \frac{5}{35}, & \hat{\tilde{x}} = 4 \end{cases} \qquad f_3(s^2) = \begin{cases} \frac{1}{35}, & s^2 = 0 \\ \frac{6}{35}, & s^2 = 0.33 \\ \frac{9}{35}, & s^2 = 1 \\ \frac{6}{35}, & s^2 = 1.33 \\ \frac{8}{35}, & s^2 = 2.33 \\ \frac{3}{35}, & s^2 = 4 \\ \frac{2}{35}, & s^2 = 4.33 \end{cases}$$

$$f_4(s'^2)=\begin{cases}\frac{1}{35}, & s'^2=0\\ \frac{6}{35}, & s'^2=0.22\\ \frac{9}{35}, & s'^2=0.67\\ \frac{6}{35}, & s'^2=0.89\\ \frac{8}{35}, & s'^2=1.56\\ \frac{3}{35}, & s'^2=2.67\\ \frac{2}{35}, & s'^2=2.89\end{cases} \quad f_5(X_{(1)})=\begin{cases}\frac{15}{35}, & x_{(1)}=1\\ \frac{10}{35}, & x_{(1)}=2\\ \frac{10}{35}, & x_{(1)}=3\end{cases} \quad f_6(X_{(n)})=\begin{cases}\frac{10}{35}, & x_{(n)}=3\\ \frac{10}{35}, & x_{(n)}=4\\ \frac{15}{35}, & x_{(n)}=5\end{cases}$$

Las medidas descriptivas para cada uno de los estadísticos se muestran en la Tabla 2:

Tabla II
Estimación por el Método Jacknife
Parámetros de las funciones de probabilidad de los principales estimadores para la población X Simétrica.

	Media muestral	Mediana Muestral	Primer estadístico de orden	Último estadístico de orden	Varianza muestral (Inses.)	Varianza muestral (máx. ver.)
Media	3,000	3,000	1,857	4,143	1,667	1,111
Mediana	3,000	3,000	2,000	4,000	1,333	0,889
Moda	2,667	3,000	1,000	5,000	1,000	0,667
Varianza	0,317	0,294	0,714	0,714	1,536	0,683
Curtosis	-0,736	0,773	-1,553	-1,553	-0,009	-0,009
Asimetría	0,000	0,000	0,285	-0,285	0,929	0,929
Rango	2,000	2,000	2,000	2,000	4,333	2,889
Mínimo	2,000	2,000	1,000	3,000	0,000	0,000
Máximo	4,000	4,000	3,000	5,000	4,333	2,889

Elaboración: *R. Plúa*

Como podemos el valor esperado para la función de probabilidad de la media muestral coincide con el valor esperado de la función de probabilidad para la variable aleatoria X, por lo que la media muestral es un estimador insesgado para la media poblacional, el estimador de la mediana muestral es un estimador insesgado para la media poblacional porque su valor esperado también coincide con valor de la media poblacional. La función de probabilidad de estos estimadores es simétrica, como se puede constatar al observar el coeficiente de asimetría dado, en la Tabla 2.

El sesgo de estimación para el estadístico de primer orden es $B = 1.857 - 1 = 0.857$, el sesgo de estimación para el último estadístico de orden es de $B = 4.143 - 5 = -0.857$, el sesgo de estimación para la varianza muestral $B = 1.67 - 1.4285 = 0.2415$, y el sesgo de estimación para el estimador de la varianza obtenido por el método de máxima verosimilitud es $B = 1.11 - 1.4285 = -0.3185$; lo que indica que estos estimadores son sesgados. Las funciones de probabilidad para estos estimadores son asimétricas, como se muestra en la Tabla II, el coeficiente de asimetría es diferente de cero.

1.5 Generación de números aleatorios de distribuciones poblacionales por el método de la transformada inversa.

Para trabajos experimentales como el que vamos a desarrollar, muchas veces se tiene que simular las observaciones que se obtendrían al realizar el experimento, si proviniesen de determinada población. Para esto, se suele utilizar el método de la transformada inversa.

Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución U(0,1), esto es:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0 \ \vee \ x > 1 \end{cases}$$

Sea Y una variable aleatoria descrita por la función de densidad g(y) y función de distribución acumulada G(y).

Integrando :

$$\int dx = \int dG(y)$$

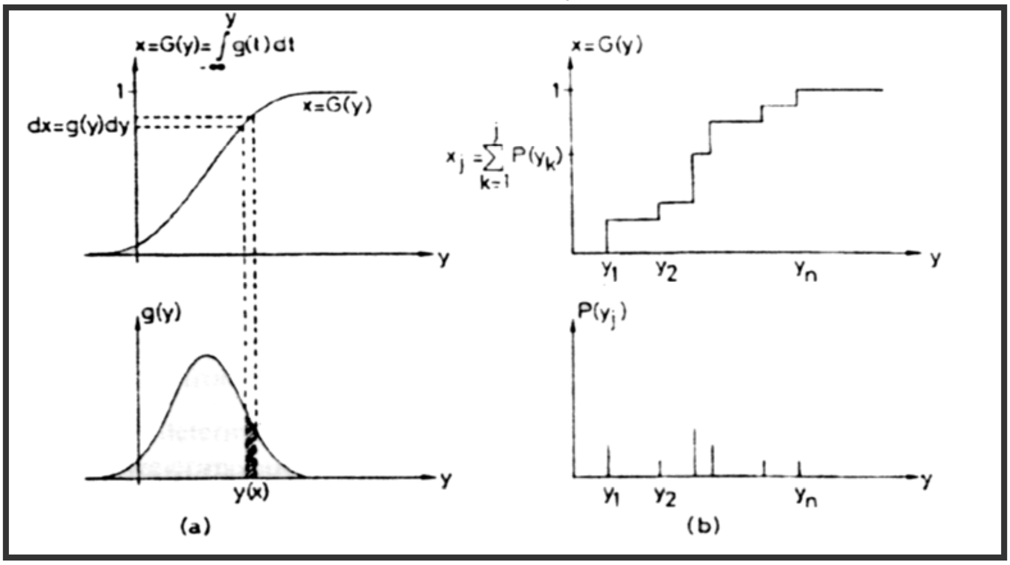
$$x = G(y) = \int_{-\infty}^{y} g(t)dt$$

Como $x \in [0,1]$, al invertir $x = G(y)$,

$$y = G^{-1}(x)$$

Tenemos un número aleatorio descrito por la función de densidad g(y).

Gráfico 1.3
Estimación por el método Jacknife
Transformación de una variable aleatoria uniforme X a una variable aleatoria Y con distribución G(y).



Fuente: ***S. Brandt***

Como se puede observar en el gráfico 1.1 (b) la relación mencionada puede ser usada en el caso de distribuciones discretas.

En los siguientes ejemplos, estipulamos una variable aleatoria con función de densidad Y de la cual obtenemos un número aleatorio, por el método de la transformada inversa descrito anteriormente.

- Sea X una variable aleatoria U(0,1) y Y una variable aleatoria con función de densidad exponencial con parámetro β:

$$f(y)=\frac{1}{\beta}e^{-\frac{y}{\beta}},\ y\geq 0$$

$$x=G(y)=\frac{1}{\beta}\int_0^y g(y)dy=1-e^{-\frac{y}{\beta}}$$

$$\ln(1-x)=-\frac{y}{\beta}\ln e$$

$$y=-\beta\ln(1-x)$$

- Sea X una variable aleatoria U(0,1) y Y una variable aleatoria con función de probabilidad

$$g(y)=\begin{cases}0.2, & y=1\\ 0.3, & y=2\\ 0.5, & y=3\end{cases}$$

La función de distribución para la función de densidad de Y es:

$$G(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ 0.2, & 1\leq y<2\\ 0.5, & 2\leq y<3\\ 1, & y\geq 3\end{cases}$$

La números aleatorios obtenidos de la función de densidad g(y), se los obtiene con la siguiente regla de correspondencia:

$$Y=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 0.2\\ 2, & 0.2<x\leq 0.5\\ 3, & 0.5<x\leq 1\end{cases}$$

- Sea Y una variable aleatoria con función de densidad N(0,1)

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}},-\infty<y<\infty$$

Se toma las coordenadas de un espacio de puntos uniformemente distribuido dentro del círculo unidad.

El punto (v_1,v_2)

Donde $v_1=2(u_1)-1$ y $v_2=2(u_2)-1$

Expresados en coordenadas polares;

$v_1=r\ Cos\ \theta$

$v_2=r\ Cos\ \theta$

donde $r=\sqrt{s}$, $\theta=\text{Arctan}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$ y $s=v_1^{\ 2}+v_2^{\ 2}$

Siendo $y_1=v_1\sqrt{\frac{-2}{s}\mathbf{ln}(s)}$ y $y_2=v_2\sqrt{\frac{-2}{s}\mathbf{ln}(s)}$

El punto (y_1,y_2) en coordenadas polares es:

$$y_1=Cos(\theta)\sqrt{-2\,\mathbf{ln}(s)} \quad \text{y} \quad y_2=sen(\theta)\sqrt{-2\,\mathbf{ln}(s)}$$

$$F(r)=P(\sqrt{-2\,\mathbf{ln}(s)}\le r)=P(-2\,\mathbf{ln}(s)\le r^2)$$

$$F(r)=P(s>e^{-\frac{r^2}{2}})=1-e^{-\frac{r^2}{2}}$$

La densidad de probabilidad de r es:

$$f(r)=\frac{dF(r)}{dr}=re^{\frac{-r^2}{2}}$$

La función de densidad conjunta de y_1 y y_2 es:

$$
\begin{aligned}
F(y_1, y_2) &= P(Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2) \\
&= P(rCos(\theta) \le y_1, rsen(\theta) \le y_2) \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_{(Y_1<y_1, Y_2<y_2)} re^{-\frac{r^2}{2}} dr d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_{(Y_1<y_1, Y_2<y_2)} e^{-\frac{(y_1^2+y_2^2)}{2}} dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_1} e^{-\frac{y_1^2}{2}} dy_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_2} e^{-\frac{y_2^2}{2}} dy_2 \right)
\end{aligned}
$$

Por tanto, y_1 y y_2 provienen de distribuciones normales estándares independientes.

1.6 Métodos de estimación

Sabemos que un parámetro poblacional puede tener más de un estimador, por lo tanto se suelen utilizar métodos de estimación para la obtención de los mismos como lo son el método de los momentos y el método de máxima verosimilitud, los cuales se explican en esta sección.

1.6.1 Método de Máxima Verosimilitud

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria tomada de una población X con p parámetros desconocidos θ_i, $i = 1,2,...,p$.

El método consiste en escoger como estimadores de los parámetros poblacionales aquellos valores de los parámetros que maximizan la función de verosimilitud $L(\Theta, X_1, X_2, ..., X_n)$.

Se construye la función de verosimilitud $L(\Theta, X_1, X_2, ..., X_n)$, los valores de los parámetros que maximizan la función se los obtiene derivando la misma, pero algunas veces es dificultoso y tedioso la derivación en un producto, por lo que construimos la función $l = \ln(L)$ ya que por ser la función logaritmo natural monótona, creciente y no negativa se maximiza en el mismo punto. Posteriormente derivamos la función l con respecto a cada parámetro poblacional obteniendo p ecuaciones con p incógnitas; al resolver el sistema de ecuaciones tendremos los p estimadores de máxima verosimilitud para los p parámetros desconocidos.

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_1} = 0, \frac{\partial l}{\partial \theta_2} = 0, ..., \frac{\partial l}{\partial \theta_p} = 0$$

En el siguiente ejemplo ilustraremos el método de máxima verosimilitud para la obtención de los estimadores de la media y varianza poblacional.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria tomada de una población Normal con media μ y varianza σ^2.

L es la función de densidad conjunta de la muestra. Por lo tanto:

$$L = \frac{e^{\left(\frac{-(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\left(\frac{-(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \dots \frac{e^{\left(\frac{-(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$L = \frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$\ln L = \frac{-n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}\right) = 0 \qquad (2)$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de la ecuación (1) obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i-\mu)^2}{\hat{\sigma}^2}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\hat{\mu} = 0$$

$$\hat{\mu} = \overline{X}$$

Al sustituir $\overline{X}$ por $\hat{\mu}$ en la ecuación (2):

$$-\frac{n}{\hat{\sigma}^2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i-\overline{X})^2}{\hat{\sigma}^4}\right) = 0$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-\overline{X})^2\right)}{n}$$

Demostraremos que $\hat{\mu}$ es un estimador insesgado de μ.

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$$

Por el contrario $\hat{\sigma}^2$ es un estimador sesgado de σ^2.

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\right)^2\right) - nE\left(\overline{X}^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^{\,2}\right) - nE\left(\overline{X}^2\right)\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2 + \mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right] =$$

$$= \frac{(n-1)\sigma^2}{n}$$

El sesgo de estimación es $B = E(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2 = \dfrac{-\sigma^2}{n}$.

1.6.2 Método de los momentos

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria tomada de una población X con p parámetros desconocidos θ_i, $i = 1,2,...,p$.

El método se basa en el supuesto de que los momentos alrededor del origen de la muestra deben proporcionar estimaciones apropiadas para los momentos alrededor del origen de la población. Por lo tanto podemos expresar:

$$m_k^{'} = \mu_k^{'}, \quad k = 1,2,...,p$$

Obteniendo un sistema de p ecuaciones con p incógnitas que son los parámetros desconocidos. Al resolver el sistema de ecuaciones obtendremos los estimadores de los parámetros poblacionales.

Presentaremos la estimación de los parámetros de la función de densidad Gamma utilizando el método de los momentos, la obtención de estos estimadores por medio del método de máxima verosimilitud resultaría muy dificultosa.

Sea X una variable aleatoria con función de densidad Gamma:

$$f(x) = \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \frac{e^{\frac{-x}{\beta}}}{\beta\Gamma(\alpha)}, x \geq 0$$

Su media y su varianza son respectivamente $\mu = \alpha\beta$ y $\sigma^2 = \alpha\beta^2$.

Por tanto, al igualar los momentos poblacionales alrededor del origen con los momentos muestrales alrededor del origen tenemos:

$$\mu_1^{'} = m_1^{'} \quad \text{y} \quad \mu_2^{'} = m_2^{'}$$

$$\alpha\beta = \bar{X} \quad \text{y} \quad \alpha\beta^2 + (\alpha\beta)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n}$$

Reemplazando $\alpha\beta = \bar{X}$, tenemos:

$$\bar{X}\beta + (\bar{X})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{X}^2}{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2}{n\bar{X}}$$

Obteniendo finalmente:

$$\hat{\alpha} = \frac{\overline{X}^2}{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{X}^2} = \frac{n\overline{X}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}$$

1.7 Convergencia en distribución (o en Ley)

Dada una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas X_1, $X_2,\ldots,X_n$ con funciones de distribución $F_1(X_1)$, $F_2(X_2),\ldots,F_n(X_n)$, respectivamente, se dice que esa sucesión converge en distribución a la variable aleatoria X con función de distribución F(X), si:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(X) = F(X), \quad \forall X \text{ donde F es continua}$$

$$\text{Se denota}: X_n \xrightarrow{L} X$$

Esto es X_n converge en ley a X, uno de los ejemplos más importantes de la convergencia en distribución es el Teorema del Límite Central.

Teorema del límite Central: Si X_1, $X_2,\ldots,X_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n, tomada de una población X con media μ y varianza $\sigma^2<\infty$.

Definimos: $U_n = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\right)$, donde $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Entonces la función de distribución de la sucesión U_n converge en ley a una función de distribución normal estándar.

Es decir $U_n \xrightarrow{L} N(0,1)$.

1.8 Principales Distribuciones Discretas y Continuas

En el Anexo 1 presentamos las principales distribuciones discretas y en el Anexo 2 las principales distribuciones continuas, donde podemos observar sus parámetros poblacionales así como los gráficos de las funciones de distribución para cada una de ellas con diferentes valores de los parámetros.

CAPÍTULO 2

2. EL MÉTODO JACKNIFE

2.1 Introducción

En este capítulo revisamos la parte teórica del método Jacknife y se hacen ilustraciones del mismo; en la sección 2.2 presentamos una breve historia del método Jacknife, en la sección 2.3 se muestra la forma general o metodología del método Jacknife, en la sección 2.4 encontraremos el algoritmo para la obtención del estimador Jacknife, en la sección 2.5 el algoritmo para la obtención del sesgo y la desviación estándar del estimador Jacknife, en la sección 2.6 se ha realizado el diagrama de flujo para la obtención del estimador Jacknife y en la sección 2.7 tenemos el diagrama de flujo para la obtención del sesgo y la desviación estándar del estimador Jacknife.

2.2 Historia

En 1948, Maurice Quenouille, presentó una investigación en la cual lograba reducir el sesgo de los estimadores para los coeficientes de correlación parcial y autocorrelación en las series temporales aplicando el método que denominó Jacknife, como lo podemos constatar en (12). Este método se basa en la obtención de datos ficticios a partir de los datos originales, se estima la variabilidad del estimador a través de la variabilidad sobre los conjuntos de datos ficticios; es usado cuando no se puede determinar el sesgo y error estándar de los estimadores.

Se lo suele clasificar como un método de remuestreo o método intensivo por computador, ya que las medidas de precisión y dicho estimador, se estiman tomando muestras repetidas de los datos obtenidos.

Solemos obtener estimadores para los parámetros poblacionales, a través de los métodos conocidos de máxima verosimilitud, de los momentos o de suficiencia mínima y mínima varianza los cuales por lo general nos dan estimadores con las características deseadas de insesgadez y mínima varianza, sin embargo cuando nos enfrentamos a estimadores que no cumplen con dichas características, desearíamos lograr reducir su sesgo, esto lo podemos conseguir al aplicar el método de estimación Jacknife.

Muchas inferencias estadísticas son posibles realizarlas suponiendo que los datos cumplen, con la hipótesis de normalidad. Pero si no se cumpliese este supuesto, las inferencias que se realicen en base a dicha hipótesis, no serán confiables; este método ayuda a solucionar este inconveniente sin suponer que los datos siguen determinada distribución.

En 1956, Quenouille generalizó la idea de la siguiente manera:

Se puede expresar el sesgo de cualquier estimador $\hat{\theta}$, de un parámetro poblacional θ basado en una muestra aleatoria de tamaño n, como una serie de potencias de $\frac{1}{n}$, esto se puede verificar al desarrollar la serie de Taylor de la expresión ($\hat{\theta}$ -θ) y obteniendo el valor esperado de la misma, es así que se obtiene, que para muchos estadísticos se cumple que el sesgo tiene la forma:

$$E(\hat{\theta}-\theta)=\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\dots$$

Definamos : $\tilde{\theta}_i = n\hat{\theta}-(n-1)\hat{\theta}_{-i}$

$$\tilde{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\theta}_i = n\hat{\theta}-\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_{-i}$$

$$E(\tilde{\theta})=n\left(\theta+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\frac{a_3}{n^3}+\dots\right)-\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\theta+\frac{a_1}{n-1}+\frac{a_2}{(n-1)^2}+\frac{a_3}{(n-1)^3}+\dots\right)$$

$$E(\tilde{\theta})=(n\theta+a_1+\frac{a_2}{n}+\frac{a_3}{n^2}+\dots)-((n-1)\theta+a_1+\frac{a_2}{n-1}+\frac{a_3}{(n-1)^2}+\dots)$$

$$E(\tilde{\theta})=\theta+a_2(\frac{-1}{n^2-n})+a_3(\frac{-2n+1}{n^4-2n^3+n^2})+\dots$$

Observamos que el valor esperado del estimador depende del parámetro poblacional que está siendo estimado y el sesgo el cual lo constituye una serie de potencias $\frac{1}{n}$, el orden del sesgo viene dado por el término mayor de esa serie, que sería el que tiene más peso en el sesgo del estimador.

En la serie original del sesgo, la serie de potencias, tenía un orden O($\frac{1}{n}$) ó O(n^{-1}), al aplicar el método Jacknife observamos que el sesgo se reduce a un orden O(n^{-2}) ya que se elimina el término de $\frac{1}{n}$.

Quenouille, propuso también un estimador que reduce el sesgo de orden 2, es decir al estimador Jacknife que reduce el sesgo de O(n^{-1}), o algún otro estimador en el cual el sesgo sea de O(n^{-2}), como sigue:

$$E(\tilde{\theta}-\theta)=\frac{b_1}{n^2}+\frac{b_2}{n^3}+\ldots\ldots$$

Definamos : $\tilde{\theta}_i^{(2)}=\dfrac{n^2\tilde{\theta}-(n-1)^2\tilde{\theta}_{-i}}{n^2-(n-1)^2}$

Donde : $\tilde{\theta}_{-i}$ es el estimador Jacknife para reducir el sesgo de orden O(n^{-1}) a la muestra de tamaño (n - 1) con la i - ésima observación removida.

$$\tilde{\theta}^{(2)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\theta}_i^{(2)}=\frac{n^2\tilde{\theta}-(n-1)^2\sum_{i=1}^{n}\tilde{\theta}_{-i}\,/\,n}{n^2-(n-1)^2}$$

$$E(\tilde{\theta}^{(2)})=\frac{n^2\left(\theta+\frac{b_1}{n^2}+\frac{b_2}{n^3}+\ldots\right)-\frac{(n-1)^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\theta+\frac{b_1}{(n-1)^2}+\frac{b_2}{(n-1)^3}+\ldots\right)}{n^2-(n-1)^2}$$

$$E(\tilde{\theta})=\frac{(n^2\theta+b_1+\frac{b_2}{n}+\ldots)-((n-1)^2\theta+b_1+\frac{b_2}{n-1}+\ldots)}{n^2-(n-1)^2}$$

$$E(\tilde{\theta})=\theta+b_2\left(\frac{-1}{(n^2-2n)(2n-1)}\right)+\ldots\ldots=\theta+b_2\left(\frac{-1}{2n^3-5n^2+2n}\right)+\ldots\ldots$$

Podemos observar que el sesgo del estimador de $O(n^{-2})$, se reduce al orden $O(n^{-3})$.

2.3 Forma General

El método Jacknife consiste en particionar la muestra aleatoria en g grupos iguales de tamaño h cada uno. Si denotamos a $\hat{\theta}$ como el estimador de un parámetro desconocido θ y $\hat{\theta}_{-i}$ el estimador de un parámetro desconocido pero sobre la muestra de tamaño (g-1)*h, donde el i-ésimo grupo de tamaño h en la muestra original ha sido eliminado.

Definamos los pseudovalores:

$$\hat{\theta}_i = g\hat{\theta} - (g-1)\hat{\theta}_{-i}, (i = 1,....,g)$$

Entonces, el estimador Jacknife es:

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{g} \hat{\theta}_i}{g} = g\hat{\theta} - \frac{(g-1)}{g}\sum_{i=1}^{g} \hat{\theta}_{-i}$$

Tukey, en 1958 sugirió que la distribución del estimador Jacknife sigue una distribución t-student, ya que en muchos casos los g grupos pueden ser tratados como variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, teniendo el estadístico siguiente:

$$\frac{\sqrt{g}\left(\bar{t} - \theta\right)}{\hat{\sigma}_{\bar{t}}}, \text{donde } (g-1)\hat{\sigma}^2_{\bar{t}} = \sum_{i=1}^{g} (t_i - \bar{t})^2$$

Que tendrá aproximadamente una distribución t con (g-1) grados de libertad, si la varianza es desconocida, para g lo suficientemente grande el estadístico converge en distribución a una Normal. Este es un resultado deseable, ya que podemos obtener intervalos de confianza para el parámetro estimado, se suele escoger g=n y h=1.

Efron y Tibshirani en 1993 obtuvieron, una expresión para el sesgo estimado, y la varianza estimada del método Jacknife.

La estimación del sesgo de estimador Jacknife que se obtiene del método Jacknife está dado por:

$$B = (n-1)\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{-i})}{n} - \hat{\theta}\right]$$

La estimación del error estándar usando Jacknife es:

$$\sigma_{jack} = \left[\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\theta}_{-i} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{-i})}{n}\right)^2\right]^{1/2}$$

Usando los pseudovalores $\hat{\theta}_i$ tenemos:

$$\sigma_{jackp} = \left[\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{\theta}_i - \tilde{\theta}\right)^2\right]^{1/2}$$

Ejemplo 1:

Sea θ la media poblacional y el estimador del parámetro :

$$\hat{\theta} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Tenemos que :

$$\hat{\theta}_{-i} = \frac{(n\hat{\theta} - x_i)}{n-1}$$

$$\hat{\theta}_{(.)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_{-i}}{n}$$

Entonces :

$$\hat{\theta}_{(.)} = \hat{\theta}$$

$$\hat{\theta}_{-i} - \hat{\theta}_{(.)} = \frac{\bar{x} - x_i}{n-1}$$

Así, la varianza del estimador Jacknife para la media es :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\theta}_{-i} - \hat{\theta}_{(.)}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n(n-1)}$$

Ejemplo 2:

Sea $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots\ldots\ldots \leq X_{(n)}$, una muestra de tamaño n ordenada, θ el parámetro poblacional a estimar la mediana, siempre que $n = 2m$, donde m es un entero positivo.

Tenemos el estimador :

$$\hat{\theta} = \frac{X_{(m)} + X_{(m+1)}}{2}$$

Entonces :

$$\hat{\theta}_{-i} = X_{(m+1)}, \text{para } i \leq m$$

$$\hat{\theta}_{-i} = X_{(m)}, \text{para } i > m$$

$$\hat{\theta}_{(.)} = \hat{\theta}$$

Así la varianza del estimador Jacknife:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\theta}_{-i}-\hat{\theta}_{(.)}\right)^{2}=\frac{n}{4}\left(X_{(m+1)}-X_{(m)}\right)^{2}$$

$$\hat{\sigma}^{2}=\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\theta}_{-i}-\hat{\theta}_{(.)}\right)^{2}$$

$$\hat{\sigma}^{2}=\frac{n-1}{4}\left(X_{(m+1)}-X_{(m)}\right)^{2}$$

Ilustraciones:

Este ejemplo es una ilustración de la aplicación del método Jacknife, para obtener el estimador de la media muestral, su sesgo y su varianza. Se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 7 de una población exponencial con media 36, como se observa en la Tabla III.

Tabla III
Estimación por el Método Jacknife
Muestra Aleatoria de un población Exponencial con media 36

Nº.de unidad observada	**Muestra**
1	35.6741
2	45.4633
3	26.9745
4	38.9127
5	36.7966
6	39.8383
7	28.2845

Elaboración: *R. Plúa*

El estimador convencional de la media con la muestra anterior toma el valor de 35.992. Se obtienen las siete submuestras a partir de la anterior, el estimador de la media de cada una de ellas y los pseudovalores respectivos, como se observa en la Tabla IV.

Tabla IV
Estimación por el Método Jacknife
Ilustración para la obtención de los Pseudovalores en la estimación Jacknife para la media poblacional

	Submuestras						
Nº.de unidad observada	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	45.463	35.674	35.674	35.674	35.674	35.674	35.674
2	26.975	26.975	45.463	45.463	45.463	45.463	45.463
3	38.913	38.913	38.913	26.975	26.975	26.975	26.975
4	36.797	36.797	36.797	36.797	38.913	38.913	38.913
5	39.838	39.838	39.838	39.838	39.838	36.797	36.797
6	28.285	28.285	28.285	28.285	28.285	28.285	39.838
Media Muestral	***36.045***	***34.413***	***37.495***	***35.505***	***35.858***	***35.351***	***37.277***
Pseudovalores	***35.674***	***45.463***	***26.975***	***38.913***	***36.797***	***39.838***	***28.285***

Elaboración: *R. Plúa*

El estimador Jacknife para la media poblacional, es decir el promedio de los pseudovalores es 35.992, cuyo valor coincide con el estimador convencional por lo que, el sesgo es por la estimación Jacknife el mismo que obtendríamos la estimación normalmente utilizada, es decir $B = 35.992 - 36 = -0.008$ y su varianza es $\sigma^2{}_{jack}$ =218.14.

Utilizaremos la misma población y muestra aleatoria estipulada anteriormente para la estimación de la media poblacional, para ilustrar el método Jacknife pero ahora estimando la mediana poblacional cuyo valor es de 24.95.

El estimador de la mediana con la muestra dada en la Tabla III toma el valor de 38.913.

Se obtienen las siete submuestras a partir de la anterior, el estimador de la mediana de cada una de ellas y los pseudovalores respectivos, como se muestra en la Tabla V. El estimador Jacknife para la mediana poblacional es 63.008, por tanto el sesgo de estimación es $B = 63.008 - 24.95 = 38.058$ y su varianza es $\sigma^2{}_{jack}$ =1442.85.

Tabla V
Estimación por el Método Jacknife
Ilustración para la obtención de los Pseudovalores en la estimación Jacknife para la mediana poblacional

	Submuestras						
Nº.de unidad observada	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	45.463	35.674	35.674	35.674	35.674	35.674	35.674
2	26.975	26.975	45.463	45.463	45.463	45.463	45.463
3	38.913	38.913	38.913	26.975	26.975	26.975	26.975
4	36.797	36.797	36.797	36.797	38.913	38.913	38.913
5	39.838	39.838	39.838	39.838	39.838	36.797	36.797
6	28.285	28.285	28.285	28.285	28.285	28.285	39.838
Mediana	***37.855***	***37.855***	***37.855***	***31.886***	***32.944***	***32.944***	***32.944***
Pseudovalores	***45.263***	***45.263***	***45.263***	***81.078***	***74.729***	***74.729***	***74.729***

Elaboración: *R. Plúa*

En algunas ocasiones, el estimador Jacknife no funciona, y es cuando se utilizan estimadores que no son suaves, un estimador suave es aquel que para ser obtenido utiliza toda la información de la muestra aleatoria, como ejemplo de estimadores suaves tenemos la media muestral, varianza muestral, coeficiente de correlación, etc. Y como ejemplo de estimadores que no son suaves tenemos la mediana muestral. Citemos un caso, para estimar la mediana de una población exponencial podemos obtener valores negativos para este estimador, lo cual no tiene sentido ya que el dominio de la función de densidad exponencial es mayor igual a cero, y por tanto el método Jacknife no es apropiado.

Algunos estudios empíricos revelan que para el caso de los estimadores que se encuentran limitados dentro de un rango como es el caso del coeficiente de correlación, $-1 \leq \hat{\rho} \leq 1$, y la varianza, $\hat{\sigma}^2 \geq 0$, el método Jacknife puede trabajar mejor si el estadístico es transformado, para el estimador del coeficiente de correlación la transformación de Fisher de los coeficientes de correlación y el logaritmo de la varianza para los estimadores de la varianza poblacional, esto es sugerencia de muchos estudios empíricos, ya que se suelen obtener valores negativos, aún siendo estimadores suaves.

2.4 Algoritmo para obtener el estimador Jacknife

1. Definir un vector aleatorio X $\in \Re^n$, donde se encuentra la muestra aleatoria.

2. Definir el estimador $\hat{\theta}$ theta sobrero, de un parámetro θ de la población, basado en una muestra aleatoria.

3. Definimos el tamaño de cada grupo como $h = \frac{n}{g}$, donde g es el # de grupos en que será particionada la muestra.

4. Se define $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}$(Evaluado en X)

5. Para todo i=1,..g

$\hat{\theta}_{-i} = \hat{\theta}$(Evaluado en la muestra de tamaño (g - 1) * h, donde el i - ésimo grupo ha sido eliminado.

$\tilde{\theta}_i = g\,\hat{\theta}_n - (g-1)\hat{\theta}_{-i}$

6. $\tilde{\theta} = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g}\tilde{\theta}_i$

7. Presentar $\tilde{\theta}$

2.5 Algoritmo para obtener el sesgo y la desviación estándar del estimador jacknife

1. Definir un vector X $\in \Re^n$, donde se encuentra la muestra aleatoria.

2. Definir el estimador $\hat{\theta}$ theta, de un parámetro θ de la población, el cual está basado en una muestra aleatoria.

3. Se define $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}$(Evaluado en X)

4. Para todo i=1,..g

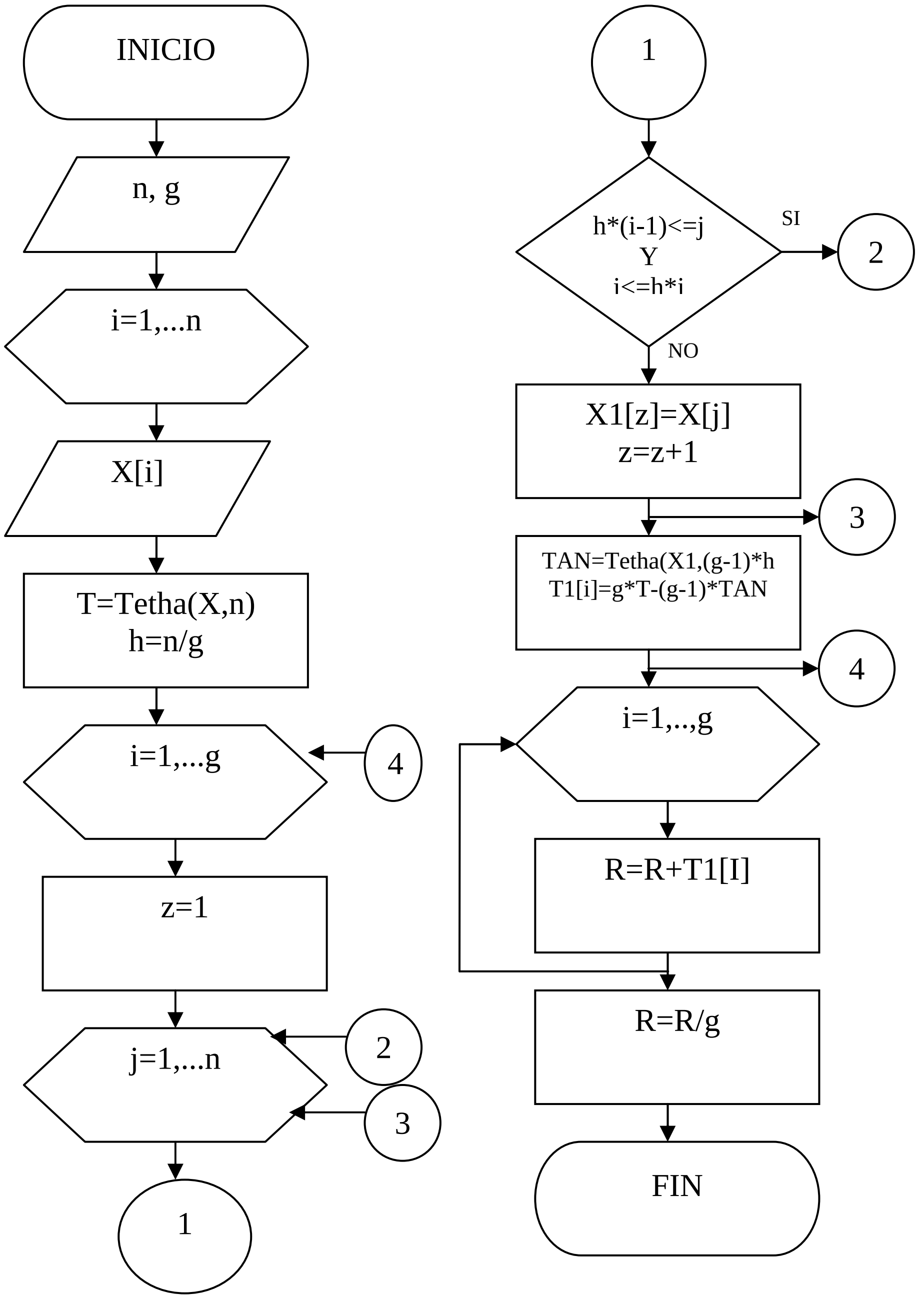
$\hat{\theta}_{-i} = \hat{\theta}$(Evaluado en la muestra de tamaño (g - 1) * h, donde el i - ésimo grupo ha sido eliminado.

5. $$B = (n-1)\left[\frac{\sum \hat{\theta}_{-i}}{n} - \hat{\theta}_n\right]$$

6. $$\sigma_{jack} = \left[\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\theta}_{-i} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{-i})}{n}\right)^2\right]^{1/2}$$

7. Presentar Sesgo y σ_{jack}.

2.6 DIÁGRAMA DE FLUJO PARA OBTENER EL ESTIMADOR JACKNIFE



Significado de variables usadas:

n= tamaño de la muestra aleatoria.

g= # de grupos en la muestra

X = vector que contiene la muestra aleatoria.

T = Estimador evaluado sobre los datos de la muestra aleatoria de tamaño n.

X1= vector que contiene la muestra de tamaño (n-1) tomada de la muestra de tamaño n.

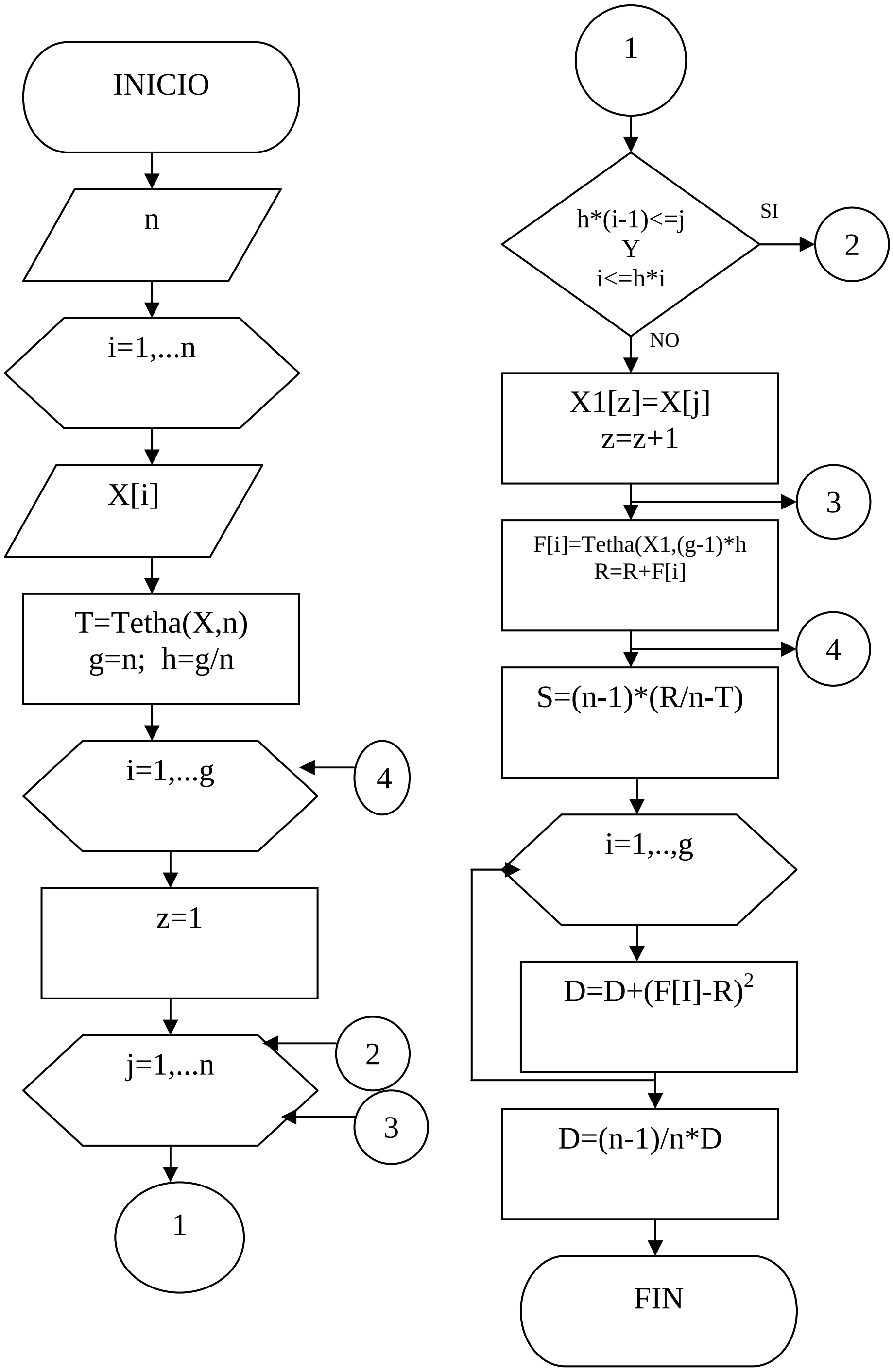
TAN= valor del estimador evaluado en la muestra i-ésima de tamaño (n-1)

T1= vector que contiene los pseudovalores con los que trabaja el método jacknife.

R= Valor del estimador jacknife.

i,j,z = Contadores

2.7 Diágrama de flujo para obtener el sesgo y desviación estándar del estimador jacknife



Significado de variables usadas:

n= tamaño de la muestra aleatoria.

g= # de grupos en la muestra

X = vector que contiene la muestra aleatoria.

T = Estimador evaluado sobre los datos de la muestra aleatoria de tamaño n.

X1= vector que contiene la muestra de tamaño (n-1) tomada de la muestra de tamaño n.

F= vector que contiene los valores del estimador evaluado en la muestra i-ésima de tamaño (n-1)

R= Promedio de las muestras de tamaño (n-1)

S= Sesgo del estimador

D=Varianza del estimador

i,j,z = Contadores

CAPÍTULO 3

3. ESTIMACIÓN JACKNIFE UTILIZANDO SIMULACIÓN

3.1 Introducción

En este capítulo desarrollamos el modelo de simulación del sistema identificado y planteado, además se explican cada una de las funciones desarrolladas en el programa de simulación, el cual se realizó en el lenguaje Matlab 5.3; así tenemos en la sección 3.2 el desarrollo del modelo de simulación, en la sección 3.3 se encuentran la descripción de los subprogramas realizados en el simulador, tales como, la subfunción Variable en la sección 3.3.1, en la sección 3.3.2 la subfunción Resultados, en la sección 3.3.3 la subfunción Procedimiento_Operaciones, en la sección 3.3.4 la subfunción Generar_Muestra, en la sección 3.3.5 la subfunción Estimador_Jacknife y en la sección 3.3.6 la subfunción Gráficos.

3.2 Modelo de simulación

El sistema a simular es dinámico ya que sus componentes tienen un comportamiento aleatorio, el objetivo es explorar dicho sistema, comparando los dos métodos de estimación: Jacknife y Convencional.

El proceso consiste en que el investigador seleccione dependiendo de su necesidad, una población con sus respectivos parámetros poblacionales y un estimador de algún parámetro de la misma, se generan 50 muestras aleatorias de tamaño n de la población estipulada y a partir de éstas obtenemos: el valor del estimador para cada una de las muestras, su sesgo e intervalo de confianza al 95%, tanto por el método Jacknife como por los métodos convencionales o usualmente utilizados de estimación.
Con los 50 estimadores y para cada uno de los métodos, calculamos la media del estimador, varianza, sesgo de simetría, mínimo, máximo, y sesgo de estimación promedio. Además graficamos el histograma de frecuencia relativa de los estimadores obtenidos por cada uno de los métodos. El tamaño muestral, n con que se trabajará es de 5, 10, 50, 100, y 500.

Con los resultados de esta simulación podremos observar la bondad de éstos métodos de estimación para los parámetros poblacionales en las situaciones dadas.

Para establecer el modelo de simulación debemos identificar sus elementos, teniendo así:

Actividad: Obtención de las medidas como el sesgo, media y varianza de los estimadores obtenidos a través de los métodos Jacknife y convencional.

Entidades: Identificamos como entidad a la unidad observada de la población teórica.

Atributos: Los atributos para la entidad unidad observada de la población son:

- Valor de la unidad observada: $u_{k,i}$
- Tamaño de la muestra: n
- Número de “vueltas” (# de estimadores a generarse a partir de las muestras): nv
- Parámetro Poblacional: parametro
- Vector con la muestra aleatoria i-ésima: m_i
- Valor del estimador i-ésimo Jacknife: VEJ_i
- Valor del i-ésimo estimador obtenido por el método convencional: VEC_i
- Intervalo de confianza para el valor del estimador Jacknife i-ésimo: ICJ_i
- Intervalo de confianza para el valor del estimador i-ésimo obtenido por el método convencional: ICC_i
- Sesgo obtenido con el valor del estimador Jacknife i-ésimo: SJ_i

- Sesgo obtenido con el valor del estimador i-ésimo obtenido por el método convencional: SC_i
- Media del estimador obtenido con el método Jacknife: MJ
- Media del estimador obtenido con el método convencional: MC
- Sesgo promedio obtenido con el método Jacknife: SPJ
- Sesgo promedio obtenido con el método convencional: SPC
- Varianza del estimador obtenido con el método Jacknife: VEJ
- Varianza del estimador obtenido con el método convencional: VEC

Teniendo así las siguientes relaciones funcionales.

$k = 1,\ldots,n$

$u_{k,i} = \#$ aleatorio de una población ; $k = 1,..,n$

$m_i = u_{k,i}$; $i = 1,...,nv$

Una vez generada la muestra i - ésima de tamaño n se define :

$VEJ_i = \mathrm{MetodoJack}(m_i, n)$

$VEC_i = \mathrm{Metodocon}(m_i, n)$

Donde MetodoJack y Metodocon son funciones evaluadas en el vector muestral y n.

$ICJ_i = \mathrm{IntconJack}(m_i, n)$

$ICC_i = \mathrm{Intconcon}(m_i, n)$

Donde IntconJack e Intconcon son funciones evaluadas en el vector muestral y n

$SJ_i = VEJ_i - \text{parametro}$

$SC_i = VEC_i - \text{parametro}$

$$MJ = \frac{\sum_{i=1}^{nv} VEJ_i}{nv}$$

$$MC = \frac{\sum_{i=1}^{nv} VEC_i}{nv}$$

$$SPJ = \frac{\sum_{i=1}^{nv} SJ_i}{nv}$$

$$SPC = \frac{\sum_{i=1}^{nv} SC_i}{nv}$$

$$VEJ = \frac{\sum_{i=1}^{nv} (VEJ_i - MJ)^2}{nv - 1}$$

$$VEC = \frac{\sum_{i=1}^{nv} (VEC_i - MC)^2}{nv - 1}$$

El programa para el modelo está desarrollado bajo la plataforma de Matlab 5.3, y se ha utilizado programación modular para una ejecución más flexible potente y rápida del programa, la subdivisión es la siguiente: la función principal, Prog_principal donde el investigador puede elegir cualesquiera de las poblaciones y estimadores a simular.

Además se desarrollaron subfunciones que son utilizadas en el simulador, las cuales se explican, en la siguiente sección.

3.3 Subprogramas realizados en el simulador

3.3.1 Subfunción Variables

Está función es llamada por la función Prog_principal, y crea las variables necesarias para el ingreso de los parámetros poblacionales, que serán utilizados en el programa.

Las poblaciones que puede seleccionar el investigador son:

Cuadro 1
Estimación por el Método Jacknife
Poblaciones Discretas y Continuas utilizadas en la simulación

Discretas	Continuas
▪ Binomial ▪ Binomial Negativa ▪ Poisson ▪ Hipergeométrica	▪ Uniforme ▪ Exponencial ▪ Beta ▪ Normal ▪ Normal Bivariada

Elaboración: *R. Plúa*

Los estimadores que puede seleccionar el investigador para las poblaciones indicadas son los siguientes:

Cuadro 2
Estimación por el Método Jacknife
Estimadores utilizados en la simulación

Discretas	Continuas
▪ Media ▪ Varianza de máxima verosimilitud ▪ Varianza muestral ▪ Primer estadístico de orden ▪ Último estadístico de orden	▪ Media ▪ Mediana ▪ Varianza de máxima verosimilitud ▪ Varianza muestral ▪ Primer estadístico de orden ▪ Último estadístico de orden

Elaboración: *R. Plúa*

En las distribuciones discretas con parámetros poblacionales estipulados por el investigador; por no ser factible la obtención de la mediana poblacional mediante una fórmula explícita que se pueda implementar en el programa, el estimador de la mediana no es trabajado. Para el caso de la distribución continua Normal Bivariada el estimador que se trabaja en la simulación es el del coeficiente de correlación. La función Variables utiliza a la vez a la subfunción Resultados.

3.3.2 Subfunción Resultados

Estando creadas las variables de los parámetros de entrada para la población y el estimador seleccionado por el investigador, éstas son utilizadas para obtener los parámetros poblacionales, por ejemplo si el investigador selecciona la distribución exponencial y el estimador de la varianza muestral, con el parámetro poblacional ingresado podemos obtener el parámetro de la varianza poblacional. Está función a su vez define e inicializa las variables que se utilizarán para la presentación de los resultados, tales como las listas en las cuales se encuentran los estimadores, sesgo e intervalos de confianza obtenidos por el método Jacknife, los objetos “figura” que contienen los histogramas de las distribuciones para los estimadores simulados y las variables que contienen la varianza, sesgo de simetría, promedio, mínimo y máximo de los estimadores anteriormente mencionados. Esta función utiliza la subfunción Procedimiento_Operaciones.

3.3.3 Subfunción Procedimiento_Operaciones

Dependiendo del estimador seleccionado por el investigador esta función calcula las variables creadas en la función Resultados, es decir, genera 50 estimadores de los parámetros de la población estipulada, obtiene el sesgo de estimación y sus intervalos de confianza para cada uno de ellos. Una vez obtenido estos resultados calcula el sesgo de estimación promedio, la media de los estimadores, varianza, mínimo, máximo, sesgo de simetría y gráfica la distribución de frecuencia de los 50 estimadores, para cada método, Jacknife y Convencional. Aunque pareciera que está función realiza todo, no es así ya que a su vez está utiliza otras funciones como lo son Estimador_Jacknife, Graficos y Generar_Muestra.

3.3.4 Subfunción Generar_Muestra

Para generar los 50 estimadores en la función Procedimiento_Operaciones, necesitamos generar una muestra aleatoria de tamaño n para a partir de esta calcular el estimador estipulado, por tanto en la función Generar_Muestra se utilizan las variables que contienen los parámetros poblacionales ingresados por el investigador, para generar la muestra aleatoria de determinada población, en Matlab no es necesario realizar los algoritmos para la obtención de los números aleatorios de determinadas poblaciones, ya que trae incorporadas las funciones para la generación de números aleatorios en el módulo tools\statistical. Sin embargo para la generación de números aleatorios normales bivariados no existe una función que los proporcione por lo que se tuvo que realizar una función que los proporcione. A continuación presentamos los algoritmos para la generación de números aleatorios de distribuciones en las que no se puede obtener una fórmula explícita para la generación de los mismos.

Binomial

1. Se genera un número R_i.
2. Di $R_i < p_i$ entonces x=x+1 incrementamos i en1 y mientras $i \leq n$ retornamos al paso1.
3. X es el número de una población binomial.

Binomial negativa con parámetros r y p.

1. Se genera un número R_i.
2. Di $R_i < p_i$ entonces éxito = éxito + 1
3. Incrementamos i en1 y x=x+1, mientras éxito $\leq$ r retornamos al paso1.
4. X es el número de una población binomial.

Hipergeométrica con parámetros N, k y n

1. Si ($k \leq N$) y ($n \leq N$) entonces x=0 y r=0 ir al paso 2 caso contrario ir al paso 5.
2. r=r+1, se genera un número aleatorio u.
3. Si u < $\frac{k-x}{N-r+1}$ entonces x=x+1
4. Mientras ($r < n$) and ($x < N$) ir al paso 2.
5. X es el número de una población Hipergeométrica.

Poisson con parámetro λ

1. Generamos un número aleatorio perteneciente a una distribución uniforme R.
2. Inicializamos: i=0, $p_o=e^{-\lambda}$ y $F_0=p_0$
3. Si $R < F_i$ entonces x=i caso contrario incrementamos $p_{i+1} = \frac{\lambda p_i}{i+1}$, $i = i+1$ y $F_{i+1} = F_i + p_{i+1}$ y regresar al paso 3.

Normal Multivariada con parámetros $\vec{\mu}$ y $\sum$ covm (matriz positiva definida)

1. Obtener la longitud del vector $\vec{\mu}$
2. Obtener la factorización Cholesky de la matriz de covarianzas R=Cholesky($\sum$)
3. Generar una matriz Z_{nxd} de números aleatorios normales estándar y un vector v_{nx1} de unos.
4. X=Z (R) + v ($\vec{\mu}$)’

3.3.5 Subfunción Estimador_Jacknife

Esta función es llamada por la función resultados para la obtención del estimador Jacknife a partir de: un arreglo que contiene la muestra aleatoria que ha sido generada, y la variable donde se encuentra el estimador que el investigador seleccionó. Con estas variables puede aplicar el algoritmo del método Jacknife realizado en la sección anterior.

3.3.6 Subfunción Gráficos

Esta función asigna al objeto “figura” los histogramas calculados a partir de los arreglos que contienen los 50 estimadores calculados por los métodos Jacknife y Convencional. Cabe recalcar que existen variables que se utilizan no en una sola función sino en muchas funciones del programa por tanto están son declaradas como globales como es el caso de aquellas que contienen los nombres del estimador y población seleccionados por el investigador, así como los tamaños muestrales con los cuales se generan las muestras aleatorias, entre otras.

CAPÍTULO 4

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

4.1 Introducción

En este capítulo se presentan y analizan los resultados obtenidos al comparar el método de estimación Jacknife y los métodos convencionales utilizando estimadores para los parámetros poblacionales de distintas distribuciones continuas y discretas; para cada estimador se trabaja con tamaños muestrales de 5, 15, 50, 100 y 500; y para cada caso obtenemos 50 estimadores, a partir de cada uno de ellos inferimos el sesgo de estimación y el intervalo de confianza al 95%.

El sesgo de estimación, es obtenido a partir de la resta del parámetro poblacional y el estimador obtenido. El intervalo de confianza al 95% para el parámetro poblacional, utilizando el método de estimación Jacknife se define como se estudió en el Capítulo 2 y utilizando la estimación convencional: para estimadores insesgados y muestras de tamaño 5 y 15 el intervalo de confianza es obtenido a partir de la desigualdad de Tchebysheff, para muestras de tamaño 50, 100 y 500 obtenemos los intervalos de confianza a partir de la distribución Normal, en cuanto a los estimadores sesgados y para tamaños muestrales de 5 y 15, utilizamos la regla empírica en la que al desviar tres veces su media obtenemos los límites del intervalo de confianza y para muestras de tamaño 50, 100 y 500 obtenemos el intervalo de confianza a partir de la distribución normal, esto lo realizamos cuando el sesgo no sea influyente es decir $\frac{B}{\sigma(\hat{\theta})} < \frac{1}{10}$, sino fuese así el intervalo de confianza obtenido a partir de la distribución normal es desplazado en la cantidad *B*. Con los 50 estimadores se obtienen las distribuciones de frecuencias, y sus principales medidas descriptivas como son: la media, varianza, asimetría, error de estimación promedio, mínimo, máximo, límite inferior y superior promedio del intervalo de confianza al 95%, longitud promedio de los intervalos de confianza y sesgo de estimación promedio; así podremos recomendar en que casos es mejor utilizar la estimación por el método Jacknife y la estimación por el método convencional.

En la sección 4.2, se analizan los resultados de los estimadores para la media, varianza, primer y último estadístico de orden de las principales distribuciones discretas, teniendo así en la sección 4.2.1 los estimadores para los parámetros de la distribución Poisson, en la sección 4.2.2 los estimadores para los parámetros de la distribución Binomial Negativa, en la sección 4.2.3 los estimadores para los parámetros de la distribución

Binomial, y en la sección 4.2.4 los estimadores para los parámetros de la distribución Hipergeométrica.

En la sección 4.3, se analizan los resultados de los estimadores para la media, mediana, varianza, primer y último estadístico de orden de las principales distribuciones continuas, teniendo así en la sección 4.3.1 los estimadores para los parámetros de la distribución Exponencial, en la sección 4.3.2 los estimadores para los parámetros de la distribución Beta, en la sección 4.3.3 los estimadores para los parámetros de la distribución Normal, en la sección 4.3.4 los estimadores para los parámetros de la distribución Uniforme.

Cabe recalcar que no se estimo el primer estadístico de orden y último estadístico de orden para ciertas distribuciones continuas o discretas por no encontrarse definido el parámetro poblacional en éstas distribuciones, así mismo no se trabajo la mediana para las poblaciones discretas y para la población beta, por no haber una fórmula explícita para obtener la mediana, la cual pueda ser implementada en un simulador.

4.2 Estimadores para distribuciones Discretas

4.2.1 Estimadores para la distribución Poisson

Las muestras aleatorias utilizadas para la obtención de los estimadores, se generaron a partir de una distribución Poisson, P(2), la gráfica de esta función de probabilidad se muestra en el Anexo 1.

La media poblacional es 2. Al analizar la estimación Jacknife y la estimación convencional para este parámetro se pudo apreciar que los valores de los estimadores y medidas descriptivas coincidían con una precisión de 3 dígitos, así tenemos la media, varianza, asimetría, error de estimación promedio, kurtosis, mínimo y máximo valor observado del estimador, límite inferior y superior promedio del intervalo al 95% de confianza para la media, longitud promedio del intervalo de confianza y sesgo de estimación; como se puede observar en la Tabla VI y en la Tabla VII.

Sin embargo para tamaños muestrales de 5 y 15 se puede apreciar que la longitud promedio de los intervalos de confianza es más pequeña al utilizar el método de estimación Jacknife que la obtenida al utilizar la estimación convencional, igual situación ocurrió al probar con distintos valores de los parámetros poblacionales. También podemos apreciar en el Anexo 3, que los histogramas de los estimadores para la media poblacional utilizando el método Jacknife y utilizando el método convencional son similares.

Tabla VI

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Poisson con parámetro λ=2 utilizando el Método Convencional

Tamaño Muestral / *Medidas Descriptivas*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	2.096	2.020	2.021	2.003	2.005
Varianza	0.443	0.137	0.033	0.018	0.006
Asimetría	0.003	-0.352	-0.164	0.545	0.091
Error de Estimación Promedio	0.536	0.289	0.146	0.107	0.066
Kurtosis	2.615	3.117	2.701	3.008	1.840
Mínimo	0.600	1.000	1.620	1.740	1.876
Máximo	3.600	2.733	2.420	2.340	2.128
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0.436	1.630	1.727	1.881
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	4.618	3.604	2.413	2.278	2.128
Longitud Promedio del Int. De Conf.	4.618	3.168	0.783	0.551	0.247
Sesgo de Estimación	0.096	0.020	0.021	0.003	0.005

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla VII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Poisson con parámetro λ=2 utilizando el Método Jacknife

Tamaño Muestral / *Medidas Descriptivas*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	2.096	2.020	2.021	2.003	2.005
Varianza	0.443	0.137	0.033	0.018	0.006
Asimetría	0.003	-0.352	-0.164	0.545	0.091
Error de Estimación Promedio	0.536	0.289	0.146	0.107	0.066
Kurtosis	2.615	3.117	2.701	3.008	1.840
Mínimo	0.600	1.000	1.620	1.740	1.876
Máximo	3.600	2.733	2.420	2.340	2.128
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.530	1.260	1.630	1.727	1.881
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	3.662	2.780	2.413	2.278	2.128
Longitud Promedio del Int. De Conf.	3.132	1.520	0.783	0.551	0.247
Sesgo de Estimación	0.096	0.020	0.021	0.003	0.005

Elaboración: *R. Plúa*

La varianza poblacional es 2 Analizando los resultados como se puede apreciar en la Tabla VIII y en la Tabla IX, podemos notar que la varianza, longitud promedio de los intervalos de confianza y error de estimación promedio utilizando el método de estimación Jacknife resulta ser mayor que la varianza y el error de estimación utilizando el método de estimación convencional. El sesgo de estimación obtenidas mediante el método Jacknife también es mayor para tamaños muestrales de 5, 50 y 500, para tamaños muestrales de 50, 100 y 500 las medidas obtenidas por el método de estimación Jacknife y el método de estimación convencional son muy similares en magnitud.

Probando con distintos parámetros poblacionales concluimos que para $\lambda>20$ el método de estimación convencional logra reducir el sesgo de estimación, como lo podemos observar en el Anexo 11, donde podemos observar la estimación de la media por el método Jacknife y el método convencional para una población Poisson P(20).

En el Anexo 3 podemos observar que los histogramas para las distribuciones de los estimadores obtenidos por el método de estimación convencional y por el método de estimación Jacknife.

Tabla VIII
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Poisson con parámetro λ=2 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	1.984	1.792	1.979	1.933	2.027
Varianza	2.400	0.586	0.242	0.091	0.022
Asimetría	2.099	0.746	0.350	0.722	0.201
Error de Estimación Promedio	1.101	0.658	0.374	0.244	0.125
Kurtosis	9.434	3.150	3.107	3.621	2.083
Mínimo	0.240	0.729	1.028	1.446	1.753
Máximo	8.960	4.062	3.158	2.866	2.320
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	1.1409	1.505	1.800
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	6.089	3.864	3.137	2.635	2.308
Longitud Promedio del Int. De Conf.	6.089	3.864	1.728	1.130	0.508
Sesgo de Estimación	-0.016	-0.208	-0.021	-0.067	0.027

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla IX
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Poisson con parámetro λ=2 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	4.805	2.088	2.087	1.975	2.036
Varianza	49.459	0.830	0.303	0.096	0.022
Asimetría	4.044	0.745	0.526	0.737	0.196
Error de Estimación Promedio	3.309	0.717	0.414	0.244	0.128
Kurtosis	22.059	3.183	3.251	3.653	2.076
Mínimo	0.323	0.795	1.082	1.479	1.761
Máximo	44.634	4.864	3.444	2.934	2.330
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.349	0.899	1.297	1.474	1.767
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	720.079	5.189	3.461	2.653	2.346
Longitud Promedio del Int. De Conf.	719.731	4.290	2.164	1.180	0.578
Sesgo de Estimación	2.805	0.088	0.087	-0.025	0.036

Elaboración: *R. Plúa*

El primer estadístico de orden poblacional es 0. Analizando los resultados obtenidos mostrados en la Tabla X y en la Tabla XI, el método de estimación Jacknife no funciona ya que se obtienen valores que no se encuentran en el dominio de la función de probabilidad, como por ejemplo el mínimo valor para los tamaños muestrales de 5 y 15 son -1.6 y -0.93 respectivamente, con el método de estimación convencional no ocurre esta situación. Para tamaños muestrales de 50, 100 y 500 en la mayoría de los casos se obtiene como primer estadístico al parámetro poblacional en las muestras esto justifica que la varianza del estimador sea muy cercana a cero y por tanto no haya variabilidad para la obtención de los límites de los intervalos de confianza como de las demás medidas presentadas en la Tabla X. Probamos la estimación del primer valor para distintos parámetros poblacionales observándose que en la mayoría de los casos para $\lambda>20$, el método de estimación Jacknife no proporcionaba valores fuera del dominio de la función de probabilidad, además lograba reducir el sesgo de estimación y el error de estimación promedio, y la varianza resultó ser mayor frente a la estimación convencional, como se muestra en el Anexo 11 para P(25). En el Anexo 3, podemos observar los histogramas de frecuencia para los estimadores obtenidos con distintos tamaños muestrales utilizando los dos métodos de estimación.

Tabla X

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Poisson con parámetro λ=2 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	0.440	0.100	0.000	0.000	0.000
Varianza	0.251	0.092	0.000	0.000	0.000
Asimetría	0.242	2.667			
Error de Estimación Promedio	0.440	0.100	0.000	0.000	0.000
Kurtosis	1.058	8.111			
Mínimo	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Máximo	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	0.000	0.000	0.000
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	1.504	0.909	0.000	0.000	0.000
Longitud Promedio del Int. De Conf.	1.504	0.909	0.000	0.000	0.000
Sesgo de Estimación	0.440	0.100	0.000	0.000	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XI

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Poisson con parámetro λ=2 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	-0.136	-0.143	0.000	0.000	0.000
Varianza	0.554	0.312	0.000	0.000	0.000
Asimetría	0.158	0.133			
Error de Estimación Promedio	0.624	0.343	0.000	0.000	0.000
Kurtosis	2.015	2.906			
Mínimo	-1.600	-0.933	0.000	0.000	0.000
Máximo	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-1.735	-0.663	0.000	0.000	0.000
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	1.463	0.378	0.000	0.000	0.000
Longitud Promedio del Int. De Conf.	3.198	1.041	0.000	0.000	0.000
Sesgo de Estimación	-0.136	-0.143	0.000	0.000	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

4.2.2 Estimadores para la distribución Binomial Negativa

Las muestras aleatorias utilizadas para la obtención de los estimadores, se generaron a partir de una distribución Binomial Negativa con parámetros r=7 y p=0.4, la gráfica de esta función de probabilidad se muestra en el Anexo 1.

La media poblacional es 17.5. Al analizar la estimación Jacknife y la estimación convencional para este parámetro se pudo apreciar que se obtuvieron los mismos resultados, los valores de los estimadores coincidían y por tanto las distribuciones con sus respectivas medidas descriptivas también coincidían, así tenemos los mismos valores para la media, varianza, asimetría, sesgo de estimación promedio, kurtosis, mínimo y máximo valor observado del estimador, límite inferior y superior promedio al 95% de confianza para los estimadores, y longitud promedio del intervalo de confianza; como se puede observar en la Tabla XII y en la Tabla XIII. Sin embargo podemos apreciar que para los tamaños muestrales de 5 y 15 la longitud promedio de los intervalos de confianza es menor al utilizar la estimación Jacknife. Al probar con distintos parámetros poblacionales la situación fue la misma. También podemos apreciar en el Anexo 6, que los histogramas de los estimadores para la media poblacional utilizando el método Jacknife y utilizando el método convencional son iguales.

Tabla XII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Binomial Negativa con parámetros r=7 y p=0.4 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	17.368	17.169	17.405	17.496	17.467
Varianza	5.170	1.342	0.459	0.249	0.066
Asimetría	0.287	0.249	-0.604	0.677	-0.287
Error de Estimación Promedio	1.916	0.997	0.521	0.382	0.216
Kurtosis	2.293	2.507	3.591	3.765	2.010
Mínimo	13.400	15.000	15.600	16.520	16.926
Máximo	22.600	19.867	18.800	19.060	17.912
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	7.445	11.666	15.992	16.483	17.020
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	27.291	22.673	18.818	18.510	17.915
Longitud Promedio del Int. De Conf.	19.847	11.006	2.826	2.027	0.895
Sesgo de Estimación	-0.132	-0.331	-0.095	-0.004	-0.033

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XIII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Binomial Negativa con parámetros r=7 y p=0.4 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	17.368	17.169	17.405	17.496	17.467
Varianza	5.170	1.342	0.459	0.249	0.066
Asimetría	0.287	0.249	-0.604	0.677	-0.287
Error de Estimación Promedio	1.916	0.997	0.521	0.382	0.216
Kurtosis	2.293	2.507	3.591	3.765	2.010
Mínimo	13.400	15.000	15.600	16.520	16.926
Máximo	22.600	19.867	18.800	19.060	17.912
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	11.205	14.529	15.992	16.483	17.020
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	23.531	19.810	18.818	18.510	17.915
Longitud Promedio del Int. De Conf.	12.325	5.282	2.826	2.027	0.895
Sesgo de Estimación	-0.132	-0.331	-0.095	-0.004	-0.033

Elaboración: *R. Plúa*

La varianza poblacional es 26.25. Al analizar los resultados obtenidos mediante la estimación Jacknife y la estimación convencional, como podemos observar en la Tabla XIV y en la Tabla XV, para todos los tamaños muestrales el sesgo de estimación, la varianza, la longitud promedio del intervalo de confianza al 95% y error de estimación promedio, resultaron ser mayores en magnitud utilizando el método de estimación Jacknife que al utilizar el método de estimación convencional, sin embargo para tamaños muestrales de 50, 100 y 500 estas medidas resultaron ser similares al utilizar el método de estimación Jacknife y el método de estimación convencional.

Probamos para los parámetros poblacionales distintos valores y en la mayoría de los casos la situación fue similar.

Los histogramas de los estimadores obtenidos mediante la estimación convencional y la estimación Jacknife, se muestran en el Anexo 5. La forma de las distribuciones las podemos constatar al observar los coeficientes de kurtosis y asimetría presentados en la Tabla XIV y en la Tabla XV.

Tabla XIV

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Binomial Negativa con parámetros r=7 y p=0.4 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	22.208	25.145	26.032	26.570	25.797
Varianza	323.138	168.988	28.978	24.043	5.654
Asimetría	1.423	2.643	-0.018	1.235	0.055
Error de Estimación Promedio	15.190	8.333	4.340	3.594	1.884
Kurtosis	5.647	12.027	2.387	4.118	2.891
Mínimo	1.040	9.707	15.080	19.029	20.906
Máximo	91.440	85.689	38.520	40.045	31.530
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	18.535	20.690	22.919
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	70.562	60.611	41.255	36.218	29.382
Longitud Promedio del Int. De Conf.	70.562	60.611	22.720	15.529	6.463
Sesgo de Estimación	-4.042	-1.105	-0.218	0.320	-0.453

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XV

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Binomial Negativa con parámetros r=7 y p=0.4 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	48.972	34.191	27.248	27.300	25.922
Varianza	2254.080	1151.943	31.847	27.187	5.733
Asimetría	1.714	4.324	-0.014	1.296	0.055
Error de Estimación Promedio	33.838	13.441	4.820	3.659	1.874
Kurtosis	6.041	22.310	2.366	4.355	2.885
Mínimo	1.744	10.807	15.909	19.405	21.004
Máximo	223.598	220.394	40.477	42.299	31.695
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	4.079	10.694	17.615	19.380	22.378
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	11433.082	341.032	42.509	39.067	30.034
Longitud Promedio del Int. De Conf.	11429.003	330.338	24.894	19.687	7.656
Sesgo de Estimación	22.722	7.941	0.998	1.050	-0.328

Elaboración: *R. Plúa*

El primer estadístico de orden es 7. Al analizar los resultados obtenidos y presentados en la Tabla XVI y en la Tabla XVII, se puede apreciar que al estimar el primer estadístico, el método Jacknife no funciona, ya que los valores de los estimadores no se encuentran en el dominio de la función, por ejemplo, los mínimos valores obtenidos para los 50 estimadores con cada tamaño muestral trabajado son menores a 7, valores que no se encuentran definidos en la función de probabilidad Binomial Negativa especificada con los parámetros establecidos, situación que no ocurre al utilizar la estimación convencional.

Al probar para otros valores de los parámetros poblacionales observamos que para $r>50$ y $p<0.7$, el método Jacknife funciona logrando reducir el error de estimación, sesgo de estimación y longitud promedio de los intervalos de confianza. En el Anexo 11, se presenta el caso para $r=50$ y $p=0.5$. Para todos los parámetros poblacionales la varianza del método Jacknife resulta ser mayor frente al método convencional.

En el Anexo 6, podemos observar los histogramas de frecuencia de los estimadores para el primer estadístico de orden utilizando la estimación Jacknife y utilizando la estimación convencional.

Tabla XVI
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Binomial Negativa con parámetros r=7 y p=0.4 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	12.820	10.360	8.860	8.340	7.420
Varianza	5.498	2.766	0.776	0.678	0.249
Asimetría	-0.319	-0.102	0.456	0.633	0.324
Error de Estimación Promedio	5.820	3.360	1.860	1.340	0.420
Kurtosis	2.962	2.212	2.732	3.986	1.105
Mínimo	7.000	7.000	7.000	7.000	7.000
Máximo	18.000	13.000	11.000	11.000	8.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	7	7	7	7	7
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	14.034	11.989	8.727	8.614	7.977
Longitud Promedio del Int. De Conf.	7.034	4.989	1.727	1.614	0.977
Sesgo de Estimación	5.820	3.360	1.860	1.340	0.420

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XVII
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Binomial Negativa con parámetros r=7 y p=0.4 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	10.900	9.072	7.939	7.647	6.941
Varianza	9.129	6.281	2.117	1.649	0.994
Asimetría	-0.510	-0.739	0.145	0.008	-0.252
Error de Estimación Promedio	4.268	2.768	1.325	1.121	0.859
Kurtosis	2.641	3.344	2.426	3.079	1.699
Mínimo	3.800	2.400	5.040	5.020	5.004
Máximo	16.000	13.000	11.000	11.000	8.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	7	7	7	7	7
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	16.230	11.835	9.744	9.005	7.880
Longitud Promedio del Int. De Conf.	9.230	3.835	2.744	2.005	0.880
Sesgo de Estimación	3.900	2.072	0.939	0.647	-0.059

Elaboración: *R. Plúa*

4.2.3 Estimadores para la distribución Binomial

Las muestras aleatorias utilizadas para la obtención de los estimadores, anteriormente indicados, se generaron a partir de una distribución Binomial, $X \sim b(x,\ 20,\ 0.8)$, la gráfica de esta distribución se muestra en el Anexo 1.

La media poblacional es np = 16. Al analizar la estimación Jacknife y la estimación convencional para el parámetro se pudo apreciar que se obtuvieron los mismos resultados con tres dígitos de precisión para los valores de los estimadores y sus respectivas medidas descriptivas, así tenemos la media, varianza, asimetría de la distribución, sesgo de estimación promedio, kurtosis, mínimo y máximo valor observado del estimador, límite inferior y superior promedio al 95% de confianza para los estimadores y longitud promedio del intervalo de confianza; como se puede observar en la Tabla XVIII y en la Tabla XIX. Sin embargo para tamaños muestrales de 5 y 15 logro reducirse la longitud promedio de los intervalos de confianza. Al probar con distintos parámetros poblacionales para la ésta distribución se observo igual situación en todos los casos.

También podemos apreciar en el Anexo 5, que los histogramas de los estimadores para la media poblacional utilizando el método Jacknife y utilizando el método convencional son iguales.

Tabla XVIII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Binomial utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / ***Tamaño Muestral***	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	15.968	15.955	16.003	15.987	15.994
Varianza	0.375	0.164	0.066	0.033	0.005
Asimetría	0.516	0.198	0.198	-0.021	-0.379
Error de Estimación Promedio	0.480	0.349	0.196	0.146	0.054
Kurtosis	3.030	2.108	3.183	2.767	3.464
Mínimo	14.800	15.267	15.340	15.540	15.790
Máximo	17.600	16.867	16.560	16.440	16.142
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	12.537	13.915	15.516	15.639	15.837
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	19.399	17.994	16.490	16.335	16.150
Longitud Promedio del Int. De Conf.	6.862	4.079	0.974	0.697	0.314
Sesgo de Estimación	-0.032	-0.045	0.003	-0.013	-0.007

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XIX

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Binomial utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / ***Tamaño Muestral***	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	15.968	15.955	16.003	15.987	15.994
Varianza	0.375	0.164	0.066	0.033	0.005
Asimetría	0.516	0.198	0.198	-0.021	-0.379
Error de Estimación Promedio	0.480	0.349	0.196	0.146	0.054
Kurtosis	3.030	2.108	3.183	2.767	3.464
Mínimo	14.800	15.267	15.340	15.540	15.790
Máximo	17.600	16.867	16.560	16.440	16.142
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	13.837	14.976	15.516	15.639	15.837
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	18.099	16.933	16.490	16.335	16.150
Longitud Promedio del Int. De Conf.	4.261	1.957	0.974	0.697	0.314
Sesgo de Estimación	-0.032	-0.045	0.003	-0.013	-0.007

Elaboración: *R. Plúa*

La varianza poblacional es de 3.2. Analizando los resultados como se puede apreciar en la Tabla XX y en la Tabla XXI, para todos los tamaños muestrales la varianza del estimador, el error de estimación promedio, el sesgo de estimación y la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95% utilizando la estimación Jacknife son mayores en magnitud que al utilizar la estimación convencional, así mismo al analizar las medidas descriptivas se puede apreciar que a medida que aumenta el tamaño muestral son similares.

Probando distintos valores para los parámetros poblacionales al estimar la varianza poblacional se puede apreciar la misma situación.

En el Anexo 5 podemos observar la forma de los histogramas para las distribuciones de los estimadores obtenidos por el método de estimación Jacknife y por el método de estimación convencional.

Tabla XX

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Binomial utilizando el Método Convencional

Tamaño Muestral / ***Medidas Descriptivas***	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	2.190	3.069	3.131	3.200	3.227
Varianza	2.105	1.062	0.507	0.339	0.051
Asimetría	1.092	1.133	0.623	0.498	-0.103
Error de Estimación Promedio	1.566	0.763	0.558	0.463	0.171
Kurtosis	3.548	4.609	3.026	2.452	2.854
Mínimo	0.240	1.022	1.694	2.234	2.717
Máximo	6.160	6.089	4.872	4.508	3.671
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	2.230	2.492	2.867
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	6.265	5.844	4.963	4.362	3.675
Longitud Promedio del Int. De Conf.	6.265	5.844	2.733	1.870	0.809
Sesgo de Estimación	-1.010	-0.131	-0.069	-	0.027

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XXI

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Binomial utilizando el Método Jacknife

Tamaño Muestral / ***Medidas Descriptivas***	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	4.799	3.552	3.275	3.265	3.240
Varianza	28.901	1.454	0.569	0.358	0.052
Asimetría	3.292	1.272	0.650	0.521	-0.101
Error de Estimación Promedio	2.781	0.786	0.573	0.477	0.175
Kurtosis	14.523	5.190	3.070	2.500	2.857
Mínimo	0.323	1.139	1.755	2.273	2.727
Máximo	29.536	7.507	5.201	4.663	3.689
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.501	1.630	2.136	2.484	2.858
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	920.472	8.605	5.067	4.298	3.673
Longitud Promedio del Int. De Conf.	919.971	6.976	2.931	1.814	0.814
Sesgo de Estimación	1.599	0.352	0.075	0.065	0.040

Elaboración: *R. Plúa*

El primer estadístico de orden es 0. Al analizar los resultados obtenidos para el estimador de este parámetro poblacional, como se puede observar en la Tabla XXII y en la Tabla XXIII, con todos los tamaños muestrales trabajados el sesgo de estimación, y error de estimación promedio resultó ser menor utilizando la estimación Jacknife que al utilizar la estimación convencional, sin embargo la varianza resultó ser mayor en todos los casos, los valores de los estimadores obtenidos se encuentran en el dominio de la función de probabilidad. Al probar distintos valores para los parámetros poblacionales observamos que para $p>0.7$, se logra reducir el sesgo de estimación y para otros valores de p, el método Jacknife no funciona ya que se obtienen valores fuera del dominio de la función de probabilidad, en el Anexo 11 se presenta el caso de $n=20$ y $p=0.2$.

En el Anexo 5, podemos observar que las distribuciones de los estimadores obtenidos por el método Jacknife y por el método convencional, no son iguales en ninguno de los casos, pero si son muy similares como se puede constatar al observar en la Tabla XXII y en la Tabla XXIII con los coeficientes de asimetría los cuales son negativos por tanto las distribuciones están sesgadas a la izquierda, además del coeficiente de kurtosis.

Tabla XXII
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Binomial con parámetros n=20 y p=0.8 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	13.760	12.600	11.700	11.100	9.860
Varianza	1.411	2.122	0.949	0.827	0.980
Asimetría	-0.117	-0.160	-0.174	-0.527	-0.610
Error de Estimación Promedio	13.760	12.600	11.700	11.100	9.860
Kurtosis	2.415	2.646	3.148	2.873	2.933
Mínimo	11.000	9.000	9.000	9.000	7.000
Máximo	16.000	15.000	14.000	13.000	11.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	0	0	0
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	3.563	4.371	1.909	1.782	1.940
Longitud Promedio del Int. De Conf.	3.563	4.371	1.909	1.782	1.940
Sesgo de Estimación	13.760	12.600	11.700	11.100	9.860

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XXIII
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Binomial con parámetros n=20 y p=0.8 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	12.864	11.629	10.994	10.328	9.181
Varianza	2.739	5.110	2.070	2.324	3.043
Asimetría	-0.247	-0.703	-0.649	-0.618	-0.859
Error de Estimación Promedio	12.864	11.629	10.994	10.328	9.181
Kurtosis	2.767	3.690	4.450	2.978	2.917
Mínimo	8.600	4.333	6.060	6.030	5.004
Máximo	16.000	15.000	14.000	13.000	11.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	10.377	9.547	9.611	8.814	7.851
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	15.351	13.711	12.377	11.841	10.512
Longitud Promedio del Int. De Conf.	4.975	4.164	2.766	3.027	2.660
Sesgo de Estimación	12.864	11.629	10.994	10.328	9.181

Elaboración: *R. Plúa*

El último estadístico de orden poblacional es 20. Al analizar los resultados obtenidos como se muestra en la Tabla XXIV y en la Tabla XXV, el método de estimación Jacknife no funciona ya que se obtienen valores de los estimadores que no se encuentran en el dominio de la función de probabilidad por ejemplo el máximo valor de los estimadores obtenidos para un tamaño muestral de 5 es 24 y el máximo valor del dominio de la función de probabilidad es 20, igual situación ocurre con los tamaños muestrales 15, 50, 100 y 500. El método de estimación convencional si funciona frente al método de estimación Jacknife.

Al probar con distintos valores para los parámetros poblacionales pudimos observar que para $p<0.4$, el método de estimación Jacknife funciona logrando reducir el error de estimación, longitud promedio de los intervalos de confianza y sesgo de estimación, la varianza resultó ser mayor en todos los casos. En el Anexo 11 presentamos el caso para $n=20$ y $p=0.2$.

En el Anexo 5 se muestran los histogramas para las distribuciones obtenidas de los estimadores, utilizando el método de estimación Jacknife y el método de estimación convencional.

Tabla XXIV
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Último Estadístico de Orden de una Población Binomial con parámetros n=20 y p=0.8 utilizando el Método Convencional

Tamaño Muestral / *Medidas Descriptivas*	5	15	50	100	500
Media	17.880	18.920	19.460	19.540	20.000
Varianza	0.924	0.483	0.335	0.254	0.000
Asimetría	-0.177	0.105	-0.481	-0.161	
Error de Estimación Promedio	2.120	1.080	0.540	0.460	0.000
Kurtosis	2.400	2.108	2.271	1.026	
Mínimo	16.000	18.000	18.000	19.000	20.000
Máximo	20.000	20.000	20.000	20.000	20.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	14.996	16.835	18.325	18.553	20.000
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	20.764	21.006	20.595	20.527	20.000
Longitud Promedio del Int. De Conf.	5.768	4.171	2.269	1.974	0.000
Sesgo de Estimación	-2.120	-1.080	-0.540	-0.460	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XXV
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Último Estadístico de Orden de una Población Binomial con parámetros n=20 y p=0.8 utilizando el Método Jacknife

Tamaño Muestral / *Medidas Descriptivas*	5	15	50	100	500
Media	18.712	19.555	19.872	19.837	20.060
Varianza	2.152	1.156	0.987	0.742	0.057
Asimetría	0.789	0.019	0.111	0.308	3.706
Error de Estimación Promedio	1.576	0.856	0.873	0.757	0.060
Kurtosis	4.702	2.308	1.740	1.429	14.731
Mínimo	16.000	18.000	18.000	19.000	20.000
Máximo	24.000	21.867	21.960	20.990	20.998
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	16.402	18.193	19.065	19.255	19.943
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	21.022	20.916	20.678	20.419	20.177
Longitud Promedio del Int. De Conf.	4.619	2.723	1.614	1.164	0.235
Sesgo de Estimación	-1.288	-0.445	-0.128	-0.163	0.060

Elaboración: *R. Plúa*

4.2.4 Estimadores para la distribución Hipergeométrica

Las muestras aleatorias utilizadas para la obtención de los estimadores, se generaron a partir de una distribución Hipergeométrica con parámetros N=30, k=15 y n=5, la gráfica de esta función de probabilidad se muestra en el Anexo 1.

La media poblacional es de 2.5. Al analizar la estimación Jacknife y la estimación convencional para este parámetro se pudo apreciar que se obtuvieron los mismos resultados, los valores de los estimadores coincidían y por tanto las distribuciones con sus respectivas medidas descriptivas también coincidían, así tenemos los mismos valores para la media, varianza, asimetría, sesgo de estimación, kurtosis, mínimo y máximo valor observado del estimador, límite inferior y superior promedio al 95% de confianza para los estimadores y longitud promedio del intervalo de confianza; como se puede observar en la Tabla XXVI y en la Tabla XXVII, sin embargo la longitud promedio de los intervalos logro reducirse para tamaños muestrales de 5 y 15, probando distintos valores de los parámetros poblacionales, la situación fue la misma.

También podemos apreciar en el Anexo 6, que los histogramas de los estimadores para la media poblacional utilizando el método Jacknife y utilizando el método convencional son iguales.

Tabla XXVI
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Hipergeométrica con parámetros N=30, k=15 y n=5 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	2.608	2.483	2.480	2.522	2.500
Varianza	0.232	0.078	0.028	0.012	0.002
Asimetría	0.219	-0.057	-0.227	-0.225	0.178
Error de Estimación Promedio	0.396	0.232	0.129	0.085	0.039
Kurtosis	2.393	2.098	3.035	3.432	2.044
Mínimo	1.600	1.933	2.060	2.220	2.418
Máximo	3.600	2.933	2.800	2.760	2.598
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.743	1.299	2.193	2.319	2.409
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	4.473	3.666	2.766	2.726	2.590
Longitud Promedio del Int. De Conf.	3.731	2.367	0.573	0.407	0.181
Sesgo de Estimación	0.108	-0.017	-0.020	0.022	-0.001

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XXVII
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Hipergeométrica con parámetros N=30, k=15 y n=5 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	2.608	2.483	2.480	2.522	2.500
Varianza	0.232	0.078	0.028	0.012	0.002
Asimetría	0.219	-0.057	-0.227	-0.225	0.178
Error de Estimación Promedio	0.396	0.232	0.129	0.085	0.039
Kurtosis	2.393	2.098	3.035	3.432	2.044
Mínimo	1.600	1.933	2.060	2.220	2.418
Máximo	3.600	2.933	2.800	2.760	2.598
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	1.450	1.915	2.193	2.319	2.409
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	3.766	3.051	2.766	2.726	2.590
Longitud Promedio del Int. De Conf.	2.317	1.136	0.573	0.407	0.181
Sesgo de Estimación	0.108	-0.017	-0.020	0.022	-0.001

Elaboración: *R. Plúa*

La varianza poblacional es de 1.07759. Al analizar los resultados obtenidos como se muestra en la Tabla XVIII y en la Tabla XXIX, la variabilidad del estimador con respecto a su media, el sesgo de estimación promedio es decir en promedio cuan alejado se encuentran los estimadores del parámetro poblacional y el error de estimación es mayor al utilizar la estimación Jacknife que al utilizar el método de estimación convencional, la longitud promedio de los intervalos logra reducirse en este caso sin embargo no es significativamente mayor, al probar distintos valores de los parámetros poblacionales no el método Jacknife no logro reducir la varianza, error de estimación promedio, sesgo de estimación y longitud promedio de los intervalos de confianza.

En el Anexo 6, podemos observar los histogramas de los estimadores para la varianza poblacional, utilizando el método de estimación Jacknife así como al utilizar el método de estimación convencional, además podemos observar la forma de la distribución y constatándolo en la Tabla XXVIII y en la Tabla XXIX, por medio de los coeficientes de sesgo y kurtosis.

Tabla XXVIII
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Hipergeométrica con parámetros N=30, k=15 y n=5 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	0.988	1.042	1.065	1.036	1.076
Varianza	0.342	0.157	0.031	0.015	0.004
Asimetría	0.934	1.495	0.043	0.250	0.146
Error de Estimación Promedio	0.490	0.298	0.130	0.109	0.051
Kurtosis	3.352	6.233	3.856	2.203	2.689
Mínimo	0.200	0.495	0.581	0.808	0.953
Máximo	2.700	2.552	1.511	1.301	1.236
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.000	0.000	0.758	0.807	0.956
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	2.541	2.101	1.688	1.412	1.226
Longitud Promedio del Int. De Conf.	2.541	2.101	0.930	0.606	0.270
Sesgo de Estimación	-0.090	-0.036	-0.012	-0.042	-0.002

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XXIX
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Hipergeométrica con parámetros N=30, k=15 y n=5 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	0.988	1.042	1.065	1.036	1.076
Varianza	0.342	0.157	0.031	0.015	0.004
Asimetría	0.934	1.495	0.043	0.250	0.146
Error de Estimación Promedio	0.490	0.298	0.130	0.109	0.051
Kurtosis	3.352	6.233	3.856	2.203	2.689
Mínimo	0.200	0.495	0.581	0.808	0.953
Máximo	2.700	2.552	1.511	1.301	1.236
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.000	0.272	0.672	0.772	0.952
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	2.690	1.812	1.458	1.300	1.200
Longitud Promedio del Int. De Conf.	2.690	1.540	0.786	0.528	0.248
Sesgo de Estimación	-0.090	-0.036	-0.012	-0.042	-0.002

Elaboración: *R. Plúa*

El estadístico de primer orden es 0. Al analizar los resultados que se encuentran en la Tabla XXX y en la Tabla XXXI, podemos notar que al estimar por el método Jacknife el primer estadístico, este no funciona, ya que obtenemos valores para los estimadores negativos, los mismos que no se encuentran en el dominio de la función, esto lo podemos constatar al observar los mínimos valores de los 50 estimadores obtenidos para los tamaños muestrales 5, 15, 50, 100 y 500. El método de estimación Jacknife no funciona al estimar el primer estadístico de orden.

Al probar con distintos valores para los parámetros poblacionales de la distribución Hipergeométrica la estimación Jacknife no funcionó en ningún caso.

En el Anexo 6, se presentan los histogramas para los estimadores obtenidos utilizando el método de estimación Jacknife y el método de estimación convencional.

Tabla XXX
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Hipergeométrica con parámetros N=30, k=15 y n=5 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	1.240	0.760	0.240	0.100	0.000
Varianza	0.635	0.349	0.186	0.092	0.000
Asimetría	0.281	0.102	1.218	2.667	
Error de Estimación Promedio	1.240	0.760	0.240	0.100	0.000
Kurtosis	2.708	2.541	2.483	8.111	
Mínimo	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Máximo	3.000	2.000	1.000	1.000	0.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	0	0	0.000
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	2.391	1.773	0.846	0.594	0.000
Longitud Promedio del Int. De Conf.	2.391	1.773	0.846	0.594	0.000
Sesgo de Estimación	1.240	0.760	0.240	0.100	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XXXI
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Hipergeométrica con parámetros N=30, k=15 y n=5 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	0.632	0.293	-0.211	-0.078	0.000
Varianza	1.588	1.024	0.650	0.276	0.000
Asimetría	-0.204	-0.302	0.431	-0.077	
Error de Estimación Promedio	1.136	0.891	0.691	0.278	0.000
Kurtosis	2.539	2.184	1.668	3.553	
Mínimo	-1.600	-1.867	-0.980	-0.990	0.000
Máximo	3.000	2.000	1.000	1.000	0.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-1.056	-0.708	-1.094	-0.428	0.000
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	2.320	1.294	0.673	0.271	0.000
Longitud Promedio del Int. De Conf.	3.376	2.002	1.767	0.699	0.000
Sesgo de Estimación	0.632	0.293	-0.211	-0.078	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

El último estadístico de orden de la población es 5. Al analizar los resultados obtenidos los cuales se muestran en la Tabla XXXII y en la Tabla XXXIII, podemos notar que el método Jacknife al igual que sucede al estimar el estadístico de primer orden no funciona, ya que obtenemos valores para el estimador que no se encuentran en el dominio de la función, como lo podemos constatar al observar los máximos valores obtenidos para los tamaños muestrales de 5, 15, 50, y 100 con el método Jacknife, donde se obtienen valores mayores a 5 que no están definidos en el dominio de la función de probabilidad.

El método convencional para estimar el primer estadístico de orden funciona frente a la estimación Jacknife.

Al probar con distintos valores para los parámetros poblacionales de la distribución Hipergeométrica igual que en el caso para el primer estadístico de orden el método de estimación Jacknife no funciona.

En el Anexo 6, podemos observar los histogramas para los estimadores obtenidos utilizando la estimación convencional y la estimación Jacknife.

Tabla XXXII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Último Estadístico de Orden de una Población Hipergeométrica con parámetros N=30, k=15 y n=5 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	3.600	4.260	4.700	4.840	5.000
Varianza	0.571	0.278	0.214	0.137	0.000
Asimetría	0.515	0.211	-0.873	-1.855	NaN
Error de Estimación Promedio	1.400	0.740	0.300	0.160	0.000
Kurtosis	2.367	2.612	1.762	4.441	NaN
Mínimo	2.000	3.000	4.000	4.000	5.000
Máximo	5.000	5.000	5.000	5.000	5.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	1.332	2.678	3.793	4.114	4.114
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	5.868	5.842	5.607	5.566	5.566
Longitud Promedio del Int. De Conf.	4.536	3.163	1.815	1.452	1.452
Sesgo de Estimación	-1.400	-0.740	-0.300	-0.160	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XXXIII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Último Estadístico de Orden de una Población Hipergeométrica con parámetros N=30, k=15 y n=5 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	4.128	4.727	5.053	5.097	5.000
Varianza	1.404	0.786	0.656	0.414	0.000
Asimetría	0.555	0.177	-0.123	-0.105	
Error de Estimación Promedio	1.240	0.796	0.653	0.417	0.000
Kurtosis	2.401	1.808	1.535	2.417	
Mínimo	2.000	3.000	4.000	4.000	5.000
Máximo	6.600	5.933	5.980	5.990	5.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	2.662	3.726	4.361	4.593	5.000
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	5.594	5.728	5.744	5.602	5.000
Longitud Promedio del Int. De Conf.	2.932	2.002	1.383	1.009	0.000
Sesgo de Estimación	-0.872	-0.273	0.053	0.097	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

4.3. Estimadores para distribuciones continuas

4.3.1 Estimadores para la distribución exponencial

Las muestras aleatorias utilizadas para la obtención de los estimadores, se generaron a partir de una distribución Exponencial con parámetros β=36, la gráfica de esta función de probabilidad se muestra en el Anexo 2.

La media poblacional es 36. Al analizar la estimación Jacknife y la estimación convencional para este parámetro se pudo apreciar que se obtuvieron los mismos resultados, los valores de los estimadores coincidían y por tanto las distribuciones con sus respectivas medidas descriptivas también coincidían con tres dígitos de precisión, así tenemos los mismos valores para la media, varianza, asimetría, sesgo de estimación, kurtosis, mínimo y máximo valor observado del estimador, límite inferior y superior promedio al 95% de confianza para los estimadores, y longitud promedio del intervalo de confianza; como se puede observar en la Tabla XXXIV y en la Tabla XXXV. Sin embargo, se pudo notar que para los tamaños muestrales 5 y 15 la longitud promedio de los intervalos de confianza es menor al utilizar el método de estimación Jacknife. También podemos apreciar en el Anexo 7, que los histogramas de frecuencia utilizando ambos métodos de estimación coinciden.

Tabla XXXIV
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Exponencial con parámetro β=36 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas \ ***Tamaño Muestral***	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	37.233	36.601	37.023	35.555	36.206
Varianza	219.418	64.221	32.251	13.529	2.975
Asimetría	0.247	0.275	0.558	0.239	-0.046
Error de Estimación Promedio	12.225	6.179	4.313	3.020	1.457
Kurtosis	2.452	2.833	2.699	2.491	2.322
Mínimo	10.252	19.649	25.509	28.480	32.486
Máximo	73.026	54.500	49.423	44.263	39.793
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	26.808	28.639	33.069
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	102.992	77.411	47.237	42.470	39.343
Longitud Promedio del Int. De Conf.	102.992	77.411	20.429	13.831	6.274
Sesgo de Estimación	1.233	0.601	1.023	-0.446	0.206

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XXXV
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Exponencial con parámetro β=36 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas \ ***Tamaño Muestral***	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	37.233	36.601	37.023	35.555	36.206
Varianza	219.418	64.221	32.251	13.529	2.975
Asimetría	0.247	0.275	0.558	0.239	-0.046
Error de Estimación Promedio	12.225	6.179	4.313	3.020	1.457
Kurtosis	2.452	2.833	2.699	2.491	2.322
Mínimo	10.252	19.649	25.509	28.480	32.486
Máximo	73.026	54.500	49.423	44.263	39.793
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	17.017	26.808	28.639	33.069
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	78.072	56.184	47.237	42.470	39.343
Longitud Promedio del Int. De Conf.	78.072	39.167	20.429	13.831	6.274
Sesgo de Estimación	1.233	0.601	1.023	-0.446	0.206

Elaboración: *R. Plúa*

La mediana poblacional es 24.953. Al analizar los resultados obtenidos y presentados en la Tabla XXXVI y en la Tabla XXXVII, podemos observar que el método de estimación Jacknife no funciona ya que se obtienen valores negativos para los estimadores los cuales no se encuentran en el dominio de la función, por ejemplo los valores mínimos observados para tamaños muestrales de 5 y 15 son negativos.

Pese a esta situación se puede apreciar que para tamaños muestrales pares, el método Jacknife proporciona con una precisión de tres dígitos los mismos resultados que al utilizar el método de estimación convencional para estimar la mediana poblacional

Al probar con distintos valores para el parámetro poblacional β de la distribución exponencial obtuvimos similares situaciones en cada uno de los casos analizados.

En el Anexo 7, observamos los histogramas de los estimadores de la mediana, utilizando la estimación Jacknife y utilizando la estimación convencional. Donde se aprecia que para tamaños muestrales pares los histogramas tienen la misma forma.

Tabla XXXVI

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Exponencial con parámetro β=36 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	28.765	27.696	26.337	25.150	25.059
Varianza	239.715	84.468	23.072	11.270	2.608
Asimetría	1.079	0.252	0.013	0.513	0.252
Error de Estimación Promedio	11.504	7.197	4.195	2.602	1.286
Kurtosis	4.189	3.297	2.148	2.802	2.714
Mínimo	5.515	8.444	17.538	18.192	22.031
Máximo	74.278	54.262	36.107	32.960	29.028
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	14.139	17.185	21.203
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	67.565	50.325	32.969	30.345	27.533
Longitud Promedio del Int. De Conf.	67.565	50.325	18.829	13.160	6.330
Sesgo de Estimación	3.812	2.743	1.383	0.197	0.105

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XXXVII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Exponencial con parámetro β=36 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	21.072	29.181	26.337	25.150	25.059
Varianza	992.215	788.894	23.072	11.270	2.608
Asimetría	-0.520	0.236	0.013	0.513	0.252
Error de Estimación Promedio	23.801	20.352	4.195	2.602	1.286
Kurtosis	4.127	4.592	2.148	2.802	2.714
Mínimo	-74.740	-48.003	17.538	18.192	22.031
Máximo	85.555	119.927	36.107	32.960	29.028
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-16.800	6.914	15.761	16.664	22.190
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	58.944	51.449	36.912	33.636	27.927
Longitud Promedio del Int. De Conf.	75.743	44.536	21.151	16.972	5.737
Sesgo de Estimación	-3.882	4.228	1.383	0.197	0.105

Elaboración: *R. Plúa*

Según los datos analizados pudimos observar que para tamaños muestrales pares de 50, 100 y 500, con la estimación Jacknife se obtenían los mismos resultados con la estimación convencional y en el caso del tamaño muestral 500 se logro reducir la longitud promedio del intervalo de confianza, por tanto decidimos analizar los resultados para tamaños muestrales pares pequeños 8, 10, 16, 20 y 30.

Analizando los tamaños muestrales indicados anteriormente, se pudo apreciar que las medidas descriptivas coincidían con tres dígitos de precisión al utilizar ambos métodos de estimación, sin embargo, la longitud promedio de los intervalos de confianza logro reducirse notablemente al utilizar el método de estimación Jacknife frente a la estimación convencional, como se puede apreciar en la Tabla XXXVIII y en la Tabla XXXIX.

Al probar los métodos de estimación Jacknife y convencional con distintos valores para el parámetro poblacional β se obtuvieron situaciones similares.

Tabla XXXVIII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Exponencial con parámetro β=36 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	8	10	16	20	30
Media	28.315	25.327	23.188	27.304	24.192
Varianza	146.759	139.309	84.402	74.085	40.475
Asimetría	0.154	1.076	0.295	0.146	0.329
Error de Estimación Promedio	10.453	8.808	8.064	6.982	4.850
Kurtosis	2.143	3.785	1.968	2.624	3.017
Mínimo	8.640	10.277	7.940	9.006	11.504
Máximo	54.603	57.997	41.435	46.038	40.267
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	5.158	4.315	0	0	3.072
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	51.472	46.338	47.611	48.667	41.244
Longitud Promedio del Int. De Conf.	46.314	42.024	47.611	48.667	38.172
Sesgo de Estimación	3.362	0.373	-1.766	2.351	-0.762

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XXXIX

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Exponencial con parámetro β=36 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	8	10	16	20	30
Media	28.315	25.327	23.188	27.304	24.192
Varianza	146.759	139.309	84.402	74.085	40.475
Asimetría	0.154	1.076	0.295	0.146	0.329
Error de Estimación Promedio	10.453	8.808	8.064	6.982	4.850
Kurtosis	2.143	3.785	1.968	2.624	3.017
Mínimo	8.640	10.277	7.940	9.006	11.504
Máximo	54.603	57.997	41.435	46.038	40.267
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	0	0	3.072
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	57.751	56.170	47.611	48.467	41.244
Longitud Promedio del Int. De Conf.	57.751	56.170	47.611	48.467	38.172
Sesgo de Estimación	3.362	0.373	-1.766	2.351	-0.762

Elaboración: *R. Plúa*

La varianza de la población es 1296. Al analizar los resultados obtenidos y presentados en la Tabla XL y en la Tabla XLI, observamos que el sesgo de estimación y la varianza del estimador utilizando la estimación Jacknife nos proporciona valores para el sesgo de estimación, longitud promedio de los intervalos de confianza, error de estimación promedio y varianza mayores en magnitud que al utilizar la estimación convencional. Todas las medidas descriptivas obtenidas para tamaños muestrales grandes como 500, eran similares utilizando el método de estimación Jacknife y el método de estimación convencional.

Se probaron distintos valores para el parámetro poblacional β de la distribución exponencial, y las situaciones obtenidas eran similares en las simulaciones realizadas.

En el Anexo 7, presentamos los histogramas de los estimadores utilizando los métodos de estimación Jacknife y el método de estimación convencional, así mismo podemos observar la forma de la distribución de los estimadores, las cuales se explican con los coeficientes de asimetría y de kurtosis presentados en la Tabla XL y en la Tabla XLI.

Tabla XL
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Exponencial con parámetro β=36 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	1167.6	1119.6	1319.0	1373.8	1266.8
Varianza	1952663.2	654332.1	233944.5	173847.0	29777.9
Asimetría	2.0	1.9	1.0	0.9	0.8
Error de Estimación Promedio	1059.5	629.2	361.1	317.3	142.5
Kurtosis	7.8	7.4	3.9	2.8	3.4
Mínimo	41.3	183.2	564.8	777.4	952.9
Máximo	7053.5	4354.5	2697.1	2422.5	1782.8
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.0	0.0	939.2	1069.7	1125.5
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	4895.8	3320.5	2090.4	1872.6	1442.9
Longitud Promedio del Int. De Conf.	4895.8	3320.5	1151.2	802.9	317.4
Sesgo de Estimación	-128.4	-176.4	23.0	77.8	-29.2

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XLI
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Exponencial con parámetro β=36 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	4436.9	1542.1	1496.3	1446.6	1279.5
Varianza	86676246.9	1607554.7	396519.2	205173.0	31512.6
Asimetría	3.9	1.8	1.2	0.9	0.8
Error de Estimación Promedio	3876.7	855.6	452.5	342.1	142.4
Kurtosis	18.8	5.9	4.2	3.0	3.7
Mínimo	71.0	212.7	657.7	808.1	960.8
Máximo	52277.1	5683.2	3231.9	2635.6	1838.3
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	140.8	382.3	655.2	828.5	1004.6
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	64285005.0	11413.4	4226.6	2585.6	1635.0
Longitud Promedio del Int. De Conf.	64284864.3	11031.1	3571.4	1757.1	630.3
Sesgo de Estimación	3140.9	246.1	200.3	150.6	-16.5

Elaboración: *R. Plúa*

El primer estadístico de orden es 0. Al analizar los resultados obtenidos estimando el primer estadístico de orden mediante la estimación convencional y la estimación Jacknife para distintos tamaños muestrales, como podemos observar en la Tabla XLII y en la Tabla XLIII, el método de estimación Jacknife no funciona ya que nos proporciona valores que no se encuentran en el dominio de la función, por ejemplo los mínimos valores obtenidos para todos los tamaños muestrales son negativos, y la función de densidad se encuentra definida para valores mayores a cero, esta situación no sucede al estimar el primer estadístico de orden utilizando la estimación convencional.

Al probar para distintos valores del parámetro poblacional β de la distribución exponencial se pudo apreciar que en todos los casos el método de estimación Jacknife no funcionó al estimar el mínimo valor.

En el Anexo 7, podemos observar los histogramas para los estimadores obtenidos mediante la estimación convencional y la estimación Jacknife, la forma de las distribuciones de los estimadores se explican mediante los coeficientes de asimetría y de kurtosis presentados en la Tabla XLII y en la Tabla XLIII.

Tabla XLII
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Exponencial con parámetro β=36 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	7.060	1.605	0.580	0.309	0.092
Varianza	34.464	1.883	0.485	0.061	0.008
Asimetría	0.808	3.056	1.957	0.523	1.936
Error de Estimación Promedio	7.060	1.605	0.580	0.309	0.092
Kurtosis	2.544	15.792	6.413	2.058	7.940
Mínimo	0.041	0.245	0.016	0.005	0.005
Máximo	19.832	8.733	3.174	0.813	0.476
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	0	0	0
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	17.625	4.116	1.366	0.486	0.179
Longitud Promedio del Int. De Conf.	17.625	4.116	1.366	0.486	0.179
Sesgo de Estimación	7.060	1.605	0.580	0.309	0.092

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XLIII
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Exponencial con parámetro β=36 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	-0.188	-0.896	0.004	-0.179	-0.005
Varianza	57.496	7.145	0.826	0.264	0.019
Asimetría	-0.192	-0.949	0.080	-0.842	-0.487
Error de Estimación Promedio	5.794	1.805	0.650	0.390	0.101
Kurtosis	2.933	8.555	3.766	4.341	5.250
Mínimo	-18.615	-11.697	-2.688	-1.886	-0.479
Máximo	16.080	7.716	1.924	0.770	0.384
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-20.308	-6.259	-1.123	-1.135	-0.196
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	19.932	4.468	1.132	0.777	0.185
Longitud Promedio del Int. De Conf.	40.240	10.727	2.255	1.912	0.381
Sesgo de Estimación	-0.188	-0.896	0.004	-0.179	-0.005

Elaboración: *R. Plúa*

4.3.2 Estimadores para la distribución BETA

Las muestras aleatorias utilizadas para la obtención de los estimadores, se generaron a partir de una distribución Beta con parámetros $v=4$ y $\omega=3$, la gráfica de esta función de probabilidad se muestra en el Anexo 2.

La media poblacional es 0.5714. Al analizar la estimación Jacknife y la estimación convencional se pudo apreciar que se obtuvieron los mismos resultados con tres dígitos de precisión, para los valores de los estimadores con sus respectivas medidas descriptivas como son media, varianza, asimetría, sesgo de estimación promedio, kurtosis, mínimo y máximo valor observado del estimador, límite inferior y superior promedio al 95% de confianza para los estimadores, y longitud promedio del intervalo de confianza; sin embargo la longitud promedio de los intervalos de confianza para los tamaños muestrales 5 y 15 resulto ser menor al utilizar la estimación Jacknife frente a la estimación convencional, como se puede observar en la Tabla XLIV y en la Tabla XLV. Al probar distintos valores para los parámetros poblacionales se obtuvieron situaciones similares en todos los casos.

También podemos apreciar en el Anexo 8, que los histogramas de los estimadores para la media poblacional utilizando el método Jacknife y utilizando el método convencional son iguales.

Tabla XLIV

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Beta con parámetros v=4 y ω=3 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.560	0.573	0.570	0.573	0.569
Varianza	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000
Asimetría	-0.262	0.085	-0.146	1.015	-0.141
Error de Estimación Promedio	0.072	0.043	0.022	0.012	0.007
Kurtosis	2.281	2.517	1.985	4.051	2.512
Mínimo	0.385	0.468	0.521	0.544	0.550
Máximo	0.733	0.703	0.614	0.626	0.585
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.269	0.377	0.522	0.539	0.554
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.851	0.769	0.618	0.607	0.585
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.582	0.393	0.096	0.069	0.031
Sesgo de Estimación	-0.011	0.001	-0.002	0.002	-0.002

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XLV

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Beta con parámetros v=4 y ω=3 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.560	0.573	0.570	0.573	0.569
Varianza	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000
Asimetría	-0.262	0.085	-0.146	1.015	-0.141
Error de Estimación promedio	0.072	0.043	0.022	0.012	0.007
Kurtosis	2.281	2.517	1.985	4.051	2.512
Mínimo	0.385	0.468	0.521	0.544	0.550
Máximo	0.733	0.703	0.614	0.626	0.585
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.380	0.479	0.522	0.539	0.554
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.741	0.667	0.618	0.607	0.585
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.361	0.189	0.096	0.069	0.031
Sesgo de Estimación	-0.011	0.001	-0.002	0.002	-0.002

Elaboración: *R. Plúa*

La varianza de la población es 0.0306. Al analizar los resultados obtenidos podemos observar en la Tabla XLVI y en la Tabla XLVII, que la estimación de la varianza poblacional mediante los métodos de estimación Jacknife y convencional, si bien no dan resultados iguales, dan resultados muy similares en todas las medidas descriptivas, como son la media, el sesgo de estimación, el coeficiente de asimetría, el coeficiente de kurtosis, la longitud de los intervalos de confianza al 95%, etc, esto se debe a que la función de densidad está definida de cero a uno por tanto la variabilidad no es grande en ningún caso.

Al estimar la varianza poblacional, probando con distintos valores para los parámetros poblacionales v y ω de la distribución Beta obtuvimos situaciones similares en todos los casos.

Así mismo, en el Anexo 8 se muestran los histogramas para los diferentes tamaños muestrales de los estimadores obtenidos mediante el método de estimación Jacknife y mediante el método de estimación convencional, los cuales son muy similares, como es de esperarse debido a los coeficientes de asimetría y de kurtosis mostrados en la Tabla XLVI y en la Tabla XLVII.

Tabla XLVI
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Beta con parámetros v=4 y ω=3 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	0.023	0.029	0.029	0.030	0.031
Varianza	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Asimetría	1.011	0.234	0.422	-0.022	0.724
Error de Estimación promedio	0.014	0.007	0.004	0.003	0.001
Kurtosis	3.550	2.683	2.773	2.541	3.696
Mínimo	0.003	0.011	0.018	0.022	0.028
Máximo	0.066	0.049	0.043	0.038	0.035
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.000	0.001	0.021	0.024	0.027
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.064	0.052	0.046	0.041	0.035
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.064	0.050	0.025	0.018	0.008
Sesgo de Estimación	-0.008	-0.002	-0.002	0.000	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XLVII
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Beta con parámetros v=4 y ω=3 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	0.044	0.033	0.030	0.031	0.031
Varianza	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
Asimetría	0.985	0.136	0.408	-0.020	0.721
Error de Estimación promedio	0.024	0.008	0.004	0.003	0.001
Kurtosis	3.384	2.500	2.770	2.524	3.692
Mínimo	0.004	0.013	0.019	0.023	0.028
Máximo	0.134	0.054	0.044	0.038	0.035
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.005	0.016	0.021	0.024	0.028
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	2.344	0.074	0.042	0.039	0.035
Longitud Promedio del Int. De Conf.	2.339	0.059	0.021	0.015	0.007
Sesgo de Estimación	0.013	0.003	-0.001	0.000	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

El último estadístico de orden es 1. Al analizar los resultados obtenidos podemos observar en la Tabla XLVIII y en la Tabla XLIX, que al estimar el último estadístico de orden el método de estimación Jacknife no funciona debido a que los valores de los estimadores no se encuentran en el dominio de la función de densidad, por ejemplo los máximos valores de los estimadores obtenidos para cada tamaño muestral son mayores a uno y el dominio de la función de densidad Beta es de cero a uno, está situación no sucede mediante la estimación convencional.

Al estimar el máximo valor para la distribución Beta, con distintos valores para los parámetros poblacionales v y ω, podemos concluir que en la mayoría de los casos la estimación Jacknife no proporciona valores de los estimadores fuera del dominio de la función de densidad para $v>0$ y $\omega>20$, además el error de estimación, el sesgo de estimación y la longitud promedio de los intervalos de confianza se logra reducir mediante Jacknife frente a la estimación convencional, se muestra un caso en el Anexo 11 para los parámetros $v=2$ y $\omega=20$.

En el Anexo 8, podemos observar los histogramas para los estimadores obtenidos mediante el método de estimación Jacknife y mediante el método de estimación convencional.

Tabla XLVIII
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Último Estadístico de Orden de una Población Beta con parámetros v=4 y ω=3 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	0.768	0.846	0.904	0.930	0.958
Varianza	0.013	0.003	0.002	0.001	0.000
Asimetría	-0.543	0.139	-0.481	-0.143	-0.195
Error de Estimación promedio	0.232	0.154	0.096	0.070	0.042
Kurtosis	2.844	2.858	2.563	1.986	1.860
Mínimo	0.470	0.701	0.810	0.872	0.928
Máximo	0.954	0.977	0.977	0.983	0.989
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.432	0.673	0.827	0.870	0.924
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	1	1	0.981	0.990	0.991
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.568	0.327	0.154	0.120	0.067
Sesgo de Estimación	-0.232	-0.154	-0.096	-0.070	-0.042

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla XLIX
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Último Estadístico de Orden de una Población Beta con parámetros v=4 y ω=3 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	0.851	0.897	0.938	0.958	0.972
Varianza	0.024	0.007	0.003	0.002	0.001
Asimetría	-0.240	0.340	-0.140	0.073	-0.011
Error de Estimación promedio	0.170	0.115	0.067	0.050	0.030
Kurtosis	2.197	2.323	2.433	2.118	1.907
Mínimo	0.501	0.732	0.818	0.876	0.931
Máximo	1.099	1.068	1.037	1.044	1.017
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.620	0.788	0.871	0.903	0.944
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	1.082	1.007	1.006	1.014	1.000
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.463	0.219	0.135	0.111	0.056
Sesgo de Estimación	-0.149	-0.103	-0.062	-0.042	-0.028

Elaboración: *R. Plúa*

El primer estadístico de orden es cero. Al analizar los resultados obtenidos mediante la estimación Jacknife y mediante la estimación convencional, como podemos observar en la Tabla L y en la Tabla LI, la estimación Jacknife no funciona al estimar este parámetro, ya que los valores de los estimadores no se encuentran en el dominio de la función de densidad, por ejemplo los mínimos valores obtenidos de los estimadores son negativos y la función de densidad de la distribución Beta se encuentra definida de cero a uno.

Al estimar el mínimo valor para la distribución Beta, con distintos valores para los parámetros poblacionales v y ω, podemos concluir que en la mayoría de los casos la estimación Jacknife no proporciona valores de los estimadores fuera del dominio de la función de densidad para $v>20$ y $\omega>0$, además el error de estimación y el sesgo de estimación se logra reducir mediante Jacknife frente a la estimación convencional, se muestra un caso en el Anexo 11 para los parámetros $v=20$ y $\omega=2$.

En el Anexo 8, se muestran los histogramas para los estimadores obtenidos mediante la estimación Jacknife y mediante la estimación convencional.

Tabla L

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Beta con parámetros ν=4 y ω=3 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.353	0.262	0.180	0.164	0.096
Varianza	0.013	0.009	0.004	0.002	0.001
Asimetría	0.168	-0.148	0.339	0.104	-0.428
Error de Estimación promedio	0.353	0.262	0.180	0.164	0.096
Kurtosis	2.961	2.136	2.850	2.193	3.275
Mínimo	0.092	0.077	0.056	0.078	0.023
Máximo	0.662	0.470	0.351	0.258	0.150
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	0	0	0
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.343	0.285	0.123	0.091	0.050
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.343	0.285	0.123	0.091	0.050
Sesgo de Estimación	0.353	0.262	0.180	0.164	0.096

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla LI

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Beta con parámetros ν=4 y ω=3 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.262	0.187	0.125	0.127	0.061
Varianza	0.028	0.015	0.010	0.005	0.002
Asimetría	-0.304	-0.440	-0.300	-0.280	-0.824
Error de Estimación promedio	0.275	0.195	0.139	0.128	0.067
Kurtosis	2.827	2.538	2.698	2.343	3.538
Mínimo	-0.138	-0.096	-0.128	-0.017	-0.082
Máximo	0.648	0.451	0.339	0.257	0.132
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.011	0.024	0.017	0.056	-0.008
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.513	0.349	0.233	0.199	0.130
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.502	0.325	0.216	0.143	0.138
Sesgo de Estimación	0.262	0.187	0.125	0.127	0.061

Elaboración: *R. Plúa*

4.3.3 Estimadores para la distribución NORMAL

Las muestras aleatorias utilizadas para la obtención de los estimadores, se generaron a partir de una distribución Normal estándar, es decir con parámetros $\mu=0$ y $\sigma=1$, la gráfica de esta función de probabilidad se muestra en el Anexo 2.

La media poblacional es 0. Al analizar la estimación Jacknife y la estimación convencional se pudo apreciar que se obtuvieron los mismos resultados con tres dígitos de precisión, para los estimadores y sus respectivas medidas descriptivas como lo son la media, varianza, asimetría, sesgo de estimación promedio, kurtosis, mínimo y máximo valor observado del estimador, límite inferior y superior promedio al 95% de confianza para los estimadores, y longitud promedio del intervalo de confianza; sin embargo para tamaños muestrales 5 y 15 la longitud promedio de los intervalos de confianza resultó ser menor al utilizar la estimación Jacknife frente a la estimación convencional como se puede observar en la Tabla LII y en la Tabla LIII, al estimar la media con distintos valores para los parámetros poblacionales μ y σ, se obtuvieron similares situaciones.

También podemos apreciar en el Anexo 9, que los histogramas de los estimadores para la media poblacional utilizando el método Jacknife y utilizando el método convencional son muy similares.

Tabla LII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores la Media de una Población Normal con parámetros μ=0 y σ=1 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas \ *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	-0.012	-0.004	-0.005	0.011	0.005
Varianza	0.185	0.062	0.024	0.012	0.001
Asimetría	0.197	0.413	0.013	0.291	-0.396
Error de Estimación Promedio	0.347	0.211	0.121	0.085	0.031
Kurtosis	2.362	2.073	2.710	3.631	2.517
Mínimo	-0.847	-0.414	-0.315	-0.217	-0.079
Máximo	0.971	0.495	0.320	0.349	0.082
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-1.744	-1.182	-0.285	-0.181	-0.084
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	1.721	1.174	0.276	0.204	0.093
Longitud Promedio del Int. De Conf.	3.465	2.356	0.560	0.385	0.176
Sesgo de Estimación	-0.012	-0.004	-0.005	0.011	0.005

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla LIII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Normal con parámetros μ=0 y σ=1 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas \ *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	-0.012	-0.004	-0.005	0.011	0.005
Varianza	0.185	0.062	0.024	0.012	0.001
Asimetría	0.197	0.413	0.013	0.291	-0.396
Error de Estimación Promedio	0.347	0.211	0.121	0.085	0.031
Kurtosis	2.362	2.073	2.710	3.631	2.517
Mínimo	-0.847	-0.414	-0.315	-0.217	-0.079
Máximo	0.971	0.495	0.320	0.349	0.082
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-1.088	-0.569	-0.285	-0.181	-0.084
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	1.064	0.561	0.276	0.204	0.093
Longitud Promedio del Int. De Conf.	2.152	1.130	0.560	0.385	0.176
Sesgo de Estimación	-0.012	-0.004	-0.005	0.011	0.005

Elaboración: *R. Plúa*

La mediana poblacional es cero. Al analizar los resultados obtenidos mediante la estimación Jacknife y la estimación convencional, podemos observar que para tamaños muestrales pequeños como 5 y 15 la varianza y el sesgo de estimación mediante la estimación Jacknife resulta ser mayor, pero la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95% logra reducirse mediante la estimación Jacknife frente a la estimación convencional, sin embargo para tamaños muestrales grandes como 50, 100 y 500, se obtienen exactamente los mismos resultados con tres dígitos de precisión para todas las medidas descriptivas, esto se muestra en la Tabla LIV y en la Tabla LV.

En el Anexo 9, podemos observar los histogramas de los estimadores para la mediana poblacional utilizando el método de estimación convencional y el método de estimación Jacknife. Para tamaños muestrales pares las distribuciones son muy similares, lo que se puede constatar con los coeficientes de asimetría y de kurtosis que se muestran en la Tabla LIV y en la Tabla LV, no se puede decir los mismo cuando se usan tamaños muestrales impares.

Tabla LIV
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Normal con parámetros μ=0 y σ=1 utilizando el Método Convencional

Tamaño Muestral / *Medidas Descriptivas*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	-0.016	-0.055	0.028	-0.021	0.004
Varianza	0.437	0.080	0.023	0.016	0.004
Asimetría	0.143	-0.022	-0.684	-0.537	-0.158
Error de Estimación Promedio	0.530	0.243	0.119	0.095	0.050
Kurtosis	2.637	1.915	3.509	2.883	2.637
Mínimo	-1.250	-0.556	-0.403	-0.313	-0.125
Máximo	1.539	0.464	0.301	0.261	0.141
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-2.255	-0.998	-0.341	-0.309	-0.148
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	1.710	0.701	0.251	0.194	0.102
Longitud Promedio del Int. De Conf.	3.965	1.699	0.592	0.502	0.250
Sesgo de Estimación	-0.016	-0.055	0.028	-0.021	0.004

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla LV
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Normal con parámetros μ=0 y σ=1 utilizando el Método Jacknife

Tamaño Muestral / *Medidas Descriptivas*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	-0.028	-0.128	0.028	-0.021	0.004
Varianza	1.807	0.964	0.023	0.016	0.004
Asimetría	0.499	-0.773	-0.684	-0.537	-0.158
Error de Estimación Promedio	1.032	0.736	0.119	0.095	0.050
Kurtosis	3.766	3.521	3.509	2.883	2.637
Mínimo	-2.712	-2.992	-0.403	-0.313	-0.125
Máximo	4.235	1.539	0.301	0.261	0.141
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-1.476	-0.856	-0.283	-0.268	-0.131
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	1.421	0.600	0.339	0.226	0.139
Longitud Promedio del Int. De Conf.	2.898	1.456	0.621	0.494	0.270
Sesgo de Estimación	-0.028	-0.128	0.028	-0.021	0.004

Elaboración: *R. Plúa*

Según los datos analizados pudimos observar que para tamaños muestrales pares de 50, 100 y 500, con la estimación Jacknife se obtenían los mismos resultados con la estimación convencional y en el caso del tamaño muestral 500 se logro reducir la longitud promedio del intervalo de confianza, por tanto decidimos analizar los resultados para tamaños muestrales pares pequeños 8, 10, 16, 20 y 30.

Al analizar los tamaños muestrales anteriormente mencionados, se pudo apreciar que las medidas descriptivas coincidían con tres dígitos de precisión al utilizar ambos métodos de estimación, sin embargo, la longitud promedio de los intervalos de confianza logro reducirse al utilizar el método de estimación Jacknife frente a la estimación convencional, como se puede apreciar en la Tabla LVI y en la Tabla LVII.

Al estimar la mediana poblacional simulando los estimadores para distintos valores de los parámetros poblacionales, pudimos apreciar que en todos los casos se presentó la misma situación.

Tabla LVI

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Normal con parámetros μ=0 y σ=1 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	8	10	16	20	30
Media	0.018	-0.033	-0.046	-0.046	0.026
Varianza	0.180	0.151	0.123	0.062	0.039
Asimetría	0.553	-0.221	0.071	-0.486	0.357
Error de Estimación Promedio	0.335	0.310	0.295	0.181	0.161
Kurtosis	2.703	2.542	2.269	3.662	2.485
Mínimo	-0.747	-0.962	-0.787	-0.797	-0.346
Máximo	1.024	0.760	0.620	0.499	0.491
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-0.993	-0.840	-0.820	-0.546	-0.460
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	1.028	0.775	0.727	0.453	0.512
Longitud Promedio del Int. De Conf.	2.021	1.614	1.546	0.999	0.972
Sesgo de Estimación	0.018	-0.033	-0.046	-0.046	0.026

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla LVII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Normal con parámetros μ=0 y σ=1 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	0.018	-0.033	-0.046	-0.046	0.026
Varianza	0.180	0.151	0.123	0.062	0.039
Asimetría	0.553	-0.221	0.071	-0.486	0.357
Error de Estimación Promedio	0.335	0.310	0.295	0.181	0.161
Kurtosis	2.703	2.542	2.269	3.662	2.485
Mínimo	-0.747	-0.962	-0.787	-0.797	-0.346
Máximo	1.024	0.760	0.620	0.499	0.491
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-1.430	-1.338	-1.224	-0.859	-0.660
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	1.113	0.996	0.883	0.633	0.526
Longitud Promedio del Int. De Conf.	2.542	2.334	2.107	1.492	1.186
Sesgo de Estimación	0.018	-0.033	-0.046	-0.046	0.026

Elaboración: *R. Plúa*

La varianza poblacional es 1. Al analizar los resultados obtenidos mediante el método de estimación Jacknife y mediante el método de estimación convencional, se puede apreciar en la Tabla LVIII y en la Tabla LIX que mediante la estimación Jacknife, la varianza, el sesgo de estimación, el error de estimación promedio y la longitud promedio de los intervalos de confianza resultan ser mayores que al utilizar la estimación convencional; sin embargo a medida que aumenta el tamaño muestral las medidas descriptivas obtenidas tienden a ser similares mediante los dos métodos de estimación trabajados.

Al estimar la varianza poblacional utilizando distintos valores para los parámetros poblacionales μ y σ, para la distribución normal, pudimos apreciar que en todos los casos se obtuvo similar situación.

En el Anexo 9, se muestra los histogramas de los estimadores para la varianza, la forma de la distribución de frecuencia la constatamos al observar los coeficientes de asimetría y de kurtosis mostrados en la Tabla LVIII y en la Tabla LIX.

Tabla LVIII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Normal con parámetros μ=0 y σ=1 utilizando el Método Convencional

Tamaño Muestral / *Medidas Descriptivas*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.023	0.029	0.029	0.030	0.031
Varianza	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Asimetría	1.011	0.234	0.422	-0.022	0.724
Error de Estimación promedio	0.014	0.007	0.004	0.003	0.001
Kurtosis	3.550	2.683	2.773	2.541	3.696
Mínimo	0.003	0.011	0.018	0.022	0.028
Máximo	0.066	0.049	0.043	0.038	0.035
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.000	0.001	0.021	0.024	0.027
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.064	0.052	0.046	0.041	0.035
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.064	0.050	0.025	0.018	0.008
Sesgo de Estimación	-0.008	-0.002	-0.002	0.000	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla LIX

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Normal con parámetros μ=0 y σ=1 utilizando el Método Jacknife

Tamaño Muestral / *Medidas Descriptivas*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.044	0.033	0.030	0.031	0.031
Varianza	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
Asimetría	0.985	0.136	0.408	-0.020	0.721
Error de Estimación promedio	0.024	0.008	0.004	0.003	0.001
Kurtosis	3.384	2.500	2.770	2.524	3.692
Mínimo	0.004	0.013	0.019	0.023	0.028
Máximo	0.134	0.054	0.044	0.038	0.035
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.005	0.016	0.021	0.024	0.028
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	2.344	0.074	0.042	0.039	0.035
Longitud Promedio del Int. De Conf.	2.339	0.059	0.021	0.015	0.007
Sesgo de Estimación	0.013	0.003	-0.001	0.000	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

4.3.4 Estimadores para la distribución UNIFORME

Las muestras aleatorias utilizadas para la obtención de los estimadores, se generaron a partir de una distribución Uniforme con parámetros U (0,1), la gráfica de esta función de probabilidad se muestra en el Anexo 2.

La media poblacional es 0.5. Al analizar la estimación Jacknife y la estimación convencional se pudo apreciar los valores de los estimadores coincidían con sus respectivas medidas descriptivas coincidían con tres dígitos de precisión, como lo son la media, varianza, asimetría, sesgo de estimación promedio, kurtosis, mínimo y máximo valor observado del estimador, límite inferior y superior promedio al 95% de confianza, y longitud promedio del intervalo de confianza; sin embargo podemos apreciar que para los tamaños muestrales 5 y 15 los intervalos de confianza al 95% resultan ser menores al utilizar la estimación Jacknife frente a la estimación convencional como se puede observar en la Tabla LX y en la Tabla LXI, al analizar distintos valores para los parámetros poblacionales se obtuvo similar situación en todos los casos.

También podemos apreciar en el Anexo 10, que los histogramas de los estimadores para la media poblacional utilizando el método Jacknife y utilizando el método convencional son iguales.

Tabla LX
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Uniforme con parámetros α=0 y β=1 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	0.517	0.501	0.496	0.508	0.498
Varianza	0.020	0.006	0.002	0.001	0.000
Asimetría	-0.177	-0.013	-0.347	-0.215	0.045
Error de Estimación Promedio	0.114	0.058	0.033	0.024	0.010
Kurtosis	2.650	3.103	2.487	2.790	3.346
Mínimo	0.203	0.319	0.397	0.441	0.467
Máximo	0.773	0.675	0.563	0.563	0.529
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.000	0.167	0.417	0.451	0.473
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	1.069	0.835	0.576	0.565	0.523
Longitud Promedio del Int. De Conf.	1.069	0.667	0.159	0.113	0.051
Sesgo de Estimación	0.017	0.001	-0.004	0.008	-0.002

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla LXI
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Uniforme con parámetros α=0 y β=1 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	0.517	0.501	0.496	0.508	0.498
Varianza	0.020	0.006	0.002	0.001	0.000
Asimetría	-0.177	-0.013	-0.347	-0.215	0.045
Error de Estimación Promedio	0.114	0.058	0.033	0.024	0.010
Kurtosis	2.650	3.103	2.487	2.790	3.346
Mínimo	0.203	0.319	0.397	0.441	0.467
Máximo	0.773	0.675	0.563	0.563	0.529
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.175	0.341	0.417	0.451	0.473
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.860	0.661	0.576	0.565	0.523
Longitud Promedio del Int. De Conf.	**0.685**	**0.320**	0.159	0.113	0.051
Sesgo de Estimación	0.017	0.001	-0.004	0.008	-0.002

Elaboración: *R. Plúa*

La mediana poblacional es 0.5. Al analizar los resultados obtenidos mediante la estimación Jacknife y mediante la estimación convencional, presentados en la Tabla LXII y en la Tabla LXIII; al estimar la mediana mediante la estimación Jacknife y con tamaños muestrales impares, éste método no funciona puesto que se obtienen valores negativos para los estimadores, como por ejemplo los mínimos valores de los estimadores para los tamaños muestrales de 5 y 15 son -0.76 y -0.51 respectivamente los cuales no se encuentran en el dominio de la función de densidad. Sin embargo para tamaños muestrales pares el método Jacknife y el método de estimación convencional proporcionan los mismos resultados con tres dígitos de precisión para cada una de las medidas descriptivas obtenidas, a excepción de la longitud promedio de los intervalos de confianza que logra reducirse mediante Jacknife.

En el Anexo 10, se muestran los histogramas de los estimadores para la mediana de la población uniforme utilizando el método de estimación Jacknife y el método de estimación convencional, para los distintos tamaños muestrales presentados en la Tabla LXII y en la Tabla LXIII, donde podemos notar lo expuesto anteriormente, es decir que para tamaños muestrales pares las distribuciones son iguales.

Tabla LXII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Uniforme con parámetros α=0 y β=1 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	0.466	0.486	0.496	0.504	0.503
Varianza	0.038	0.018	0.007	0.003	0.001
Asimetría	-0.262	-0.103	0.141	-0.183	0.212
Error de Estimación Promedio	0.163	0.107	0.063	0.040	0.018
Kurtosis	2.118	3.038	3.087	2.391	2.017
Mínimo	0.061	0.117	0.323	0.396	0.469
Máximo	0.779	0.796	0.706	0.594	0.544
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0.043	0.307	0.385	0.451
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.987	0.837	0.627	0.580	0.535
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.987	0.794	0.321	0.195	0.084
Sesgo de Estimación	-0.035	-0.014	-0.004	0.004	0.003

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla LXIII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Uniforme con parámetros α=0 y β=1 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	0.470	0.480	0.496	0.504	0.503
Varianza	0.192	0.139	0.007	0.003	0.001
Asimetría	-0.268	-0.394	0.141	-0.183	0.212
Error de Estimación Promedio	0.355	0.287	0.063	0.040	0.018
Kurtosis	2.819	3.505	3.087	2.391	2.017
Mínimo	-0.760	-0.517	0.323	0.396	0.469
Máximo	1.246	1.410	0.706	0.594	0.544
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.022	0.262	0.339	0.415	0.465
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.918	0.698	0.653	0.594	0.542
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.896	0.436	0.314	0.179	0.077
Sesgo de Estimación	-0.030	-0.020	-0.004	0.004	0.003

Elaboración: *R. Plúa*

Según los datos analizados pudimos observar que para tamaños muestrales pares de 50, 100 y 500, con la estimación Jacknife se obtenían los mismos resultados con la estimación convencional y en el caso de los tamaños muestrales 100 y 500 se logro reducir la longitud promedio del intervalo de confianza, por tanto decidimos analizar los resultados para tamaños muestrales pares pequeños 8, 10, 16, 20 y 30.

Al analizar los resultados con los tamaños anteriormente estipulados, se pudo apreciar que las medidas descriptivas coincidían con tres dígitos de precisión al utilizar ambos métodos de estimación, sin embargo, la longitud promedio de los intervalos de confianza logro reducirse al utilizar el método de estimación Jacknife frente a la estimación convencional, como se puede apreciar en la Tabla LXIV y en la Tabla LXV.

Estimando la mediana poblacional y simulando las muestras aleatorias de tamaño n para distintos valores de los parámetros poblacionales pudimos apreciar que en la mayoría de los casos se presenta la misma situación.

Tabla LXIV
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Uniforme con parámetros α=0 y β=1 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	8	10	16	20	30
Media	0.524	0.499	0.502	0.487	0.498
Varianza	0.024	0.015	0.008	0.010	0.006
Asimetría	-0.021	-0.318	0.091	0.085	-0.132
Error de Estimación Promedio	0.133	0.099	0.074	0.080	0.061
Kurtosis	2.088	2.475	2.182	2.602	2.536
Mínimo	0.180	0.190	0.320	0.284	0.311
Máximo	0.811	0.743	0.670	0.735	0.650
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.154	0.226	0.258	0.335	0.294
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.893	0.771	0.746	0.640	0.702
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.738	0.545	0.488	0.305	0.408
Sesgo de Estimación	0.024	-0.001	0.002	-0.013	-0.002

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla LXV
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Uniforme con parámetros α=0 y β=1 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	8	10	16	20	30
Media	0.524	0.499	0.502	0.487	0.498
Varianza	0.024	0.015	0.008	0.010	0.006
Asimetría	-0.021	-0.318	0.091	0.085	-0.132
Error de Estimación Promedio	0.133	0.099	0.074	0.080	0.061
Kurtosis	2.088	2.475	2.182	2.602	2.536
Mínimo	0.180	0.190	0.320	0.284	0.311
Máximo	0.811	0.743	0.670	0.735	0.650
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0.083	0.199	0.161	0.242
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.907	0.817	0.730	0.747	0.695
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.907	0.734	0.531	0.585	0.453
Sesgo de Estimación	0.024	-0.001	0.002	-0.013	-0.002

Elaboración: *R. Plúa*

La varianza de la población es 0.0833. Al analizar los resultados obtenidos mediante el método de estimación Jacknife y mediante el método de estimación convencional, mostrados en la Tabla LXVI y en la Tabla LXVII, se puede observar que al estimar la varianza de la población el método de estimación Jacknife la longitud promedio de los intervalos de confianza para 15, 50, 100 y 500 resulta ser menor que al utilizar la estimación convencional. Sin embargo el sesgo de estimación en algunos casos resulta ser mayor mediante el método de estimación Jacknife, en general las demás medidas descriptivas son muy similares a medida que aumenta el tamaño muestral.

Al estimar la varianza con distintos valores para los parámetros poblacionales la longitud promedio de los intervalos, sesgo de estimación y error promedio de estimación, resultaron ser mayores al utilizar la estimación Jacknife que al utilizar la estimación convencional, las situaciones eran muy similares en todos los casos.

En el Anexo 10, se muestran los histogramas de los estimadores para la varianza poblacional, utilizando los métodos de estimación Jacknife y convencional, donde la forma de la distribución de este estimador puede ser constatada con los coeficientes de asimetría y kurtosis presentados.

Tabla LXVI
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Uniforme con parámetros α=0 y β=1 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas \ *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.068	0.074	0.082	0.082	0.084
Varianza	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
Asimetría	0.215	-0.143	0.321	0.092	-0.324
Error de Estimación Promedio	0.032	0.018	0.008	0.006	0.003
Kurtosis	2.136	2.631	3.729	2.097	2.287
Mínimo	0.009	0.024	0.056	0.069	0.077
Máximo	0.140	0.115	0.112	0.098	0.090
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.000	0.007	0.058	0.064	0.074
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.166	0.132	0.130	0.112	0.095
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.166	0.125	0.071	0.048	0.021
Sesgo de Estimación	-0.016	-0.009	-0.002	-0.001	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla LXVII
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Uniforme con parámetros α=0 y β=1 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas \ *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.150	0.083	0.084	0.083	0.084
Varianza	0.017	0.001	0.000	0.000	0.000
Asimetría	2.418	-0.203	0.308	0.086	-0.324
Error de Estimación Promedio	0.088	0.017	0.008	0.006	0.003
Kurtosis	10.588	2.713	3.715	2.095	2.288
Mínimo	0.024	0.027	0.058	0.070	0.077
Máximo	0.730	0.125	0.115	0.099	0.090
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.017	0.045	0.065	0.070	0.078
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	177.472	0.155	0.110	0.100	0.091
Longitud Promedio del Int. De Conf.	177.455	0.110	0.045	0.030	0.013
Sesgo de Estimación	0.067	0.000	0.001	0.000	0.001

Elaboración: *R. Plúa*

El primer estadístico de orden es 0. Al analizar los resultados obtenidos mediante el método de estimación Jacknife y mediante el método de estimación convencional, presentados en la Tabla LXVIII y en la Tabla LXIX, se puede apreciar que el método Jacknife no funciona puesto que algunos de los valores de los estimadores obtenidos no tienen sentido, por ejemplo los mínimos valores obtenidos para los distintos tamaños muestrales son negativos, y no se encuentran definidos en el dominio de la función de densidad, ya que el dominio es de 0 a 1, esta situación no ocurre al utilizar la estimación convencional.

Al analizar el mínimo valor con distintos valores para los parámetros poblacionales α y β de la función de densidad uniforme podemos apreciar que se obtienen valores para los estimadores que no se encuentran en el dominio de la función de densidad, en todos los casos ocurrió la misma situación.

En el Anexo 10, se muestran los histogramas de los estimadores para el primer estadístico de orden, utilizando el método de estimación Jacknife y el método de estimación convencional para cada uno de los tamaños muestrales tabulados.

Tabla LXVIII
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Uniforme con parámetros α=0 y β=1 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.152	0.059	0.020	0.009	0.002
Varianza	0.017	0.004	0.001	0.000	0.000
Asimetría	1.100	1.578	1.971	1.563	1.418
Error de Estimación Promedio	0.152	0.059	0.020	0.009	0.002
Kurtosis	3.328	4.639	6.228	5.238	5.258
Mínimo	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
Máximo	0.496	0.252	0.094	0.039	0.009
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	0	0	0
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.387	0.193	0.044	0.017	0.004
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.387	0.193	0.044	0.017	0.004
Sesgo de Estimación	0.152	0.059	0.020	0.009	0.002

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla LXIX
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Uniforme con parámetros α=0 y β=1 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	-0.001	0.004	-0.001	-0.003	0.000
Varianza	0.042	0.007	0.001	0.000	0.000
Asimetría	-0.172	0.802	0.827	-0.418	-0.871
Error de Estimación Promedio	0.156	0.058	0.020	0.010	0.002
Kurtosis	3.174	4.065	5.157	3.494	5.346
Mínimo	-0.506	-0.152	-0.065	-0.037	-0.009
Máximo	0.443	0.238	0.089	0.026	0.007
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-0.428	-0.113	-0.040	-0.025	-0.004
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.425	0.121	0.039	0.020	0.004
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.854	0.234	0.079	0.045	0.008
Sesgo de Estimación	-0.001	0.004	-0.001	-0.003	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

El último estadístico de orden es 1. Al analizar los resultados obtenidos mediante la estimación Jacknife y mediante la estimación convencional, presentados en la Tabla LXX y en la Tabla LXXI, podemos observar que al estimar el último estadístico de orden mediante la estimación Jacknife, éste método no funciona, puesto que se obtienen valores para los estimadores que no tienen sentido, por ejemplo los máximos valores obtenidos mediante la estimación Jacknife para cada uno de los tamaños muestrales son valores mayores a uno, los cuales no se encuentran definidos en la función de densidad, esta situación no ocurre al utilizar la estimación convencional.

Al analizar el máximo valor con distintos valores para los parámetros poblacionales α y β de la función de densidad uniforme podemos apreciar que se obtienen valores para los estimadores que no se encuentran en el dominio de la función de densidad, en todos los casos ocurrió la misma situación.

En el Anexo 10, presentamos los histogramas de los estimadores para el último estadístico de orden utilizando la estimación Jacknife y la estimación convencional, para los distintos tamaños muestrales trabajados.

Tabla LXX
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Ultimo Estadístico de Orden de una Población Uniforme utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.839	0.935	0.983	0.993	0.998
Varianza	0.027	0.004	0.000	0.000	0.000
Asimetría	-1.484	-1.290	-1.432	-2.227	-1.650
Error de Estimación Promedio	0.161	0.065	0.018	0.007	0.002
Kurtosis	5.347	3.802	4.457	8.922	5.801
Mínimo	0.224	0.751	0.921	0.958	0.992
Máximo	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.348	0.735	0.947	0.977	0.995
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	1	1	1	1	1
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.652	0.265	0.053	0.023	0.005
Sesgo de Estimación	-0.161	-0.065	-0.018	-0.007	-0.002

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla LXXI
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Ultimo Estadístico de Orden de una Población Uniforme utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.981	0.999	1.004	1.002	1.001
Varianza	0.061	0.008	0.001	0.000	0.000
Asimetría	-0.308	-0.498	0.493	-0.111	0.214
Error de Estimación Promedio	0.186	0.062	0.023	0.008	0.002
Kurtosis	3.875	3.796	3.397	3.602	2.809
Mínimo	0.228	0.754	0.946	0.972	0.996
Máximo	1.593	1.185	1.083	1.026	1.006
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.587	0.862	0.962	0.984	0.996
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	1.376	1.135	1.047	1.020	1.005
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.789	0.274	0.086	0.035	0.008
Sesgo de Estimación	-0.019	-0.002	0.004	0.002	0.001

Elaboración: *R. Plúa*

Tanto para las distribuciones como para las distribuciones continuas se comparó el método de estimación Jacknife y el método de estimación convencional para el estimador insesgado de la varianza, obteniéndose en todos los casos situaciones similares a las obtenidas con el estimador para la media poblacional, es decir las medidas descriptivas como son la media, varianza, error de estimación promedio, kurtosis, asimetría, mínimo y máximo valor obtenido de los estimadores, límite inferior y superior promedio de los intervalos de confianza al 95% para la varianza poblacional, longitud promedio de los intervalos de confianza obtenidos y sesgo de estimación; coincidían con tres dígitos de precisión, a excepción de la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95% para la varianza poblacional con tamaños muestrales pequeños resultaba ser menor en magnitud al utilizar el método de estimación Jacknife frente al método de estimación convencional, para tamaños muestrales grandes la longitud promedio de los intervalos de confianza era menor mediante el método de estimación convencional.

En el Anexo 11 presentamos dos casos, uno para distribuciones continuas y otro para distribuciones discretas, para distribuciones discretas se encuentra la población Poisson con parámetro $\lambda=2$, y para distribuciones continuas presentamos la población Exponencial con parámetro $\beta=10$.

4.4 Estimadores para distribuciones Bivariadas

4.4.1 Normal Bivariada

Las muestras aleatorias utilizadas para la obtención del estimador del coeficiente de correlación, se generaron a partir de un vector Normal Bivariado con parámetros $\begin{matrix} \mu_1 = -3 \\ \mu_2 = 2 \\ \rho = 0.7 \end{matrix}$.

Para el estimador del coeficiente de correlación, el sesgo de estimación, el error de estimación promedio y la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95%; resultaron ser mayores al utilizar el método de estimación Jacknife frente al convencional, las restantes medidas descriptivas resultaron ser muy similares en magnitud cuando el tamaño muestral aumentaba, como se muestra en la Tabla LXXII y en la Tabla LXXIII.

Al estimar el coeficiente de correlación para la población Normal Bivariada con distintos valores para los parámetros poblacionales se obtuvieron situaciones similares a la anterior.

En el Anexo 12, presentamos los histogramas de los estimadores para el coeficiente de correlación, utilizando la estimación Jacknife y la estimación convencional, para cada uno de los tamaños muestrales trabajados.

Tabla LXXII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Coeficiente de Correlación de una Población Normal Bivariada con parámetros μ_1=-3, μ_2=2 y ρ=0.7 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.633	0.705	0.706	0.703	0.698
Varianza	0.109	0.020	0.006	0.004	0.000
Asimetría	-1.795	-0.603	-0.217	-0.521	-0.173
Error de Estimación promedio	0.228	0.116	0.059	0.046	0.015
Kurtosis	6.971	2.328	2.507	3.554	2.427
Mínimo	-0.661	0.365	0.532	0.525	0.658
Máximo	0.995	0.886	0.833	0.841	0.736
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-0.346	0.319	0.535	0.589	0.650
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.963	0.894	0.822	0.790	0.741
Longitud Promedio del Int. De Conf.	1.309	0.575	0.287	0.201	0.090
Sesgo de Estimación	-0.067	0.005	0.006	0.003	-0.002

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla LXXIII

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Coeficiente de Correlación de una Población Normal Bivariada con parámetros μ_1=-3, μ_2=2 y ρ=0.7utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.400	0.692	0.702	0.701	0.698
Varianza	0.199	0.022	0.006	0.004	0.000
Asimetría	-0.529	-0.613	-0.223	-0.505	-0.172
Error de Estimación promedio	0.411	0.122	0.060	0.046	0.015
Kurtosis	2.291	2.285	2.530	3.516	2.430
Mínimo	-0.630	0.347	0.523	0.525	0.657
Máximo	0.989	0.885	0.828	0.840	0.736
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-0.713	0.266	0.525	0.584	0.650
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.975	0.886	0.820	0.789	0.740
Longitud Promedio del Int. De Conf.	1.687	0.620	0.295	0.205	0.090
Sesgo de Estimación	-0.300	-0.008	0.002	0.001	-0.002

Elaboración: *R. Plúa*

CAPÍTULO 5

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

1. Analizando el estimador de la media muestral se concluye que para las distribuciones continuas y discretas los dos métodos de estimación trabajados proporcionan las mismas medidas descriptivas con una precisión de tres dígitos como lo son: la media, la varianza, el error promedio de estimación, coeficiente de kurtosis, coeficiente de asimetría, mínimo y máximo valor observados de los estimadores, límite superior e inferior de los intervalos de confianza al 95% para la media poblacional, longitud promedio de los intervalos de confianza y sesgo de estimación, sin embargo para tamaños muestrales menores a 30 la longitud promedio de los intervalos de confianza es menor al utilizar el método de estimación Jacknife frente al método convencional de estimación para la media poblacional.

2. Al utilizar el estimador de máxima verosimilitud para la varianza tanto para distribuciones continuas como para distribuciones discretas en la

mayoría de los casos, la estimación Jacknife proporciona valores de mayor magnitud para la varianza, error de estimación promedio, longitud promedio de los intervalos de confianza al 95%, y sesgo de estimación; y a medida que aumenta el tamaño muestral todas las medidas descriptivas para la distribución de los estimadores son similares en magnitud al utilizar los dos métodos de estimación. Con la distribución discreta Poisson para $\lambda>7$, el sesgo de estimación se reduce en la mayoría de los casos mediante la estimación Jacknife frente a la estimación convencional.

3. El estimador insesgado para la varianza obtenido con los métodos de estimación trabajados proporcionan con tres dígitos de precisión las mismas medidas descriptivas para los estimadores, tanto para distribuciones discretas como para distribuciones continuas, al igual que en el caso del estimador para la media, la longitud de los intervalos de confianza para tamaños muestrales menores a 30 es menor mediante la estimación Jacknife frente a la estimación convencional.

4. El estimador insesgado de la varianza y el estimador de la media poblacional que también es insesgado para distintos valores de los parámetros poblacionales en distribuciones continuas y discretas, mediante el método de estimación Jacknife y el método de estimación convencional presentan la misma situación, es decir, proporcionan los

mismos valores para los estimadores y por tanto las mismas medidas descriptivas, a excepción de la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95% para tamaños muestrales menores a 30, que logra reducirse mediante el método de estimación Jacknife frente al método de estimación convencional.

5. Con el estimador de la mediana poblacional obtenida para distribuciones continuas como son la Beta y Uniforme y para distintos valores de los parámetros poblacionales de las mismas, podemos concluir que para tamaños muestrales impares el método de estimación Jacknife obtiene valores del estimador que no se encuentran en los dominios de las funciones de densidad respectivas. Sin embargo para tamaños muestrales pares el método de estimación Jacknife y el método de estimación convencional proporcionan las medidas descriptivas coincidentes con tres dígitos de precisión, además para tamaños muestrales menores a 30 se logra reducir la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95%. Para la distribución Normal se concluye que el método Jacknife funciona, puesto que, la función de densidad Normal está definida en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

6. Para el primer estadístico de orden para distintos valores de los parámetros poblaciones de las distribuciones Uniforme y Exponencial el método de estimación Jacknife no funciona puesto que obtiene valores

de los estimadores que no se encuentran en los dominios de las funciones de densidad. En la distribución Beta para el parámetro poblacional $v>20$ y $\omega>0$ el método de estimación Jacknife logra reducir el error promedio de estimación y el sesgo de estimación.

7. El primer estadístico de orden mediante el método de estimación Jacknife para distintos valores de los parámetros poblacionales de la distribución Hipergeométrica proporciona valores para los estimadores que no se encuentran en el dominio de la función de probabilidad. Con la distribución Poisson el método de estimación Jacknife para $\lambda>20$ funciona y además logra reducir el sesgo de estimación y el error de estimación promedio. Analizando la distribución Binomial el método de estimación Jacknife funciona para $p>0.7$ además logra reducir el sesgo de estimación y error de estimación promedio. En cuanto a la distribución Binomial Negativa el método de estimación Jacknife funciona para $r>50$ y $p<0.7$, logra reducir el sesgo de estimación, error promedio de estimación y la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95%.

8. El último estadístico de orden para la distribución uniforme y con distintos valores de los parámetros poblacionales mediante el método de estimación Jacknife en todos los casos proporciona valores que no se encuentran en el dominio de la función de densidad, para la población

Beta para los parámetros poblacionales $\omega>20$ y $v>0$, el método de estimación Jacknife funciona y las medidas descriptivas como el error promedio de estimación, sesgo de estimación y longitud promedio de los intervalos de confianza al 95% logra reducirse.

9. Analizando el último estadístico de orden para distintos valores de los parámetros poblacionales de la distribución Hipergeométrica el método de estimación Jacknife no funciona en ningún caso; con la distribución Binomial para el parámetro poblacional $p<0.4$ el sesgo de estimación, el error de estimación promedio y la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95% logra reducirse mediante la estimación Jacknife frente a la estimación convencional.

10. Para el estimador del coeficiente de correlación de un vector Normal Bivariado y para distintos valores de los parámetros poblacionales, el método de estimación convencional logró reducir la longitud promedio de los intervalos de confianza, el sesgo de estimación y el error de estimación promedio, las restantes medidas descriptivas tendían a ser similares en magnitud a medida que aumentaba el tamaño muestral mediante los dos métodos de estimación.

11. Para todos los estimadores trabajados las medidas descriptivas obtenidas eran similares en magnitud a medida que aumentaba el tamaño muestral.

5.2. Recomendaciones

1. Cuando deseamos en algún trabajo de investigación realizar inferencias acerca de la media o de la varianza poblacional de variables aleatorias continuas o discretas, y además trabajamos con estimadores insesgados para los parámetros poblacionales y tamaños muestrales mayores a 30; en estos casos resulta útil utilizar el método convencional, ya que si bien es cierto ambos métodos proporcionan los mismos resultados, el método Jacknife es un proceso intensivo o de remuestreo. Si trabajamos con tamaños muestrales menores a 30 y deseamos que la longitud del intervalo sea pequeña es mejor utilizar la estimación Jacknife.

2. Si tratamos de estimar la mediana poblacional es mejor utilizar la estimación convencional, ya que para tamaños muestrales impares el metodo Jacknife no funciona y para tamaños muestrales pares funciona pero proporciona los mismos resultados que el método de estimación convencional, recordando que el método Jacknife es un método intensivo.

3. Si tratamos de estimar el primer estadístico de orden, último estadístico de orden, varianza utilizando el estimador de máxima verosimilitud y coeficiente de correlación, es mejor utilizar el método de estimación convencional, puesto que si en algunos casos expuestos en

este trabajo se logra reducir ciertas medidas de interés como el sesgo de estimación, error de estimación promedio y longitud promedio de los intervalos de confianza, está magnitud no es considerable como para justificar un método intensivo por computador o de remuestreo, siempre y cuando trabajemos con tamaños muestrales grandes.

4. Si el investigador se enfrenta con algún caso de los estudiados en la presente investigación para los cuales el método de estimación Jacknife funciona y le es imperioso reducir algunas de las medidas descriptivas para las cuales el método Jacknife proporciona buenos resultados, es conveniente utilizar el método de estimación Jacknife, cabe recalcar que a mayor tamaño muestral el número de operaciones que realiza el algoritmo para la obtención del estimador Jacknife será mayor y por tanto el tiempo de ejecución del algoritmo también lo será.

ANEXOS

ANEXO 1

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Binomial

El número de aciertos en n ensayos independientes de Bernoulli, en los que la probabilidad de acierto en cada ensayo es p, un ensayo de Bernoulli es aquel en el que hay dos resultados posibles, llamados acierto y fallo, siguen una distribución Binomial.
Función de probabilidad:

$$p(x) = \left\{ \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0,1.2,....,n \right.$$

Párametros

$$n = 1,2,.........$$

$$0 \le p \le 1$$

Función generadora de momentos, característica y momentos.

$$m(t) = E(e^{tx})$$

$$m(t) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} e^{tx} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x}$$

$$m(t) = (pe^t + (1-p))^n$$

$$\Psi(t) = (pe^{it} + (1-p))^n$$

$$\mu = E(x) = \frac{\partial m(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = n(pe^t + (1-p))^{n-1} pe^t \Big|_{t=0}$$

$$\mu_1' = E(x) = np$$

$$\mu_2' = E(x^2) = \frac{\partial^2 m(t)}{\partial t^2}_{t=0} \Big|_{t=0} = npe^t (pe^t + (1-p))^{n-1} +$$

$$+ (n-1)(pe^t + (1-p))^{n-2} pe^t npe^t \Big|_{t=0} =$$

$$\mu_2' = E(x^2) = np + n^2 p^2 - np^2$$

$$\mu_2 = \sigma_x^2 = E(x^2) - E^2(x) = np + n^2 p^2 - np^2 - n^2 p^2$$

$$\mu_2 = \sigma_x^2 = np(1-p)$$

$$\mu_3' = E(x^3) = \frac{\partial^3 m(t)}{\partial t^3}\Big|_{t=0} = [n(n-1)(n-2)(pe^t + (1-p))^{n-3} pe^t (pe^t)^2 +$$

$$+ 2n(n-1)(pe^t)^2 (pe^t + (1-p))^{n-2} \;] +$$

$$+ \left[npe^t (pe^t + (1-p))^{n-1} + n(n-1)(pe^t)^2 (pe^t + (1-p))^{n-2}\right] \Big|_{t=0} =$$

$$\mu_3' = E(x^3) = np((n-1)(n-2)p^2 + 3(n-1)p + 1)$$

Utilizando las relaciones de los momentos poblacionales tenemos:

$$\mu_3 = np\left[(n-1)(n-2)p^2 + 3p(n-1)+1\right] - 3np((np)^2 + np - np^2) +$$
$$+2(np)^3 = np(2p^2 - 3p + 1) = np(1-p)(1-2p)$$

Sesgo de simetría:

$$\text{Sesgo} = \frac{np(1-p)(1-2p)}{(np(1-p))^{1/2}}$$

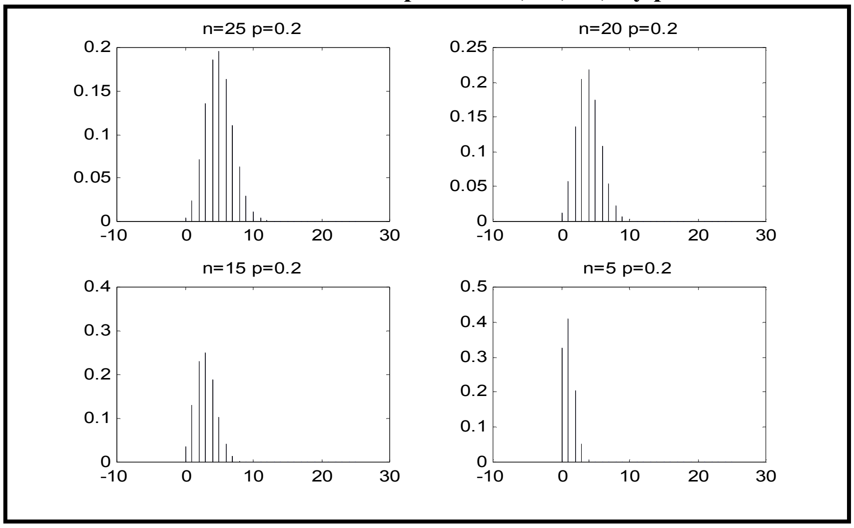
Para que el sesgo sea mayor a cero, es decir la distribución esté sesgada a la derecha, el parámetro p, debe tomar valores menores a 0.5.

Como podemos observar en el gráfico 1, en el gráfico 2 y en el gráfico 3; para los distintos tamaños de n y p=0.2 la distribución presenta una cola más larga a la derecha es decir está sesgada hacia la derecha, su coeficiente de sesgo es positivo. Para los diferentes tamaños de n y p=0.5 la distribución es simétrica no está sesgada ni a la derecha ni a la izquierda, su coeficiente de sesgo es cero. Podemos observar la función de probabilidad para los distintos tamaños de n y el valor de p=0.8, aquí observamos que la distribución tiene una cola hacia la izquierda, es decir está sesgada hacia la izquierda, su coeficiente de sesgo es negativo.

Gráfico 1

Estimación por el Método Jacknife

Distribución Binomial para n=25, 20, 15, 5 y p=0.2

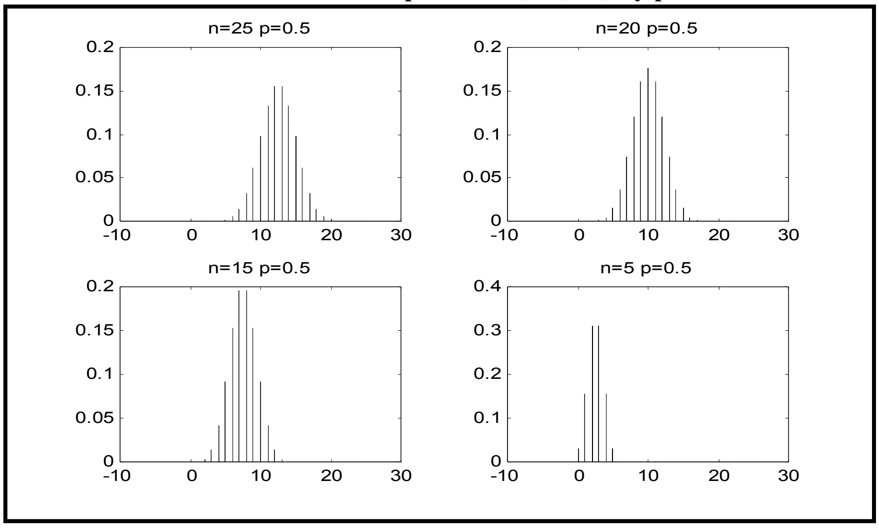


Elaboración: *R. Plúa*

Gráfico 2

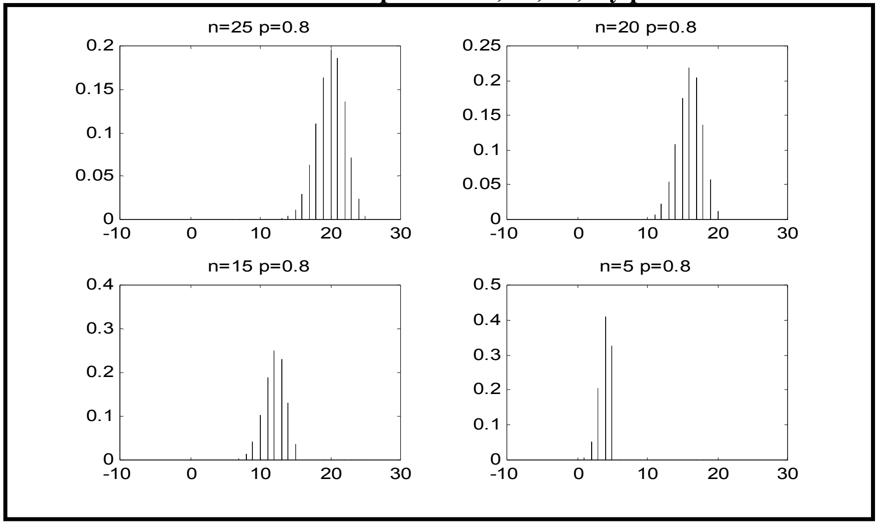
Estimación por el Método Jacknife

Distribución Binomial para n=25, 20, 15, 5 y p=0.5



Elaboración: *R. Plúa*

Gráfico 3
Estimación por el Método Jacknife
Distribución Binomial para n=25, 20, 15, 5 y p=0.8



Elaboración: *R. Plúa*

Poisson

El número de veces que se presenta un suceso de un tipo especificado en un período de tiempo de longitud 1 cuando los sucesos de este tipo se presenten de manera aleatoria con una frecuencia media λ por unidad de tiempo, sigue una distribución de Poisson.
Función de probabilidad:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0,1.2,....$$

Parámetros:
λ>0
Función generadora de momentos y función característica:

$$m(t) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x e^{xt}}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$\Psi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$\mu = E(x) = \frac{\partial m(t)}{\partial t_{t=0}} = e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t\Big|_{t=0}$$

$$E(x) = \lambda$$

$$E(x^2) = \frac{\partial^2 m(t)}{\partial t^2{}_{t=0}} = \lambda e^{\lambda(e^t-1)+t}(\lambda e^t + 1)\Big|_{t=0}$$

$$E(x^2) = \lambda^2 + \lambda$$

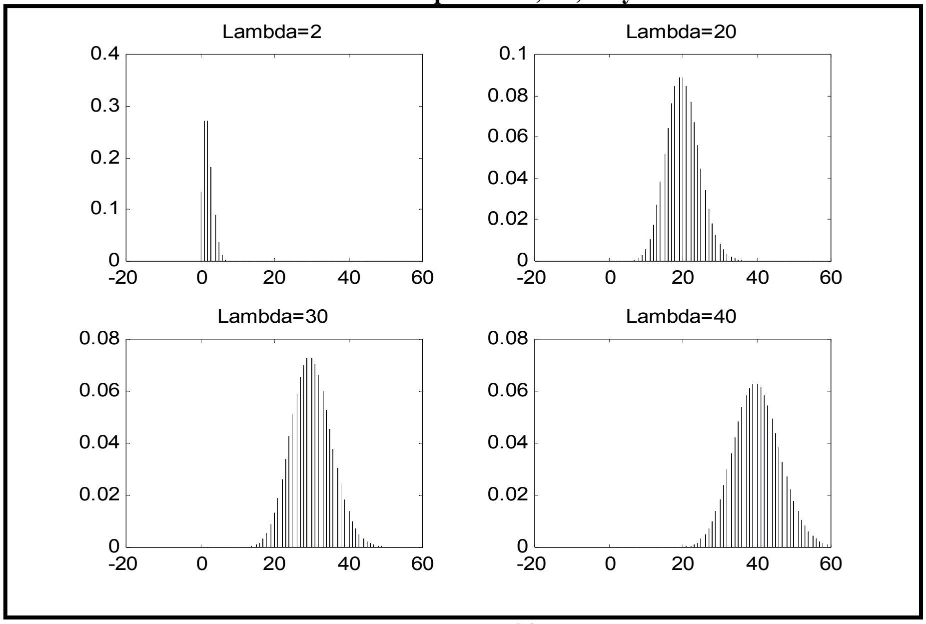
$$\sigma_x^2 = E(x^2) - E^2(x) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$\sigma_x^2 = \lambda$$

Gráfico 4

Estimación por el Método Jacknife

Distribución Poisson para λ=2, 20, 30 y 40



Elaboración: *R. Plúa*

Binomial negativa

El número de fallos que aparecen en una sucesión de ensayos independientes de Bernoulli con probabilidad p de acierto en cada ensayo, antes del acierto r-ésimo, siguen una distribución binomial negativa.

Cuando el r-ésimo acierto toma el valor de uno se denomina función de probabilidad Geométrica.

Función de probabilidad:

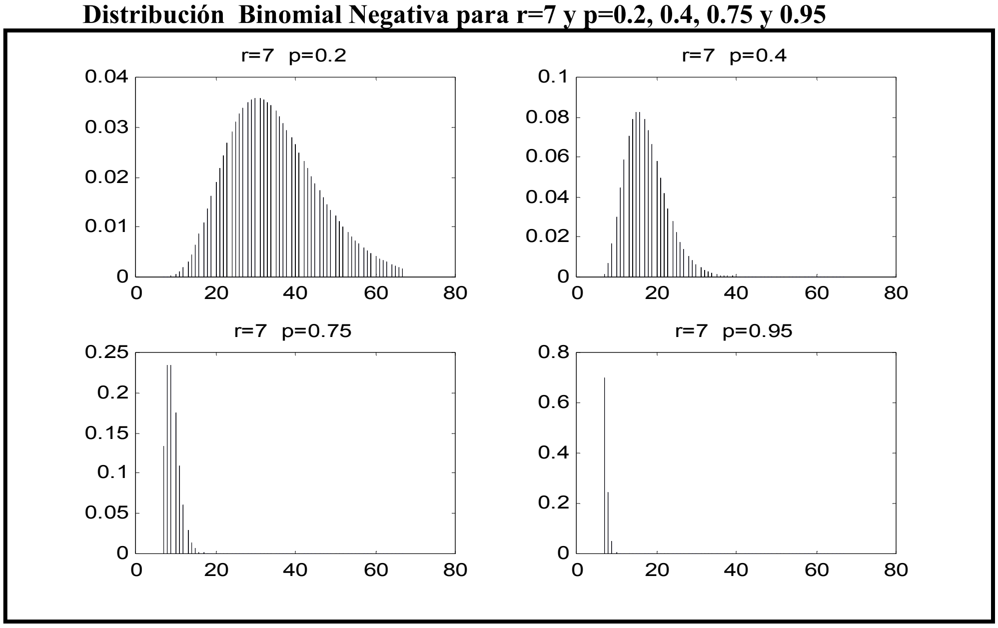
$$p(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, x = r, r+1, \ldots$$

Parámetros: 0≤p≤1 y r>0

Gráfico 5

Estimación por el Método Jacknife

Distribución Binomial Negativa para r=7 y p=0.2, 0.4, 0.75 y 0.95

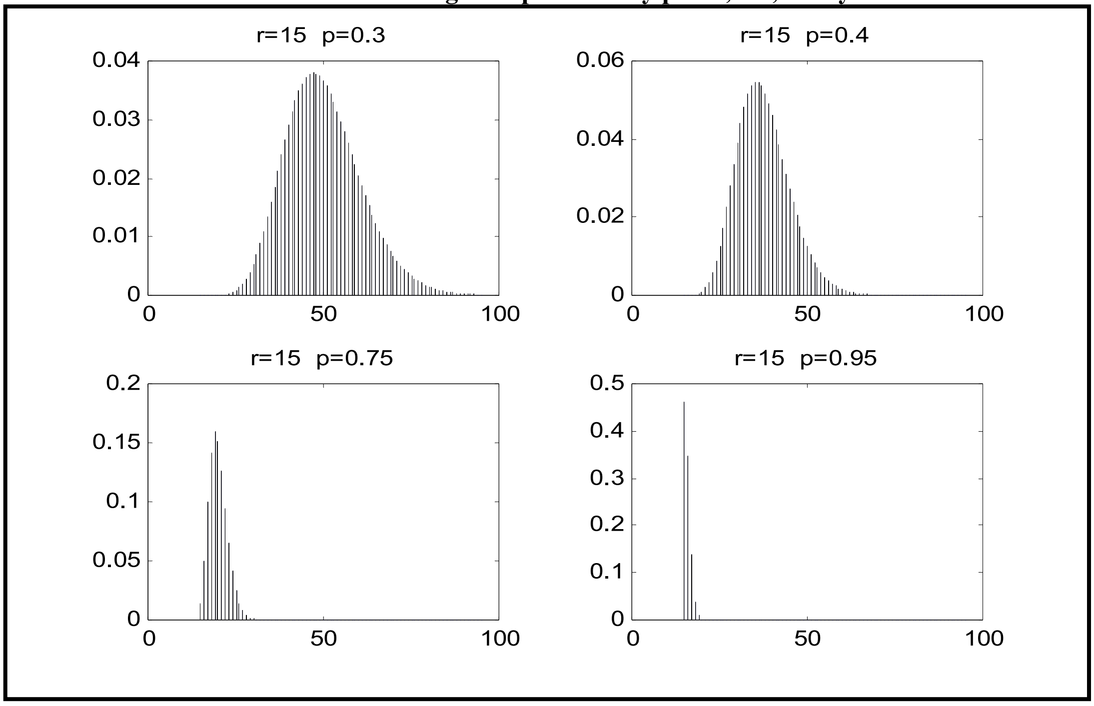


Elaboración: *R. Plúa*

Gráfico 6

Estimación por el Método Jacknife

Distribución Binomial Negativa para r=15 y p=0.2, 0.4, 0.75 y 0.95



Elaboración: *R. Plúa*

Función generadora de momentos y función característica:

$$m(t) = \sum_{x=r}^{\infty} e^{tx} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} = e^{tr} \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \Big|_{t=0}$$

$$m(t) = \left(\frac{pe^t}{(1-(1-p)e^t)}\right)^r$$

$$\Psi(t) = \left(\frac{pe^{it}}{(1-(1-p)e^{it})}\right)^r$$

$$\mu = E(x)$$

$$E(x) = \frac{\partial m(t)}{\partial t_{t=0}} = (r)\left(\frac{pe^t}{(1-(1-p)e^t)}\right)^{r-1} \frac{[pe^t(1-(1-p)e^t) + pe^t(1-p)e^t]}{(1-(1-p)e^t)^2} \Big|_{t=0}$$

$$E(x) = rp^r \frac{e^{rt}}{(1-(1-p)e^t)^{r+1}} = \frac{r}{p}$$

$$E(x^2) = \frac{\partial^2 m(t)}{\partial t^2{}_{t=0}} = rp^r (re^{rt}(1-(1-p)e^t)^{r+1} + (r+1)(1-(1-p)e^t)^r (1-p)e^t e^{rt} \Big|_{t=0}$$

$$E(x^2) = \frac{rp^r(rp^{r+1} + rp^r + p^r - rp^{r+1} - p^{r+1})}{\left(p^{r+1}\right)^2} = \frac{r(r+1-p)}{p^2}$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - E^2(x) = \frac{r(r+1-p)}{p^2} - \frac{r^2}{p^2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Hipergeométrica

Se tiene una población que contiene un número finito de elementos N, cada uno de los cuales tiene una de dos características definidas sobre ellos. De esta manera k elementos podrían tener la característica de interés y N-k no la tendrían. El número de elementos con la característica de interés en la muestra de tamaño n, sigue una distribución hipergeométrica.
Función de probabilidad:

$$p(x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, x=0,1,2,..,$$

Parámetros:
K el número de elementos con característica de interés, N el número total de elementos y n el tamaño de la muestra.

$$E(x)=\sum_{x=0}^{n}x\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}=k\sum_{x=1}^{n}\frac{(k-1)!}{(x-1)!(k-x)!}\frac{\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(x)=k\sum_{x=1}^{n}\frac{\binom{k-1}{x-1}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$y=x-1$$

$$E(x)=k\sum_{y=0}^{n-1}\frac{\binom{k-1}{y}\binom{N-k}{n-1-y}}{\binom{N}{n}}$$

Si se expresa :

$$\binom{N-k}{n-1-y}=\binom{(N-1)-(k-1)}{n-1-y}$$

$$\binom{N}{n}=\frac{N!}{n!(N-n)!}=\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}$$

$$E(x)=\frac{nk}{N}\sum_{y=0}^{n-1}\frac{\binom{k-1}{y}\binom{(N-1)-(k-1)}{n-1-y}}{\binom{N-1}{n-1}}=\frac{nk}{N}$$

Si $E[(x(x-1)]=\dfrac{k(k-1)n(n-1)}{N(N-1)}$

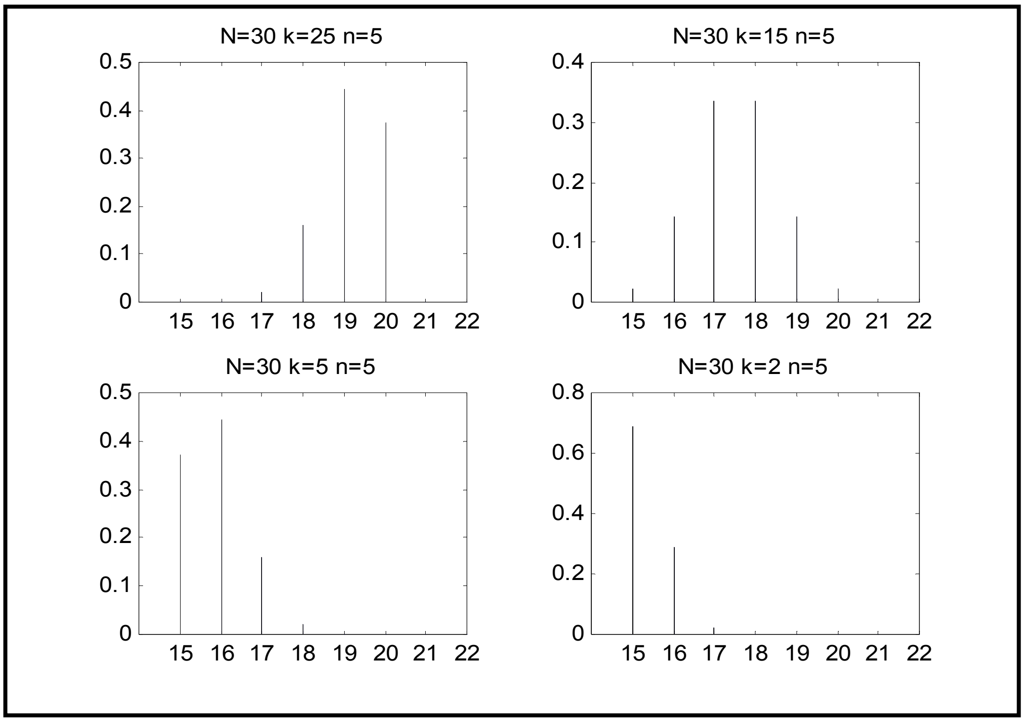
$$\sigma^2 = E(x^2) - E^2(x)$$

$$\sigma^2 = E[x(x-1)] + E(x) - E^2(x)$$

$$\sigma^2 = \frac{k(k-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{nk}{N} - \frac{n^2k^2}{N^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)} = \frac{(N-n)}{(N-1)}\, n\, \frac{k}{N}\,(1-\frac{k}{N})$$

Gráfico 7
Estimación por el Método Jacknife
Distribución Hipergeométrica para N=30, n=5 y k=25, 15, 5 y 2



Elaboración: *R. Plúa*

ANEXO 2

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

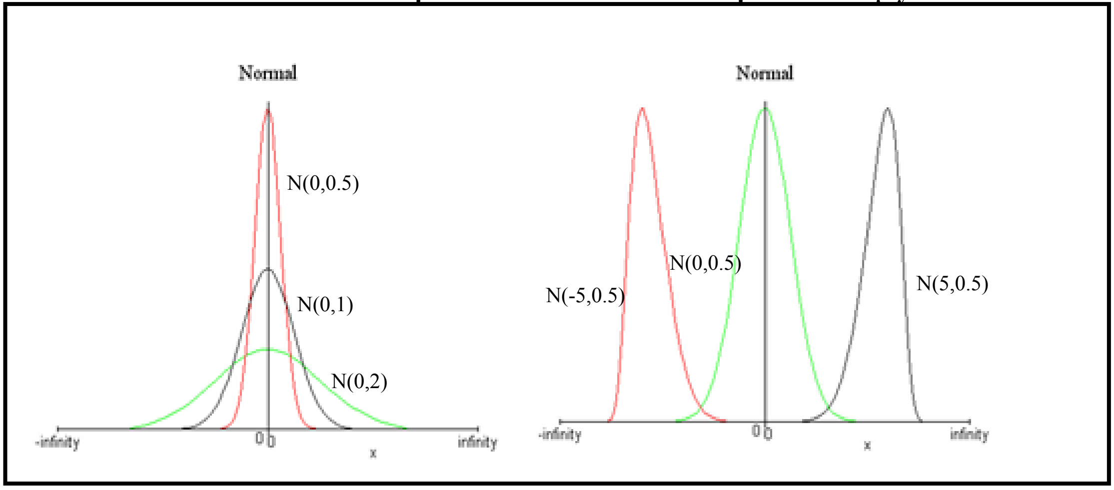
Normal

Función de densidad

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}},-\infty<x<\infty$$

Parámetros:
μ=media, σ^2=Varianza

Gráfico 8
Estimación por el Método Jacknife
Distribución Normal para distintos valores de los parámetros μ y σ



Elaboración: *R. Plúa*

Función generadora de momentos, característica y momentos.

$$m(t)=e^{(ut+\frac{t^2\sigma^2}{2})}$$

$$\Psi(t)=e^{(uit+\frac{it^2\sigma^2}{2})}$$

$$\mu_1'=E(x)=\left.\frac{\partial m(t)}{\partial t}\right|_{t=0}=e^{(ut+\frac{t^2\sigma^2}{2})}(\mu+\sigma^2t)\ \Big|_{t=0}=\mu$$

$$\mu_2'=E(x^2)=\left.\frac{\partial^2 m(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0}=\mu e^{(ut+\frac{t^2\sigma^2}{2})}(\mu+\sigma^2t)+$$

$$+\sigma^2\left[e^{(ut+\frac{t^2\sigma^2}{2})}+te^{(ut+\frac{t^2\sigma^2}{2})}(\mu+\sigma^2t)\right]\Big|_{t=0}=(\mu^2+\sigma^2)$$

$$\mu_3'=E(x^3)=\left.\frac{\partial^3 m(t)}{\partial t^3}\right|_{t=0}=e^{(ut+\frac{t^2\sigma^2}{2})}(\mu+\sigma^2t)(\mu^2+2\sigma^2\mu t+\sigma^2+\sigma^4t^2)+$$

$$+(2\sigma^2\mu+2\sigma^2t)e^{(ut+\frac{t^2\sigma^2}{2})}=\mu^2+3\sigma^2\mu$$

$$\mu_2=E((x-\mu)^2)=(\mu^2+\sigma^2)-\mu^2=\sigma^2$$

Utilizando las relaciones de los momentos poblacionales tenemos:

$$\mu_3 = \mu^3 + 3\sigma^2\mu - 3\mu\left(\mu^2 + \sigma^2\right) + 2\mu^3 = 0$$

El coeficiente del sesgo de simetría está dado por:

$$\text{Sesgo} = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = \frac{0}{(\sigma^2)^{3/2}} = 0$$

Por tanto la distribución normal es simétrica, como se puede observar en el gráfico 8.

Uniforme

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}, \alpha \le x \le \beta$$

Parámetros:
β límite superior
α límite inferior
Función generadora de momentos y función característica

$$m(t) = \frac{e^{t\beta} - e^{t\alpha}}{t(\beta - \alpha)}$$

$$\Psi(t) = \frac{e^{it\beta} - e^{it\alpha}}{it(\beta - \alpha)}$$

$$\mu = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

$$\tilde{X} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Beta

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\nu + \omega)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\omega)} x^{\nu-1}(1-x)^{\omega-1}, 0 \le x \le 1$$

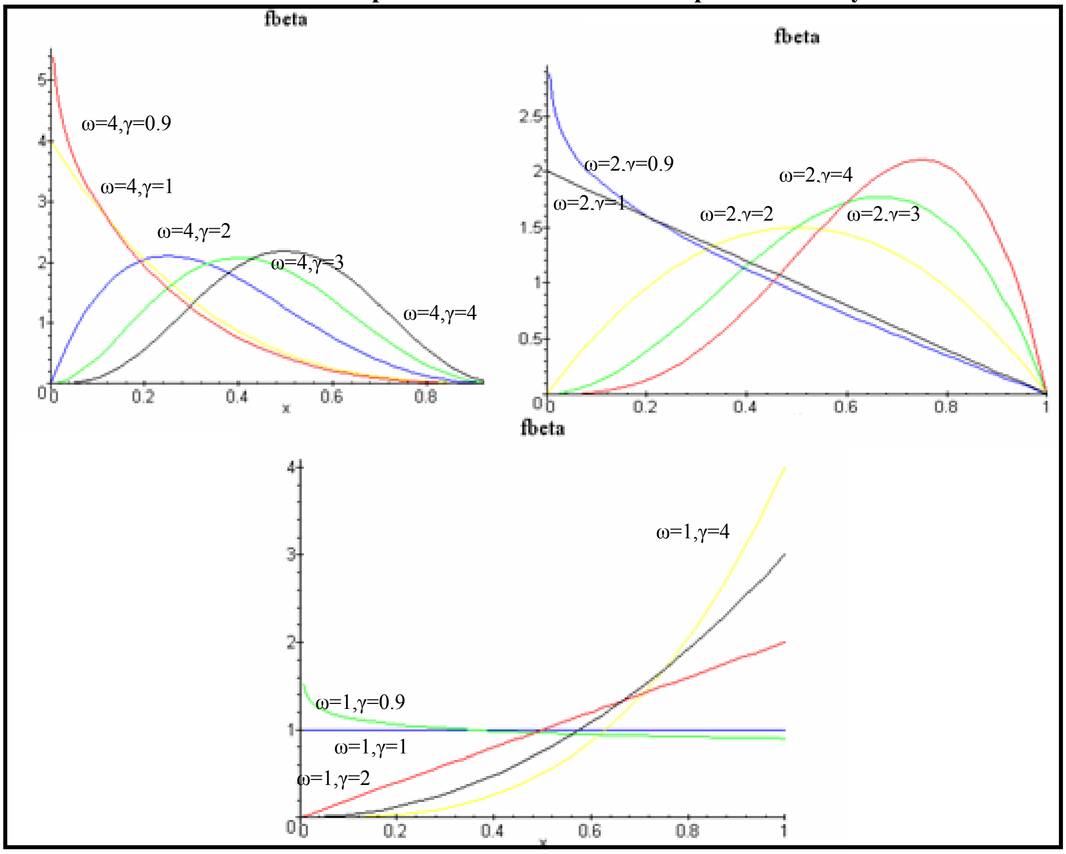
Parámetros:
ν, ω > 0

$$\mu = \frac{\nu}{\nu + \omega}$$

$$\sigma^2 = \frac{\nu\omega}{\left[(\nu + \omega)^2(\nu + \omega + 1)\right]}$$

$$Moda = \frac{\nu - 1}{\nu + \omega - 2}, \nu > 1 \text{ y } \omega > 2$$

Gráfico 9
Estimación por el Método Jacknife
Distribución Beta para distintos valores de los parámetros ν y ω



Elaboración: *R. Plúa*

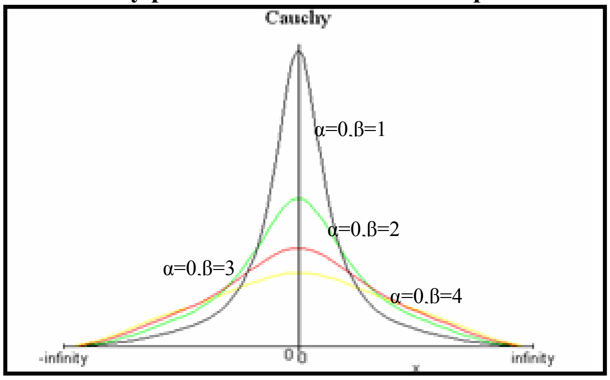
Cauchy

Función de densidad: $f(x) = \left\{ \pi\beta\left[1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right]\right\}^{-1}, -\infty < x < \infty$

Parámetros: α, β >0 Función característica: $\Psi(t) = e^{\{iat-|t|b\}}$

Moda: α $\tilde{x} = \alpha$

Gráfico 10
Estimación por el Método Jacknife
Distribución Cauchy para distintos valores de los parámetros β y α



Elaboración: *R. Plúa*

Fisher

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(\nu+\omega)\right]\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\nu-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[1+\frac{\nu}{\omega}x\right]^{\frac{\nu+\omega}{2}}}, x \geq 0$$

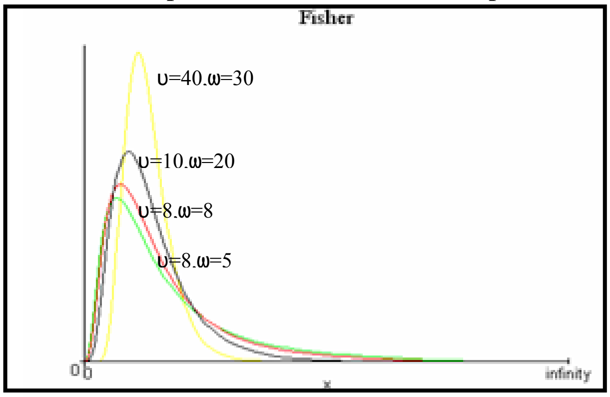
Parámetros:
ν, ω > 0

$$\mu = \frac{\omega}{\omega-2}, \omega > 2$$

$$\sigma^2 = \frac{2\omega^2(\nu+\omega-2)}{\nu(\omega-2)^2(\omega-4)}, \omega > 4$$

$$\text{Moda} = \frac{\omega(\nu-2)}{(\omega+2)\nu}, \nu > 2$$

Gráfico 11
Estimación por el Método Jacknife
Distribución Fisher para distintos valores de los parámetros ν y ω



Elaboración: *R. Plúa*

Gamma

Función de densidad:

$$f(x) = \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \frac{e^{\frac{-x}{\beta}}}{\beta\Gamma(\alpha)}, x \geq 0$$

Parámetros:
B, α>0
Función generadora de momentos:

$$m(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}, t < \frac{1}{\beta}$$

Función característica:

$$\Psi(t) = (1-i\beta t)^{-\alpha}$$

$$\mu = \alpha\beta$$

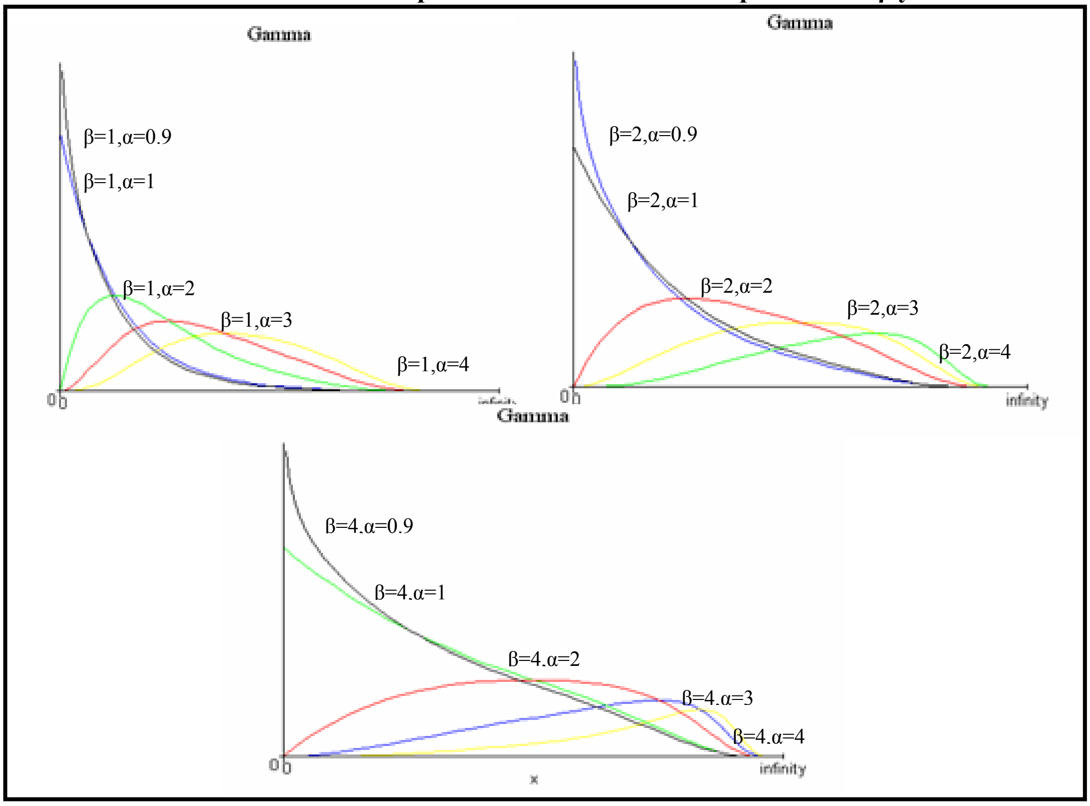
$$\sigma^2 = \alpha\beta^2$$

$$\text{Moda}: \ \beta(\alpha - 1), \alpha \geq 1$$

Gráfico 12

Estimación por el Método Jacknife

Distribución Gamma para distintos valores de los parámetros β y α



Elaboración: *R. Plúa*

Laplace

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}}, -\infty < x < \infty$$

Parámetros:
β>0, -∞<α<∞
Función generadora de momentos:

$$m(t) = \frac{e^{\alpha t}}{1-\beta^2 t^2}, |t| < \beta^{-1}$$

Función característica:

$$\Psi(t) = \frac{e^{\alpha i t}}{1+\beta^2 t^2}$$

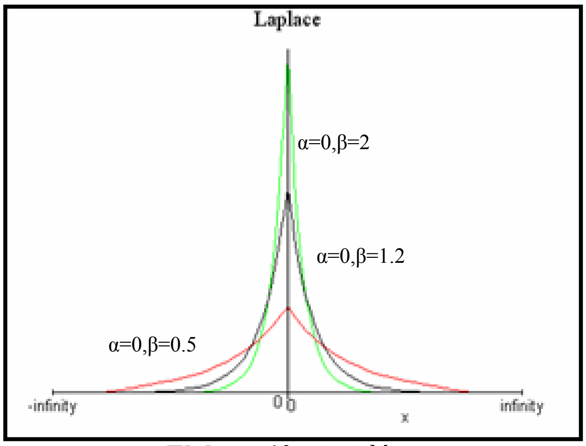
$$\mu = \alpha$$

$$\sigma^2 = 2\beta^2$$

$$\tilde{X} = \alpha$$

$$\text{Moda} = \alpha$$

Gráfico 13
Estimación por el Método Jacknife
Distribución Laplace para distintos valores de los parámetros β y α



Elaboración: *R. Plúa*

Lognormal

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-(\log(x/m))^2}{2\sigma^2}}, x \geq 0$$

Parámetros:
m>0 Y m=e^{μ}

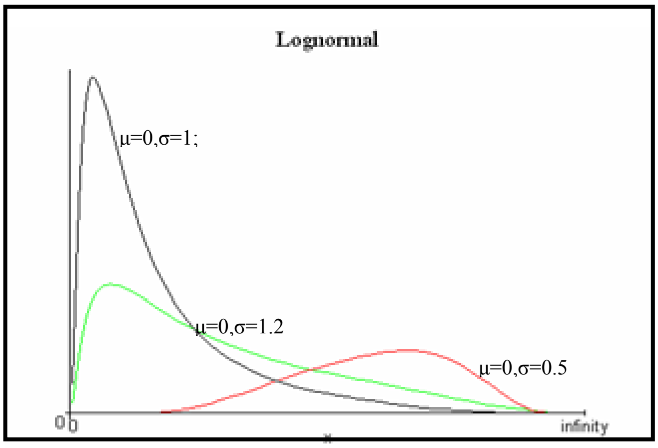
$$\mu = me^{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$\sigma^2 = m^2\omega(\omega - 1), \varpi = e^{\sigma^2}$$

$$Moda = \frac{m}{\omega}, \omega = e^{\sigma^2}$$

$$\tilde{X} = m$$

Gráfico 14
Estimación por el Método Jacknife
Distribución Lognormal para distintos valores de los parámetros μ y σ



Elaboración: *R. Plúa*

Rayleigh

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{x}{\beta^2} e^{\frac{-x^2}{2\beta^2}}, x > 0, \beta > 0$$

$$\mu = \beta\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma^2 = (2 - \frac{\pi}{2})\beta^2$$

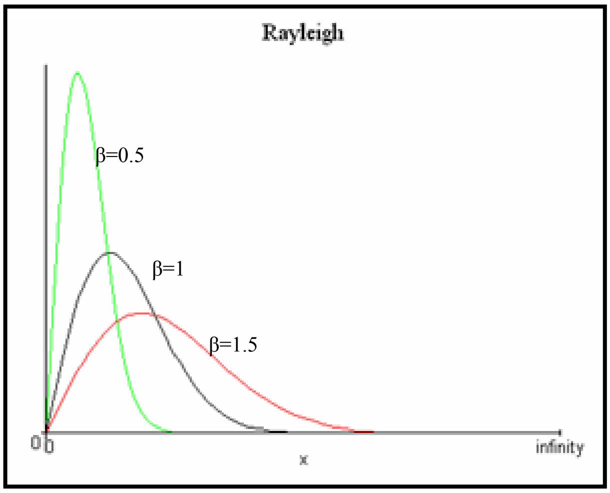
$$\tilde{X} = \beta(\log 4)^{\frac{1}{2}}$$

$$Moda = \beta$$

Gráfico 15

Estimación por el Método Jacknife

Distribución Rayleigh para distintos valores del parámetro β



Elaboración: *R. Plúa*

Student's t

Función de densidad:

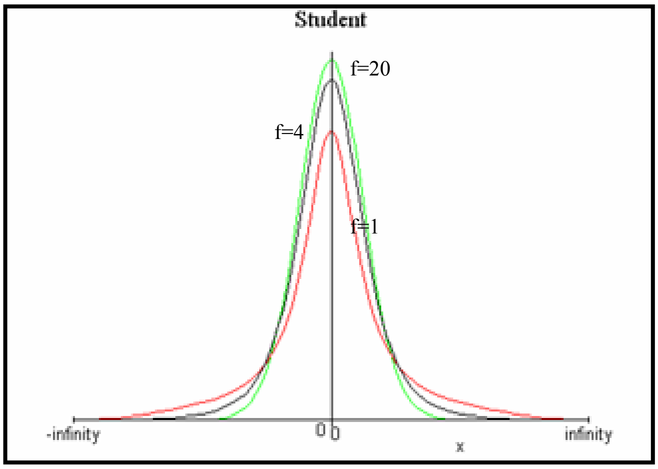
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(f+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}f\right)\sqrt{\pi f}}\left(1 + \frac{x^2}{f}\right)^{\frac{-1}{2}(f+1)}, -\infty < x < \infty$$

Parámetros:
f>0 grados de libertad.

$$\mu = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{f}{f-2}, f > 2$$

Gráfico 16
Estimación por el Método Jacknife
Distribución Student´s t para distintos valores del parámetro f



Elaboración: *R. Plúa*

Weibull

Función de densidad: $f(x) = \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}} e^{\left[\left(\frac{-x}{\beta}\right)\right]^{c}}, x \geq 0$

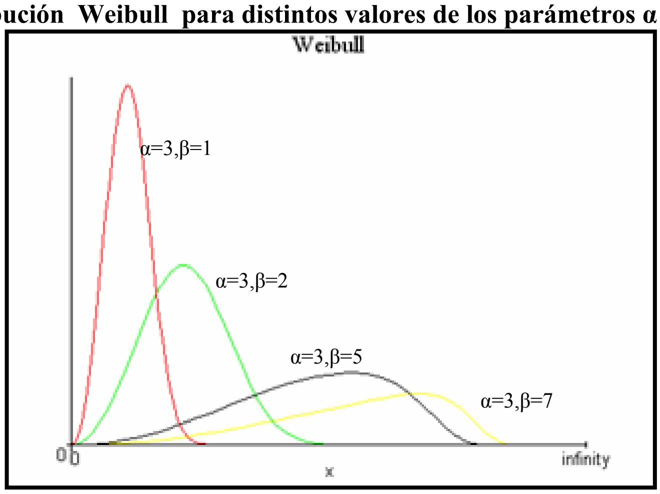
$$\mu = \beta\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)$$

$$\sigma^2 = \beta^2\left[\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\right)^2\right]$$

$$Moda = \begin{cases} \beta(1-\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha \geq 1 \\ 0, \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\tilde{X} = \beta(\log(2))^{\frac{1}{2}}$$

Gráfico 17
Estimación por el Método Jacknife
Distribución Weibull para distintos valores de los parámetros α y β



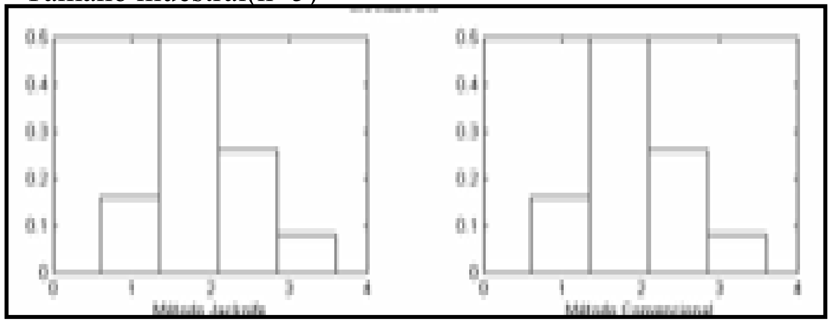
Elaboración: *R. Plúa*

ANEXO 3

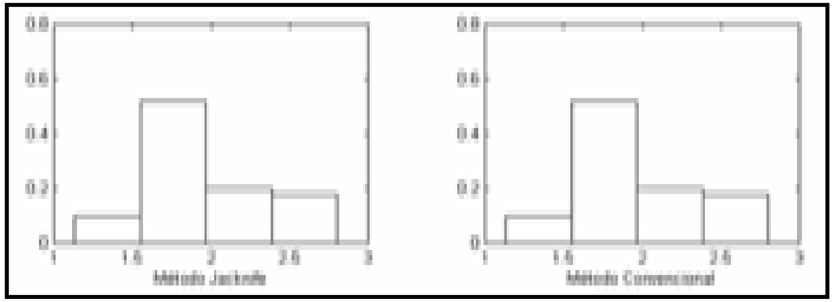
Histogramas Para los Estimadores de la Distribución Poisson con Parámetro λ=2; utilizando la Estimación Jacknife y la Estimación Convencional.

MEDIA MUESTRAL

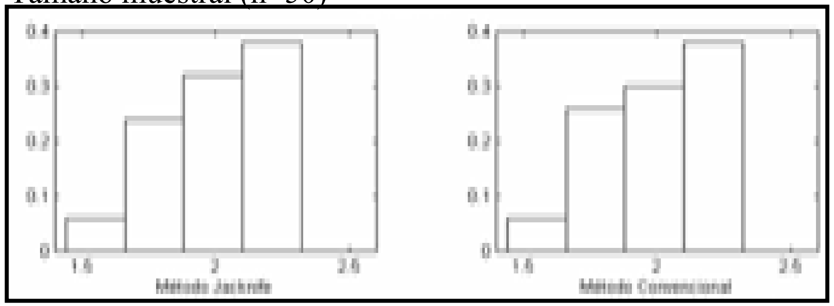
Tamaño muestral(n=5)



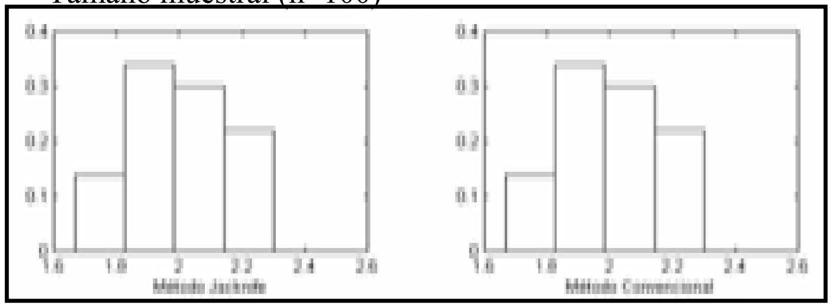
Tamaño muestral (n=15)



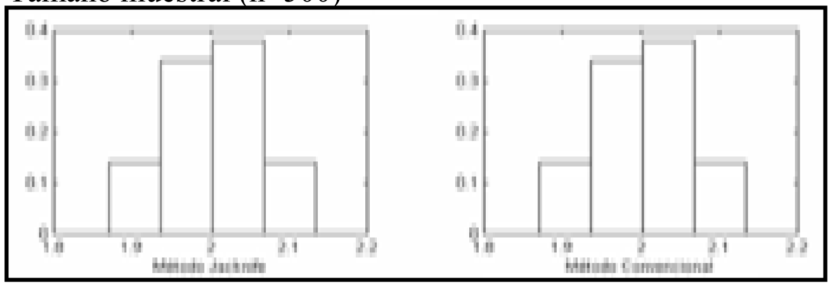
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

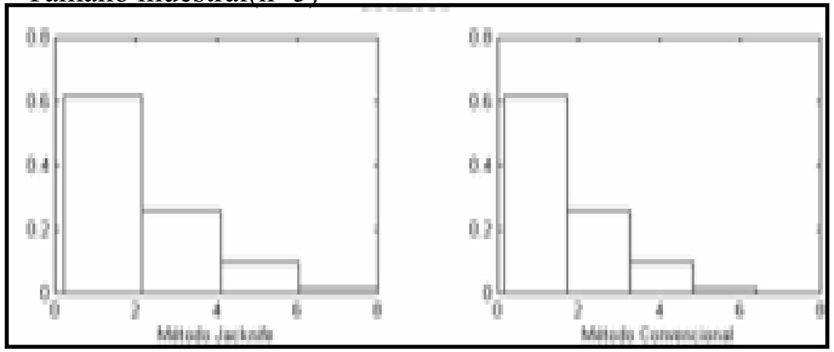


Tamaño muestral (n=500)

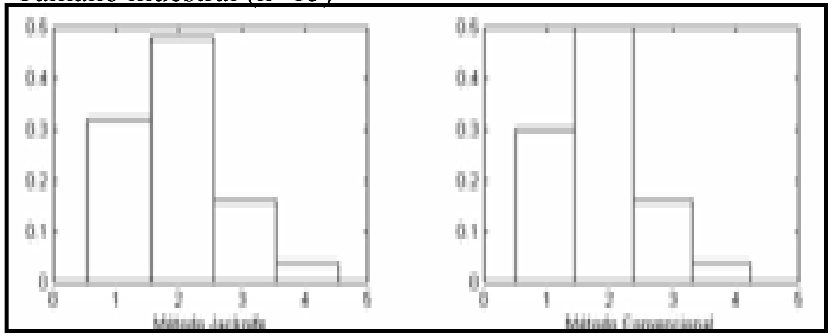


VARIANZA MUESTRAL

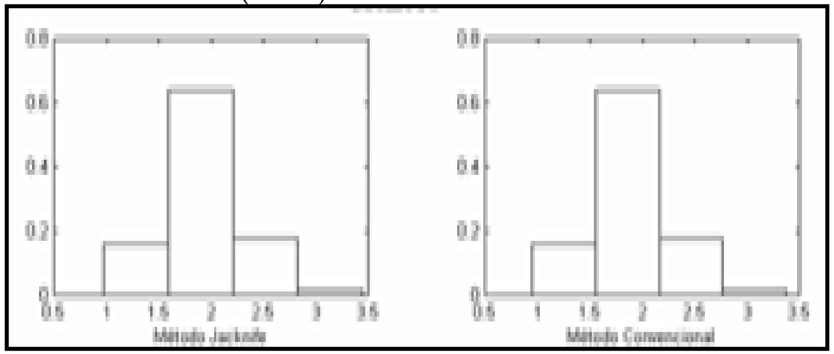
Tamaño muestral(n=5)



Tamaño muestral (n=15)

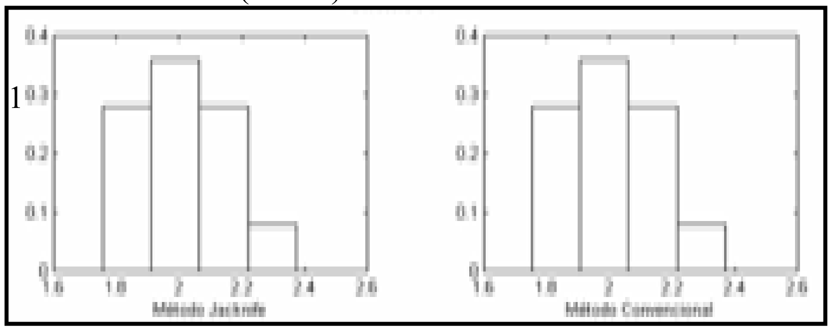


Tamaño muestral (n=50)



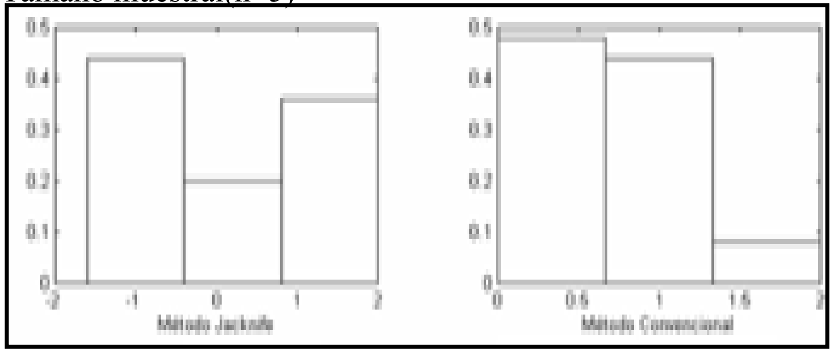
Tamaño muestral (n=100)

Tamaño muestral (n=500)

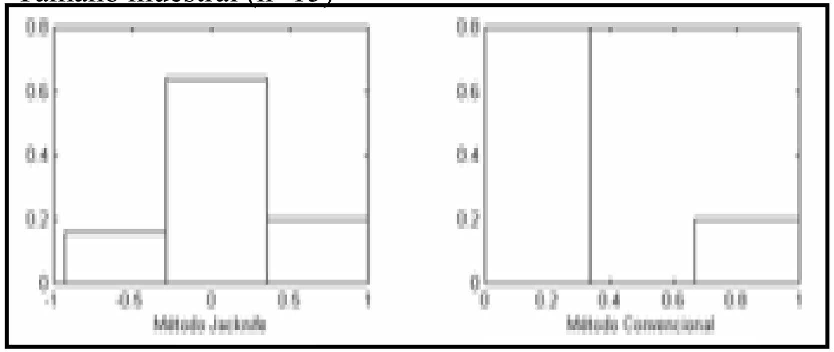


PRIMER ESTADÍSTICO DE ORDEN

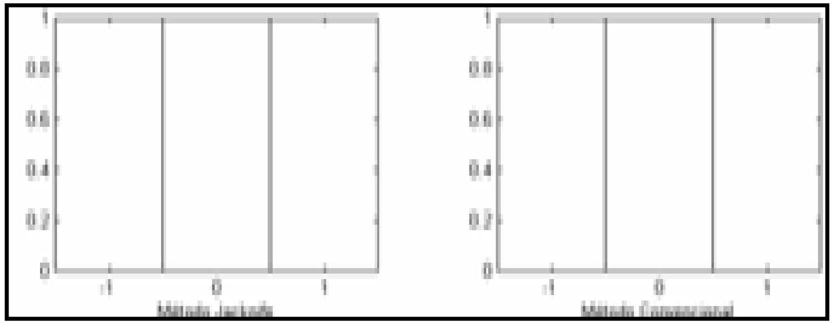
Tamaño muestral(n=5)



Tamaño muestral (n=15)



Tamaño muestral (n=50)

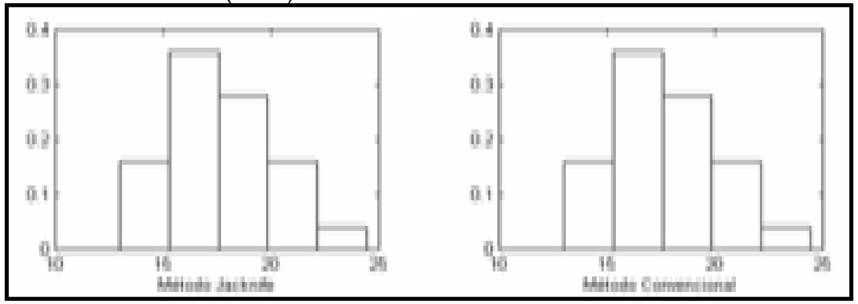


ANEXO 4

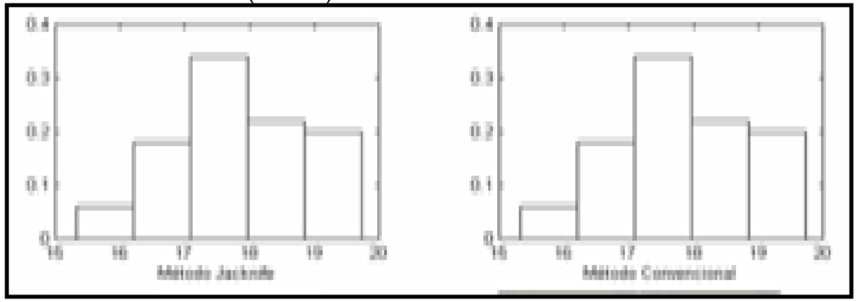
Histogramas Para los Estimadores de la Distribución Binomial Negativa con Parámetros r=7 y p=0.4, utilizando la Estimación Jacknife y la Estimación Convencional.

MEDIA MUESTRAL

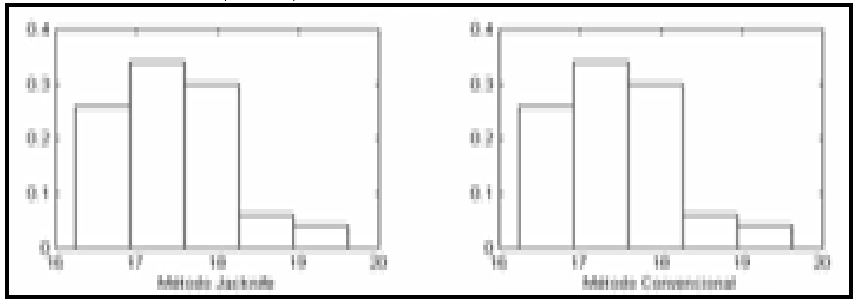
Tamaño muestral(n=5)



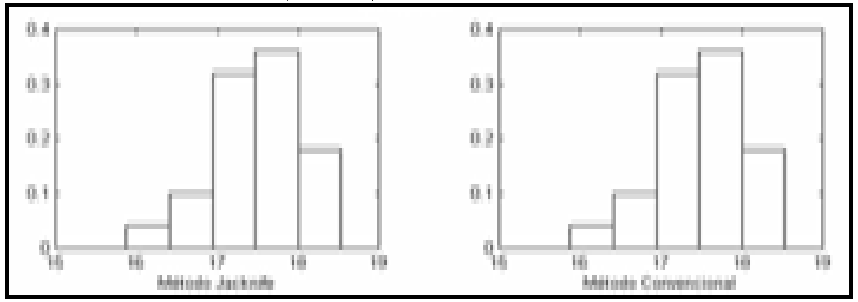
Tamaño muestral (n=15)



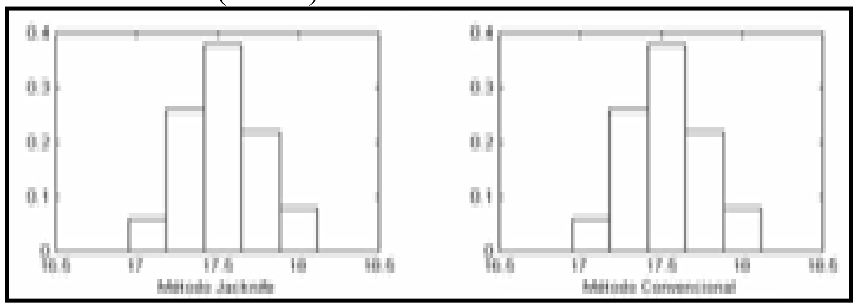
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

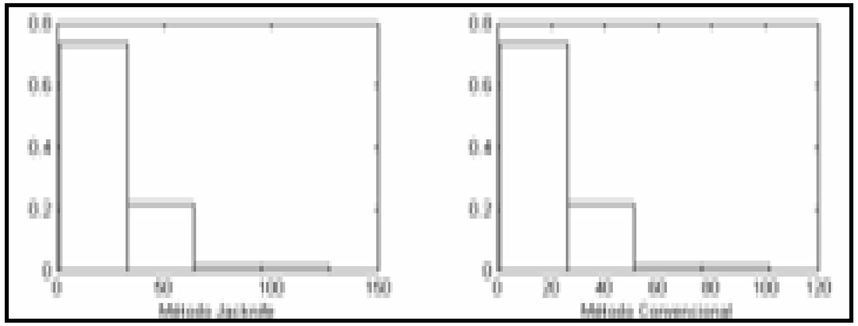


Tamaño muestral (n=500)

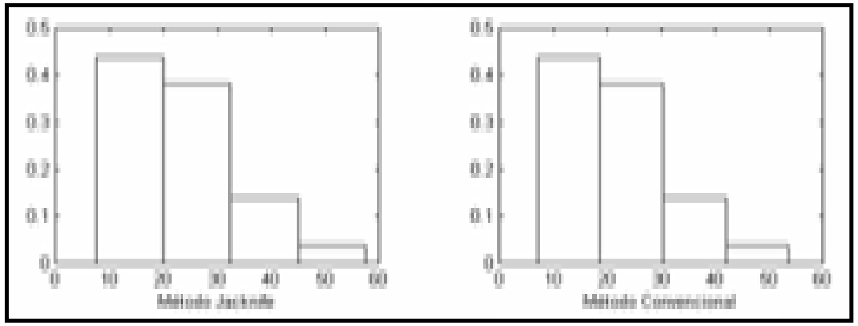


VARIANZA MUESTRAL

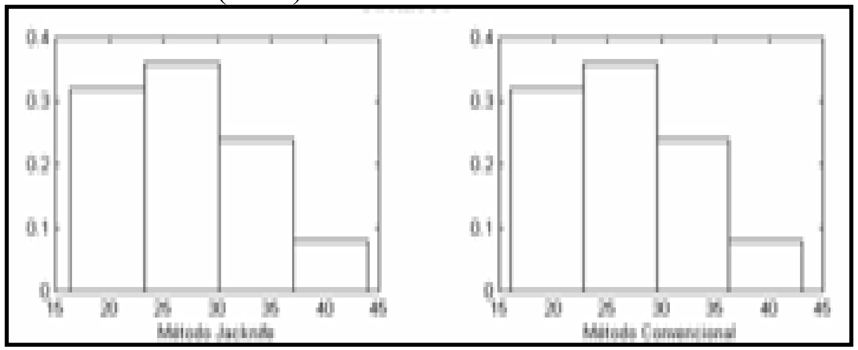
Tamaño muestral(n=5)



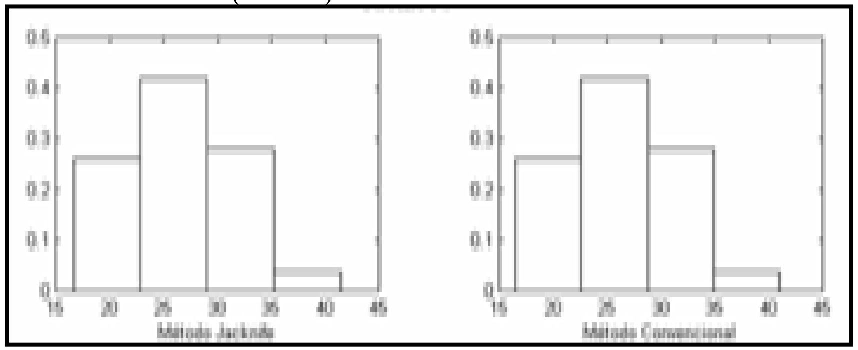
Tamaño muestral (n=15)



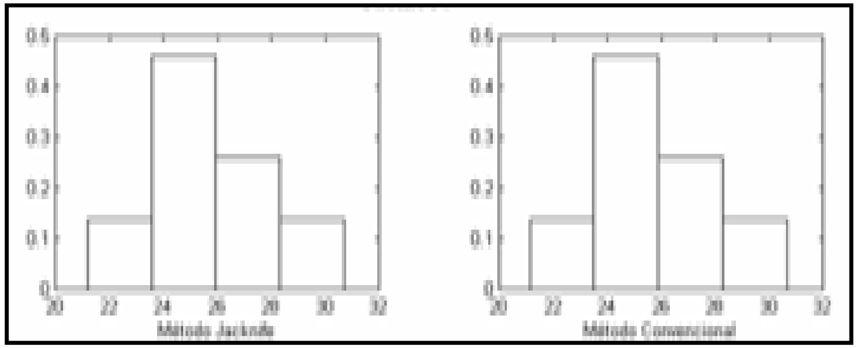
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

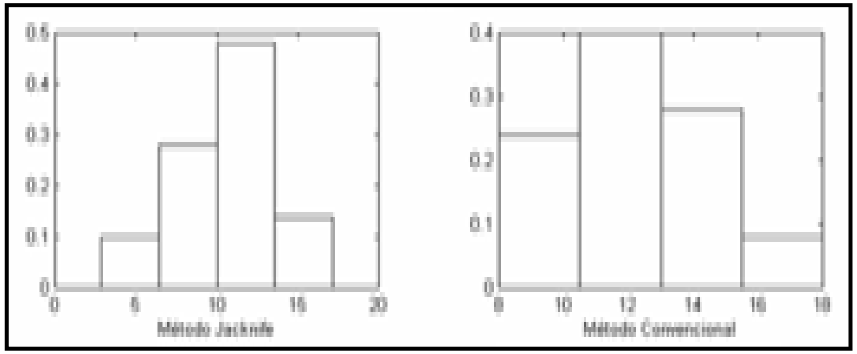


Tamaño muestral (n=500)

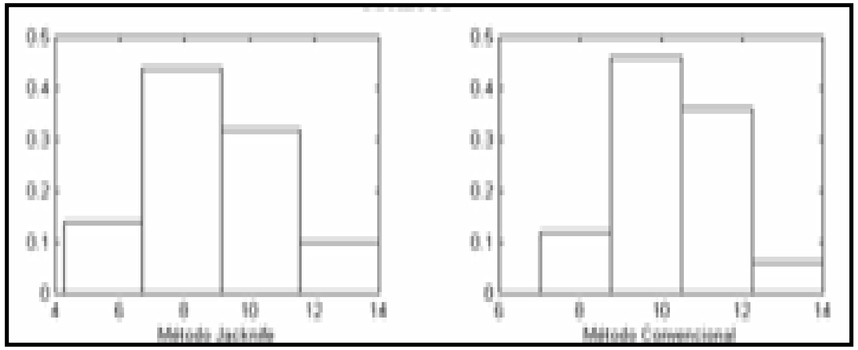


PRIMER ESTADÍSTICO DE ORDEN

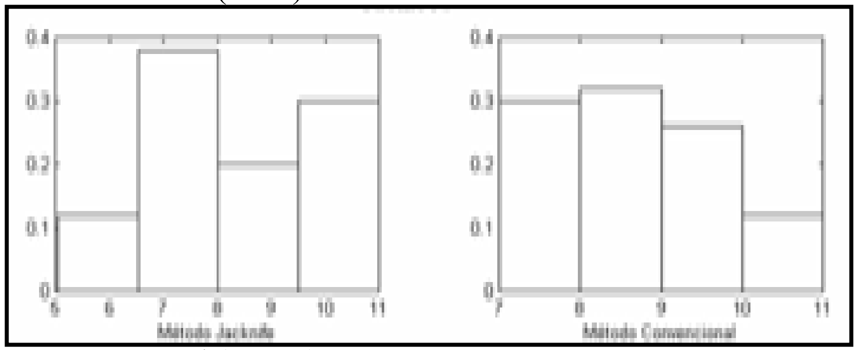
Tamaño muestral(n=5)



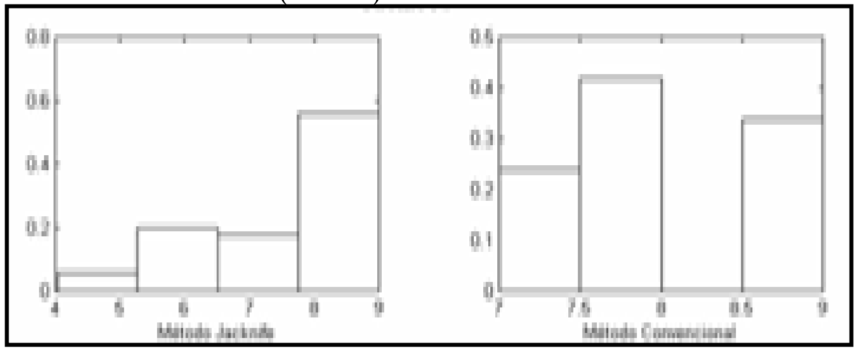
Tamaño muestral (n=15)



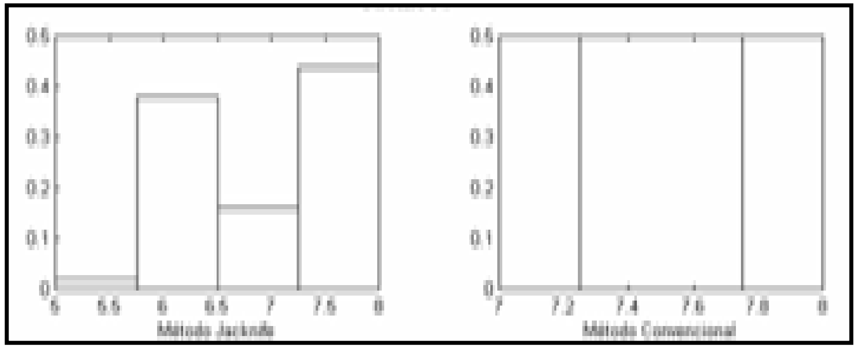
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)



Tamaño muestral (n=500)

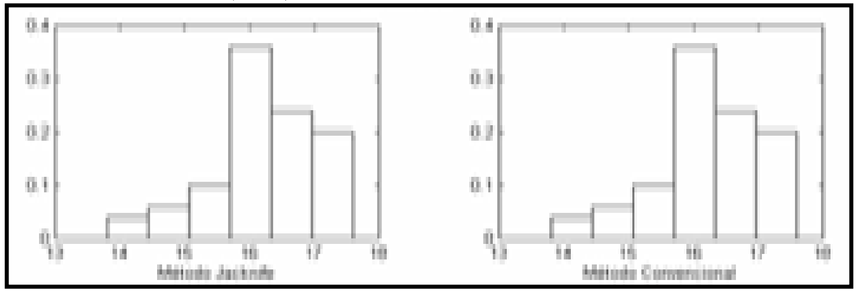


ANEXO 5

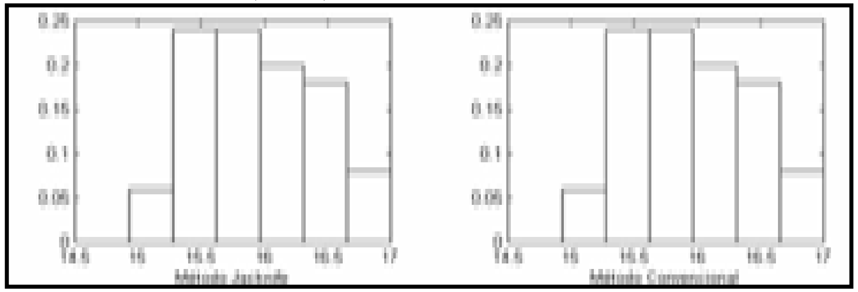
Histogramas Para los Estimadores de la Distribución Binomial con Parámetros n=20 y p=0.8, utilizando la Estimación Jacknife y la Estimación Convencional.

<u>MEDIA MUESTRAL</u>

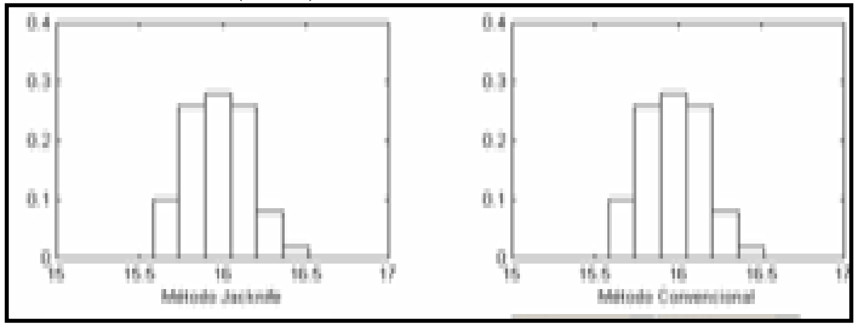
Tamaño muestral(n=5)



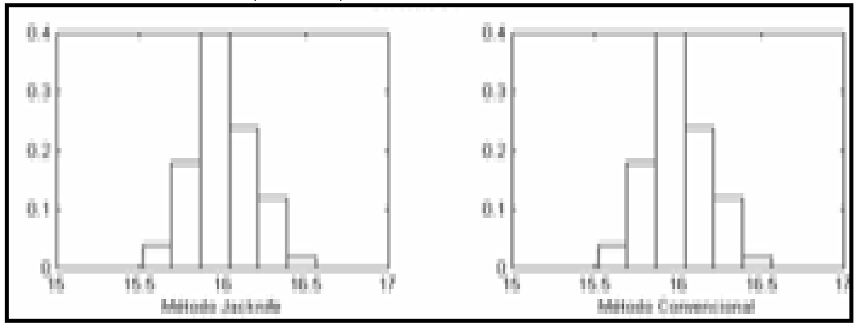
Tamaño muestral (n=15)



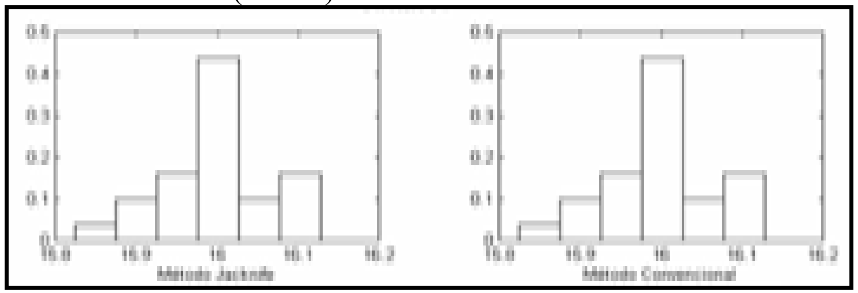
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

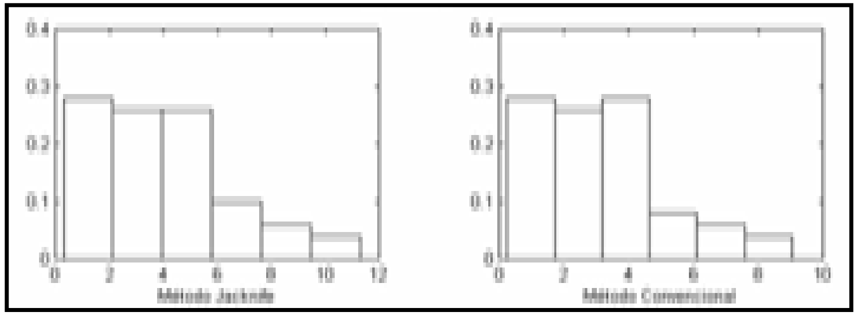


Tamaño muestral (n=500)

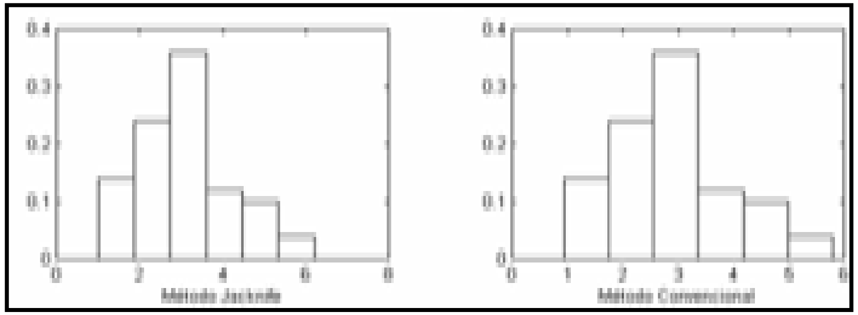


VARIANZA MUESTRAL

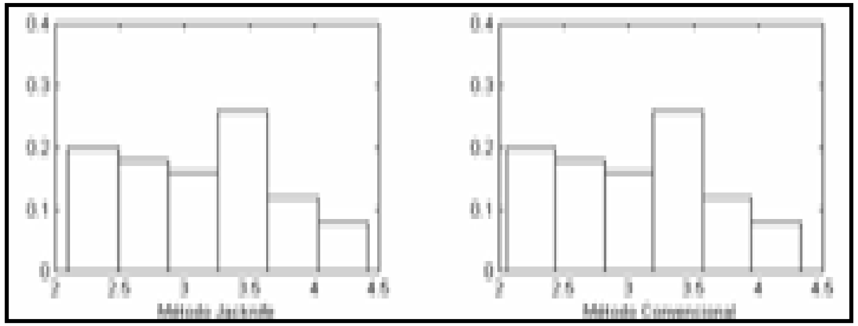
Tamaño muestral(n=5)



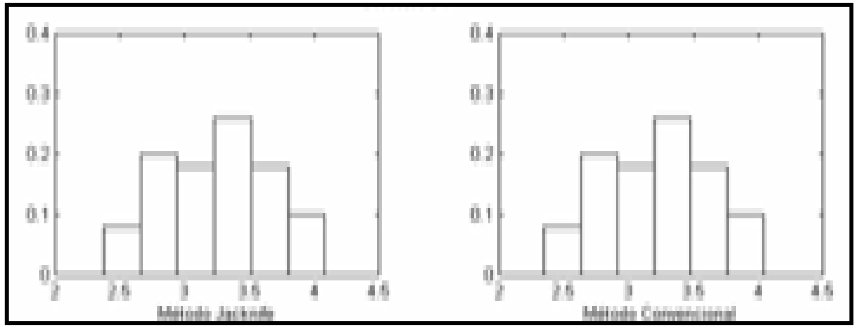
Tamaño muestral (n=15)



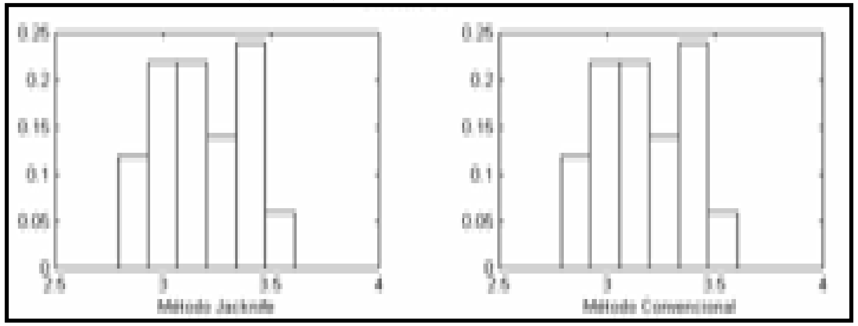
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

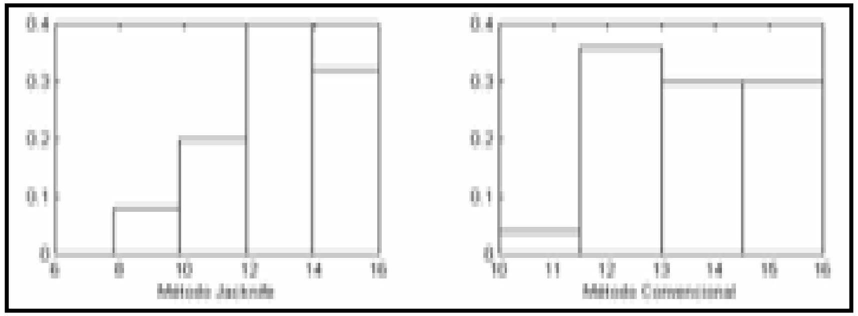


Tamaño muestral (n=500)

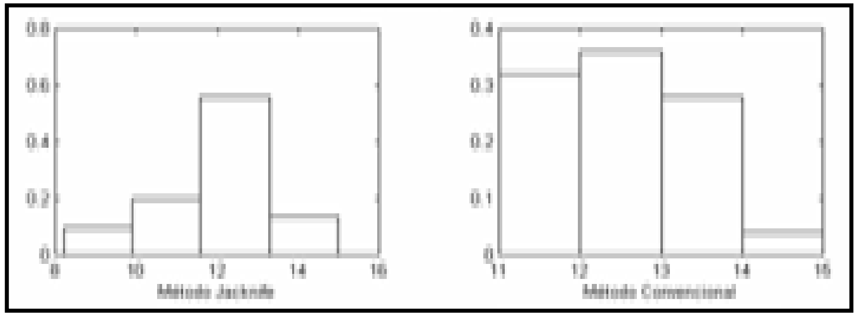


PRIMER ESTADÍSTICO DE ORDEN

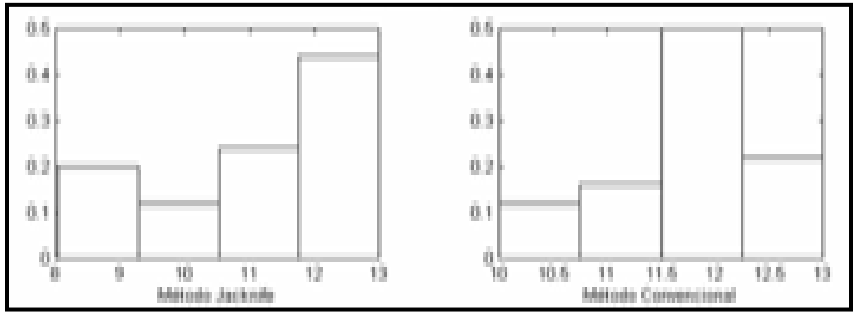
Tamaño muestral(n=5)



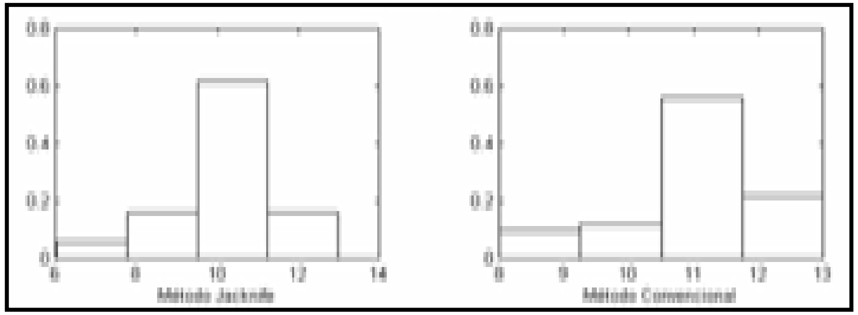
Tamaño muestral (n=15)



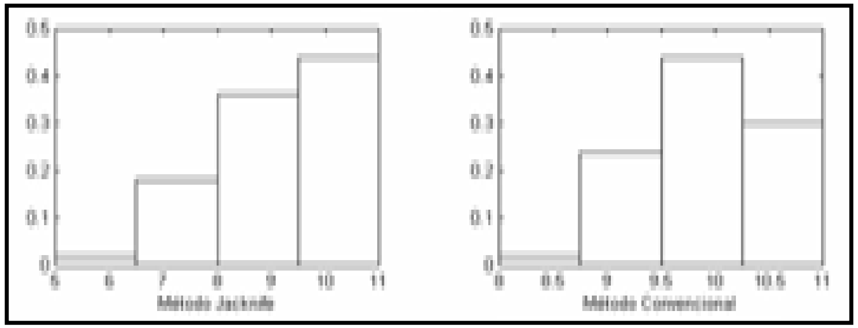
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

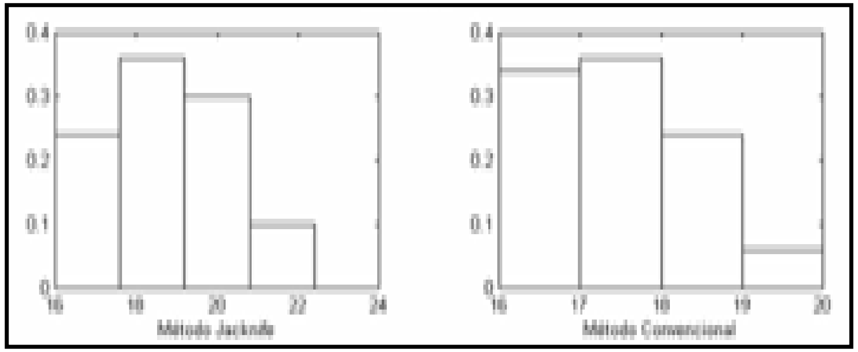


Tamaño muestral (n=500)

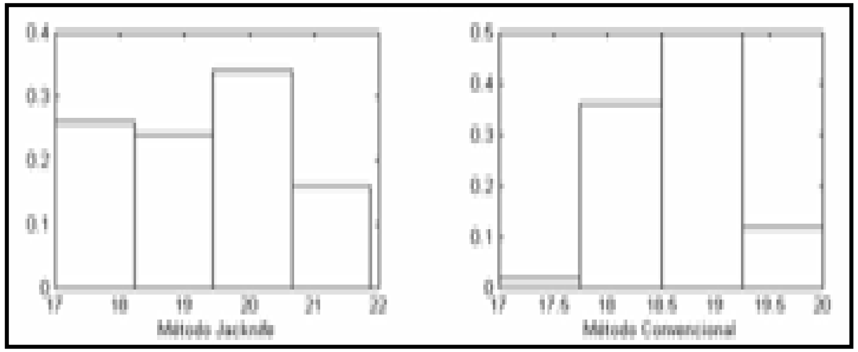


ÚLTIMO ESTADÍSTICO DE ORDEN

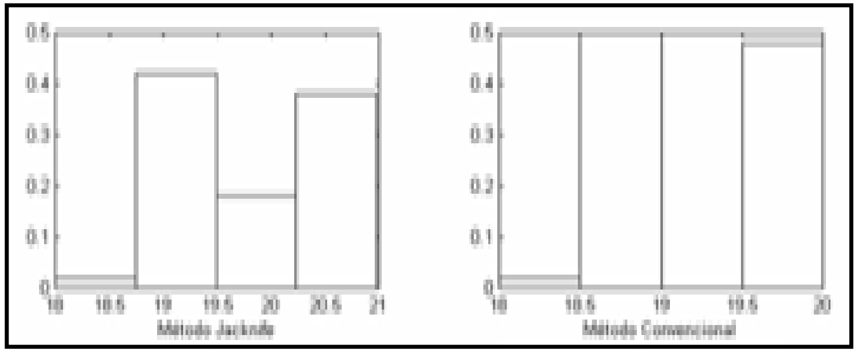
Tamaño muestral(n=5)



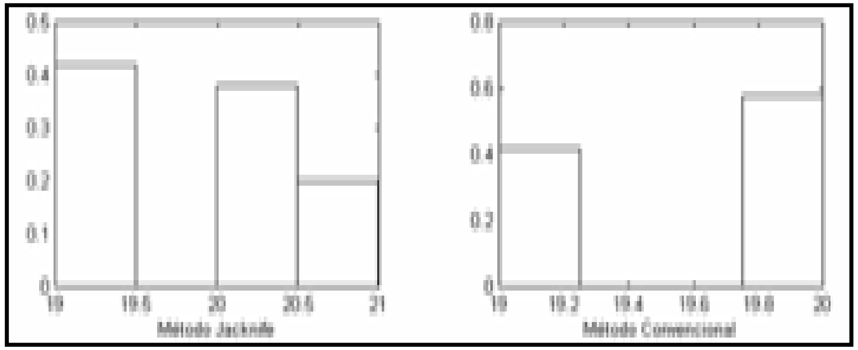
Tamaño muestral (n=15)



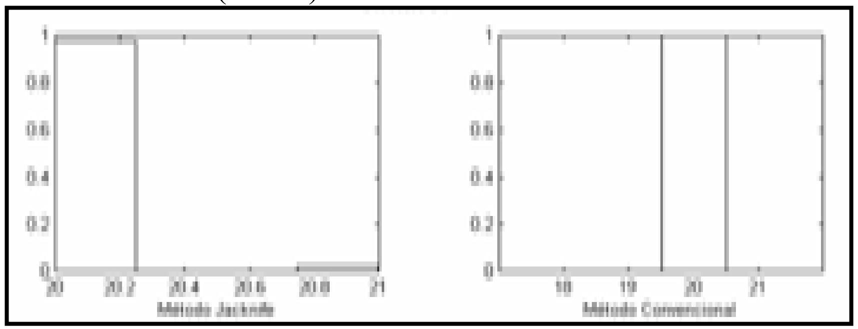
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)



Tamaño muestral (n=500)

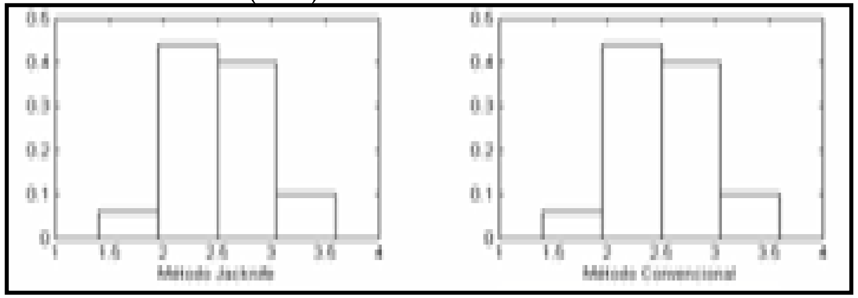


ANEXO 6

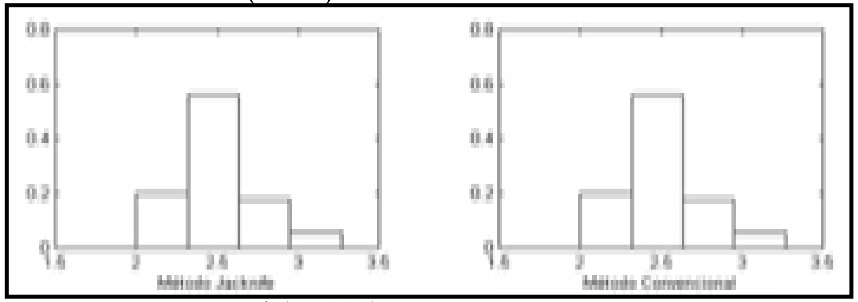
Histogramas Para los Estimadores de la Distribución Hipergeométrica con Parámetros N=30, k=15, y n=5; utilizando la Estimación Jacknife y la Estimación Convencional.

MEDIA MUESTRAL

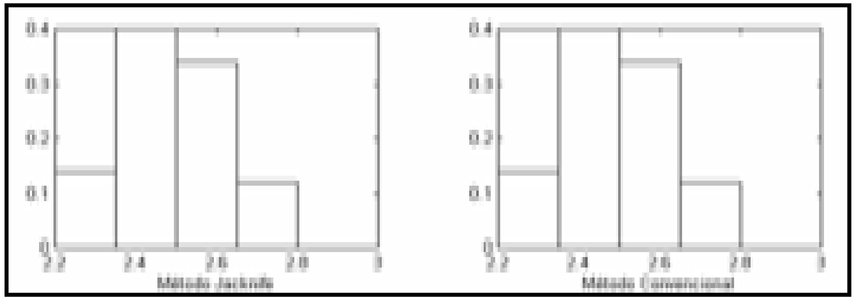
Tamaño muestral(n=5)



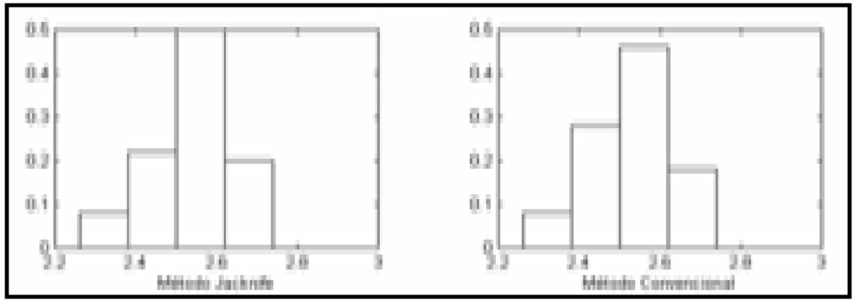
Tamaño muestral (n=15)



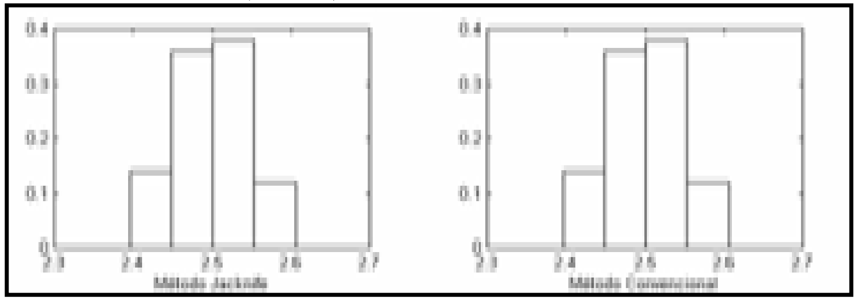
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

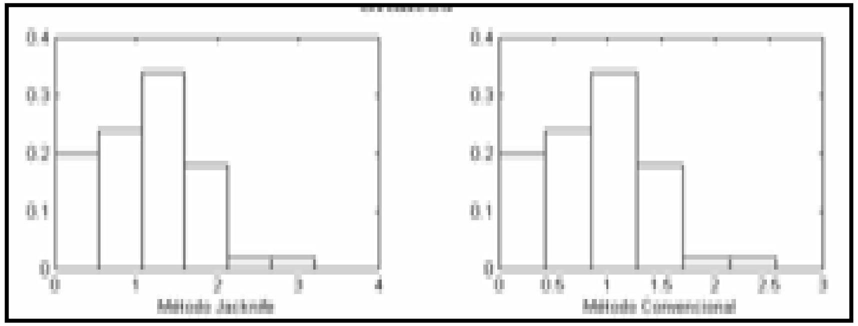


Tamaño muestral (n=500)

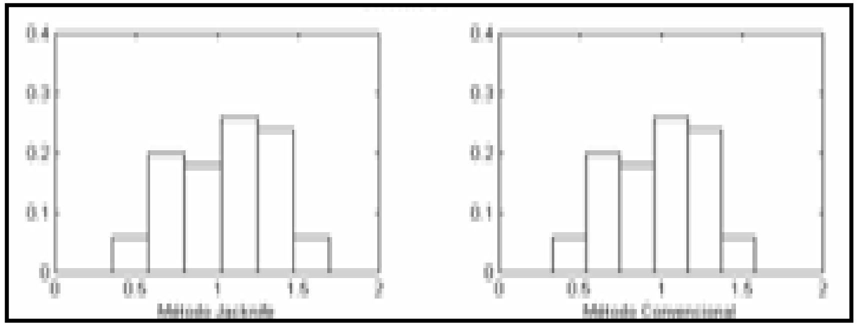


VARIANZA MUESTRAL

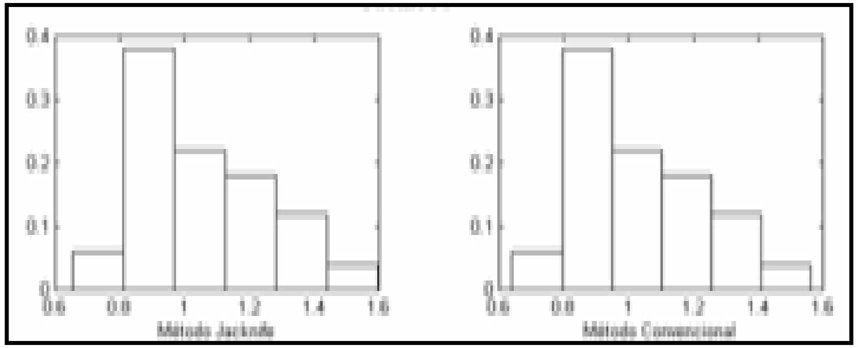
Tamaño muestral(n=5)



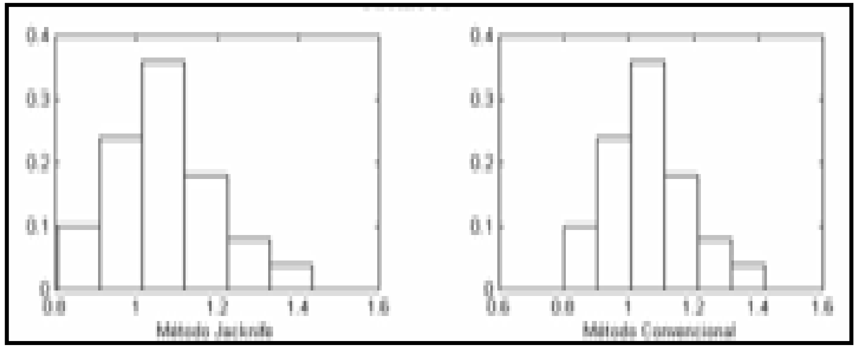
Tamaño muestral (n=15)



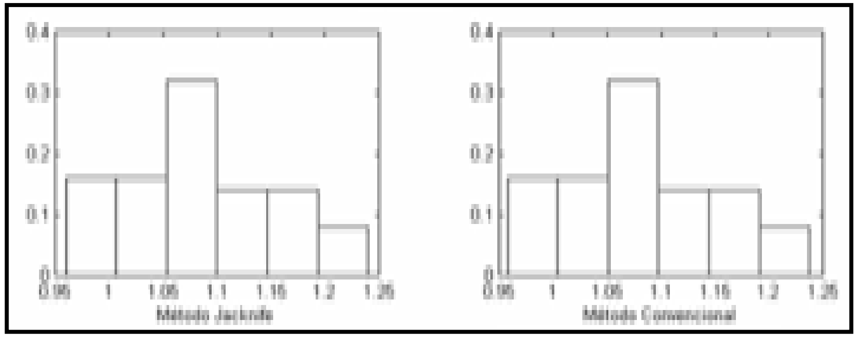
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

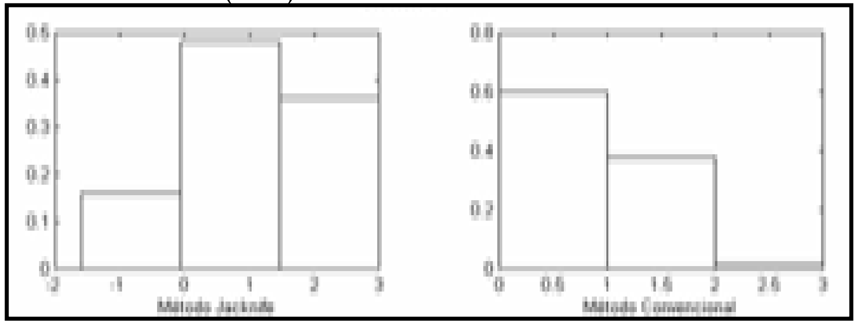


Tamaño muestral (n=500)

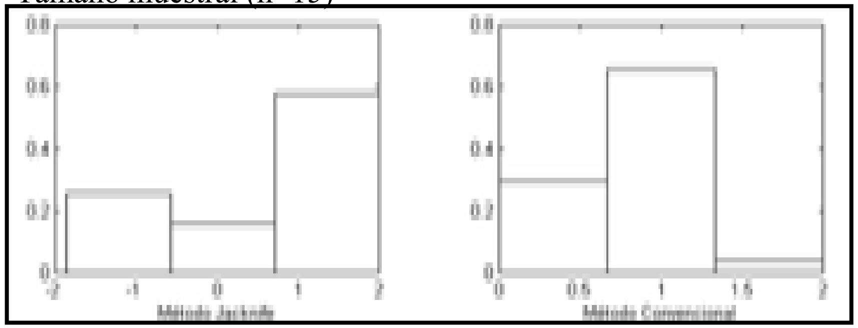


PRIMER ESTADÍSTICO DE ORDEN

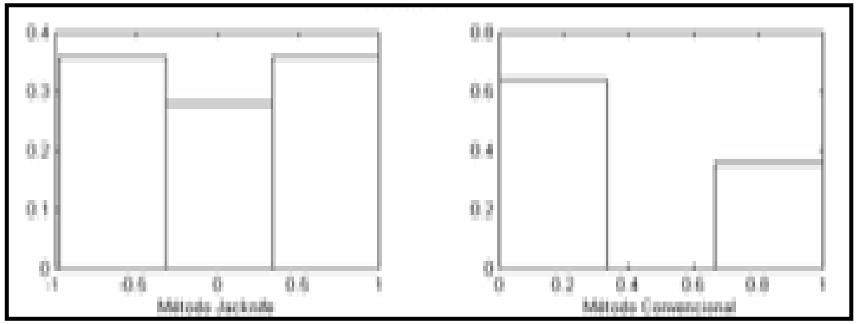
Tamaño muestral(n=5)



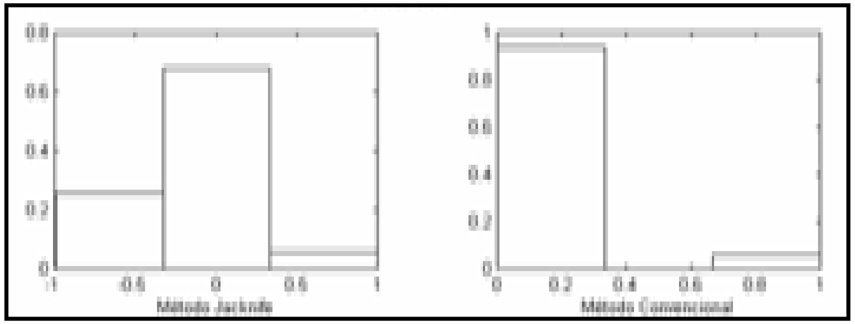
Tamaño muestral (n=15)



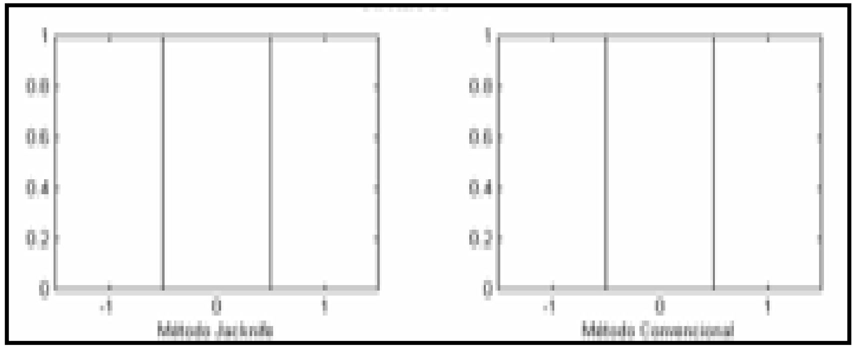
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

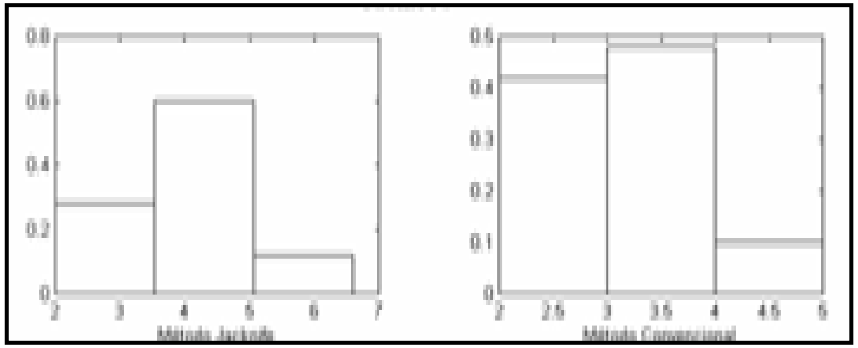


Tamaño muestral (n=500)

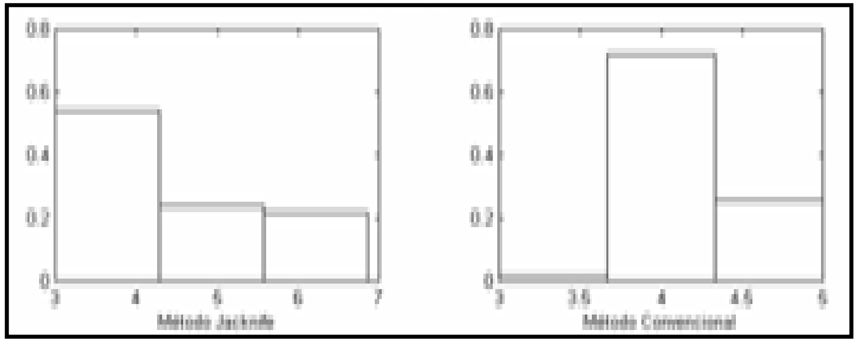


ÚLTIMO ESTADÍSTICO DE ORDEN

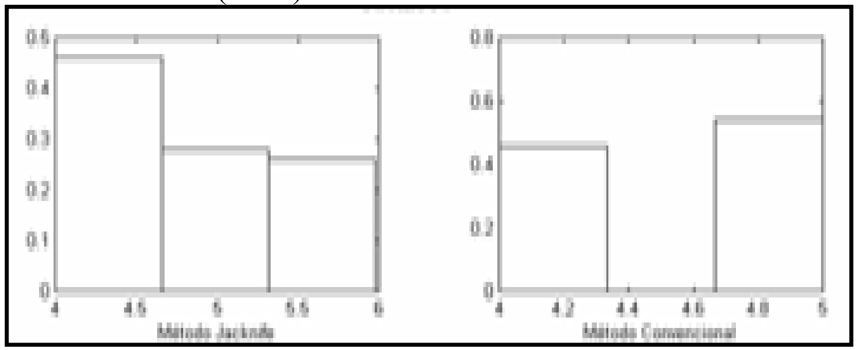
Tamaño muestral(n=5)



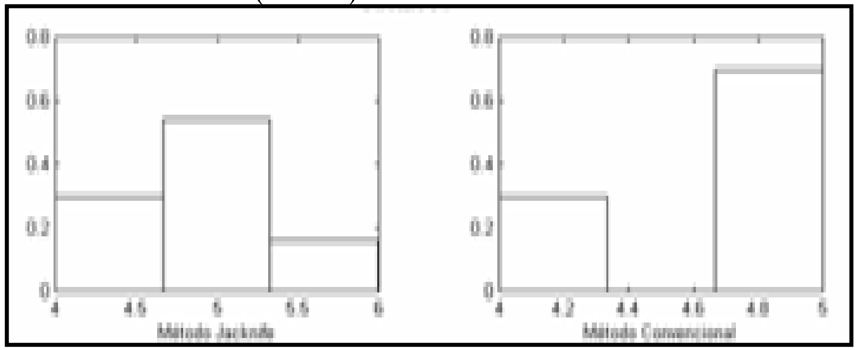
Tamaño muestral (n=15)



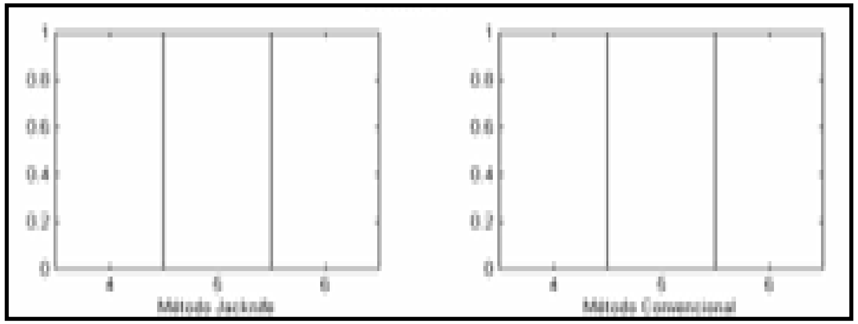
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)



Tamaño muestral (n=500)

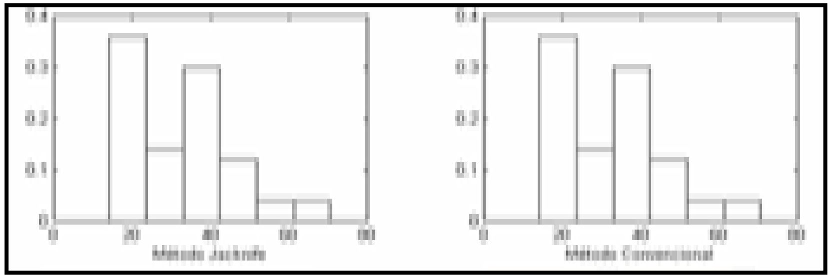


ANEXO 7

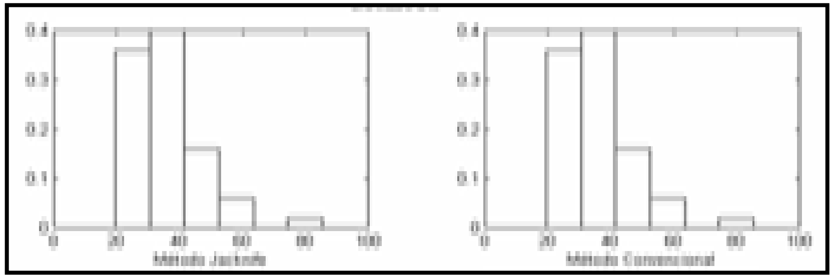
Histogramas Para los Estimadores de la Distribución Exponencial con Parámetros λ=36; utilizando la Estimación Jacknife y la Estimación Convencional.

<u>MEDIA MUESTRAL</u>

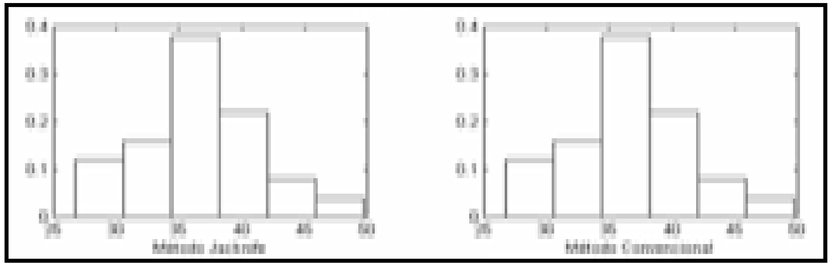
Tamaño muestral(n=5)



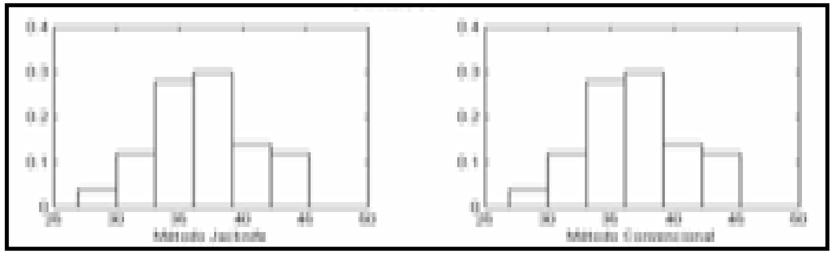
Tamaño muestral (n=15)



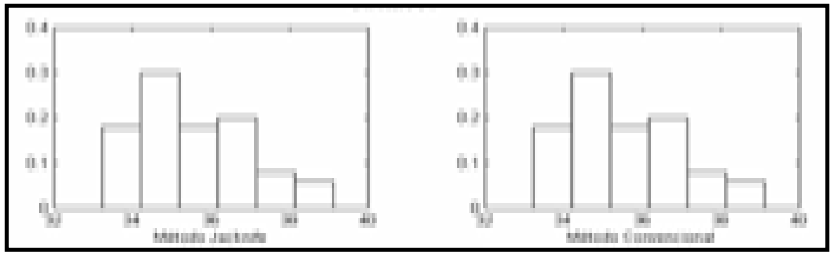
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

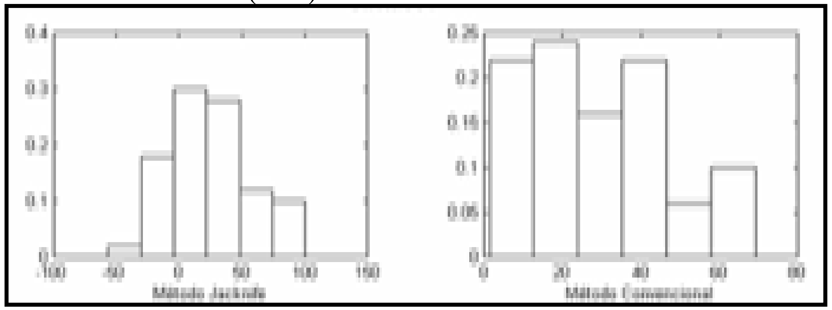


Tamaño muestral (n=500)

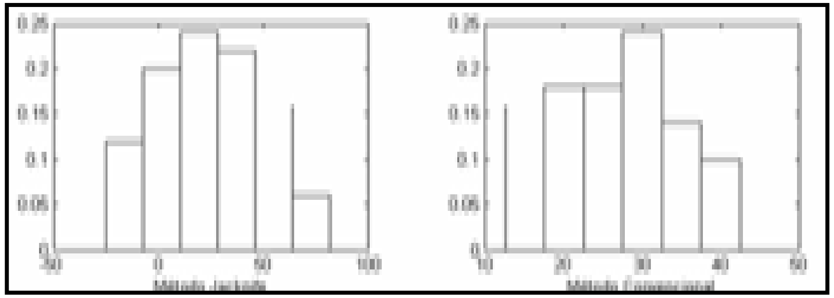


MEDIANA MUESTRAL

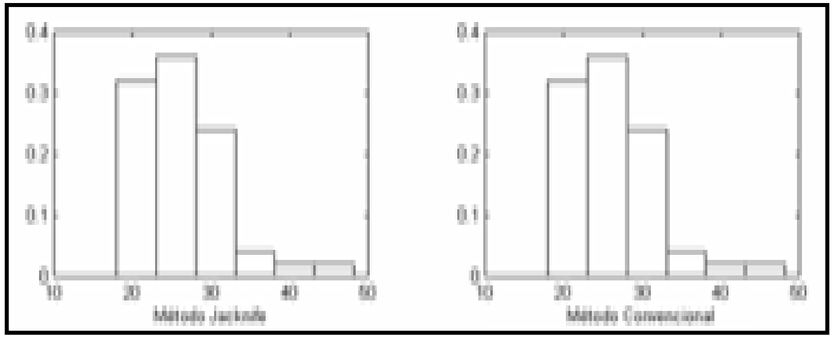
Tamaño muestral(n=5)



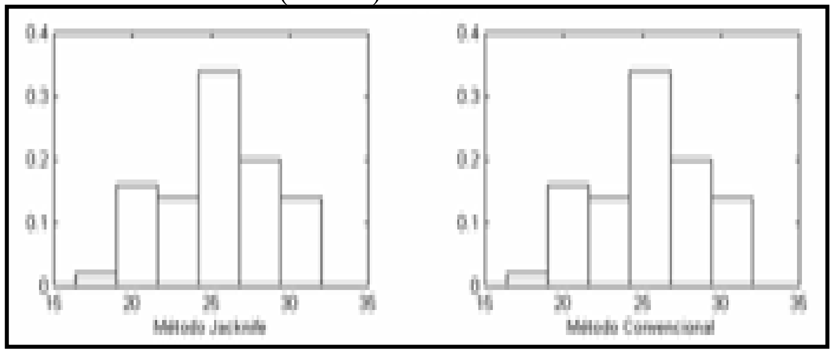
Tamaño muestral (n=15)



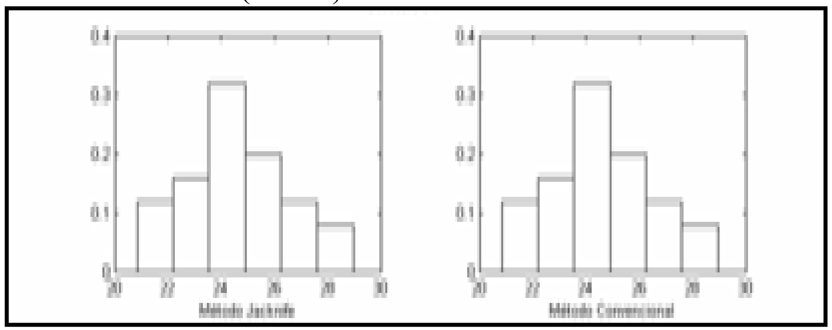
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

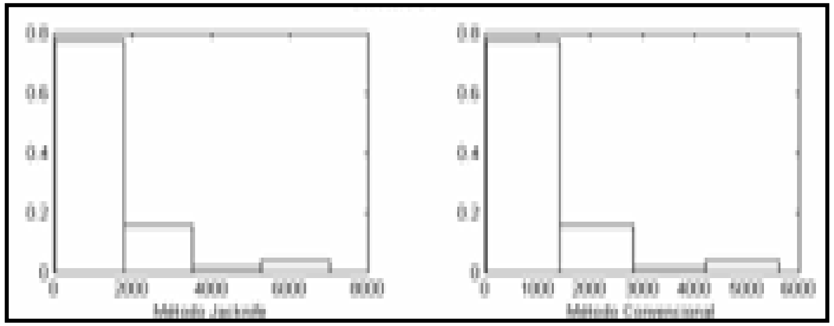


Tamaño muestral (n=500)

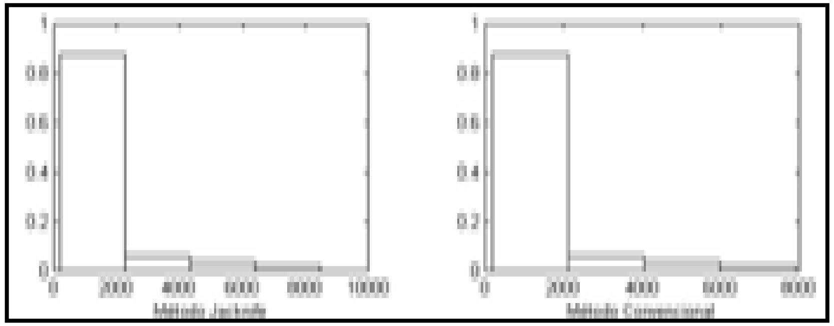


VARIANZA MUESTRAL

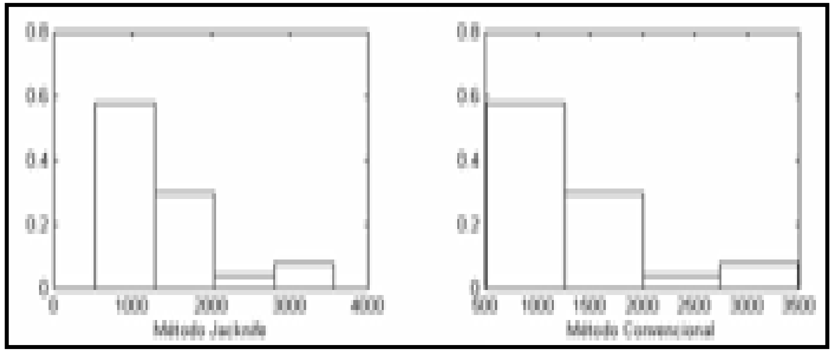
Tamaño muestral(n=5)



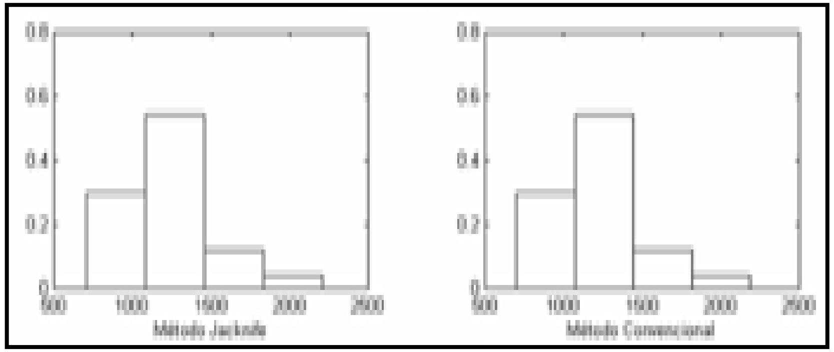
Tamaño muestral (n=15)



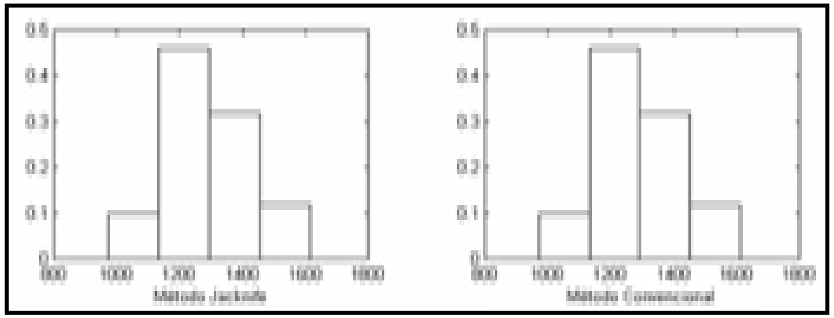
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

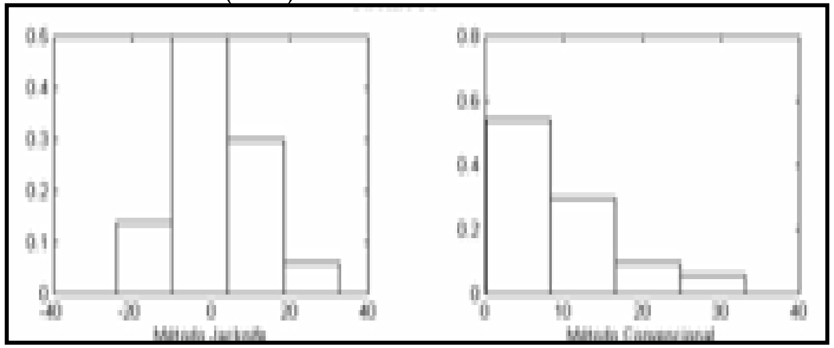


Tamaño muestral (n=500)

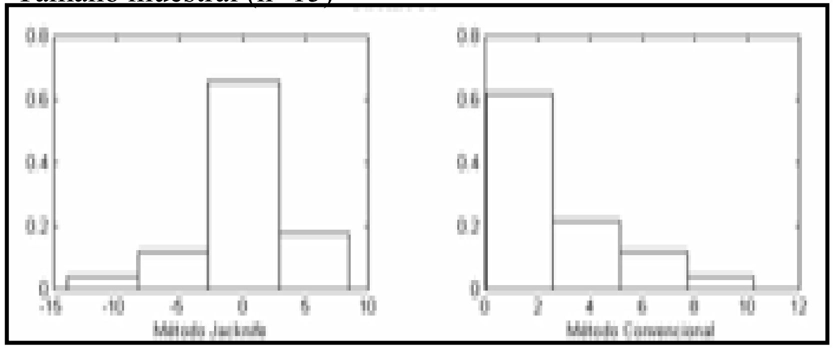


PRIMER ESTADÍSTICO DE ORDEN

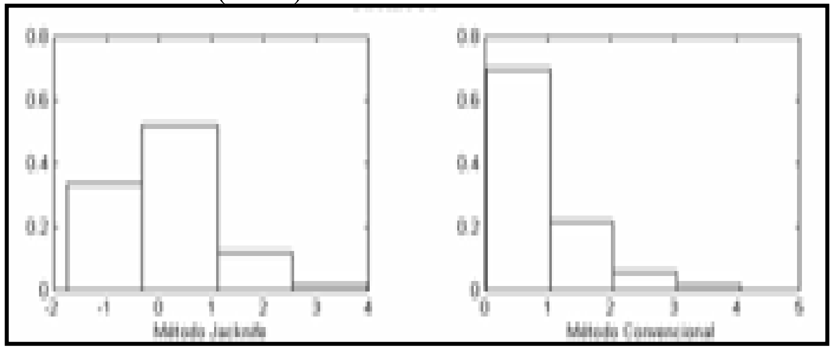
Tamaño muestral(n=5)



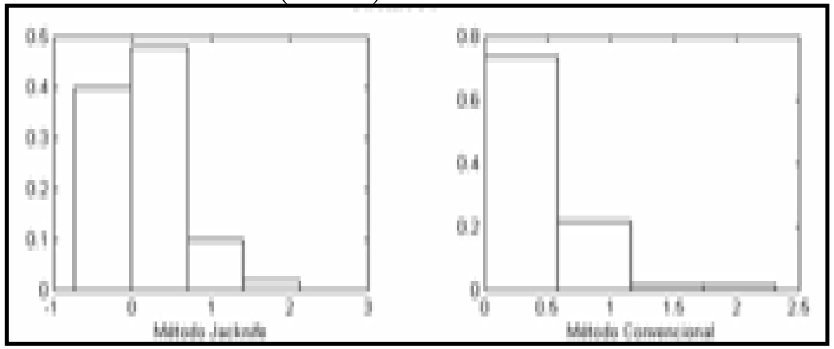
Tamaño muestral (n=15)



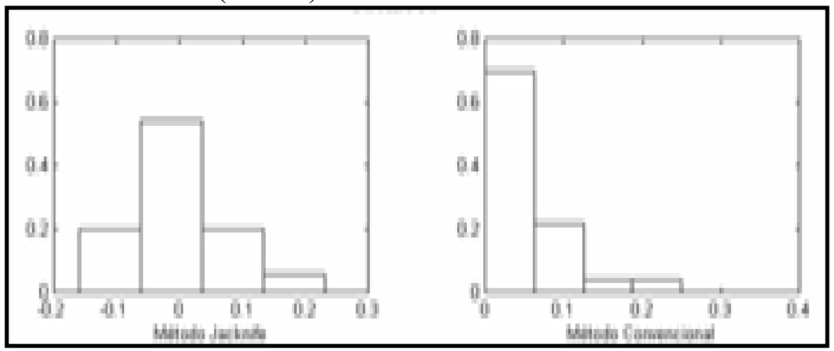
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)



Tamaño muestral (n=500)

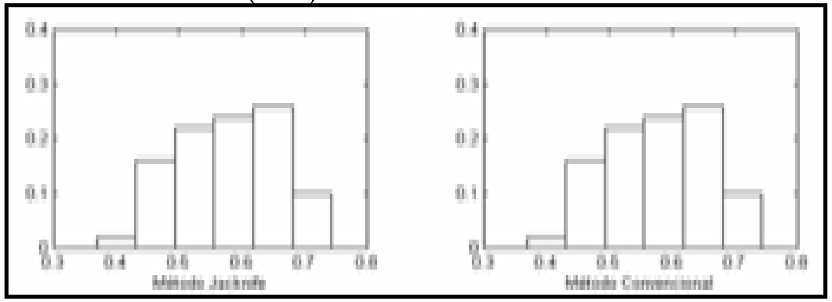


ANEXO 8

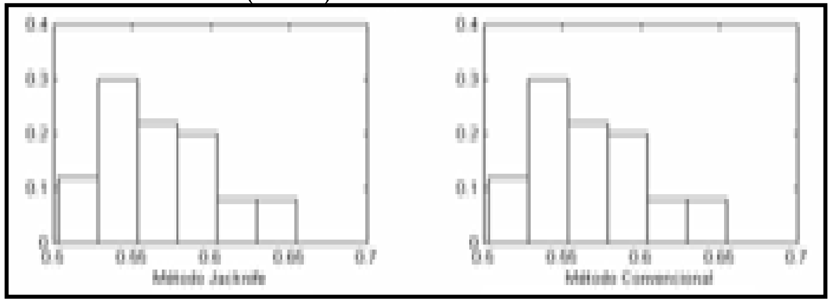
Histogramas Para los Estimadores de la Distribución Beta con Parámetros ω=4 y ν=3; utilizando la Estimación Jacknife y la Estimación Convencional.

MEDIA MUESTRAL

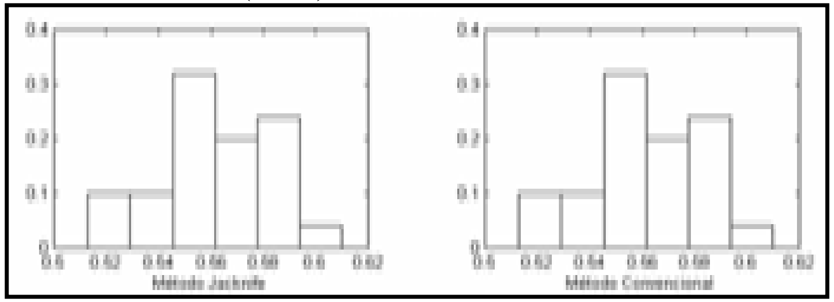
Tamaño muestral(n=5)



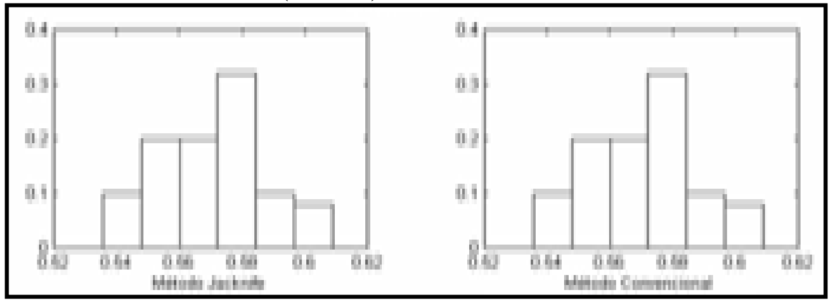
Tamaño muestral (n=15)



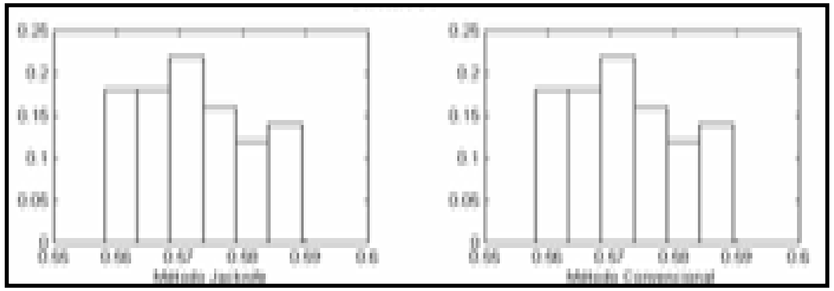
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

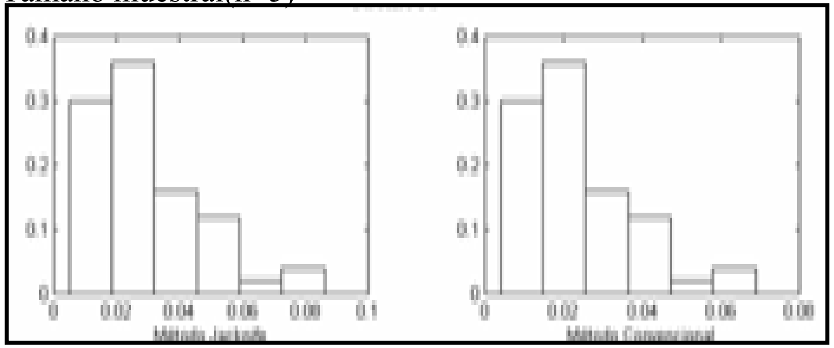


Tamaño muestral (n=500)

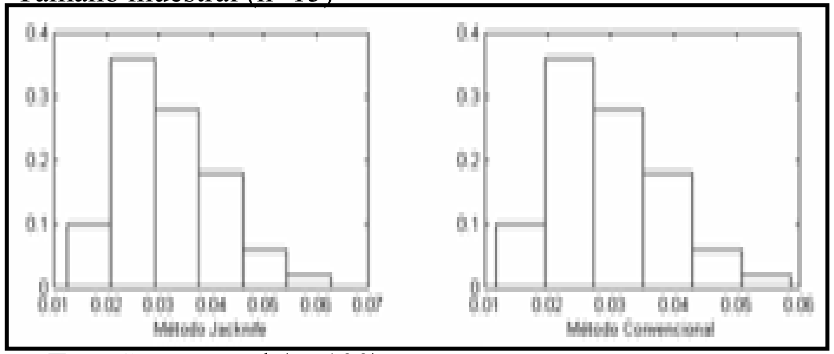


VARIANZA MUESTRAL

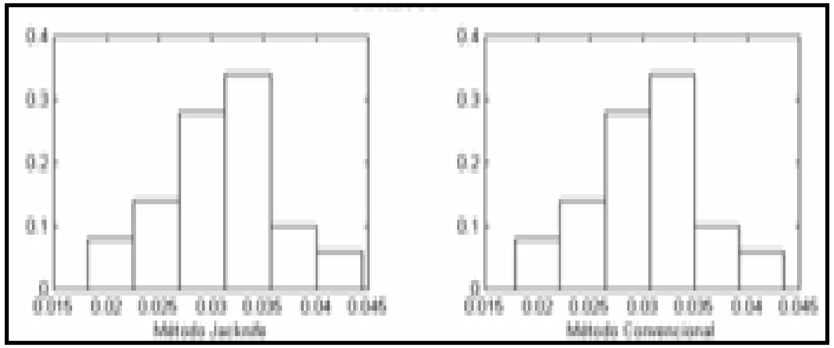
Tamaño muestral(n=5)



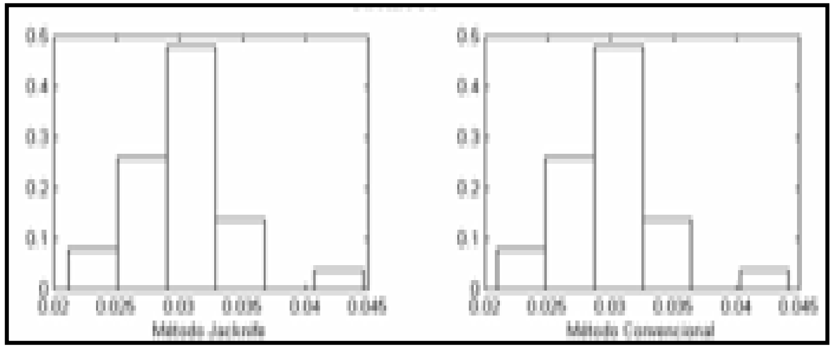
Tamaño muestral (n=15)



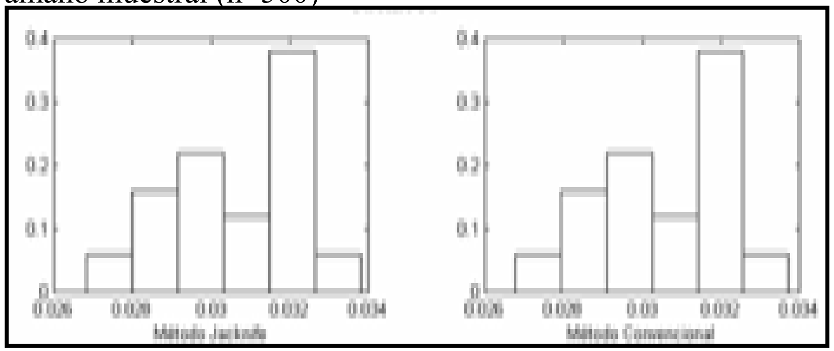
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

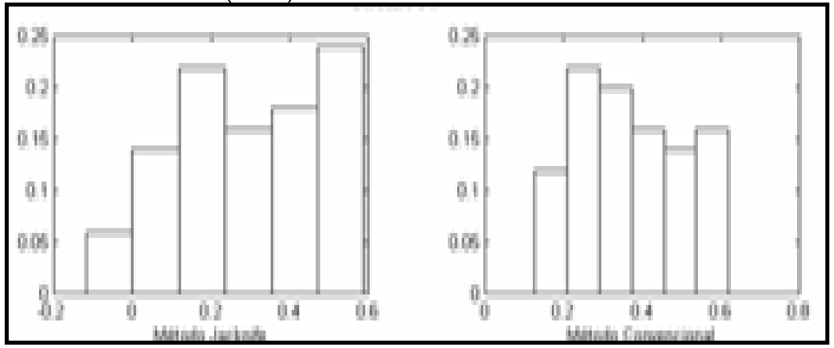


Tamaño muestral (n=500)

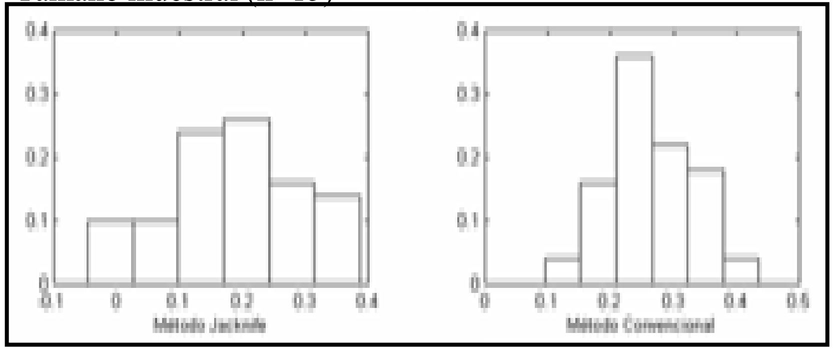


PRIMER ESTADÍSTICO DE ORDEN

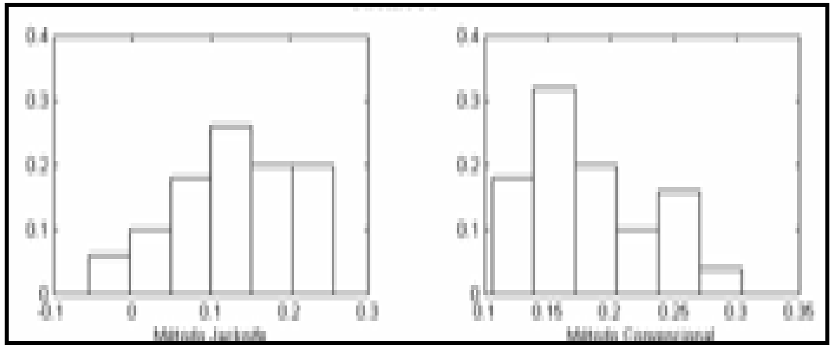
Tamaño muestral(n=5)



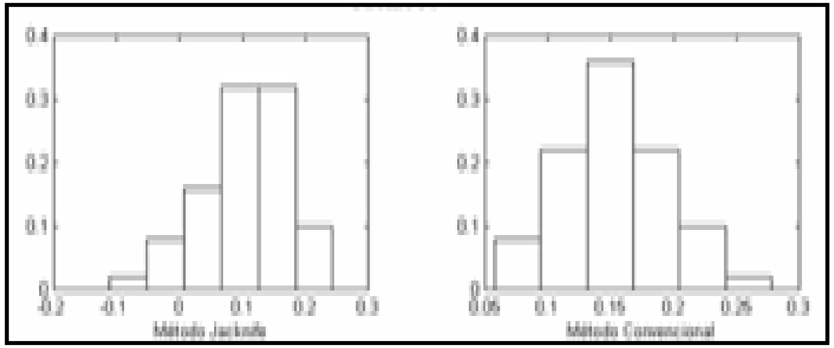
Tamaño muestral (n=15)



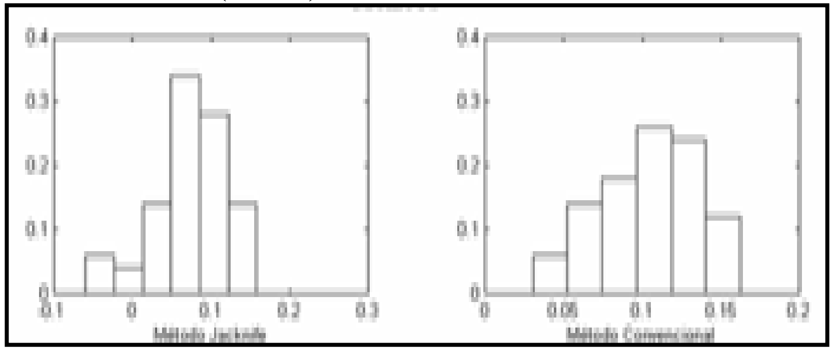
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

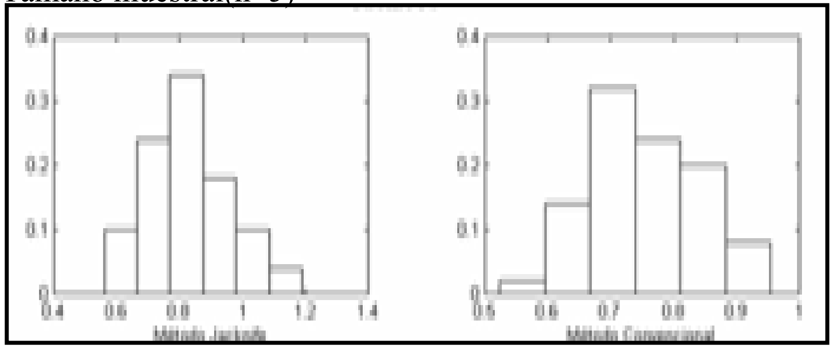


Tamaño muestral (n=500)

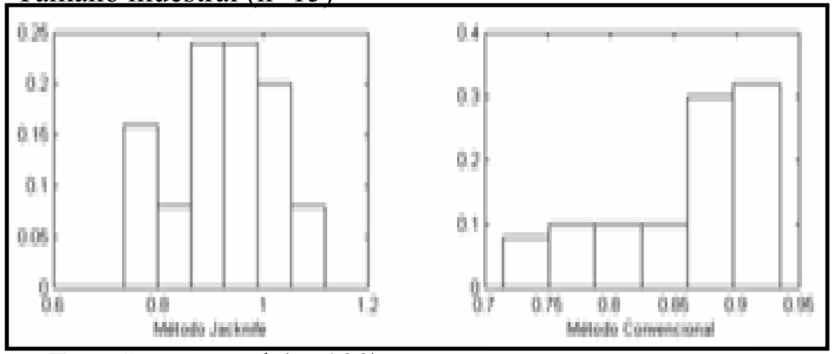


ÚLTIMO ESTADÍSTICO DE ORDEN

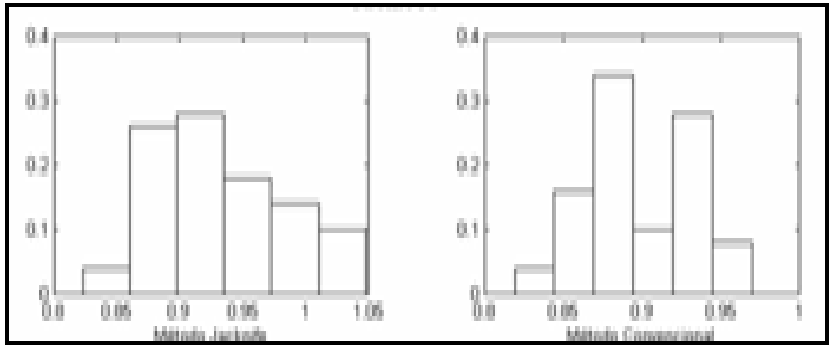
Tamaño muestral(n=5)



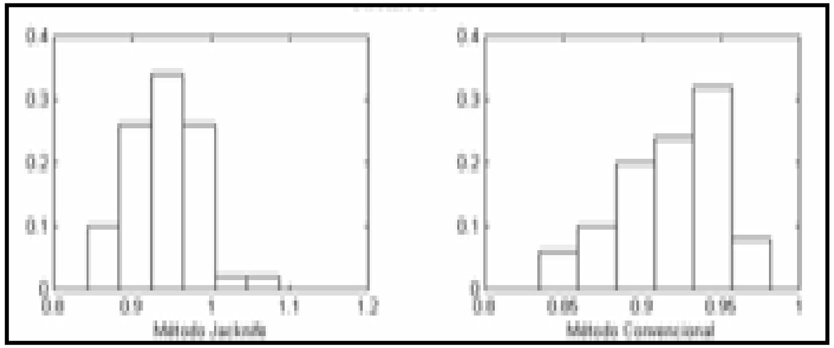
Tamaño muestral (n=15)



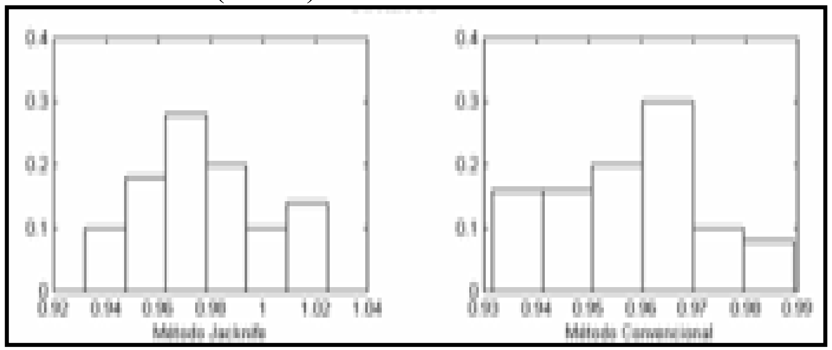
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)



Tamaño muestral (n=500)

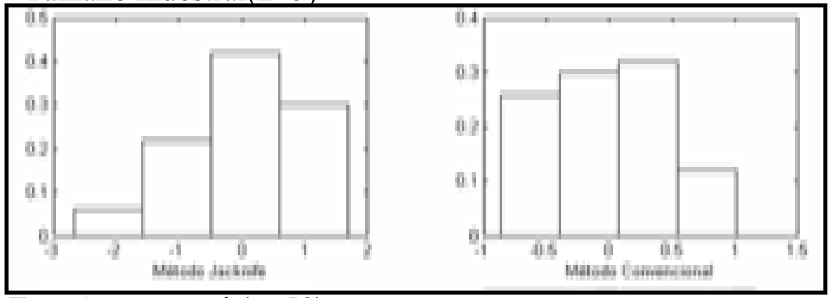


ANEXO 9

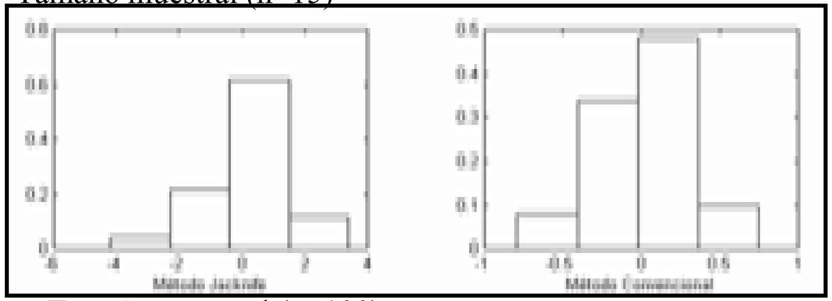
Histogramas Para los Estimadores de la Distribución Normal con Parámetros $\mu=0$ y $\sigma=1$; utilizando la Estimación Jacknife y la Estimación Convencional.

MEDIANA MUESTRAL

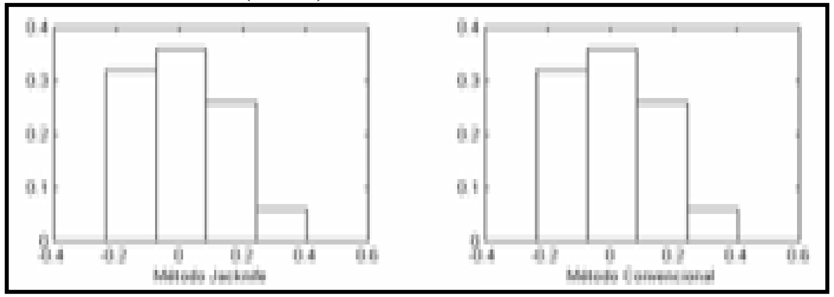
Tamaño muestral(n=5)



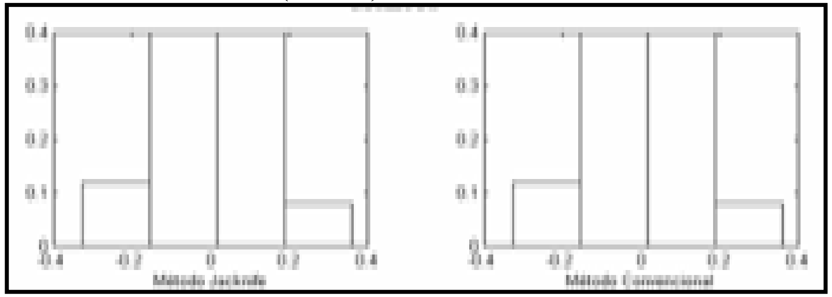
Tamaño muestral (n=15)



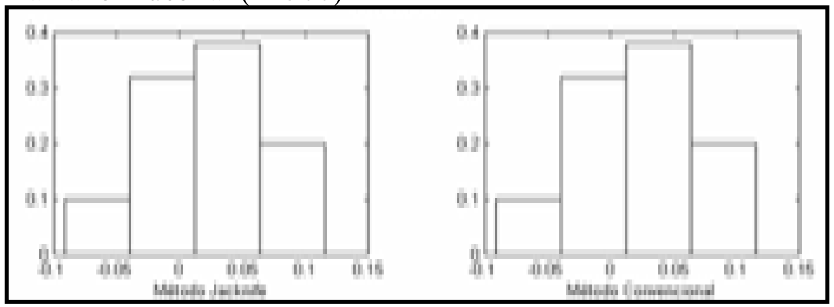
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

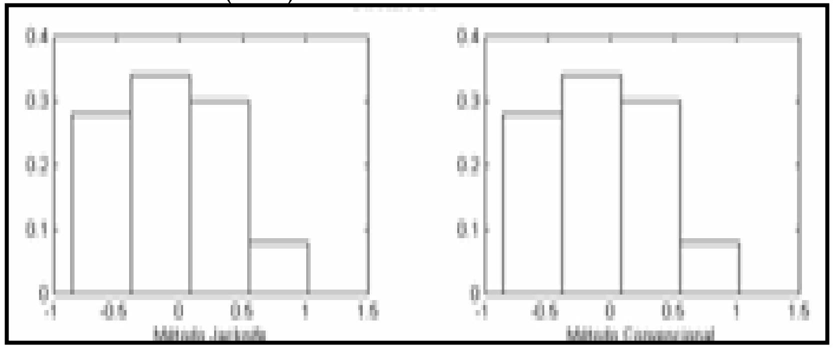


Tamaño muestral (n=500)

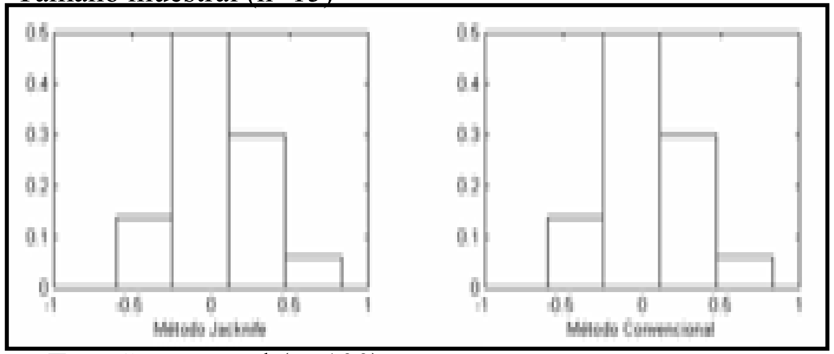


MEDIA MUESTRAL

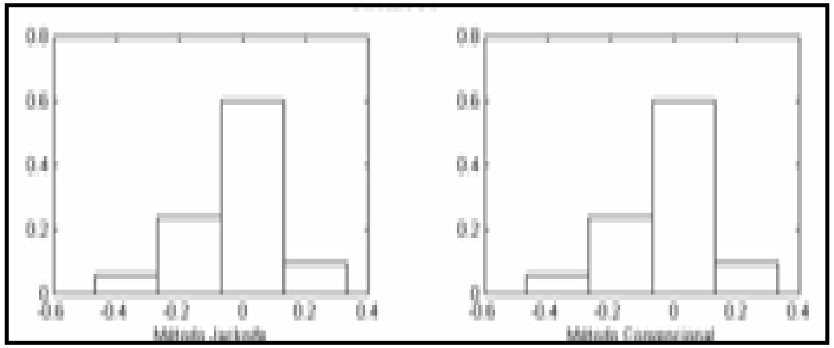
Tamaño muestral(n=5)



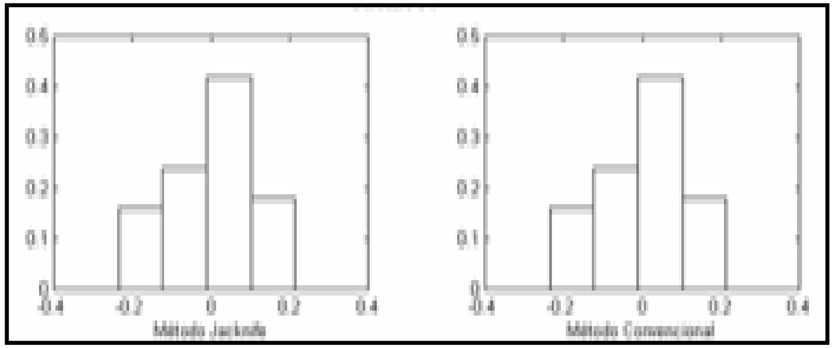
Tamaño muestral (n=15)



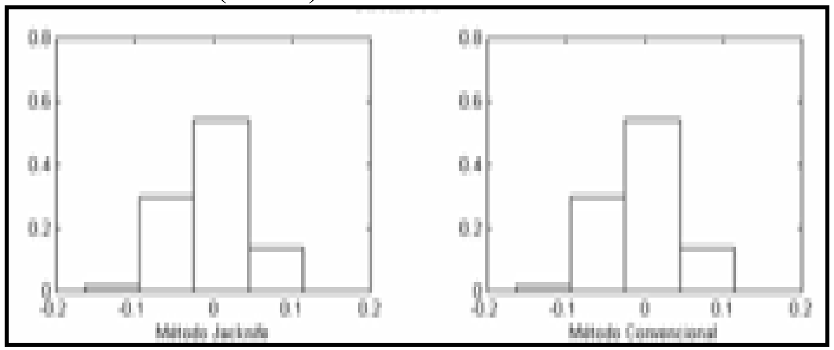
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

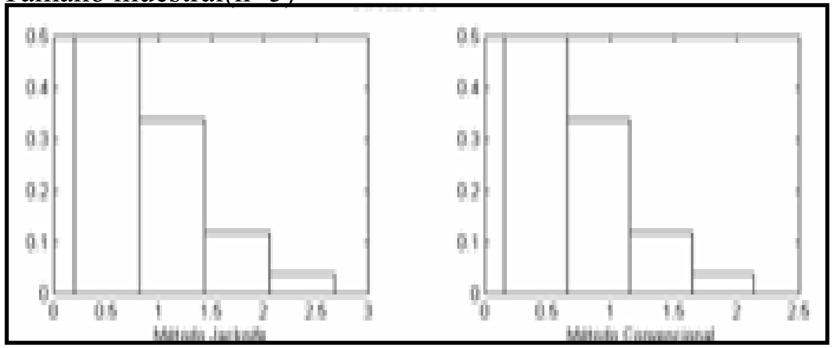


Tamaño muestral (n=500)

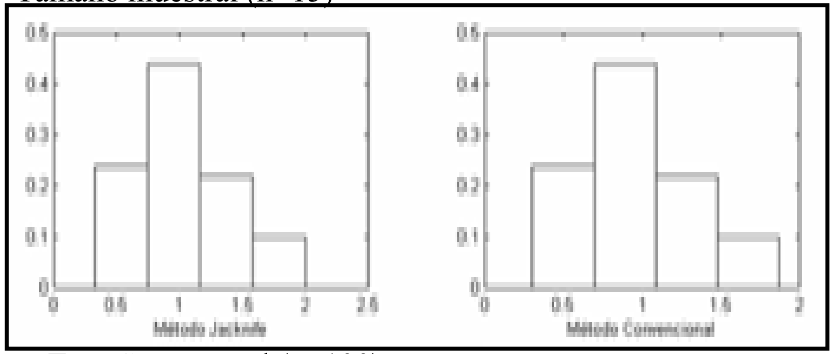


VARIANZA MUESTRAL

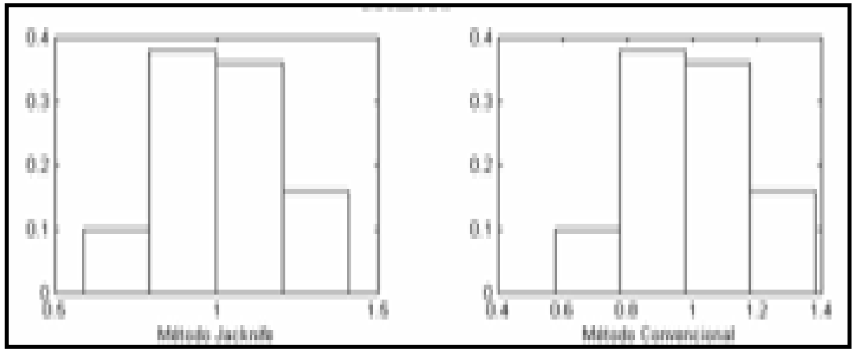
Tamaño muestral(n=5)



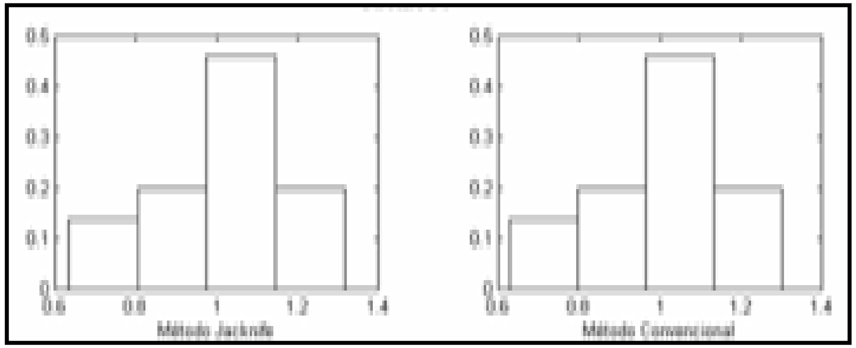
Tamaño muestral (n=15)



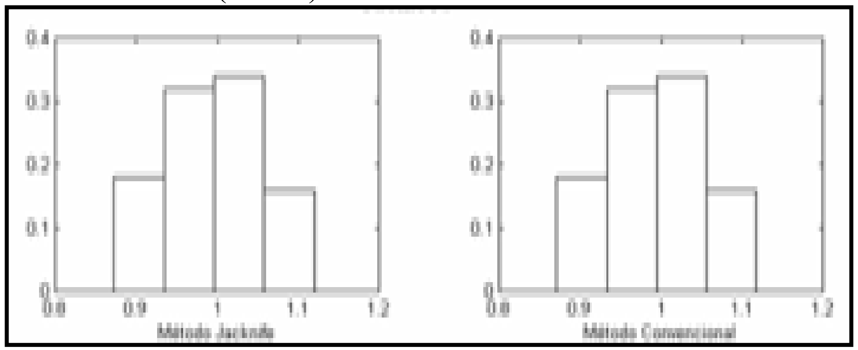
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)



Tamaño muestral (n=500)

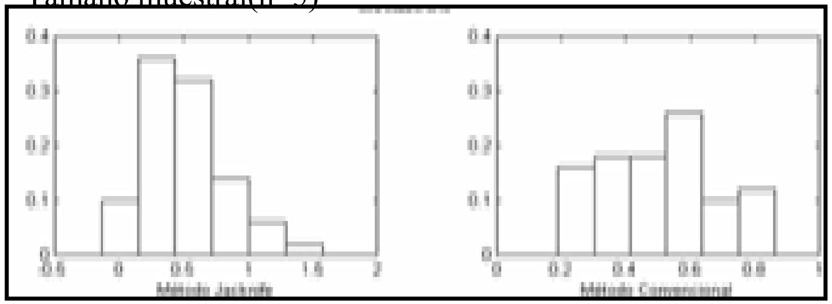


ANEXO 10

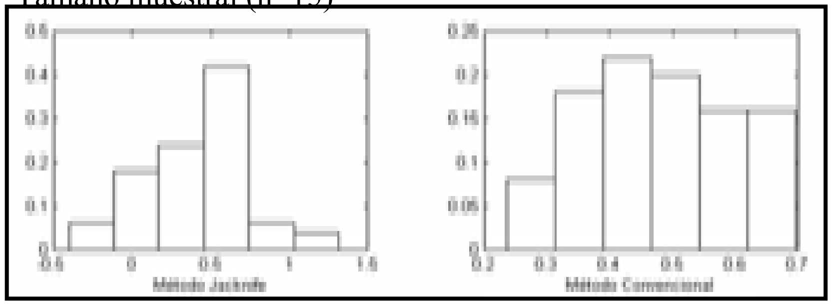
Histogramas Para los Estimadores de la Distribución Uniforme con Parámetros α=0 yβ=1; utilizando la Estimación Jacknife y la Estimación Convencional.

MEDIANA MUESTRAL

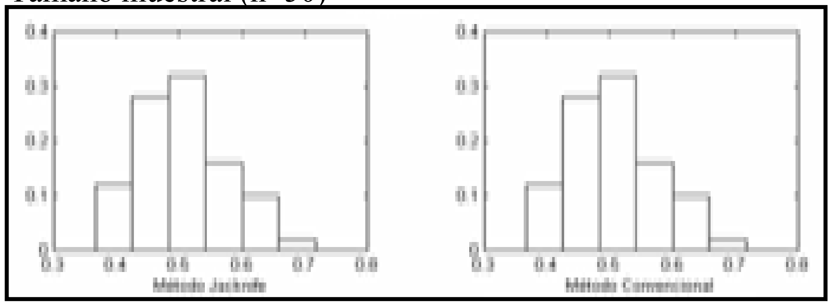
Tamaño muestral(n=5)



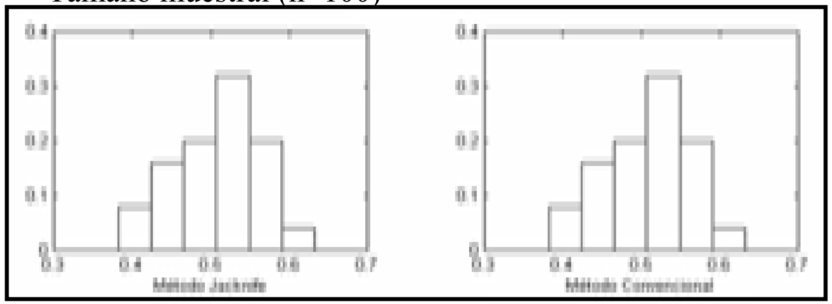
Tamaño muestral (n=15)



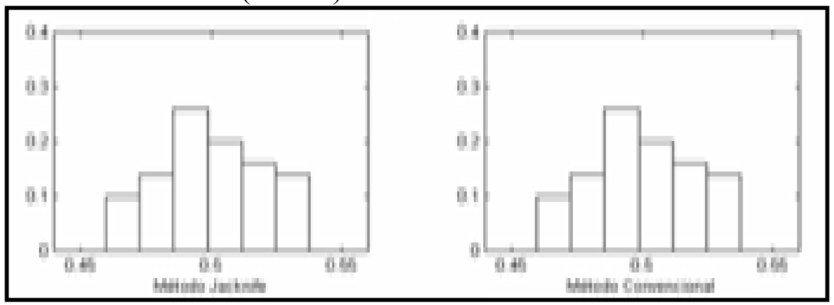
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

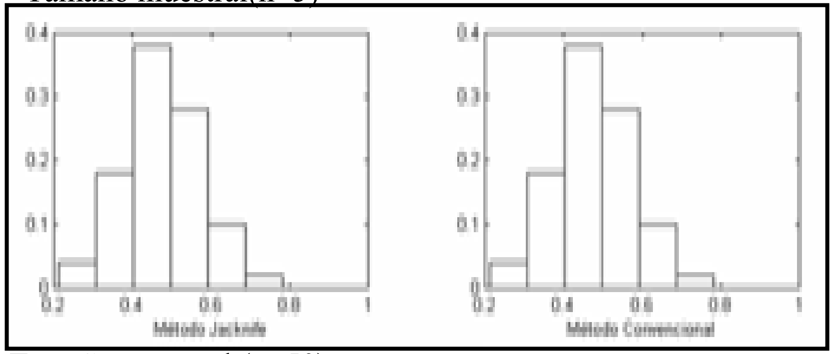


Tamaño muestral (n=500)

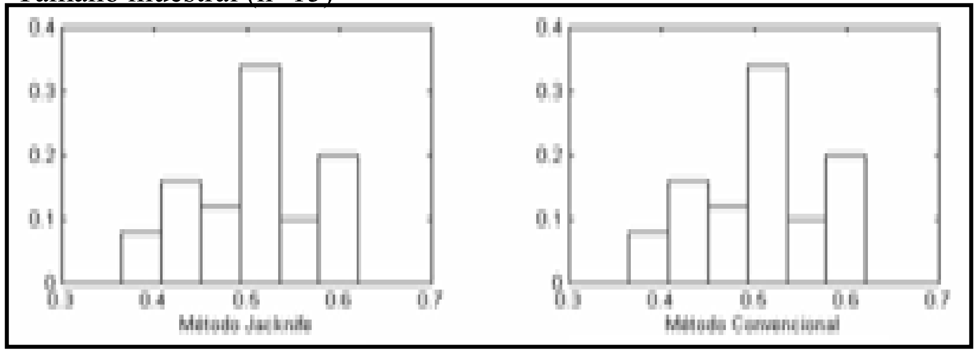


MEDIA MUESTRAL

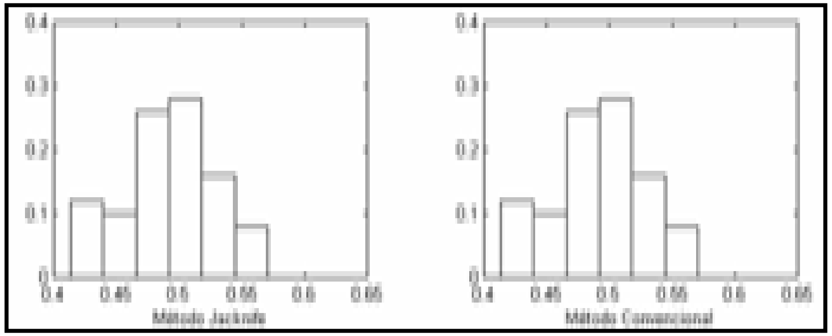
Tamaño muestral(n=5)



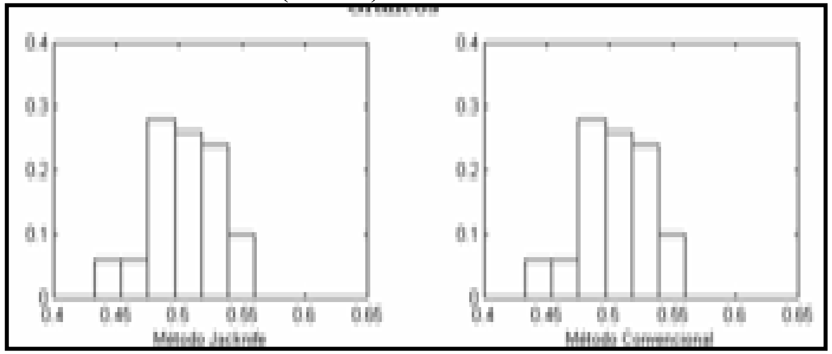
Tamaño muestral (n=15)



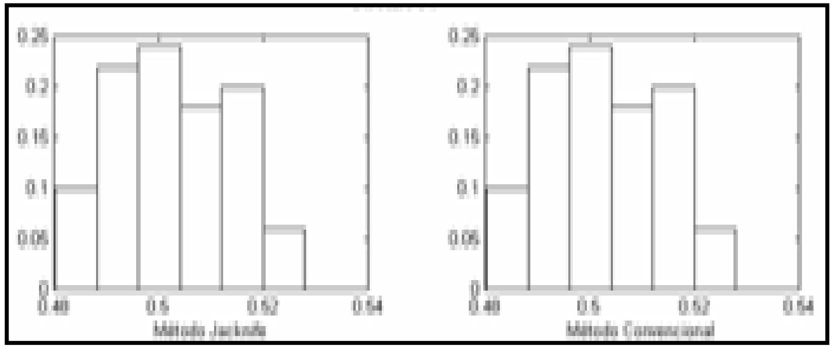
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

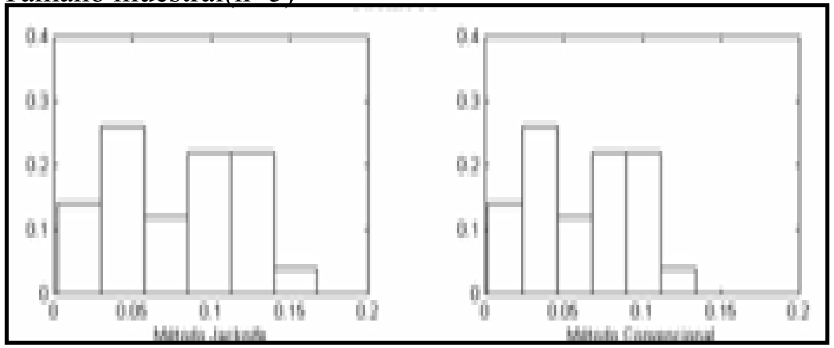


Tamaño muestral (n=500)

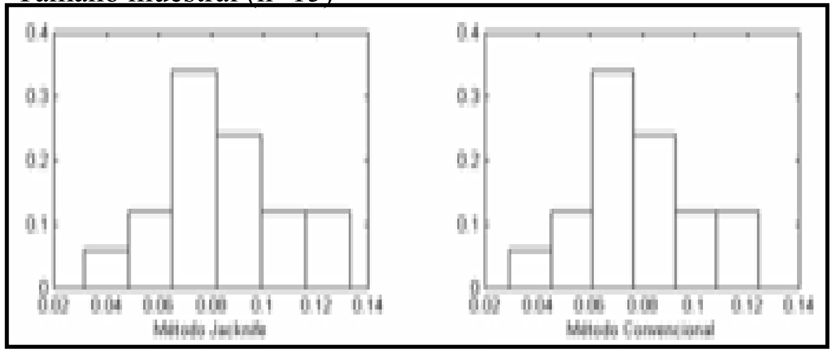


VARIANZA MUESTRAL

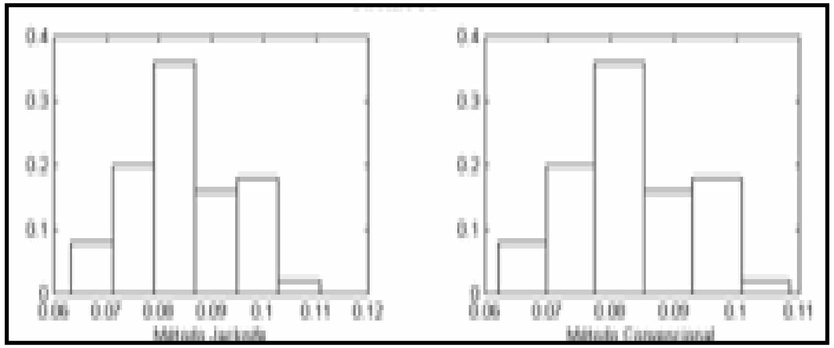
Tamaño muestral(n=5)



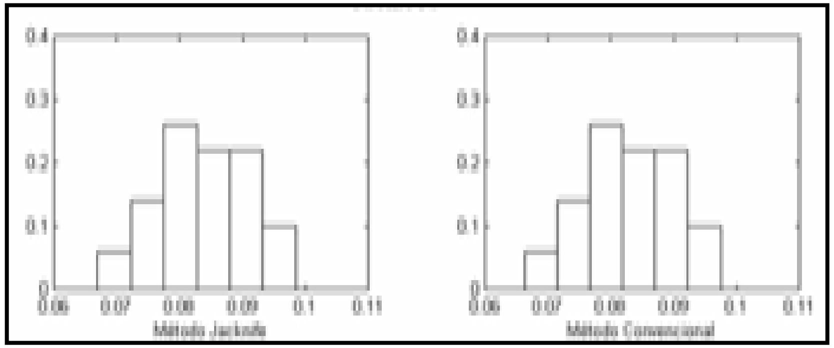
Tamaño muestral (n=15)



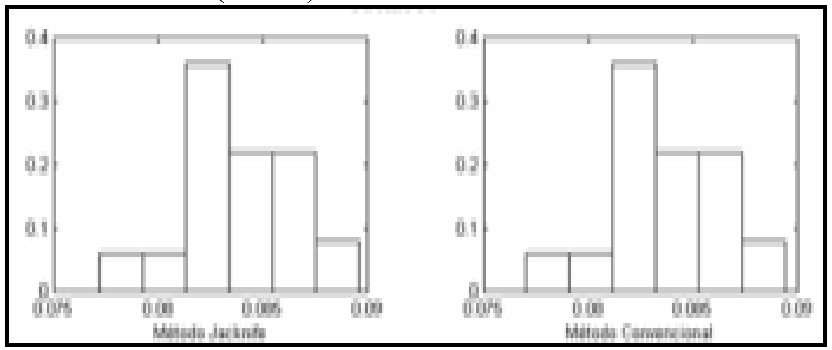
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

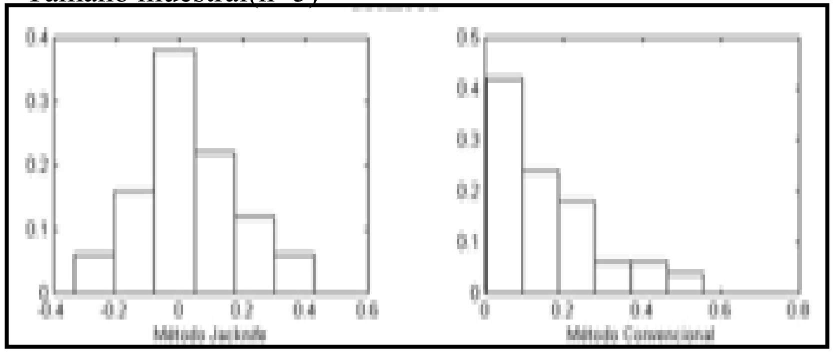


Tamaño muestral (n=500)

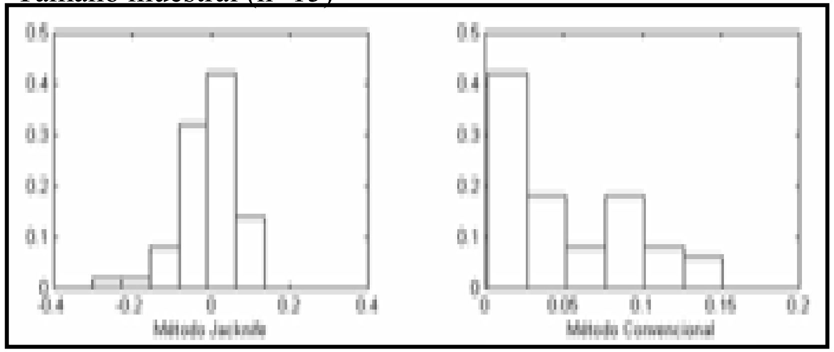


PRIMER ESTADÍSTICO DE ORDEN

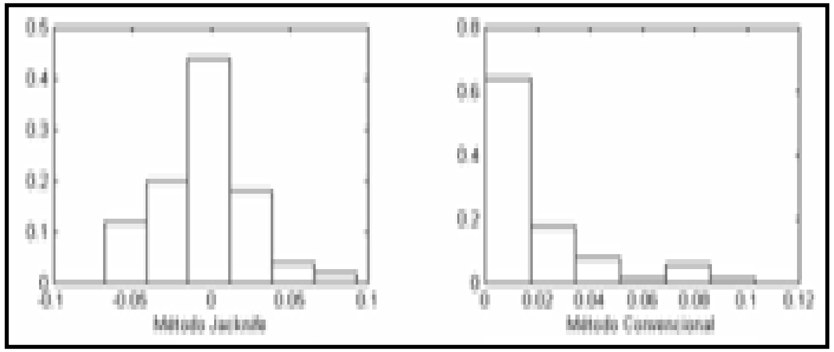
Tamaño muestral(n=5)



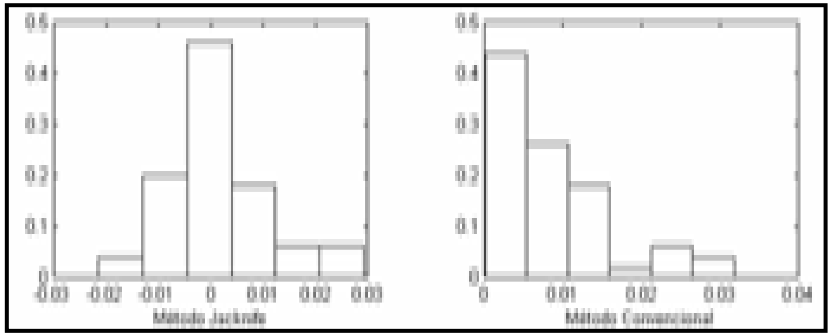
Tamaño muestral (n=15)



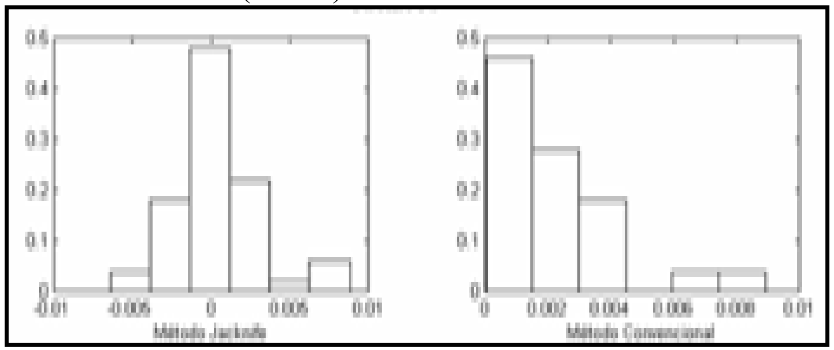
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)

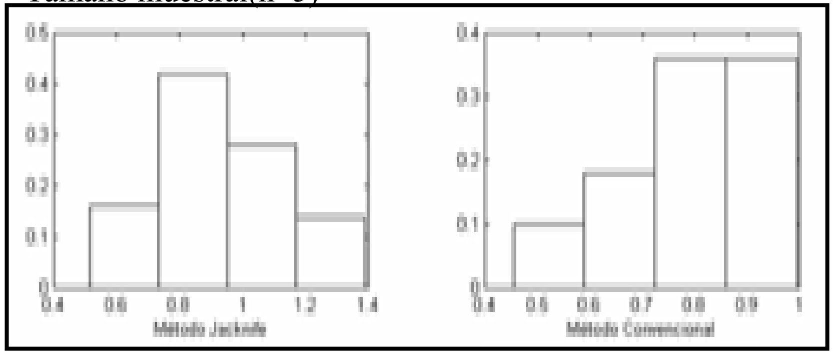


Tamaño muestral (n=500)

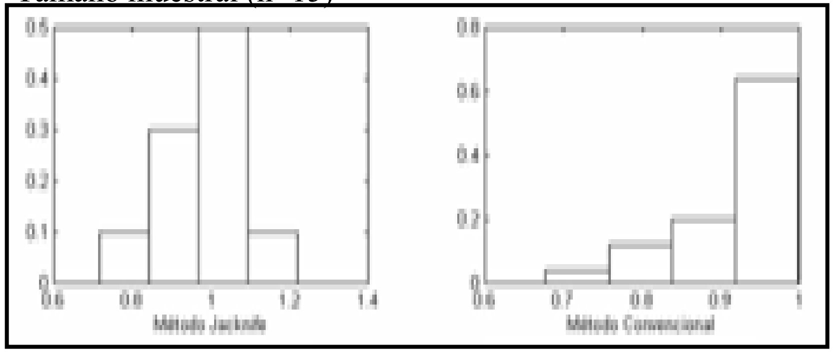


ÚLTIMO ESTADÍSTICO DE ORDEN

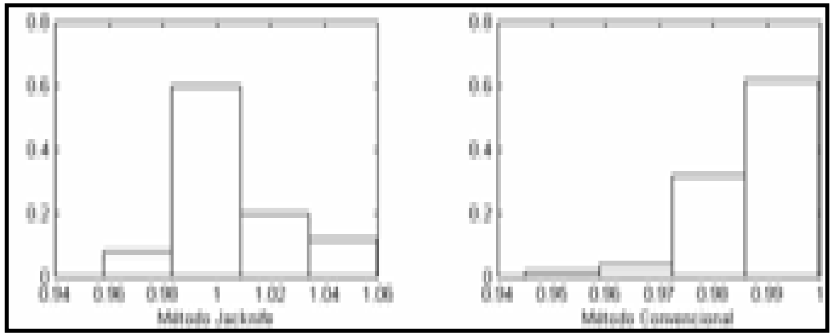
Tamaño muestral(n=5)



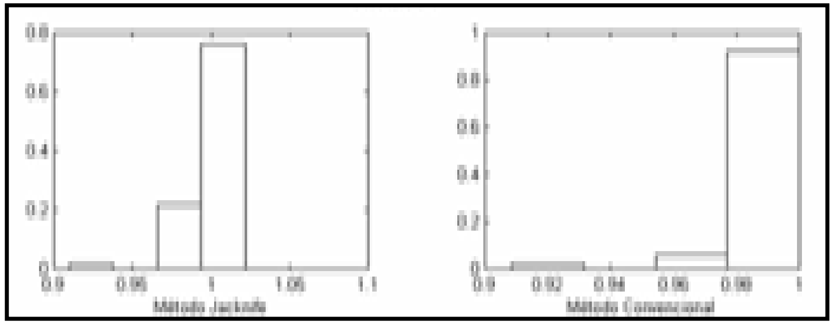
Tamaño muestral (n=15)



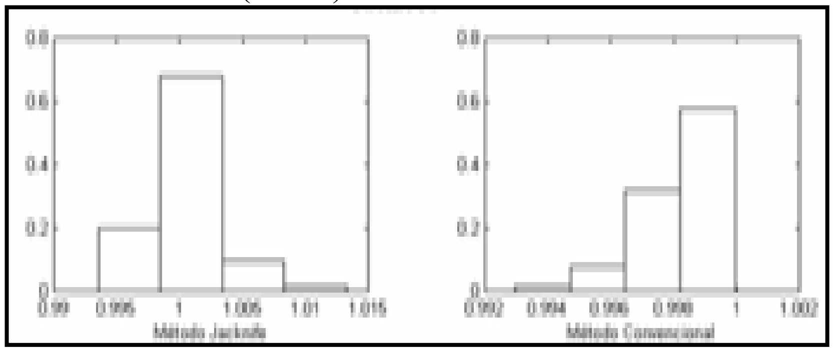
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)



Tamaño muestral (n=500)



ANEXO 11

EJEMPLO PARA EL CASO DE ESTIMACIÓN DE LA VARIANZA PARA POBLACIÓN POISSON CON PÁRAMETRO λ=20

Tabla 1
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Poisson con parámetro λ=20 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	41.456	21.329	20.308	20.445	19.805
Varianza	1,626.832	67.680	23.001	9.448	1.615
Asimetría	1.934	0.622	0.451	-0.114	0.375
Error de Estimación Promedio	26.468	6.513	3.943	2.507	0.991
Kurtosis	6.204	3.034	2.779	2.559	3.222
Mínimo	3.641	7.273	11.367	13.973	17.149
Máximo	182.117	43.224	32.498	26.499	23.053
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	4.004	8.828	13.542	15.542	17.462
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	27,171.894	64.576	30.612	26.928	22.464
Longitud Promedio del Int. De Conf.	27,167.890	55.748	17.070	11.386	5.002
Sesgo de Estimación	**21.456**	**1.329**	**0.308**	**0.040**	**-0.195**

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla 2
Estimación por el Método Jacknife
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Poisson con parámetro λ=20 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	18.789	17.929	19.472	20.041	19.724
Varianza	187.712	40.239	20.967	9.043	1.602
Asimetría	1.454	0.249	0.456	-0.124	0.375
Error de Estimación Promedio	10.328	5.614	3.806	2.404	1.010
Kurtosis	4.862	2.251	2.782	2.551	3.222
Mínimo	2.560	6.329	11.004	13.670	17.084
Máximo	63.440	32.667	31.228	25.886	22.957
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	13.864	15.606	17.524
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	55.370	35.200	30.858	27.319	22.466
Longitud Promedio del Int. De Conf.	55.370	35.200	16.994	11.713	4.942
Sesgo de Estimación	-1.211	-2.072	-0.528	0.041	-0.276

Elaboración: *R. Plúa*

EJEMPLO PARA EL CASO DE ESTIMACIÓN DEL VALOR MÍNIMO PARA POBLACIÓN POISSON CON PÁRAMETRO λ=25

Tabla 3

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Poisson con parámetro λ=25 utilizando el Método Jacknife

Tamaño Muestral / *Medidas Descriptivas*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	19.424	20.096	16.717	15.935	13.922
Varianza	35.322	13.308	11.836	8.859	5.983
Asimetría	-0.129	-1.131	-1.288	-0.755	-0.766
Error de Estimación Promedio	**19.424**	**20.096**	**16.717**	**15.935**	**13.922**
Kurtosis	2.678	5.194	5.058	3.449	2.747
Mínimo	**7.000**	**6.600**	**4.160**	**8.060**	**8.008**
Máximo	32.200	26.000	22.000	22.000	18.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	8.942	16.613	13.183	12.947	11.575
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	29.906	23.580	20.251	18.924	16.270
Longitud Promedio del Int. De Conf.	20.964	6.967	7.069	5.976	4.695
Sesgo de Estimación	**19.424**	**20.096**	**16.717**	**15.935**	**13.922**

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla 4

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Poisson con parámetro λ=25 utilizando el Método Convencional

Tamaño Muestral / *Medidas Descriptivas*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	23.200	21.720	18.520	17.460	15.120
Varianza	16.082	6.042	3.969	3.478	2.271
Asimetría	0.172	-0.514	-0.929	-0.556	-0.386
Error de Estimación Promedio	23.200	21.720	18.520	17.460	15.120
Kurtosis	2.962	3.038	4.038	3.609	2.427
Mínimo	15.000	15.000	12.000	13.000	12.000
Máximo	33.000	26.000	22.000	22.000	18.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	12.031	7.374	3.905	3.655	2.954
Longitud Promedio del Int. De Conf.	12.031	7.374	3.905	3.655	2.954
Sesgo de Estimación	23.200	21.720	18.520	17.460	15.120

Elaboración: *R. Plúa*

EJEMPLO PARA EL CASO DE ESTIMACIÓN DEL VALOR MÍNIMO PARA POBLACIÓN BINOMIAL NEGATIVA CON PÁRAMETROS r=50 Y p=0.5

Tabla 5

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Binomial Negativa con parámetros r=50 y p=0.5 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	84.324	81.776	76.944	74.908	72.584
Varianza	74.158	36.446	32.308	21.669	15.854
Asimetría	0.156	-0.032	-0.425	-0.745	-1.077
Error de Estimación Promedio	**34.324**	**31.776**	**26.944**	**24.908**	**22.584**
Kurtosis	3.280	2.481	2.858	3.024	3.723
Mínimo	**63.400**	**66.800**	**63.220**	**64.060**	**61.018**
Máximo	108.000	94.000	88.000	82.010	79.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	72.287	74.689	70.797	69.552	68.476
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	96.361	88.863	83.091	80.263	76.692
Longitud Promedio del Int. De Conf.	24.074	14.174	**12.293**	**10.711**	**8.216**
Sesgo de Estimación	**34.324**	**31.776**	**26.944**	**24.908**	**22.584**

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla 6

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Binomial Negativa con parámetros r=50 y p=0.5 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	88.660	85.080	80.080	77.640	74.680
Varianza	38.229	18.238	13.096	7.827	5.936
Asimetría	0.659	0.232	0.003	-0.647	-0.606
Error de Estimación Promedio	38.660	35.080	30.080	27.640	24.680
Kurtosis	4.002	2.456	2.523	3.574	2.790
Mínimo	77.000	77.000	73.000	70.000	69.000
Máximo	108.000	94.000	88.000	83.000	79.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	50.000	50.000	50.000	50.000	50.000
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	68.549	62.812	57.093	55.483	54.776
Longitud Promedio del Int. De Conf.	18.549	12.812	7.093	5.483	4.776
Sesgo de Estimación	38.660	35.080	30.080	27.640	24.680

Elaboración: *R. Plúa*

EJEMPLO PARA EL CASO DE ESTIMACIÓN DEL VALOR MÍNIMO PARA POBLACIÓN BINOMIAL CON PÁRAMETROS n=50 Y p=0.2

Tabla 7

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Binomial con parámetros n=20 y p=0.2 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas \ ***Tamaño Muestral***	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	1.060	0.793	0.288	0.043	0.000
Varianza	2.773	1.573	0.962	0.645	0.000
Asimetría	-0.128	-0.220	-0.452	-0.065	
Error de Estimación Promedio	1.612	1.204	0.916	0.637	0.000
Kurtosis	2.787	2.249	1.928	1.568	
Mínimo	**-2.400**	**-1.867**	**-1.960**	**-0.990**	0.000
Máximo	5.000	3.000	2.000	1.000	0.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-1.383	-0.208	-0.518	-0.539	0.000
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	3.503	1.794	1.095	0.625	0.000
Longitud Promedio del Int. De Conf.	4.886	2.002	1.614	1.164	0.000
Sesgo de Estimación	1.060	0.793	0.288	0.043	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla 8

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Binomial con parámetros n=20 y p=0.2 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas \ ***Tamaño Muestral***	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	1.940	1.260	0.700	0.340	0.000
Varianza	1.241	0.727	0.296	0.229	0.000
Asimetría	0.387	0.277	-0.077	0.676	
Error de Estimación Promedio	1.940	1.260	0.700	0.340	0.000
Kurtosis	3.000	2.508	2.389	1.456	
Mínimo	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Máximo	5.000	3.000	2.000	1.000	0.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	3.342	2.558	1.066	0.938	0.938
Longitud Promedio del Int. De Conf.	3.342	2.558	1.066	0.938	0.938
Sesgo de Estimación	1.940	1.260	0.700	0.340	0.000

Elaboración: *R. Plúa*

EJEMPLO PARA EL CASO DE ESTIMACIÓN DEL MÁXIMO VALOR PARA POBLACIÓN BINOMIAL CON PÁRAMETROS n=50 Y p=0.2

Tabla 9

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Último Estadístico de Orden de una Población Binomial con parámetros n=20 y p=0.2 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas \ *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	7.268	8.540	9.183	9.871	10.799
Varianza	3.763	3.550	2.171	2.090	1.548
Asimetría	0.369	0.797	0.223	0.251	0.064
Error de Estimación Promedio	**12.732**	**11.460**	**10.817**	**10.129**	**9.201**
Kurtosis	3.023	3.111	2.049	2.272	2.116
Mínimo	4.000	6.000	7.000	7.000	9.000
Máximo	**12.200**	**13.733**	**11.980**	**12.980**	**12.998**
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	4.692	6.138	7.570	8.047	9.469
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	9.844	10.942	10.797	11.695	12.129
Longitud Promedio del Int. De Conf.	**5.152**	**4.805**	**3.227**	**3.648**	**2.660**
Sesgo de Estimación	**-12.732**	**-11.460**	**-10.817**	**-10.129**	**-9.201**

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla 10

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Último Estadístico de Orden de una Población Binomial con parámetros n=20 y p=0.2 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas \ *Tamaño Muestral*	5	15	50	100	500
Media	6.340	7.420	8.360	8.940	10.120
Varianza	1.576	1.269	1.051	0.874	0.557
Asimetría	-0.226	0.418	0.612	0.422	0.104
Error de Estimación Promedio	13.660	12.580	11.640	11.060	9.880
Kurtosis	2.602	2.367	3.070	2.566	2.461
Mínimo	4.000	6.000	7.000	7.000	9.000
Máximo	9.000	10.000	11.000	11.000	12.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	2.574	4.041	6.350	7.108	8.658
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	10.106	10.800	10.370	10.772	11.582
Longitud Promedio del Int. De Conf.	7.532	6.759	4.020	3.665	2.925
Sesgo de Estimación	-13.660	-12.580	-11.640	-11.060	-9.880

Elaboración: *R. Plúa*

EJEMPLO PARA EL CASO DE ESTIMACIÓN DEL MÍNIMO VALOR PARA POBLACIÓN BETA CON PÁRAMETROS ν=20 Y ω=2

Tabla 11

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Beta con parámetros ν=20 y ω=2 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas* \ *Tamaño Muestral	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.862	0.818	0.787	0.754	0.726
Varianza	0.003	0.004	0.004	0.004	0.003
Asimetría	-0.715	-0.987	-1.623	-1.112	-1.430
Error de Estimación promedio	**0.862**	**0.818**	**0.787**	**0.754**	**0.726**
Kurtosis	2.712	4.425	6.222	4.297	5.423
Mínimo	0.713	0.597	0.565	0.551	0.532
Máximo	0.942	0.931	0.865	0.850	0.807
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.789	0.759	0.737	0.689	0.680
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.935	0.878	0.837	0.818	0.771
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.146	0.119	0.100	0.129	0.092
Sesgo de Estimación	**0.862**	**0.818**	**0.787**	**0.754**	**0.726**

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla 12

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Beta con parámetros ν=20 y ω=2 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas* \ *Tamaño Muestral	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.888	0.846	0.813	0.787	0.749
Varianza	0.002	0.002	0.001	0.002	0.001
Asimetría	-0.484	-0.516	-0.929	-0.569	-0.981
Error de Estimación promedio	0.888	0.846	0.813	0.787	0.749
Kurtosis	2.725	3.496	4.078	2.974	4.135
Mínimo	0.796	0.725	0.701	0.685	0.643
Máximo	0.952	0.935	0.867	0.855	0.808
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.115	0.126	0.070	0.075	0.064
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.115	0.126	0.070	0.075	0.064
Sesgo de Estimación	0.888	0.846	0.813	0.787	0.749

Elaboración: *R. Plúa*

EJEMPLO PARA EL CASO DE ESTIMACIÓN DEL MÁXIMO VALOR PARA POBLACIÓN BETA CON PÁRAMETROS ν=2 Y ω=20

Tabla 13

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Último Estadístico de Orden de una Población Beta con parámetros ν=2 y ω=20 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas \ ***Tamaño Muestral***	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.200	0.256	0.304	0.338	0.394
Varianza	0.010	0.008	0.005	0.005	0.008
Asimetría	1.146	1.517	0.841	1.453	2.282
Error de Estimación promedio	**0.800**	**0.744**	**0.696**	**0.662**	**0.606**
Kurtosis	3.851	5.708	3.660	4.958	10.454
Mínimo	0.051	0.137	0.178	0.250	0.301
Máximo	**0.477**	**0.553**	**0.515**	**0.574**	**0.796**
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.095	0.165	0.229	0.267	0.327
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.305	0.346	0.379	0.409	0.461
Longitud Promedio del Int. De Conf.	**0.211**	**0.180**	**0.150**	**0.142**	**0.134**
Sesgo de Estimación	**-0.800**	**-0.744**	**-0.696**	**-0.662**	**-0.606**

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla 14

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Último Estadístico de Orden de una Población Beta con parámetros ν=2 y ω=20 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas \ ***Tamaño Muestral***	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	0.162	0.214	0.266	0.302	0.360
Varianza	0.004	0.003	0.002	0.002	0.003
Asimetría	0.798	0.863	0.454	1.264	1.789
Error de Estimación promedio	0.838	0.786	0.734	0.698	0.640
Kurtosis	3.041	3.639	3.112	5.640	7.764
Mínimo	0.049	0.124	0.170	0.240	0.296
Máximo	0.318	0.362	0.377	0.473	0.580
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.000	0.054	0.177	0.213	0.256
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	0.355	0.374	0.354	0.390	0.463
Longitud Promedio del Int. De Conf.	0.355	0.320	0.177	0.177	0.207
Sesgo de Estimación	-0.838	-0.786	-0.734	-0.698	-0.640

Elaboración: *R. Plúa*

EJEMPLO PARA EL CASO DE ESTIMACIÓN DEL ESTIMADOR INSESGADO PARA LA VARIANZA DE UNA POBLACIÓN POISSON CON PÁRAMETRO λ=2

Tabla 15

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Poisson con parámetro λ=2 utilizando el Método Jacknife

Tamaño Muestral / *Medidas Descriptivas*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	2.246	1.969	2.006	1.941	1.990
Varianza	3.148	0.650	0.201	0.098	0.013
Asimetría	1.497	0.802	0.754	-0.126	0.108
Error de Estimación Promedio	1.258	0.655	0.359	0.251	0.093
Kurtosis	5.201	2.983	4.446	2.396	2.552
Mínimo	0.000	0.838	1.198	1.368	1.737
Máximo	8.500	3.981	3.592	2.657	2.218
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0.536	1.165	1.360	1.720
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	6.271	3.402	2.848	2.523	2.261
Longitud Promedio del Int. De Conf.	**6.271**	**2.866**	**1.683**	1.164	0.540
Sesgo de Estimación	0.246	-0.031	0.006	-0.059	-0.010

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla 16

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Población Poisson con parámetro λ=2 utilizando el Método Convencional

Tamaño Muestral / *Medidas Descriptivas*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	2.246	1.969	2.006	1.941	1.990
Varianza	3.148	0.650	0.201	0.098	0.013
Asimetría	1.497	0.802	0.754	-0.126	0.108
Error de Estimación Promedio	1.258	0.655	0.359	0.251	0.093
Kurtosis	5.201	2.983	4.446	2.396	2.552
Mínimo	0.000	0.838	1.198	1.368	1.737
Máximo	8.500	3.981	3.592	2.657	2.218
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0	0	1.428	1.512	1.768
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	6.817	4.077	3.179	2.646	2.267
Longitud Promedio del Int. De Conf.	6.817	4.077	1.751	1.135	0.499
Sesgo de Estimación	0.246	-0.031	0.006	-0.059	-0.010

Elaboración: *R. Plúa*

EJEMPLO PARA EL CASO DE ESTIMACIÓN DEL ESTIMADOR INSESGADO PARA LA VARIANZA DE UNA POBLACIÓN EXPONENCIAL CON PÁRAMETRO β=2

Tabla 17

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Exponencial con parámetro β=10 utilizando el Método Jacknife

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	83.513	105.724	95.372	101.232	99.346
Varianza	7,392.872	5,026.261	1,060.966	911.249	136.101
Asimetría	1.505	1.346	1.083	1.012	0.086
Error de Estimación Promedio	70.260	52.436	26.663	21.538	9.143
Kurtosis	4.924	5.181	4.456	3.964	3.184
Mínimo	1.639	15.016	47.825	53.000	68.605
Máximo	364.475	364.282	209.646	182.355	127.395
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.00	0.00	32.739	51.979	76.215
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	233.415	229.076	158.004	150.486	122.477
Longitud Promedio del Int. De Conf.	**233.415**	**229.076**	125.265	98.506	46.262
Sesgo de Estimación	-16.487	5.724	-4.628	1.232	-0.654

Elaboración: *R. Plúa*

Tabla 18

Estimación por el Método Jacknife

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Exponencial con parámetro β=10 utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas / *Tamaño Muestral*	**5**	**15**	**50**	**100**	**500**
Media	83.513	105.724	95.372	101.232	99.346
Varianza	7,392.872	5,026.261	1,060.966	911.249	136.101
Asimetría	1.505	1.346	1.083	1.012	0.086
Error de Estimación Promedio	70.260	52.436	26.663	21.538	9.143
Kurtosis	4.924	5.181	4.456	3.964	3.184
Mínimo	1.639	15.016	47.825	53.000	68.605
Máximo	364.475	364.282	209.646	182.355	127.395
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.00	0.00	67.905	78.828	88.263
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	314.862	289.660	151.144	137.992	113.153
Longitud Promedio del Int. De Conf.	314.862	289.660	83.238	59.164	24.891
Sesgo de Estimación	-16.487	5.724	-4.628	1.232	-0.654

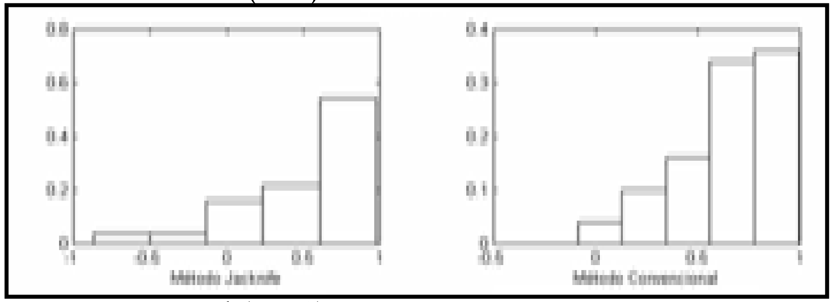
Elaboración: *R. Plúa*

ANEXO 12

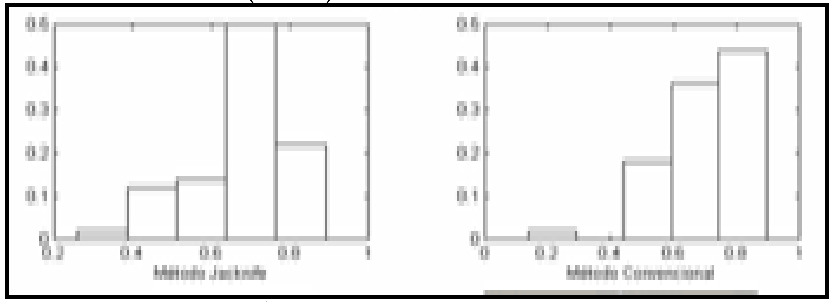
Histogramas Para El Coeficiente de Correlación de la distribución Normal Bivariada con parámetros μ_1=-3, μ_2=2 y ρ=0.7; utilizando la Estimación Jacknife y la Estimación Convencional.

<u>MEDIANA MUESTRAL</u>

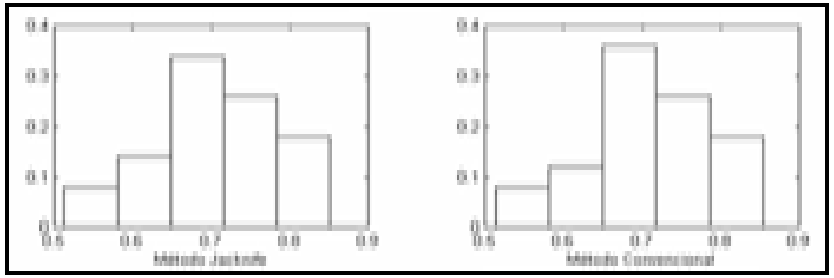
Tamaño muestral(n=5)



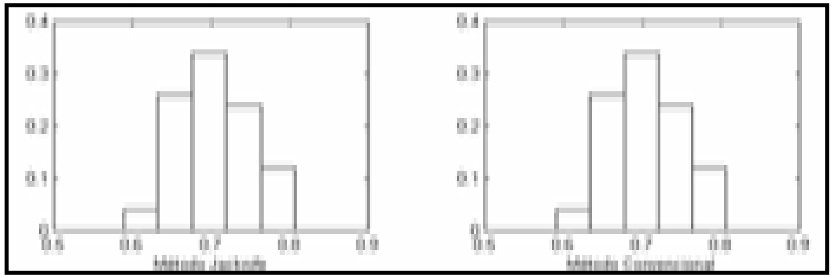
Tamaño muestral (n=15)



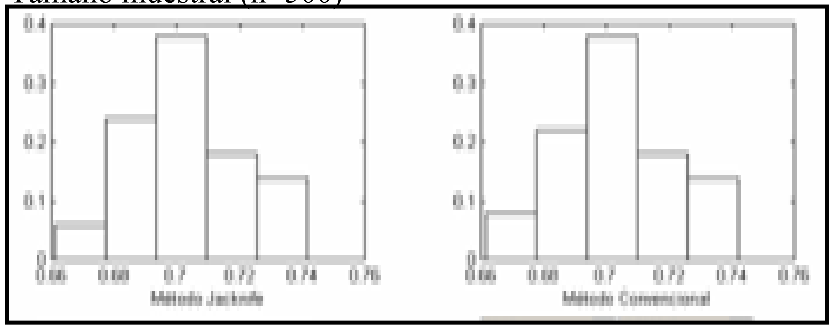
Tamaño muestral (n=50)



Tamaño muestral (n=100)



Tamaño muestral (n=500)



BIBLIOGRAFÍA

1. **MARTÍNEZ, W. & MARTÍNEZ, A.,** (2002), "*Computational Statistics Handbook with MATLAB*", Chapman & Hall/CRC, United States of America.

2. **PÉREZ, C.**, (2000), "*Técnicas de Muestreo-Estadística*", Grupo editor Alfaomega, Madrid - España.

3. **BRANDT, S.,** (1999), "*Data Analysis and Statistical & Computational Methods*", Springer, New York Inc., United States of America.

4. **GARCÍA, J., RODRÍGUEZ, J. Y BRÁZALEZ, A.**, (1999), "*Aprenda Matlab como si estuviera en primero*", Universidad de Navarra, San Sebastián

5. **MENDENHALL, W.** (1994). *"Estadística Matemática con Aplicaciones*", Grupo Editorial Iberoamérica, México - México.

6. **ROBERT R. S. & JAMES R. F.**,(1994) "*Biometry*" W. H. Freeman & Co., New York, United States of America.

7. **EVANS, M. & HOSTINGS, N.** (1993) "*Statistical Distributions*" John Wiley & Sans, Inc, Otawa - Canada.

8. **LAW & KELTON**, (1991), "*Simulation Model and Analysis*", Mc. Graw Hill, Bogotá-Colombia.

9. **MURRAY, R. S.**,(1982), "*Teoría y Problemas de Estadística*", Mc. Graw Hill, Bogotá-Colombia

10. **PARZEN, E.** (1972), "*Procesos Estocásticos*". Paraninfo, Madrid - España.

11. **PAPOULIS,** (1965). *"Probabilidad y Variables Aleatorias",* segunda edición, Mc-Graw Hill, Tokio - Japón.

12. **QUENOUILLE, M.**, (1956), "*Notes on bias in estimation*", Biométrika 52, 647-649.

13. **QUENOUILLE, M.,** (1949), "*Aproximate tests of correlation in time series*", Journal Royal Statistical Society B11, 68-84.

14. **LUIS MOLINERO**, (2002), *"Métodos autosuficientes de remuestreo",* http://www.seh-lelha.org/randomization.htm