



# **ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**

Instituto de Ciencias Matemáticas  
Ingeniería en Logística y Transporte

“Diseño e implementación de una heurística para el problema de ruteo vehicular con recolección y entrega de mercadería (vrppd).”

## **TESIS DE GRADO**

Previo a la obtención del título de:  
Ingeniera en Logística y Transporte

Presentado por:  
Gisella Mercedes Cepeda García  
Maritza Katusca San Lucas Muñoz

Guayaquil, Ecuador

2012

# Dedicatorias

A Dios que me ha dado las fuerzas y me ha permitido seguir siempre adelante, en especial a mis padres José San Lucas, Genoveva Muñoz y a mis hermanos que han sido de gran estímulo y apoyo en mi vida, a mi esposo e hijo querido que con su apoyo y paciencia han sido mi motivación para llevar a cabo la culminación de otra meta.

Maritza Katusca

Dedico este trabajo a Dios por otorgarme la vida y darme esa fortaleza para seguir adelante. A mis padres Marcos Cepeda Chele y Ramona García Gamboa por todo el sacrificio que han hecho, por acompañarme en cada uno de esos desvelos y apoyarme en todo momento, por sus consejos y comprensión ya que sin ellos yo no fuera lo que soy ahora. A mi ñaña, aunque lejos ella siempre está apoyándome y pendiente de mí. A mi Mamita Flor y mi tía Jaque que siempre me están apoyando en todo momento. A mi bisabuelita Agustina que cada día le pide a Dios por nosotros para que cada una de nuestras metas se culminen. Y por último, a todas aquellas personas que creyeron en mí.

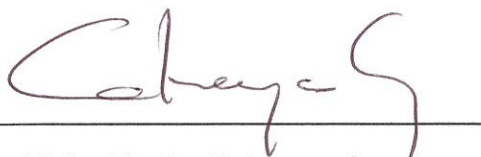
Gisella Mercedes

# Agradecimientos

Gracias le damos a Dios por habernos dado la vida y guiado siempre al camino del éxito, permitirnos finalizar cada una de nuestras metas, siendo esta tesis el resultado de nuestro esfuerzo y la apertura a muchas más. A nuestros padres Marcos Cepeda Chele, Ramona García Gamboa, José San Lucas Franco y Genoveva Muñoz Coello que son los pilares fundamentales en nuestras vidas, por cada uno de sus desvelos, consejos y apoyo incondicional que nos supieron brindar en todo momento. A nuestros profesores, quienes supieron impartir con paciencia, motivación y ahínco cada uno de sus conocimientos. M.Sc. Fernando Sandoya, M.Sc. Guillermo Baquerizo, M.Sc. Víctor Vega, M.Sc. Daniel Agreda y en especial al M.Sc. Erwin Delgado Bravo quien depositó su confianza en nosotras, teniendo un rol de tutor invaluable no solamente en el desarrollo de esta tesis, sino también en nuestra formación como investigadores. Además a todas aquellas personas que de una u otra forma, nos ayudaron o intervinieron en la culminación de esta investigación, les damos nuestros más sinceros agradecimientos. Finalmente le hacemos extenso un eterno agradecimiento a esta prestigiosa universidad que nos abrió sus puertas y nos formó para ser personas de excelencia y poder contribuir con el desarrollo del país.

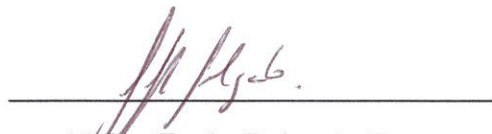
Maritza y Gisella

# Tribunal de Graduación



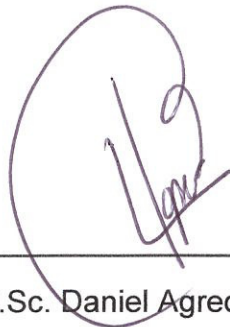
M.Sc. Xavier Cabezas García

PRESIDENTE



M.Sc. Erwin Delgado Bravo

DIRECTOR DE TESIS DE GRADO



M.Sc. Daniel Agreda De La Paz


VOCAL

## Declaración Expresa

La responsabilidad por los hechos y doctrinas expuestas en este Proyecto de Graduación, nos corresponden exclusivamente, así como el Patrimonio Intelectual del mismo, corresponde a la Escuela Superior Politécnica del Litoral.



Gisella Cepeda García



Maritza San Lucas Muñoz

# RESUMEN

Este documento presenta un modelo para resolver el problema de enrutamiento de vehículos con recolección y entrega de mercadería (VRPPD) con flota homogénea. Esta fase está compuesta de procedimientos heurísticos donde se construye una solución inicial que es mejorada mediante el 2-Opt. El procedimiento tiene como función objetivo minimizar el costo total de las rutas sin olvidar que debemos mantener un buen servicio al cliente.

El VRPPD, consiste en encontrar una solución viable donde se realice la entrega y recolección de productos simultáneamente recorriendo todos los clientes de una ruta que están geográficamente dispersos, comenzando en un punto dado (Depósito) y terminando en el mismo, con la finalidad de minimizar la distancia recorrida. La gran cantidad de aplicaciones hacen que este problema no sólo tenga interés teórico, sino también, una gran importancia práctica, perteneciendo a la clase de problemas NP-Duro por ser derivado del VRP. Por ser un problema de Optimización Combinatoria, el VRPPD puede ser modelado mediante formulaciones de programación lineal entera o entera mixta y el algoritmo del vecino más cercano nos puede ayudar de una forma más efectiva a encontrar una buena solución para la empresa a estudiarse.

# ÍNDICE GENERAL

RESUMEN .....	VI
ÍNDICE GENERAL .....	VII
ÍNDICE DE FIGURAS.....	X
ÍNDICE DE TABLAS .....	XI
GLOSARIO .....	XII
ABREVIATURAS .....	XV
INTRODUCCIÓN.....	1
Objetivo General.....	4
Objetivos Particulares .....	5
CAPÍTULO 1.....	6
PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS .....	6
1.1 Introducción .....	6
1.2 Métodos de Solución.....	11
CAPÍTULO 2.....	14
PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULO CON RECOLECCIÓN Y ENTREGA DE MERCADERÍA (VRPPD).....	14
2.1 Definición del VRPPD .....	14
2.2 Estado del Arte.....	16
2.3 Planteamiento del problema de ruteo de vehículo con entrega y recolección de mercadería (VRPPD).....	18

2.3.1 Definición del problema .....	18
2.4 VRPPD: Visión estática.....	19
2.4.1 Sector de distribución.....	19
2.4.2 Demanda.....	20
2.4.3 Rutas .....	22
2.4.4 Flota .....	22
2.4.5 Posibles rutas.....	22
2.4.6 Solución.....	22
2.5 Modelo de programación lineal del VRPPD .....	23
2.5.1 Datos de entrada .....	23
2.5.2 Datos .....	24
2.5.3 Costo .....	24
2.5.4 Arcos.....	25
2.5.4 Variables de decisión .....	25
2.5.5 Carga de vehículos.....	25
2.5.6 Función Objetivo .....	26
2.5.7 Restricciones .....	26
CAPÍTULO 3.....	30
DESARROLLO DE UNA HEURÍSTICA BASADA EN EL VECINO MÁS CERCANO PARA EL VRPPD.....	30
3.1 Introducción .....	30
3.2 Descripción de la implementación de la heurística .....	31
3.3 Descripción de la implementación de la heurística de búsqueda local 2-Opt.....	32



3.3.1 Procedimiento entre ruta basado en 2-Opt.....	33
CAPÍTULO 4.....	36
ANÁLISIS DE LA HEURÍSTICA PROPUESTA .....	36
4.1 Introducción .....	36
4.2Aplicación de la heurística del Vecino más cercano .....	38
4.3 Mejora con la heurística 2-Opt.....	41
4.4 Comparación entre un modelo exacto del VRPPD y la heurística propuesta .....	43
4.5Aplicación de la heurística en comparación con la empresa .....	43
CAPÍTULO 5.....	48
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	48
5.1 Conclusiones.....	48
5.2 Recomendaciones .....	50
BIBLIOGRAFÍA .....	52
ANEXO A .....	54
Entrevista realizada al Gerente de Supply Chain.....	54
Codificación Del Programa VCM .....	56
Matriz de Distancia .....	57

# ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.1</b> Variantes del VRP.....	11
<b>Figura 2.1</b> Ubicación geográfica de los clientes en la Zona Norte de Guayaquil.....	20
<b>Figura 3.1</b> Ilustración de cambio de vértices para un camino 2-opt.....	34
<b>Figura 4.1</b> Concentración de clientes Zona Norte.....	37
<b>Figura 4.2</b> Representación de ubicación para cálculo de distancia entre clientes.....	39
<b>Figura 4.3</b> Rutas generadas por la heurística del VCM.....	41
<b>Figura 4.4</b> Rutas generadas por la heurística del 2 Opt.....	42
<b>Figura 4.5</b> Costos.....	46
<b>Figura 4.6</b> Ahorros.....	46

# ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 2.1</b> Demanda a Entregar y Recoger.....	21
<b>Tabla 4.1</b> Rutas factibles generadas por el VCM.....	40
<b>Tabla 4.2</b> Costos de la Heurística del VCM y 2-Opt.....	43
<b>Tabla 4.3</b> Resumen de las rutas finales mejoradas.....	44
<b>Tabla 4.4</b> Costos de la Situación actual.....	45
<b>Tabla 4.5</b> Costos de la propuesta.....	45
<b>Tabla 4.6</b> Comparación de los costos entre situación actual y propuesta.....	47

# GLOSARIO

**Algoritmo:** Conjunto finito de pasos que deben ser específicos y organizados para resolver un problema.

**Flota:** Es el conjunto de vehículos de las mismas o diferentes características que tiene una empresa.

**Flota homogénea:** Esto quiere decir que los vehículos que se utilizan en una flota son de las mismas características.

**Google Earth:** Es un programa informático que nos permite visualizar cada una de las partes del mundo a través de imágenes satelitales, mapas o se podrían combinar las dos. Mediante el buscador, podemos encontrar lugares de distintas partes del planeta logrando una visualización efectiva.

**Heurística:** Son técnicas o procedimientos que nos permiten resolver un problema.

**Heurística del Vecino más cercano:** Esta heurística nos ayuda a resolver los problemas de ruteo de vehículos (VRP) encontrando la distancia mínima entre los clientes.

**Intercambio:** Trata de una combinación factible entre clientes para lograr un recorrido más factible.

**Métrica de Manhattan:** O también distancia de Manhattan que es calculada tomando en consideración las coordenadas de un punto mediante la suma de las diferencias absolutas.

**NP-Duro:** Son problemas que no tienen una solución en tiempos razonables.

**Optimización:** Como su nombre lo indica es la acción o el hecho de optimizar, es decir buscar la mejor manera de encontrar una respuesta. Siendo un conjunto de teorías y técnicas que tratan de resolver instancias de problemas que los consideramos difíciles en general, reduciendo el tamaño del espacio y realizando una búsqueda eficientemente.

**Programación lineal entera:** Es un conjunto de problemas en donde todas o partes de sus variables son enteras.

**Restricción:** Son condiciones que deben cumplir los problemas de investigación de operaciones para una óptima solución.

**Solución Factible:** Es decir que es una solución viable y se puede realizar. Además que nos proporciona los mayores beneficios.

**Sistematización:** Evitar realizar trabajos manuales utilizando sistemas o elementos computarizados.

# ABREVIATURAS

**OC:** Optimización Combinatoria

**IO:** Investigación de Operaciones

**VRP:** Problema de ruteo de vehículos

**TSP:** Problema del agente viajero

**2-OPT:** Algoritmo de mejora que realiza una búsqueda local para encontrar una solución más factible utilizando una respuesta previa, esto quiere decir que de una secuencia de ruta donde existe cruce entre clientes este algoritmo realiza ciertos intercambios y las reordena.

**CVRP:** Problema de ruteo de vehículos capacitado

**VRPPD:** Problema de ruteo de vehículos con recolección y entrega de mercadería

**PVRP:** Problema de ruteo de vehículos periódico

**SVRP:** Problema de ruteo de vehículo estocástico

**MDVRP:** Problema de ruteo de vehículos con múltiples depósitos

**VRPTW:** Problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo

**CVRPTW:** Problema de ruteo vehicular capacitado con ventanas de tiempo

**IRP:** Problema de ruteo de Inventario

**FSMVRPTW:** Problema de ruteo de vehículos con tamaño en la flota y ventanas de tiempo



# INTRODUCCIÓN

Muchas empresas en el mundo se enfrentan diariamente al traslado de productos, personas, etc. Esta tarea no solo se lleva a cabo en las compañías que se dedican a la producción y por ende tienen que transportar sus productos, sino también en aquéllas donde se necesita llevar y traer materiales, personas de diversos sitios de la ciudad o del país.

Por lo que hoy en día la planificación de rutas en cada una de las empresas es uno de los principales problemas, pues la necesidad del transporte interno entre empresas ha ido aumentando con el paso del tiempo debido a que cada vez estamos más globalizados. Por lo que el costo derivado del transporte ha pasado a ser un factor importante en cualquier empresa.

Dado que los problemas de optimización tienen un fuerte impacto económico en el mundo empresarial, los investigadores se han inclinado considerablemente hacia el estudio y análisis de este tipo de problemas teniendo como uno de sus principales objetivos minimizar los costos de las operaciones logísticas, pues mejorar el ruteo de vehículos junto con la planificación representaría grandes ahorros en la economía de las empresas.

Además, el ruteo de vehículos (VRP) cuyas raíces se basan en el TSP, es un problema de programación entera y tiene una gama de variantes que nos permiten resolver cada una de las diversas situaciones en las que se encuentran las empresas en la actualidad.

El ruteo de vehículos con recolección y entrega de mercadería (VRPPD) es un problema de Optimización Combinatoria (OC), que se puede aplicar en diversas situaciones de la vida real dentro de la logística y la industria. Por ser derivado del VRP está dentro de los problemas NP-Duros, esto significa que debido a la complejidad computacional no se puede encontrar una solución en tiempos razonables, pues los tiempos se incrementan exponencialmente dependiendo de la cantidad de variables involucradas. Existen varios métodos de solución para el VRP, como son los exactos y los heurísticos. Para la resolución de nuestro problema aplicaremos la heurística del vecino más cercano y luego la solución será mejorada por la heurística del 2-Opt.

En la mayoría de las empresas se emplean diferentes modalidades al momento de entregar y recoger los productos, siendo una de éstas, primero entregar y luego recoger sin prever que el hecho de recoger al final del recorrido les genera un costo como si fuera una ruta adicional. Es por aquello que en este proyecto proponemos que se realice tanto la entrega como la recolección simultáneamente, obteniendo con esto un mayor ahorro.

La empresa donde vamos a realizar el estudio se dedica a la producción, almacenamiento y distribución de productos siendo sus envases retornables, es decir que manejan una logística en reversa, donde tener un buen manejo en la distribución reflejaría un ahorro significativo para la compañía. Proponemos una solución considerando la capacidad de los vehículos, la demanda a entregar y recoger de cada uno de los clientes, tomando en consideración estas características podemos darnos cuenta que estamos hablando de un VRPPD.

En nuestro entorno hay muchas empresas que planifican sus envíos utilizando métodos empíricos, estos métodos nos ayudan a encontrar soluciones parciales que no son óptimas en la práctica.

Mediante la aplicación de la heurística del vecino más cercano desarrollaremos un conjunto de rutas que cumplan con las condiciones antes mencionadas y un mínimo recorrido.

## Objetivo General

Diseño y desarrollo de un modelo de apoyo para la obtención de rutas factibles en la recolección y entrega de mercadería de una manera sistemática y razonada, intentando minimizar los costos totales involucrados en el ruteo vehicular, analizando la problemática actual de la empresa y su diseño general vehicular, basado en métodos heurísticos.

# Objetivos Particulares

Modelar el problema de ruteo de vehículos para reducir la distancia total recorrida por la flota vehicular, considerando la restricción de poca capacidad para transportar los bienes.

Diseñar e implementar una heurística que nos permita obtener una buena solución al problema de ruteo vehicular con recolección y entrega de productos.

Implementar la heurística en la empresa con la finalidad de mostrar el ahorro que se obtiene con la sistematización de las rutas.

# CAPÍTULO 1

## PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS

### 1.1 Introducción

El problema de ruteo de vehículos (Vehicle Routing Problem o VRP, por sus siglas en inglés), es un problema de optimización combinatoria (OC) bien conocido en Investigación de Operaciones (IO). Consiste en determinar un conjunto de rutas para una flota de vehículos que parten de uno o más depósitos o almacenes para satisfacer la demanda de varios clientes dispersos geográficamente en una región. [1]

Hoy en día, la planificación de las rutas es uno de los principales problemas en la optimización de las operaciones logísticas, pero su adecuada planificación puede significar grandes ahorros y aumentar el servicio al cliente. Estos ahorros se los puede obtener utilizando técnicas de Investigación de Operaciones (IO), dado que el VRP corresponde a los problemas de Optimización Combinatoria (OC) siendo una rama de la optimización en matemáticas aplicadas y en ciencias de la computación[2], relacionada a la investigación de operaciones, teoría de algoritmos y teoría de la complejidad computacional que facilita la resolución de este tipo de problemas, estimando que los costos del transporte representan entre el 10% y el 20% del costo final de los bienes. [3]

Las soluciones de este tipo de problemas se lo pueden realizar mediante técnicas heurísticas que permiten el acercamiento a soluciones óptimas de aquellos problemas que son difíciles de resolver por métodos exactos.

Existe una amplia gama de variantes del VRP, entre las más conocidas tenemos:

**CVRP (Problema de Ruteo de vehículo capacitado).**- En este tipo de problema tenemos un único origen y un conjunto de camiones, con una

capacidad  $Q$ , donde al momento de encontrar la ruta óptima debemos recolectar los productos de los clientes sin superar la capacidad del camión.

**VRPPD (Problema de Ruteo de Vehículo con Recolección y Entrega de Mercadería).**- En esta variante debemos encontrar la ruta óptima incluyendo la posibilidad de entregar y recolectar (devoluciones) el producto a cada uno de los clientes en lugar de sólo entregarla teniendo en consideración la capacidad del vehículo, pues una vez completada se debe volver al depósito.

**P-VRP (Problema de Ruteo de Vehículo Periódico).**-Se llama periódico debido a que las rutas deben ser diseñadas sobre múltiples días con un horizonte de planificación, es decir que cada cliente requiere  $n$  visitas durante dicho horizonte que pueden ser distribuidas en posibles agendas factibles para cada cliente, esto implica que el cliente recibirá el servicio en el día que se le fue asignado.

**S-VRP (Problema de Ruteo de Vehículo Estocástico).**- Aquí consideramos que tanto los clientes, la demanda y los tiempos son estocásticos, es decir que el cliente está presente con una probabilidad  $p$  y ausente con probabilidad  $1-p$ . Además que la demanda es una variable aleatoria al igual que el tiempo.



**SD-VRP (Problema de Ruteo de Vehículo con entregas divididas).**- En esta variante tomamos en consideración una relajación del problema, esto quiere decir que permitiremos que un cliente pueda ser atendido por varios vehículos siempre y cuando se refleje una reducción en los costos totales.

**MD-VRP (Problema de Ruteo de Vehículo con Múltiples Depósitos).**-En este problema tenemos múltiples depósitos para atender una gama de clientes, por lo que necesitamos señalar que depósito va atender cada cliente, y que flota va tener asignado cada depósito.

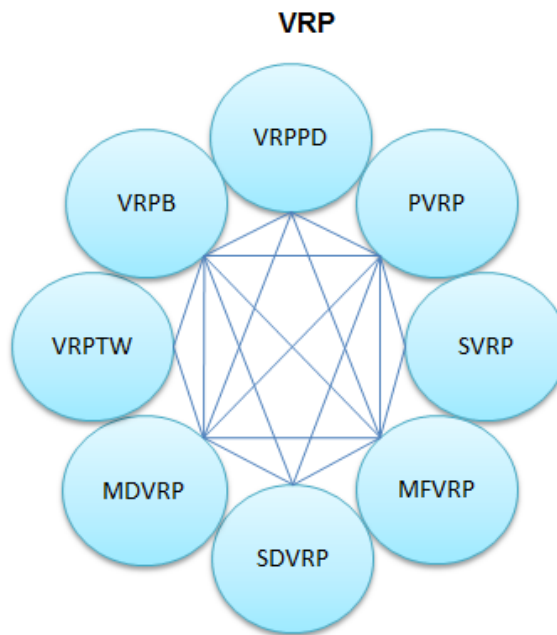
**VRP-TW (Problema de Ruteo de Vehículo con ventanas de Tiempo).**-En esta variante tenemos que tener en consideración la introducción de ventanas de tiempo o periodos fijos para entregar los productos a los clientes. Contemplando los esquemas de ventanas de tiempo duras y ventana de tiempo suaves.

- ✚ Las ventanas de tiempo duras es donde obligadamente tenemos que entregar los productos dentro del periodo establecido y no es posible realizarlo fuera de ellos.
- ✚ En cambio, las ventanas de tiempo suaves nos permiten entregar la mercadería fuera de los tiempos establecidos, pero haciéndonos acreedores a una penalización.

**CVRPTW (Problema de Ruteo de Vehículo Capacitado con ventanas de Tiempo).**-El VRP capacitado con ventanas de tiempo o periodos fijos se puede considerar como una variante significativa del VRP, donde tenemos una flota de vehículos con capacidad homogénea que debe realizar la entrega de los productos dentro de un periodo fijo asociado a cada cliente sin exceder la capacidad de la flota.

**IRP (Problema de Ruteo de Inventario).**-En el problema con inventario tenemos una flota de vehículos que debe abastecer cierta cantidad de clientes tomando en consideración las restricciones del inventario, es por aquello que encontrar la solución óptima de este problema se torna casi imposible de resolver en tiempos razonables.

**FSMVRPTW (Problema de Ruteo de Vehículo con tamaño en la flota y ventanas de tiempo).**- En este tipo de problema para encontrar la ruta óptima tenemos en consideración lo que sucede en la vida real, pues no es muy común encontrar en las empresas que la flota de vehículo tenga la misma capacidad, las mismas características y que los costos por estructura y mantenimiento sean los mismos. Además que cada cliente tenga un periodo fijo para la entrega de sus productos. Es por esto que esta variable es de gran utilidad.



**Figura 1.1** *Variantes del VRP*

## 1.2 Métodos de Solución

Para los problemas de ruteo de vehículos podemos obtener una buena solución yendo desde métodos sencillos donde sólo utilizamos herramientas gráficas y son problemas que no tienen mucha complejidad hasta llegar a modelar algoritmos heurísticos y metaheurísticos que nos den una solución más aproximada en tiempos limitados.

Hoy en día, se utiliza con gran magnitud los métodos de optimización combinatoria, para la obtención de soluciones en este tipo de problemas NP-Duro, por su alta complejidad computacional.

Los métodos de optimización no tienen pasos específicos a seguir, es decir al momento de su desarrollo vamos planteando lo que queremos que dicho modelo nos arroje.

Dentro de los algoritmos heurísticos para el VRP, podemos considerar tres categorías:

- ✚ Los algoritmos constructivos: Como su nombre lo indica, construyen una solución factible para el problema tratando de optimizar la función objetivo.
- ✚ Los algoritmos de dos fases: Estos algoritmos descomponen el problema en dos fases o etapas, la primera que es de agrupación de vértices y la otra de construcción de rutas.
- ✚ Los algoritmos de mejora: Por lo general parten de una solución factible inicial, luego realiza intercambios de arcos o vértices dentro de cada ruta o entre varias rutas para tratar de mejorarla.

El término heurística lo podemos relacionar con la tarea de resolver inteligentemente problemas reales usando el conocimiento disponible (Narducci, 2005)[4]

**Heurística:** proviene de un vocablo griego donde su etimología se comparte con la palabra eureka derivado de la exclamación de Arquímedes, es decir que encuentra o inventa, se podría describir como el arte y la ciencia del descubrimiento, su popularidad fue dada por el matemático George Pólya por su ansiedad de descubrir cómo se llegó a las aplicaciones matemáticas. Se podría definir como un proceso ingenioso, capaz de permitirnos resolver problemas o por lo menos ayudarnos a plantear una resolución. Además la utilización de las heurísticas en los problemas de Optimización Combinatoria es muy común aunque hay ocasiones donde no nos garantiza optimalidad.

**Metaheurísticas:** se puede decir que generalmente no tienen un algoritmo o una heurística específica que nos pueda brindar una buena solución, en su mayoría resuelven los problemas de Optimización Combinatoria (OC), teniendo en consideración que además de aquello también se las puede utilizar cuando queremos hacer la reformulación en términos heurísticos. Como ejemplo de los métodos metaheurísticos tenemos la Búsqueda Tabú y los algoritmos genéticos.

# CAPÍTULO 2

## PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULO CON RECOLECCIÓN Y ENTREGA DE MERCADERÍA (VRPPD).

### 2.1 Definición del VRPPD

El problema de recolección y entrega de mercadería es una variante del problema de ruteo de vehículos, donde su particularidad está en que tenemos objetos o individuos que deben ser recolectados y distribuidos en un espacio geográficamente referenciado. Estos problemas constituyen una clase importante dentro del VRP y poseen numerosas aplicaciones en diversas áreas, como la logística, en los envíos de contenedores, los servicios de ambulancias, etc.

Esta variante del VRP incluye la posibilidad de recoger y entregar mercancía en lugar de sólo entregarla. También se contempla la devolución de bienes por parte de los clientes. Por lo que hay que considerar que los bienes que entregan los clientes quepan en el vehículo. Esta restricción de devolución dificulta la planificación, lo que se traduce en una utilización ineficiente de la capacidad del vehículo y un aumento en las distancias de viaje. El fin es encontrar rutas viables de visita a los lugares de entrega y recibo para una flota de vehículos.

Por consiguiente es usual que se consideren situaciones restringidas, en donde todas las demandas de entrega empiezan desde el depósito y todos los bienes recogidos serán llevados de vuelta al depósito, logrando de esta manera que no se produzcan intercambios de bienes entre clientes. Otra alternativa es relajar la restricción de que los clientes deben ser visitados exactamente una vez. Otra simplificación usual es considerar que cada vehículo debe entregar todo su contenido antes de recoger otros bienes de los clientes. Donde el objetivo es minimizar la flota de vehículo y el tiempo total de recorrido con la restricción de que el vehículo debe tener suficiente capacidad para transportar los bienes a entregar así como los recogidos para devolverlos al depósito.

Durante los últimos años el desarrollo de la investigación sobre el VRPPD ha sido bastante paralelo al de otras variantes del VRP, concentrándose en análisis de algoritmos heurísticos debido a que la mayoría de los problemas reales relacionados son de gran tamaño. Sin embargo, las Metaheurísticas diseñadas para esta clase de problemas no han conseguido producir resultados tan buenos como los obtenidos para otras variantes del VRP.

## 2.2 Estado del Arte

El problema de enrutamiento vehicular con retiros y entregas se ramifica desde el problema del agente viajero (TSP) el cual consiste en: dado un conjunto de ciudades y un viajero, visitar todas las ciudades pasando por ellas sólo una vez, regresando al punto de origen y haciendo el menor tiempo posible [PAPADIMITRIOU, 1982][5]. Luego de este surge la aparición del el problema de ruteo de vehículos (VRP), el cual consiste en, dado un conjunto de clientes, depósitos ubicados geográficamente y una flota de vehículos, determinar un conjunto de rutas de costo mínimo que comiencen y terminen en los depósitos, con la restricción que los vehículos visiten a los clientes sólo una vez[3]. Según Olivera (2004, p5) Los Problemas de Ruteo de Vehículos son problemas de Optimización Combinatoria y pertenecen, en su mayoría, a la clase NP-Difícil. La motivación académica por resolverlos radica en que no es posible construir



algoritmos que en tiempo polinomial resuelvan cualquier instancia del problema (a no ser que  $P = NP$ )[5].

Este problema de ruteo de vehículo con recolección y entrega de mercadería se han ido introduciendo con mayor magnitud en la mente de los investigadores en los últimos tiempos, debido a las grandes aplicaciones que se pueden lograr con este tipo de problema en el área logística, siendo ésta el boom de la actualidad. Por su complejidad se debe analizar y estudiar bien su método de resolución.

En casos anteriores se ha encontrado buenas soluciones en el VRPPD por medio de los métodos metaheurísticos, en el cual tenemos a la Búsqueda tabú en la solución de:

Problema de Ruteo de Vehículos con Entrega y Recogida de Productos Simultáneamente. (Fermín Alfredo Tang Montané, Roberto Diéguez Galvão, 2006). (Sin C. Ho, Dag Haugland, 2004)[5].

## 2.3 Planteamiento del problema de ruteo de vehículo con entrega y recolección de mercadería (VRPPD).

### 2.3.1 Definición del problema

En la actualidad la mayoría de las empresas en Ecuador se dedican a la entrega y recolección de productos por separado, es por aquello que hemos visto la necesidad de investigar y plantear una heurística donde se haga este proceso en conjunto. Enfocándonos en la ciudad de Guayaquil para realizar nuestro estudio, la empresa que hemos escogido radica al noroeste de la ciudad y abastece a 300 clientes en la parte norte, para presentar nuestro programa sólo utilizaremos 50 de ellos.

Mediante una entrevista realizada al Gerente de Supply Chain de la empresa se pudo notar los problemas por los que está pasando la compañía, siendo éstos los siguientes:

- Los vehículos enviados a cubrir determinados clientes tanto en la entrega como en la recolección, llegan al centro de distribución sin haber recogido la demanda de ciertos clientes por la falta de un análisis antes de su envío.

- ✚ Hay ocasiones donde los transportistas visitan los clientes según su criterio, debido a que no cuentan con una planificación aceptable de las rutas.
- ✚ Sus costos de transportación son considerablemente elevados.

Es decir, que la empresa no cuenta con un programa donde se pueda prever estos inconvenientes y tener satisfechos a los clientes sin la necesidad que los costos por transportación se eleven.

En el presente estudio, se analizará la situación de la empresa tratando de encontrar alternativas de solución para el problema de ruteo de vehículo con entrega y recolección de productos, diseñando una heurística del Vecino más cercano donde nos permita obtener una buena solución.

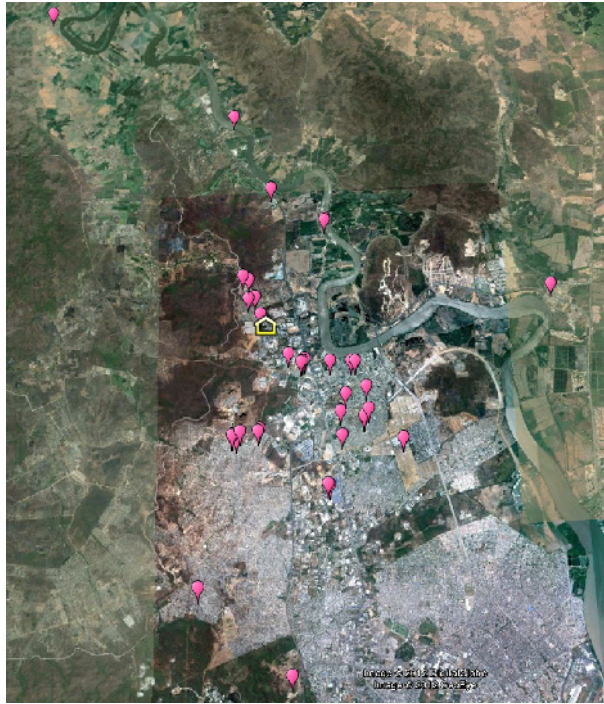
## **2.4 VRPPD: Visión estática**

En su visión estática, el problema de ruteo de vehículo con recolección y entrega de mercadería, está compuesto por:

### **2.4.1 Sector de distribución**

Los productos serán distribuidos en la parte norte de la Ciudad de Guayaquil debido a la concentración de clientes en dicho sector. Una

forma conveniente de representar y observar el sector es por medio de una foto Georeferenciada en Google Earth.



**Figura 2.1** Ubicación geográfica de los clientes en la Zona Norte de Guayaquil

#### 2.4.2 Demanda

La demanda a entregar y a recoger está asociada a un solo cliente donde el cliente espera la entrega de su producto en cajas y a su vez realiza la devolución de la mercadería que está en mal estado o implemente son los envases vacíos, más conocido en el medio como

Logística en reversa. Las demandas a entregar y recoger son conocidas al comenzar el problema.

CLIENTES	DEMANDA ENTREGAR	DEMANDA RECOGER
1	10	20
2	59	45
3	150	130
4	20	25
5	50	50
6	12	12
7	5	15
8	65	82
9	120	90
10	35	35
11	30	30
12	21	31
13	85	70
14	55	50
15	8	8
16	78	78
17	25	25
18	10	15
19	21	18
20	15	30
21	110	90
22	36	25
23	30	30
24	21	18
25	177	170
26	45	50
27	32	15
28	75	85
29	25	20
30	24	15
31	40	40
32	30	25
33	27	45
34	10	15
35	46	40
36	10	23
37	50	50
38	60	60
39	92	70
40	18	10
41	28	15
42	12	20
43	17	10
44	20	40
45	74	94
46	65	50
47	63	67
48	10	20
49	60	50
50	18	25

**Tabla 2.1** *Demanda a Entregar y Recoger.*

### 2.4.3 Rutas

Denominamos ruta al trayecto que se debe recorrer para trasladar los productos o mercancías de un lugar de origen (Depósito) hasta un lugar de destino (Cliente) y después regresar a su lugar de origen  $r = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_0\}$ . Con  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$ . Cada ruta tiene asignado un vehículo y se asume que el vehículo podrá realizar con éxito la entrega y recogida de los productos.

### 2.4.4 Flota

Nuestra flota de distribución está formada por un conjunto homogéneo de vehículos con capacidad de 6 palet, cabe indicar que la flota que la empresa utiliza es tercerizada y ellos le indican la ruta que deben de seguir.

### 2.4.5 Posibles rutas

Consideramos que una ruta es posible o viable cuando se pueda realizar todo el recorrido y no se exceda la capacidad del vehículo.

### 2.4.6 Solución

Tomando en consideración los elementos antes mencionados diremos que una solución es un conjunto de rutas posibles o factibles en las

que estén incluidas todas las demandas a entregar y recoger que forman parte de dicho problema.

## 2.5 Modelo de programación lineal del VRPPD

EL VRPPD consiste en encontrar  $K$  ciclo de costo mínimo, tales que:

- i) Cada ciclo visita el depósito.
- ii) Cada cliente es visitado exactamente por un ciclo, es decir por un solo vehículo.
- iii) Cada ciclo comienza y termina en el depósito.
- iv) La demanda tanto a entregar como a recoger debe ser atendida por el mismo vehículo.
- v) La carga del vehículo durante el ciclo debe ser no negativa y no debe de exceder la capacidad del vehículo ( $Q_d$ ).

### 2.5.1 Datos de entrada

Sea un grafo  $G = (V, E)$  donde:

$D = \{d_1, d_2, \dots, d\}$  son los vehículos.

✚  $V = \{u, v_1, v_2 \dots v_n\}$  es el conjunto de nodos del grafo, donde  $u$  representa el depósito y  $\{v_1, v_2 \dots v_i\}$  los clientes a ser visitados.

✚  $E$  = Es el conjunto de aristas del grafo.

### 2.5.2 Datos

✚ Se tiene un depósito  $u$  que contiene una flota homogénea de vehículos, cuyo costo de recorrido está dado por el vector  $C^d \in \mathbb{R}^{u \times v}$ .

✚ Cada vehículo del depósito  $u$  tiene una capacidad de carga.

✚ Los nodos en  $V$  representan clientes y tienen asociados demandas a entregar  $r_v \forall v \in V$  y demandas a recoger  $p_v \forall v \in V$ . [6]

### 2.5.3 Costo

El costo de desplazamiento modificado sería  $C_{w\bar{w}}^d$  siendo la distancia de recorrer desde  $w$  hasta  $\bar{w}$  por el vehículo  $d$ . Con  $w, \bar{w} \in V, d \in D$ . [6]



#### 2.5.4 Arcos

Se puede decir que un arco es el enlace que existe al ir de un cliente a otro.

Se tienen tres tipos de arcos:

$A_s = \{(u, v) : u, v \in V\}$  (Arcos de salida)

$A_r = \{(v, u) : u, v \in V\}$  (Arcos de llegada)

$A_c = \{(v, \bar{v}) : v, \bar{v} \in V\}$  (Arcos de conexión)

#### 2.5.4 Variables de decisión

En este tipo de problemas como lo es el VRPPD se tienen variables tanto positivas como binarias, pues se debe decidir si el vehículo utiliza o no el arco de ir del cliente  $w$  al cliente  $\bar{w}$ , como se indica a continuación:

$$X_{w\bar{w}}^d = \begin{cases} 1, & \text{si el arco } (w, \bar{w}) \text{ es utilizado en alguna ruta de } d \in D \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

#### 2.5.5 Carga de vehículos

La carga a entregar del vehículo  $d$  al salir de un cliente  $v$  se la representa como  $L_v^d \in \mathfrak{R}, \forall v \in V, \forall d \in D$ . [6]

La carga recogida por el vehículo  $d$  al salir de un cliente  $v$  se la representa como  $S_v^d \in \mathfrak{R}, \forall v \in V, \forall d \in D$ .

### 2.5.6 Función Objetivo

El objetivo es encontrar  $r$  rutas factibles con la menor distancia recorrida.

$$z = \min \sum_{d \in D} \sum_{(w, \bar{w}) \in A} C_{w\bar{w}}^d X_{w\bar{w}}^d$$

### 2.5.7 Restricciones

Las restricciones representan las condiciones que se deben satisfacer para que el modelo obtenga una solución factible.

#### 2.5.7.1 Visita a los clientes

Cada cliente es visitado por un vehículo una sola vez.

$$\sum_{d \in D} \sum_{(v, w) \in A} X_{vw}^d = 1, \quad \forall v \in V$$

### 2.5.7.2 Igualdad de Aristas

La cantidad de aristas o arcos que llegan a un cliente deben de ser igual a los que salen del mismo cliente.

$$\sum_{(w,v) \in A} X_{wv}^d = \sum_{(v,w)} X_{vw}^d, \quad \forall v \in V, \forall d \in D$$

### 2.5.7.3 Eliminación de Subciclos

La restricción de eliminación de Subciclos establece que un subconjunto  $W \subseteq V$  debe estar conectado con su complementario por al menos dos aristas o arcos del ciclo.

$$\sum_{v, \bar{v} \in W} X_{v, \bar{v}}^d \leq |W| - 1, \quad \forall W \subseteq V, \forall d \in D$$

### 2.5.7.4 Salida y llegada a un mismo depósito

Con ésta restricción aseguramos que al iniciar su recorrido los vehículos salgan desde el depósito y al culminar su trayectoria regresen al mismo.

$$\sum_{(u,v) \in A} X_{uv}^d - \sum_{(v,u) \in A} X_{vu}^d \leq 0, \quad d \in D$$

### 2.5.7.5 Capacidad del vehículo

Las cargas totales de las demandas tanto de recogida como de entrega al salir de un cliente no deben superar la capacidad del vehículo.

$$L_v^d + S_v^d \leq Q_d \quad \forall v \in V, \forall d \in D$$

### 2.5.7.6 Cantidad de carga

Aquí se garantiza que la cantidad de carga con la que sale un vehículo al visitar el cliente sea la suma de la cantidad de carga con la que sale del cliente anterior más la demanda del cliente a visitar.

$$\text{Demanda a entregar: } L_v^d + r_{\bar{v}} - L_{\bar{v}}^d \leq (1 - X_{v\bar{v}}^d) * M$$

$$\text{Demanda a recoger: } S_v^d + p_{\bar{v}} - S_{\bar{v}}^d \leq (1 - X_{v\bar{v}}^d) * M$$

### 2.5.7.7 Carga entregada a clientes

Con esta restricción se garantiza que todos los clientes sean visitados, ya que la carga con la que sale el vehículo desde el depósito menos la demanda a ser entregada debe ser 0.

$$(L_v^d - r_v) \leq (1 - X_{uv}^d) * M \quad \forall (u, v) \in A_s, \forall d \in D$$

$$(S_v^d - p_v) \leq Q_d * (1 - X_{uv}^d) \quad \forall (u, v) \in A_s, \forall d \in D$$

### 2.5.7.8 Variable binaria y de no negatividad

La variable binaria toma el valor de 1 si es posible que el vehículo viaje de un cliente a otro y el valor de 0 en caso contrario. Las variables positivas o de no negatividad obligatoriamente deben ser mayor que 0.

$$X_{w\bar{w}}^d \in \{0, 1\} \quad \forall (w, \bar{w}) \in A, \forall d \in D$$

$$L_v^d \geq 0 \quad \forall v \in V, \forall d \in D$$

$$S_v^d \geq 0 \quad \forall v \in V, \forall d \in D$$

# CAPÍTULO 3

## DESARROLLO DE UNA HEURÍSTICA BASADA EN EL VECINO MÁS CERCANO PARA EL VRPPD.

### 3.1 Introducción

De acuerdo a la literatura el VRPPD es un problema de optimización combinatoria (OC) muy complejo por ser parte de la familia del VRP; según investigaciones se ha demostrado que es de tipo NP-Duro como lo indicamos en el Capítulo 1.

Para la resolución de este problema utilizaremos la heurística del Vecino más Cercano, donde nos permitirá encontrar las diferentes rutas considerando la capacidad de los vehículos, siendo éstas las que vuelvan

factible la solución del mismo.

Teniendo en consideración el tiempo que se demora una vez ejecutada la heurística, ya que en primera instancia la heurística del vecino más cercano fue diseñada solo para visitar clientes mas no con una restricción de capacidad que es lo que hace dicha heurística más compleja.

### 3.2 Descripción de la implementación de la heurística

Se podría considerar al Vecino más Cercano dentro de la gama de algoritmos heurísticos como el algoritmo más simple y fácil de construir, pues nos permite encontrar la mínima distancia desde el depósito hacia cada uno de los clientes y entre clientes teniendo en consideración las restricciones de capacidad de los vehículos y de las demandas tanto a entregar como a recoger de cada uno de los clientes.

Los pasos para la programación del vecino más cercano aplicados al VRPPD son:

**Paso 1:** Se calcula la mínima distancia entre el depósito y los clientes  $i$ , el cliente que nos da la mínima distancia es seleccionado y guardado en una lista denominada Ruta Parcial y eliminada de los clientes que aún faltan por visitar.

**Paso 2:** Se incorpora la restricción de capacidad y al cliente que fue seleccionado en el paso 1 se evalúa la demanda a entregar y recoger. Si la capacidad del vehículo es superada se da por terminada dicha ruta y el vehículo vuelve al depósito.

**Paso 3:** Una vez finalizada la ruta, la capacidad y la lista de clientes se actualiza e incorpora el último cliente.

**Paso 4:** Para cada una de las rutas terminadas denominadas Rutas Finales se muestra la secuencia a seguir y se calcula el valor de la ruta.

**Paso 5:** Se repiten los pasos hasta que no haya clientes por visitar.

### 3.3 Descripción de la implementación de la heurística de búsqueda local 2-Opt.

Ahora implementaremos la heurística de búsqueda local, también llamado de mejora, donde trataremos de mejorar nuestra solución inicial (rutas generadas por la heurística del Vecino más cercano) por medio de intercambios con el fin de minimizar el valor de los costos generados en cada ruta, obteniendo una solución factible cercana a la óptima en tiempo razonable.

Formalmente dicha heurística consiste en:



**Definición:** Sea  $X$  el conjunto de soluciones del problema combinatorio. Cada solución  $x$  tiene un conjunto de soluciones asociadas  $N(x) \subseteq X$  (rutas generadas), que denominaremos entorno de  $x$ .

Definición: Dada una solución  $x$ , cada solución de su entorno,  $x' \in N(x)$ , puede obtenerse directamente a partir de  $x$  mediante una operación llamada movimiento.

Un procedimiento de búsqueda local parte de una solución inicial  $x_0$ , calcula su entorno  $N(x_0)$  y escoge una nueva solución  $x_1$  en él [7].

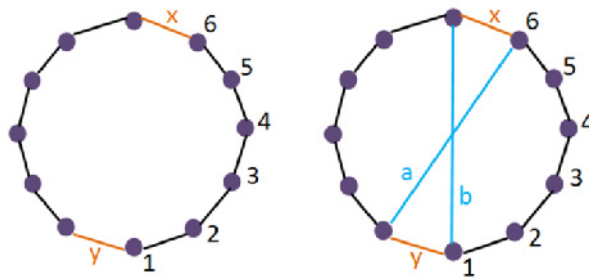
### 3.3.1 Procedimiento entre ruta basado en 2-Opt.

Podemos decir que la eficacia de la heurística está definida por que nos permite disminuir los cruces entre las aristas en el recorrido de una ruta, logrando en ocasiones la disminución del costo total.

Pues, se dice que una ruta es mejorada cuando se borran dos aristas y luego se los reconecta hasta que ya no pueda haber ninguna mejora adicional.

Hay que tomar en consideración que al intercambiar las aristas no deben ser adyacentes ya que esto provoca un desenlace de la ruta y solo es aplicable a grafos simétricos.

Este tipo de método básicamente consiste en remover  $r$  arcos de la ruta y buscar varias formas de reconectar los nodos afectados, finalmente se selecciona la mejor ruta; el algoritmo tiene complejidad de orden  $O(nr)$ , por lo que explorar todo el vecindario resulta muy costoso. En la figura 3.1 se ilustra la aplicación del operador 2Opt, donde sólo es posible una manera de intercambiar los arcos; se ilustra que la aplicación de 2-Opt invierte el sentido de visita de un segmento de la ruta[8].



**Figura 3.1** Ilustración de cambio de vértices para un camino 2-opt

Formalmente ésta consiste en:

Dado un grafo completo y ponderado, un conjunto solución factible de una instancia  $G$  contiene todos los circuitos en  $G$ . El costo de un circuito de  $G$  es la suma de toda la distancia recorrida de las aristas. Donde tratamos de encontrar un circuito  $G$  con un costo mínimo. Sea  $T$  un circuito de  $G$ . El conjunto de vecinos de  $T$  contiene todos los circuitos  $T'$ , que pueden ser

obtenidos al remover dos arista de T e insertar dos nuevas arista en T [9].

Los pasos para la programación de la heurística de mejora 2-opt son:

**Paso 1:** A la ruta ya generada por la heurística del vecino más cercano le realizamos un intercambio de clientes para analizar si se puede mejorar el costo, de ser posible la mejora nos quedamos con dicha ruta.

**Paso 2:** Se realiza el mismo esquema para el resto de rutas hasta mejorar cada una de ellas.

**Paso 3:** Si no encontramos una mejor solución al aplicar este algoritmo, la ruta ya generada por la heurística del vecino más cercano se mantiene.

**Paso 4:** Se repiten los pasos.

# CAPÍTULO 4

## ANÁLISIS DE LA HEURÍSTICA PROPUESTA

### 4.1 Introducción

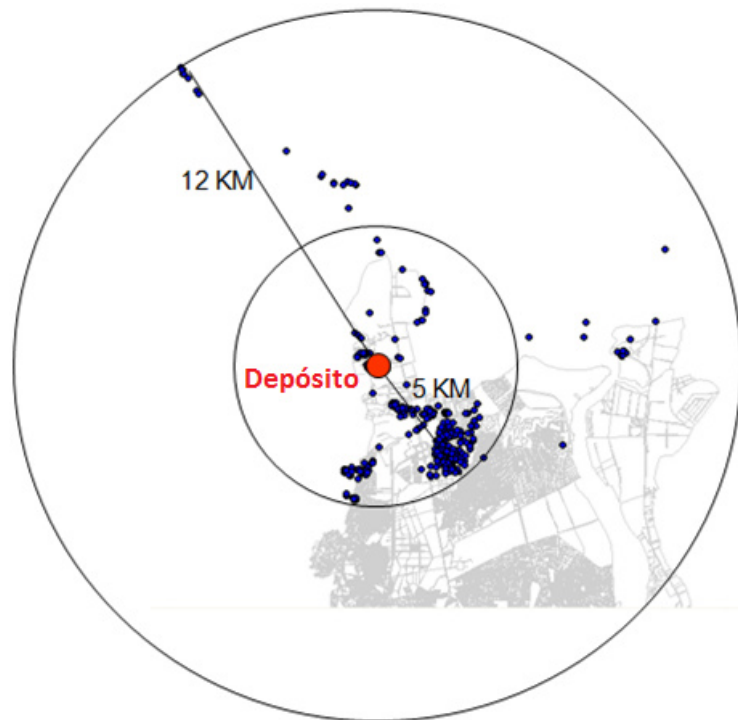
Hoy en día las empresas realizan tanto la entrega como la recolección por separado, es por eso que proponemos una heurística donde al momento de entregar la mercadería realicemos la recolección, con esto aseguramos un ahorro en tiempo y dinero.

En este capítulo analizaremos los resultados obtenidos mediante la

programación el Ruteo de Vehículo con recolección y entrega de mercadería (VRPPD).

Se mostrará una mejora de los resultados, mediante la heurística del 2-opt donde realizamos intercambios entre clientes de las rutas ya generadas por la heurística del Vecino más cercano hasta que ya no se pueda mejorar.

Como se puede observar los clientes están concentrados alrededor del depósito, aunque se tienen ciertos clientes a una distancia considerable, por lo que el costo de dicha ruta tiende a elevarse.



**Figura 4.1** Concentración de clientes Zona Norte

## 4.2 Aplicación de la heurística del Vecino más cercano

La programación de la heurística del vecino más cercano se realizó en el software Mathematica 8, siendo una herramienta de cómputo que nos permite realizar cualquier tipo de cálculo algebraico o numérico, además se puede generar gráficos y análisis.

Una vez obtenidos todos los datos se procede a programar, obteniendo la generación de cuatro rutas y una distancia total recorrida de 280,39.

La distancia ha sido calculada en kilómetros tomando en consideración la métrica de Manhattan, donde:

*x*: coordenada en x del cliente *i*

*x*<sub>1</sub>: coordenada en x del cliente *j*

*y*: coordenada en y del cliente *i*

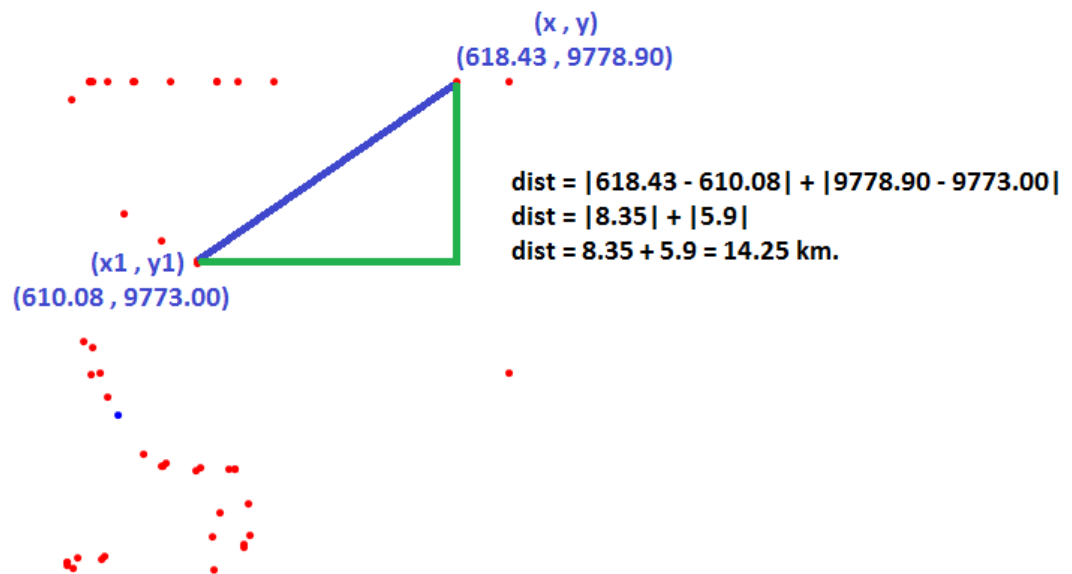
*y*<sub>1</sub>: coordenada en y del cliente *j*

Siendo la fórmula:

$$dist_{Manhattan} = |x - x_1| + |y - y_1|$$

A continuación se realiza la representación de cómo se calcula la distancia mediante esta métrica, pues como su fórmula lo indica es la suma de las

diferencias absolutas entre dos coordenadas, utilizando un plano cartesiano  $(x,y)$ .



**Figura 4.2** Representación de ubicación para cálculo de distancia entre clientes

La matriz de distancia se muestra en la parte de anexo.

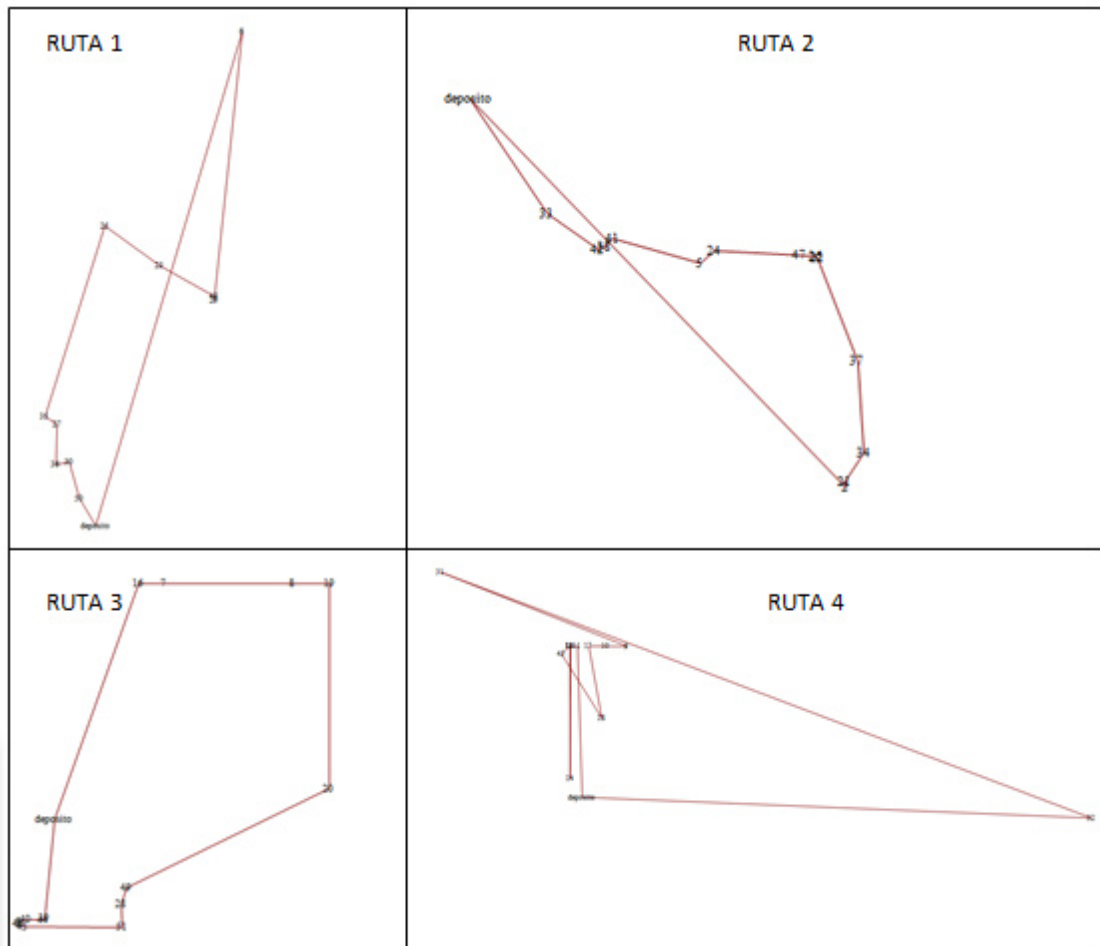
Las rutas que nos arrojó la heurística del Vecino más cercano han sido generadas tomando en consideración la capacidad del vehículo y la mínima distancia entre ellos, las cuales son:

<b>RUTAS</b>	<b>SECUENCIA DE LA RUTA</b>	<b>COSTO (distancia en km)</b>
1	{1,50,30,36,27,35,25,23,48,29,6,1}	21,11
2	{1,33,42,38,41,5,24,47,26,22,37,34,21,2,1}	32,14
3	{1,39,44,40,4,3,46,45,51,28,49,20,19,8,7,16,1}	69,95
4	{1,11,12,14,13,15,43,18,17,10,9,31,32,1}	157,19
<b>TOTAL</b>		280,39

**Tabla 4.1** Rutas factibles generadas por el VCM

Como se ilustra a continuación son cuatro las rutas generadas, y como podemos observar cada una de las rutas comienzan y terminan en el depósito, teniendo en consideración que un cliente no puede ser visitado dos veces, es decir que sólo puede ser visitado por un vehículo.

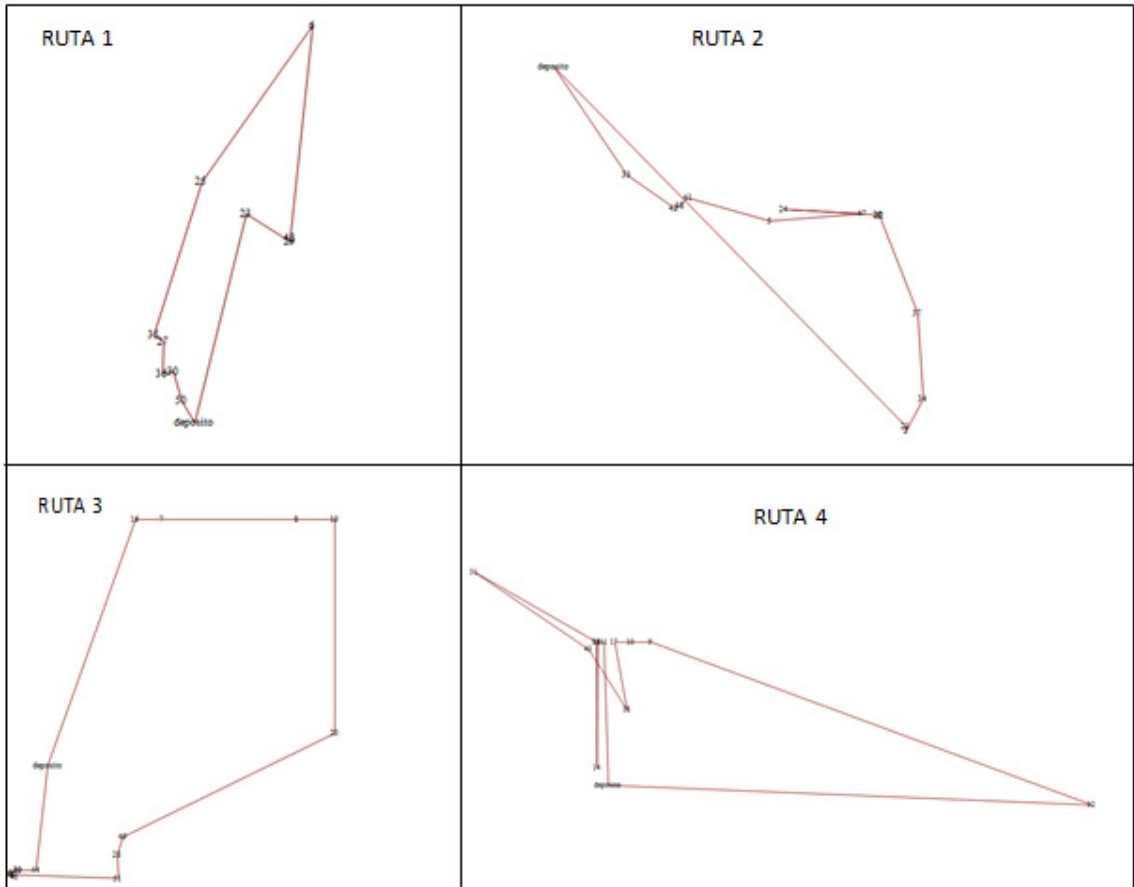




**Figura 4.3** Rutas generadas por la heurística del VCM

### 4.3 Mejora con la heurística 2-Opt

Mediante el intercambio entre clientes de las rutas del VCM encontramos un ahorro del 128,65 km. Los intercambios se muestran a continuación.



**Figura 4.4** Rutas generadas por la heurística del 2-Opt

## 4.4 Comparación entre un modelo exacto del VRPPD y la heurística propuesta

Heurística del vecino más cercano:

RUTAS	COSTO VCM (distancia en km)	COSTO(VCM + 2-OPT) (distancia en km)
1	21,11	20,02
2	32,14	12,18
3	69,95	38,2
4	157,19	81,34
<b>TOTAL</b>	280,39	151,74

**Tabla 4.2** Costos de la Heurística del VCM y 2-Opt

## 4.5 Aplicación de la heurística en comparación con la empresa

Como habíamos explicado en capítulos anteriores la flota es tercerizada y el personal de la empresa es la que decide qué ruta o camino deben de seguir, teniendo establecido 5 rutas para los 50 clientes escogidos en la zona norte de la ciudad de Guayaquil. Además asigna cual va a ser el vehículo que va a cubrir dicha ruta. Cabe indicar que la empresa primero realiza la entrega de los productos y al final realiza la recolección de las cajas retornables.

La utilización de la capacidad de los vehículos en las rutas establecidas varía entre un 80 y 90 % debido a la modalidad que ellos manejan al entregar primero y luego recoger, lo cual causa un aumento en los costos

totales, debido a:

- ✚ Mal manejo de los vehículos, ya que se desperdicia de un 10 a 20 % de su capacidad en cada ruta.
- ✚ Visita dos veces a un cliente, es decir que la distancia recorrida va ser mayor.

En la tabla a continuación se muestran los resultados obtenidos por la heurística, detallándose la secuencia a seguir y el costo de cada una de ellas.

<b>RUTAS</b>	<b>SECUENCIA DE LA RUTA</b>	<b>COSTO (VCM + 2 OPT) (distancia en km)</b>
1	{1,50,30,36,27,35,25,6,48,29,23,1}	20,02
2	{1,33,42,38,41,5,47,24,26,22,37,34,2,21,1}	12,18
3	{1,39,44,40,4,3,45,46,51,28,49,20,19,8,7,16,1}	38,2
4	{1,11,12,14,13,15,31,43,18,17,10,9,32,1}	81,34
<b>TOTAL</b>		151,74

**Tabla 4.3** Resumen de las rutas finales mejoradas

El ahorro obtenido al aplicar la heurística del VCM más la heurística de

mejora o de intercambio 2-opt es 380,57 kilómetros. Con los resultados que nos ha arrojado el análisis podemos decir que hemos encontrado una solución factible, es decir que la heurística propuesta es de gran utilidad al realizarse el procedimiento simultáneamente.

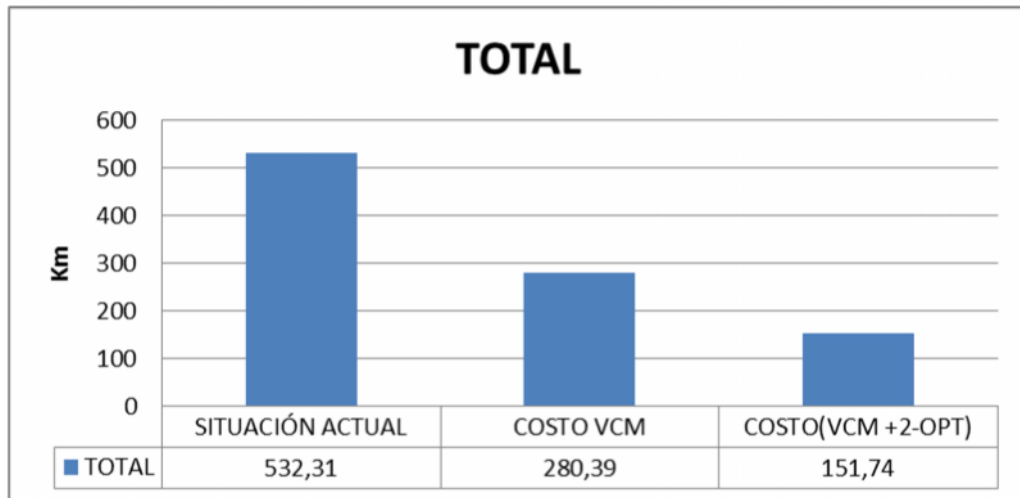
En las siguientes tablas se detallan los costos por ruta de la situación actual de la empresa y las rutas con su respectivo costo de la heurística propuesta.

<b>RUTAS</b>	<b>COSTO (distancia en km)</b>
1	51,5
2	74,15
3	149,4
4	164,8
5	92,46
<b>TOTAL</b>	<b>532,31</b>

**Tabla 4.4**Costos de la Situación actual

<b>RUTAS</b>	<b>COSTO (distancia en km)</b>
1	20,02
2	12,18
3	38,2
4	81,34
<b>TOTAL</b>	<b>151,74</b>

**Tabla 4.5**Costos de la propuesta



**Figura 4.5 Costos**



**Figura 4.6 Ahorro**

Se ha obtenido un ahorro de 380,57 km que representa aproximadamente el 60%, es decir que la propuesta de realizar el ruteo de vehículo con recolección y entrega de mercadería simultáneamente es factible, además

nos ahorraríamos en la cantidad de vehículos a utilizar ya que sólo utilizaríamos 4 vehículos en lugar de 5 que es como lo tiene planteado actualmente la empresa.

	<b>SITUACIÓN ACTUAL</b>	<b>PROPUESTA</b>	<b>AHORRO</b>
<b>COSTO (distancia en km)</b>	532,31	151,74	<b>380,57</b>
<b>VEHÍCULOS</b>	5	4	<b>1</b>

**Tabla 4.6** Comparación de los costos entre situación actual y propuesta

# CAPÍTULO 5

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 5.1 Conclusiones

✚ Este proyecto propone la resolución de la entrega y recolección simultáneamente, considerando cada una de las condiciones que nos proporcionó la empresa donde se realizó el estudio, se utilizó información real de la compañía y por los resultados obtenidos



concluimos que la heurística propuesta es de gran utilidad y nos ayudará a disminuir los costos que era nuestro principal objetivo.

- ✚ Los objetivos propuestos al inicio para resolución del VRPPD han sido alcanzados al implementar dicha heurística donde nos disminuye la distancia total recorrida con la sistematización de las rutas, satisfaciendo al cliente. Hemos presentado los resultados realizando una comparación entre la situación actual de la empresa y los obtenidos por la heurística, especificando el ahorro que se obtuvo.
- ✚ La idea puntual en este trabajo es poder evidenciar los ahorros que podemos obtener realizando un VRPPD simultáneo, elaborando una serie de análisis desde un modelo lineal entero hasta la programación de una Heurística que nos permita la generación de rutas factibles.
- ✚ La situación actual que maneja la empresa deriva altos costos debido a la distancia que recorre cada vehículo, por lo que en este trabajo tratamos de reducir la distancia realizando una sola visita a cada cliente.
- ✚ Una vez obtenidos los resultados finales para el problema de ruteo vehicular con recogida y entrega se muestra, que más que un ahorro en costos por distancia recorrida, tenemos una disminución en las rutas

generadas y por ende de un vehículo.

- ✚ El algoritmo de intercambio 2-Opt nos permitió obtener un ahorro en los costos de las rutas generadas previamente por la heurística del vecino más cercano de 380,57 km representándonos aproximadamente el 60%.

## 5.2 Recomendaciones

- ✚ La mayoría de las empresas de nuestro entorno tratan de realizar estudios, capacitar al personal en temas relacionados a:
  - ❖ Cómo hacer que el abastecimiento de la materia prima llegue oportunamente y no se quede parada la planta.
  - ❖ Cómo obtener más producción en los productos de mayor rotación.
  - ❖ O, se está realizando un correcto almacenamiento.
  - ❖ La distribución ha llegado al cliente en las cantidades correctas.
- ✚ Tratando de obtener mayor rentabilidad, sin darse cuenta que no están analizando un tema importante como lo es la actividad del transporte. Siendo este un punto clave en la disminución de los costos, es por aquello que invitamos a las empresas a tomar en consideración ciertos

detalles en los envíos que parecen insignificantes pero que nos pueden ayudar a obtener grandes ahorros.

- ✚ Se le recomienda a la empresa que realice el uso de la heurística propuesta, pues ésta le ayudará a disminuir sus costos y podrá mantener la satisfacción de los clientes.
- ✚ Con el desarrollo de este trabajo tratamos de ayudar a los investigadores a futuro, ya que este proyecto sería una herramienta útil de consulta en la parte teórica y de referencia en la parte aplicativa del ámbito de investigación de operaciones.
- ✚ Se recomienda el desarrollo de una metaheurística que permita una mayor exploración y poder encontrar una solución exacta, comparado con las heurísticas que se basan en óptimos locales y que sólo son soluciones factibles.
- ✚ Este problema puede utilizarse dentro del ámbito logístico con mayor frecuencia, en especial en aquellas empresas donde se realiza logística en reversa, siempre y cuando no olvidemos que la demanda a entregar y recoger es conocida y que en caso contrario se debe buscar un método para obtener dichos datos.

# BIBLIOGRAFÍA

[3] Alfredo Olivera, "Heurísticas para Problemas de Ruteo de Vehículos". Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay. 2004.

[1] H. F. Lieberman, G. Introducción a la investigación de operaciones. Ed. McGraw-Hill. 5ª ed. 1994.

[5] Joseph Gallart Suárez, "Análisis, Diseño E Implementación De Un Algoritmo Meta Heurístico Grasp Que Permita Resolver El Problema De Rutas De Vehículos Con Capacidad", Facultad de Ciencias e Ingenierías, Pontifica Universidad Católica de Perú, Lima 2009

[8] James Tomalá y Johnny Pincay, "Diseño de un sistema de soporte de decisiones para resolver el problema de ruteo en un servicio de Courier", Universidad Politécnica del Litoral, Instituto de Ciencias matemáticas 2010.

[6] Luis M. Torres, "Variantes del VRP (2): Capacidad, Cargas y Descargas". Escuela Politécnica Nacional, Quito 2007.

[7] Rafael Marti Cunquero, "Algoritmo Heurístico en Optimización Combinatoria". Universidad de Valencia, Facultad de Ciencias Matemáticas.2003.

[2][http://es.wikipedia.org/wiki/Optimizaci%C3%B3n\\_combinatoria](http://es.wikipedia.org/wiki/Optimizaci%C3%B3n_combinatoria)

[4][http://www.scielo1.unal.edu.co/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1794-12372009000200003&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo1.unal.edu.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1794-12372009000200003&lng=en&nrm=iso)

[9][http://catarina.udlap.mx/u\\_dl\\_a/tales/documentos/lis/palacios\\_s\\_d/capitulo2pdf](http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lis/palacios_s_d/capitulo2pdf)

# ANEXO A

## Entrevista realizada al Gerente de Supply Chain

**1.- ¿Qué departamento dentro del área logística es el encargado de decidir en qué horarios entregar y recoger los productos?**

El departamento de planificación.

**2.- ¿Qué tipo de flota tienen?**

Nuestra flota es homogénea, nosotros la tercerizamos ya que no contamos con flota propia.

**3.- ¿Qué análisis ustedes realizan antes de realizar el recorrido de una ruta?**

- Que en el vehículo quepa toda la demanda de los clientes a ser visitado en dicha ruta.
- La ubicación de los clientes, para saber en qué horarios deben ser visitados.

**4.- ¿Cuentan con algún software para las generaciones de las rutas?**

No, estamos en proceso de desarrollo de un software desde hace 1 año atrás, pero aún no lo concluyen.

**5.- ¿Cómo conocen ustedes la demanda a entregar y recoger?**

La demanda a entregar la conocemos mediante los pedidos por vía telefónica que realizan los clientes, pero la demanda a recoger siempre es igual o un poco mayor o menor a la demanda a entregar debido a los créditos que le hacemos a los clientes. Esto es si el cliente pidió 100 cajas de las cuales sólo pagará 80 y 20 quedan a crédito, las cajas que retornan sólo serían 80 y las 20 en el próximo pedido.

**6.- ¿Estaría dispuesto a implementar un programa donde se generan las rutas de manera sistematizada y podría bajar sus costos?**

Por ahora no, en un futuro podría ser ya que como le indiqué nos encontramos en proceso de desarrollo de un software para la generación de rutas.

## Codificación Del Programa VCM

### ALGORITMO DEL VECINO MAS CERCANO APLICADO AL VRPPD

Gisella & Maritza

```
<< Combinatorica`

t = Import["C:\Documents and Settings\GISELLA\Biblioteca\TBSIS\Coordenada.txt", "Table"];
n = Dimensions[t][[1]];
v = Table[{t[[1, 2]], t[[1, 3]]}, {i, 1, n}];
Print[MatrixForm[Prepend[t, {"CLIENTE", "Coord_X", "Coord_Y", "Coord_Z", "Coord_W"}]]];
client = Flatten[Table[t, {n, 1}];

dist = Table[N[Abs[(t[[i, 2]] - t[[j, 2]]) - Abs[(t[[i, 3]] - t[[j, 3]])]]/1000, {i, 1, n}, {j, 1, n}];
distan = MapThread[Prepend, {Prepend[dist, client], Flatten[{"datos", client}]];
Print["Matriz de Distanca entre clientes", MatrixForm[distan]];
Nil

origen = Flatten[Table[{t[[1, 2]], t[[1, 3]]}, {i, 1, 1}];
clientes = Flatten[Table[{t[[i, 2]], t[[i, 3]]}, {i, 2, n}, 1];
grafos = Graphics[{PointSize[0.005], {Blue, Point[origen]}, {Red, Point[clientes]}}]; PlotLabel = Style[Framed["ZONA NORTE"], 16, Red, Background -> Yellow]]

U = 600;
cap = Q;
Q = 600;
cap = U;
nodos = Range[n];
grande = 10*10;
list = nodos;
rutas = {};
rutaparcial = {};
rutafinal = {};
rutafinales = {};
totalrutas = {};
costomaszero = 0;
totalcosto = {};
A = {};

For[i = 1, Length[list] > 1, mini = grande;
  For[j = 2, j < n, {j} <= MemberQ[list, j];
    If[dist[[i, j]] < mini, k = j; mini = dist[[i, j]]; j++]; costomaszero = costomaszero - mini;
    list = Complement[list, {i}];
    dent = t[[k, 4]];
    drec = t[[k, 5]];
    rutaparcial = Append[rutaparcial, k]; Print["h = ", k]; Print[Text[Style["Ruta_Parcial = ", Pink, Bold, 12], Text[Style[rutaparcial, Bold, 12]]];
    capl = cap - dent; Print["Cap_disponible_entregar = ", capl];
    cap = cap - dent; drec; Print["Ruta_veniente = ", cap];
    rutafinal = Union[rutafinal, {i, k}];
    If[capl < 0 || cap < Q, b = Drop[rutaparcial, -1]; Print["b = ", b];
      rutas = Append[rutas, i];
      Print[Text[Style["RUTA VRPPD POR EL VMC = ", Blue, Bold, Italic, 12], Text[Style[rutas, Bold, Italic, 12]]];
      l = Dimensions[b];
      a = Extract[b, 1];
      costomaszero = costomaszero - mini - dist[[i, j]];
      Print[Text[Style["CT DEL VRPPD POR EL VMC = ", Blue, Bold, Italic, 12], Text[Style[costomaszero, Bold, 14]]];
      rutafinal = Append[Complement[rutafinal, {{i, k}}, {i, j}]; Print[Text[Style["Ruta Final VMC = ", Red, Bold, 12], Text[Style[rutafinal, Bold, 12]]];
      a = Complement[rutaparcial, b];
      rutafinales = Append[rutafinales, rutafinal];
      totalrutas = Append[totalrutas, rutas];
      totalcosto = Append[totalcosto, costomaszero];
      list = Union[list, a]; Print[Text[Style["Clientes sin Visitar = ", Orange, Bold, 12], Text[Style[list, Bold, 12]]];
      k = 1;
      rutaparcial = {};
      rutafinal = {};
      capl = cap - Q;
      cap = Q;
    ];
  ];
  rutaparcial = Append[rutaparcial, i];
  Print[Text[Style["RUTA VRPPD POR EL VMC = ", Blue, Bold, Italic, 12], Text[Style[rutaparcial, Bold, Italic, 12]]];
  costomaszero = costomaszero - dist[[i, k]];
  Print[Text[Style["CT DEL VRPPD POR EL VMC = ", Blue, Bold, Italic, 12], Text[Style[costomaszero, Bold, 14]]];
  rutafinal = Append[Complement[rutafinal, {{i, k}}, {i, j}]; Print[Text[Style["Ruta Final VMC = ", Red, Bold, 12], Text[Style[rutafinal, Bold, 12]]];
  rutafinales = Append[rutafinales, rutafinal];
```



## Matriz de Distancia

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	0.	5226 85	4016 14	3987 48	2703 54	8785 9	9946 57	1365 91	8790 57	7838 41	6987 77	7295 95	7341 8	7331 67	7344 03	9203 73	7098 45	7072 88	1471 73	8820 77	5186 62	3468 43	4442 11	2718 64	4232 92	3448 46
1	522. 685	0.	392. 999	390. 133	252. 331	998. 865	100. 327	137. 453	998. 398	109. 374	122. 146	125. 125.	125. 125.	125. 125.	125. 125.	957. 709	116. 783	117. 039	148. 034	890. 692	0.04 023	175. 842	790. 872	250. 821	920. 941	177. 839
2	401. 614	392. 999	0.	0.02 866	446. 806	12.8 02	139. 627	176. 753	128. 067	118. 546	105. 789	102. 711	102. 253	102. 355	102. 231	132. 199	111. 146	11.0 89	187. 334	128. 369	396. 272	530. 483	845. 825	465. 328	824. 906	530. 256
3	398. 748	390. 133	0.02 866	0.	44.3 94	127. 734	13.9 34	176. 466	12.7 78	118. 259	105. 503	102. 425	101. 967	102. 068	101. 945	131. 912	110. 859	110. 604	187. 048	128. 082	393. 406	527. 617	842. 959	462. 462	82.2 04	52.7 39
4	270. 354	252. 331	446. 806	44.3 94	0.	833. 398	949. 465	132. 072	833. 865	841. 405	969. 131	999. 949	100. 453	100. 352	100. 476	875. 181	915. 497	918. 056	142. 654	836. 885	248. 308	0.83 677	538. 541	0.18 522	66.8 61	0.83 45
5	87.8 59	998. 865	12.8 02	127. 734	833. 398	0.	116. 219	487. 967	0.00 467	0.94 871	222. 597	253. 415	256. 2.58	258. 987	0.41 223	168. 837	171. 963	593. 522	118. 929	994. 277	823. 842	434. 023	814. 379	455. 876	821. 298	821. 026
6	994. 657	100. 327	139. 627	13.9 34	949. 465	116. 219	0.	371. 748	115. 752	21.1 09	338. 816	369. 634	374. 219	373. 206	374. 442	0.74 382	285. 182	287. 741	47.7 71	106. 655	999. 999	865. 788	550. 446	930. 943	571. 365	866. 015
7	136. 591	137. 453	176. 753	176. 466	132. 072	487. 967	371. 748	0.	4.87 5	582. 838	710. 564	741. 382	745. 967	744. 954	74.6 19	44.6 13	65.6 93	659. 489	105. 962	6.94 8	137. 125	123. 704	9.21 7	13.0 22	942. 619	123. 727
8	879. 057	998. 398	128. 067	12.7 78	833. 865	0.00 467	115. 752	4.87 5	0.	0.95 338	223. 064	253. 882	258. 467	257. 454	25.8 69	0.41 37	16.9 43	171. 989	593. 462	11.8 23	994. 375	822. 556	434. 846	815. 343	455. 765	820. 559
9	783. 841	109. 374	118. 546	118. 259	841. 405	0.94 871	21.1 09	582. 838	0.95 338	0.	127. 726	158. 544	163. 129	162. 116	163. 352	136. 708	0.74 092	0.76 651	6.88 8	127. 764	108. 971	917. 894	33.9 63	842. 915	360. 549	915. 897
10	698. 777	122. 146	105. 789	105. 503	969. 131	222. 597	338. 816	710. 564	223. 064	127. 726	0.	0.30 818	0.35 403	0.34 39	0.35 626	264. 434	0.53 634	0.51 075	816. 526	140. 536	121. 744	104. 562	43.0 59	970. 641	300. 521	104. 362
11	729. 595	125. 228	102. 711	102. 425	999. 949	253. 415	369. 634	741. 382	253. 882	158. 544	0.30 818	0.	0.04 585	0.03 572	0.04 808	295. 252	0.84 452	0.81 893	847. 344	143. 618	124. 826	107. 644	461. 408	100. 146	331. 339	107. 444
12	73.4 18	125. 687	102. 253	101. 967	100. 453	0.	374. 219	745. 967	258. 467	163. 129	0.35 403	0.04 585	0.	0.01 013	0.00 223	299. 837	0.89 037	0.86 478	851. 929	144. 077	125. 284	108. 102	465. 993	100. 604	335. 924	107. 903
13	733. 167	125. 585	102. 355	102. 068	100. 352	256. 987	373. 206	744. 954	257. 454	162. 116	0.34 39	0.03 572	0.01 013	0.	0.01 236	298. 824	0.88 024	0.85 465	850. 916	143. 975	125. 183	108. 001	46.4 98	100. 503	334. 911	107. 801
14	734. 403	125. 709	102. 231	101. 945	100. 476	258. 223	374. 442	74.6 19	25.8 69	163. 352	0.35 626	0.04 808	0.00 223	0.01 236	0.	30.0 06	0.89 26	0.86 701	852. 152	144. 099	125. 307	108. 125	466. 216	100. 627	336. 147	107. 925
15	920. 373	957. 028	132. 199	131. 912	875. 181	0.41 837	0.74 382	44.6 13	0.41 37	136. 708	264. 434	295. 252	299. 837	298. 824	30.0 06	0.	2.10 8	213. 359	552. 092	114. 093	953. 005	791. 504	476. 162	856. 659	497. 081	791. 731
16	709. 845	116. 783	111. 146	110. 859	915. 497	168. 963	285. 182	65.6 93	16.9 43	0.74 092	0.53 634	0.84 452	0.89 037	0.88 024	0.89 26	2.10 8	0.	0.02 559	762. 892	135. 173	116. 381	991. 986	376. 956	917. 007	286. 553	989. 989
17	707. 117.	117. 11.0	110. 110.	918. 171.	171. 287.	287. 659.	659. 171.	171. 0.76	0.76 0.51	0.86 0.81	0.86 0.85	0.86 0.85	0.86 0.85	0.86 0.85	0.86 0.85	213. 0.02	0.02 0.	0. 765.	765. 135.	135. 116.	116. 994.	994. 379.	379. 919.	283. 283.	992. 992.	

7	288	039	89	604	056	522	741	489	989	651	075	893	478	465	701	359	559		451	429	636	545	515	566	996	548
1	147.	148.	187.	187.	142.	593.	47.7	105.	593.	6.88	816.	847.	851.	850.	852.	552.	762.	765.		589.	147.	134.	102.	140.	104.	134.
8	173	034	334	048	654	929	71	962	462	8	526	344	929	916	152	092	892	451	0.	652	707	286	752	801	844	309
1	882.	890.	128.	128.	836.	118.	106.	6.94	11.8	127.	140.	143.	144.	143.	144.	114.	135.	135.	589.		887.	753.	974.	818.	110.	753.
9	077	692	369	082	885	277	655	8	23	764	536	618	077	975	099	093	173	429	652	0.	419	208	774	363	484	435
2	518.	0.04	396.	393.	248.	994.	999.	137.	994.	108.	121.	124.	125.	125.	125.	953.	116.	116.	147.	887.		171.	786.	246.	916.	173.
0	662	023	272	406	308	842	999	125	375	971	744	826	284	183	307	005	381	636	707	419	0.	819	849	798	918	816
2	346.	175.	530.	527.	0.83	823.	865.	123.	822.	917.	104.	107.	108.	108.	108.	791.	991.	994.	134.	753.	171.		61.5	0.74	745.	0.01
1	843	842	483	617	677	023	788	704	556	894	562	644	102	001	125	504	986	545	286	208	819	0.	03	979	099	997
2	444.	790.	845.	842.	538.	434.	550.	9.21	434.	33.9	43.0	461.	465.	46.4	466.	476.	376.	379.	102.	974.	786.	61.5		540.	130.	613.
2	211	872	825	959	541	379	446	7	846	63	59	408	993	98	216	162	956	515	752	774	849	03	0.	051	069	033
2	271.	250.	465.	462.	0.18	814.	930.	13.0	815.	842.	970.	100.	100.	100.	100.	856.	917.	919.	140.	818.	246.	0.74	540.		67.0	0.72
3	864	821	328	462	522	876	943	22	343	915	641	146	604	503	627	659	007	566	801	363	798	979	051	0.	12	982
2	423.	920.	824.	82.2	66.8	455.	571.	942.	455.	360.	300.	331.	335.	334.	336.	497.	286.	283.	104.	110.	916.	745.	130.	67.0		743.
4	292	941	906	04	61	298	365	619	765	549	521	339	924	911	147	081	553	996	844	484	918	099	069	12	0.	102
2	344.	177.	530.	52.7	0.83	821.	866.	123.	820.	915.	104.	107.	107.	107.	107.	791.	989.	992.	134.	753.	173.	0.01	613.	0.72	743.	
5	846	839	256	39	45	026	015	727	559	897	362	444	903	801	925	731	989	548	309	435	816	997	033	982	102	0.
2	191.	714.	487.	48.4	46.1	793.	909.	128.	793.	698.	570.	540.	542.	541.	542.	834.	624.	621.	138.	898.	710.	538.	358.	46.3	33.7	536.
6	476	161	096	23	83	108	175	043	575	359	797	019	704	691	927	891	363	806	625	063	138	319	729	34	81	322
2	438.	0.83	348.	345.	168.	931.	104.	141.	932.	100.	113.	11.6	117.	117.	117.	973.	108.	10.8	152.	935.	0.79	181.	70.6	166.	836.	181.
7	703	982	615	749	349	589	766	891	056	975	748	83	288	187	311	372	385	64	473	076	959	868	89	839	959	641
2	471.	668.	872.	869.	425.	407.	523.	894.	407.	425.	552.	583.	588.	587.	58.8	449.	49.9	501.	100.	85.2	664.	492.	122.	417.	252.	490.
8	105	608	719	853	913	485	552	806	952	128	854	672	257	244	48	268	22	779	062	51	585	766	264	787	333	769
2	123.	646.	452.	44.9	394.	827.	943.	131.	828.	732.	605.	605.	610.	609.	610.	869.	658.	656.	142.	831.	642.	470.	393.	395.	37.2	46.8
9	844	529	636	77	198	568	635	489	035	819	257	751	336	323	559	351	823	266	071	055	506	687	189	708	27	69
3	164.	216.	184.	183.	191.	117.	128.	165.	117.	107.	947.	916	912.	913.	912.	121.	100.	998.	176.	235.	21.6	199.	137.	19.1	124.	199.
0	643	912	234	997	679	025	647	822	072	538	658	84	255	268	032	209	129	733	418	302	51	328	825	83	818	128
3	238.	220.	260.	259.	215.	286.	274.	237.	286.	29.5	308.	311.	311.	311.	311.	28.1	30.3	303.	22.6	167.	220.	207.	265.	213.	278.	207.
1	545	758	058	771	377	163	541	367	117	65	423	505	963	862	986	98	06	315	77	887	431	009	364	525	371	032
3	132.	390.	376.	373.	138.	904.	10.2	139.	904.	809.	830.	861.	866.	865.	866.	94.5	777.	779.	149.	907.	386.	214.	469.	139.	530.	212.
2	041	644	067	201	313	137	02	146	604	388	818	636	221	208	444	92	184	743	728	624	621	802	758	823	297	805
3	511.	0.36	429.	426.	241.	988.	967.	133.	987.	108.	121.	124.	124.	124.	946.	115.	115.	144.	854.	0.32	165.	780.	240.	910.	167.	
3	912	009	008	142	558	092	263	852	625	296	069	151	609	508	631	255	705	961	433	683	736	069	099	048	168	066
3	219.	742.	482.	479.	489.	798.	914.	128.	798.	70.3	575.	5.45	540.	541.	540.	839.	629.	626.	139.	925.	738.	56.6	36.3	491.	342.	564.
4	407	092	015	149	761	189	256	551	656	44	878	1	519	532	298	972	444	887	133	994	069	25	81	271	891	253
3	138.	661.	430.	427.	408.	84.9	965.	13.3	849.	754.	627.	596.	595.	594.	596.	891.	680.	678.	144.	852.	65.6	485.	415.	410.	394.	483.
5	318	003	824	958	672	38	447	67	847	631	069	291	862	849	085	163	635	078	252	867	98	161	001	182	082	164
3	445.	0.94	487.	484.	175.	921.	908.	128.	921.	101.	114.	117.	117.	117.	117.	879.	109.	109.	138.	796.	0.91	0.98	713.	173.	843.	100.

6	482	359	358	492	128	662	913	017	195	653	426	508	966	865	989	825	063	318	598	333	086	639	669	618	738	636
3	193.	329.	392.	389.	0.76	887.	100.	137.	888.	793.	892.	923.	927.	926.	928.	929.	838.	841.	148.	891.	32.5	153.	461.	0.78	591.	151.
7	642	043	292	426	712	912	398	523	379	163	419	237	822	809	045	695	785	344	105	399	02	201	829	222	898	204
3	312.	303.	0.89	0.86	357.	119.	13.0	167.	11.9	109.	968.	985.	989.	988.	990.	123.	102.	101.	178.	119.	307.	441.	756.	376.	735.	441.
8	444	829	17	304	636	103	71	836	15	629	723	323	908	895	131	282	229	973	417	452	102	313	655	158	736	086
3	370.	362.	0.30	0.28	415.	124.	136.	173.	124.	115.	102.	996.	991.	992.	991.	129.	108.	107.	184.	125.	365.	499.	814.	434.	793.	499.
9	683	068	931	065	875	927	534	659	974	452	696	184	603	616	382	106	053	797	241	276	341	552	894	397	975	325
4	193.	328.	403.	401.	0.76	876.	992.	136.	876.	781.	892.	923.	927.	926.	928.	918.	838.	841.	146.	879.	324.	153.	461.	0.78	59.2	151.
0	774	911	868	002	58	336	403	366	803	587	551	369	954	941	177	119	917	476	948	823	888	069	961	09	03	072
4	19.1	331.	386.	383.	0.79	893.	100.	138.	894.	798.	889.	920.	92.5	924.	925.	935.	836.	838.	148.	897.	327.	155.	459.	0.80	589.	153.
1	17	515	508	642	184	696	976	102	163	947	947	765	35	337	573	479	313	872	683	183	492	673	357	694	426	676
4	73.5	12.5	950.	948.	100.	329.	445.	816.	329.	234.	106.	0.76	0.71	0.72	0.71	371.	160.	15.7	922.	144.	125.	108.	467.	100.	337.	108.
2	52	82	932	066	587	272	339	593	739	523	961	183	602	615	381	055	527	97	411	211	418	236	333	738	264	037
4	322.	314.	0.78	0.76	367.	120.	13.1	168.	12.0	110.	97.8	98.7	991.	990.	991.	124.	103.	102.	179.	120.	317.	45.1	766.	386.	745.	451.
3	641	026	973	107	833	123	73	855	17	648	92	17	755	742	978	301	249	993	437	472	299	51	852	355	933	283
4	399.	391.	0.22	0.25	445.	127.	139.	176.	127.	118.	105.	102.	102.	102.	102.	13.2	110.	110.	187.	12.8	394.	528.	844.	46.3	823.	528.
4	826	211	8	174	018	842	448	574	888	367	611	533	075	176	053	02	967	711	156	19	484	695	037	54	118	468
4	404.	396.	0.03	0.06	45.0	128.	139.	177.	128.	118.	106.	103.	102.	10.2	102.	132.	111.	111.	18.7	128.	399.	533.	849.	468.	82.8	53.3
5	868	253	254	12	06	346	953	078	392	871	115	037	579	68	557	524	471	216	66	694	526	737	079	582	16	51
4	332.	189.	520.	51.7	0.73	809.	876.	12.4	808.	903.	103.	106.	106.	10.6	106.	801.	977.	980.	135.	763.	18.5	0.14	601.	0.60	731.	0.12
6	832	853	026	16	22	012	245	75	545	883	161	243	701	6	724	961	975	534	332	665	83	011	019	968	088	014
4	477.	674.	878.	875.	431.	401.	5.17	888.	4.01	419.	547.	578.	582.	581.	58.3	443.	49.3	496.	994.	85.7	669.	498.	116.	423.	246.	496.
7	157	008	771	905	965	433	5	754	9	728	454	272	857	844	08	216	82	379	572	91	985	166	864	187	933	169
4	405.	116.	41.1	408.	135.	881.	984.	135.	881.	976.	11.0	113.	113.	113.	114.	910.	105.	105.	146.	872.	112.	119.	673.	133.	803.	118.
8	726	959	42	554	372	906	851	611	439	777	45	532	991	889	013	567	087	343	192	271	936	063	913	862	982	836
4	0.59	5825	4168	4140	3301	8633	9793	1350	8637	7685	6410	6697	6743	6733	6745	9051	6945	6920	1456	8668	5784	4066	4289	3316	4080	4046
9	829	14	73	07	83	31	98	65	98	82	2	66	51	38	74	14	86	29	47	18	91	72	52	93	33	75
5	507.	107.	311.	313.	236.	994.	111.	148.	995.	107.	120.	123.	124.	124.	124.	103.	11.5	115.	158.	998.	110.	245.	775.	235.	905.	244.
0	162	639	252	626	808	844	091	216	311	821	594	676	134	033	156	663	23	486	798	331	912	123	349	298	418	896

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

1914 76	4387 03	4711 05	1238 44	1646 43	2385 45	1320 41	5119 12	2194 07	1383 18	4454 82	1936 42	3124 44	3706 83	1937 74	1911 7	7355 2	3226 41	3998 26	4048 68	3328 32	4771 57	4057 26	0.59 829	5071 62
714. 161	0.83 982	668. 608	646. 529	216. 912	220. 758	390. 644	0.36 009	742. 092	661. 003	0.94 359	329. 043	303. 829	362. 068	328. 911	331. 515	12.5 82	314. 026	391. 211	396. 253	189. 853	674. 008	116. 959	582. 514	107. 639
487. 096	348. 615	872. 719	452. 636	184. 234	260. 058	376. 067	429. 008	482. 015	430. 824	487. 358	392. 292	0.89 17	0.30 931	403. 868	386. 508	950. 932	0.78 973	0.22 8	0.03 254	520. 026	878. 771	41.1 42	416. 873	311. 252
48.4 23	345. 749	869. 853	44.9 77	183. 997	259. 771	373. 201	426. 142	479. 149	427. 958	484. 492	389. 426	0.86 304	0.28 065	401. 002	383. 642	948. 066	0.76 107	0.25 174	0.06 12	51.7 16	875. 905	408. 554	414. 007	313. 626
46.1 83	168. 349	425. 913	394. 198	191. 679	215. 377	138. 313	241. 558	489. 761	408. 672	175. 128	0.76 712	357. 636	415. 875	0.76 58	0.79 184	100. 587	367. 833	445. 018	45.0 06	0.73 22	431. 965	135. 372	330. 183	236. 808
793. 108	931. 589	407. 485	827. 568	117. 025	286. 163	904. 137	988. 092	798. 189	84.9 38	921. 662	887. 912	119. 103	124. 927	876. 336	893. 696	329. 272	120. 123	127. 842	128. 346	809. 012	401. 433	881. 906	863. 331	994. 844
909. 175	104. 766	523. 552	943. 635	128. 647	274. 541	10.2 02	967. 263	914. 256	965. 447	908. 913	100. 398	13.0 71	136. 534	992. 403	100. 976	445. 339	13.1 73	139. 448	139. 953	876. 245	5.17 5	984. 851	979. 398	111. 091
128. 043	141. 891	894. 806	131. 489	165. 822	237. 367	139. 146	133. 852	128. 551	13.3 67	128. 017	137. 523	167. 836	173. 659	136. 366	138. 102	816. 593	168. 855	176. 574	177. 078	12.4 75	888. 754	135. 611	135. 065	148. 216
793. 575	932. 056	407. 952	828. 035	117. 072	286. 117	904. 604	987. 625	798. 656	849. 847	921. 195	888. 379	11.9 15	124. 974	876. 803	894. 163	329. 739	12.0 17	127. 888	128. 392	808. 545	4.01 9	881. 439	863. 798	995. 311
698. 359	100. 975	425. 128	732. 819	107. 538	29.5 65	809. 388	108. 296	70.3 44	754. 631	101. 653	793. 163	109. 629	115. 452	781. 587	798. 947	234. 523	110. 648	118. 367	118. 871	903. 883	419. 728	976. 777	768. 582	107. 821
570. 797	113. 748	552. 854	605. 257	947. 658	308. 423	830. 818	121. 069	575. 878	627. 069	114. 426	892. 419	968. 723	102. 696	892. 551	889. 947	106. 961	97.8 92	105. 611	106. 115	103. 161	547. 454	11.0 45	64.1 02	120. 594
540. 019	11.6 83	583. 672	605. 751	91.6 84	311. 505	861. 636	124. 151	5.45 1	596. 291	117. 508	923. 237	985. 323	996. 184	923. 369	920. 765	0.76 183	98.7 17	102. 533	103. 037	106. 243	578. 272	113. 532	669. 766	123. 676
542. 704	117. 288	588. 257	610. 336	912. 255	311. 963	866. 221	124. 609	540. 519	595. 862	117. 966	927. 822	989. 908	991. 603	927. 954	92.5 35	0.71 602	991. 755	102. 075	102. 579	106. 701	582. 857	113. 991	674. 351	124. 134
541. 691	117. 187	587. 244	609. 323	913. 268	311. 862	865. 208	124. 508	541. 532	594. 849	117. 865	926. 809	988. 895	992. 616	926. 941	924. 337	0.72 615	990. 742	102. 176	10.2 68	10.6 6	581. 844	113. 889	673. 338	124. 033
542. 927	117. 311	58.8 48	610. 559	912. 032	311. 986	866. 444	124. 631	540. 298	596. 085	117. 989	928. 045	990. 131	991. 382	928. 177	925. 573	0.71 381	991. 978	102. 053	102. 557	106. 724	58.3 08	114. 013	674. 574	124. 156
834. 891	973. 372	449. 268	869. 351	121. 209	28.1 98	94.5 92	946. 255	839. 972	891. 163	879. 825	929. 695	123. 282	129. 106	918. 119	935. 479	371. 055	124. 301	13.2 02	132. 524	801. 961	443. 216	910. 567	105. 114	103. 663
624. 363	108. 385	49.9 22	658. 823	100. 129	30.3 06	777. 184	115. 705	629. 444	680. 635	109. 063	838. 785	102. 229	108. 053	838. 917	836. 313	160. 527	103. 249	110. 967	111. 471	977. 975	49.3 82	105. 087	694. 586	11.5 23
621. 806	10.8 64	501. 779	656. 266	998. 733	303. 315	779. 743	115. 961	626. 887	678. 078	109. 318	841. 344	101. 973	107. 797	841. 476	838. 872	15.7 97	102. 993	110. 711	111. 216	980. 534	496. 379	105. 343	692. 029	115. 486
138. 625	152. 473	100. 062	142. 071	176. 418	22.6 77	149. 728	144. 433	139. 133	144. 252	138. 598	148. 105	178. 417	184. 241	146. 948	148. 683	922. 411	179. 437	187. 156	18.7 66	135. 332	994. 572	146. 192	145. 647	158. 798

898.063	935.076	85.251	831.055	235.302	167.887	907.624	854.683	925.994	852.867	796.333	891.399	119.452	125.276	879.823	897.183	144.211	120.472	12.819	128.694	763.665	85.791	872.271	866.818	998.331
710.138	0.79959	664.585	642.506	21.651	220.431	386.621	0.32736	738.069	65.698	0.91086	32.502	307.102	365.341	324.888	327.492	125.418	317.299	394.484	399.526	18.583	669.985	112.936	578.491	110.912
538.319	181.868	492.766	470.687	199.328	207.009	214.802	165.069	56.625	485.161	0.98639	153.201	441.313	499.552	153.069	155.673	108.236	45.151	528.695	533.737	0.14011	498.166	119.063	406.672	245.123
358.729	70.689	122.264	393.189	137.825	265.364	469.758	780.099	36.381	415.001	713.669	461.829	756.655	814.894	461.961	459.357	467.333	766.852	844.037	849.079	601.019	116.864	673.913	428.952	775.349
46.334	166.839	417.787	395.708	19.183	213.525	139.823	240.048	491.271	410.182	173.618	0.78222	376.158	434.397	0.7809	0.80694	100.738	386.355	46.354	468.582	0.60968	423.187	133.862	331.693	235.298
33.781	836.959	252.333	37.227	124.818	278.371	530.297	910.168	342.891	394.082	843.738	591.898	735.736	793.975	59.203	589.426	337.264	745.933	823.118	82.816	731.088	246.933	803.982	408.033	905.418
536.322	181.641	490.769	46.869	199.128	207.032	212.805	167.066	564.253	483.164	100.636	151.204	441.086	499.325	151.072	153.676	108.037	451.283	528.468	53.351	0.12014	496.169	118.836	404.675	244.896
0.	630.179	385.623	0.67632	145.496	257.693	323.517	703.388	0.27931	0.56272	636.958	385.118	447.204	456.165	38.525	382.646	544.044	449.051	485.308	49.035	524.308	391.675	597.202	131.647	698.638
630.179	0.	584.626	562.547	208.514	225.196	306.662	0.80393	65.811	577.021	138.743	245.061	259.445	317.684	244.929	247.533	117.642	269.642	346.827	351.869	171.411	590.026	0.62805	498.532	0.68459
385.623	584.626	0.	420.083	150.051	253.138	496.652	657.835	390.704	441.895	591.405	480.427	783.549	841.788	468.851	589.211	793.746	870.931	875.973	478.755	0.06052	551.649	455.846	653.085	
0.67632	562.547	420.083	0.	152.259	25.093	255.885	635.756	0.95563	0.21812	569.326	317.486	379.572	421.705	317.618	315.014	611.676	381.419	450.848	45.589	456.676	426.135	52.957	0.64015	631.006
145.496	208.514	150.051	152.259	0.	403.189	177.848	215.835	142.703	150.812	209.192	184.008	190.216	185.433	184.021	18.376	910.915	190.401	186.515	184.535	197.927	149.511	205.216	158.661	21.536
257.693	225.196	253.138	25.093	403.189	0.	225.341	217.157	260.486	252.377	211.322	220.829	251.141	256.965	219.671	221.407	312.097	25.216	259.879	260.383	208.055	253.677	218.916	244.528	231.522
323.517	306.662	496.652	255.885	177.848	225.341	0.	379.871	351.448	270.359	313.441	0.61601	286.897	345.136	0.61733	0.59129	867.561	297.094	374.279	379.321	200.791	502.704	273.685	19.187	375.121
703.388	0.80393	657.835	635.756	215.835	217.157	379.871	0.	731.319	65.023	0.6643	31.827	339.838	398.077	318.138	320.742	124.743	350.035	42.722	432.262	17.908	663.235	106.186	571.741	143.648
0.27931	65.811	390.704	0.95563	142.703	260.486	351.448	731.319	0.	0.81089	664.889	413.049	475.135	451.084	413.181	410.577	516.113	476.982	480.227	485.269	552.239	396.756	625.133	159.578	726.569
0.56272	577.021	441.895	0.21812	150.812	252.377	270.359	65.023	0.81089	0.	5.838	33.196	394.046	399.893	332.092	329.488	597.202	395.893	429.036	434.078	47.115	447.947	544.044	0.78489	64.548
636.958	138.743	591.405	569.326	209.192	211.322	313.441	0.6643	664.889	5.838	0.	25.184	398.188	456.427	251.708	254.312	11.81	408.385	48.557	490.612	11.265	596.805	0.75938	505.311	201.998
385.118	245.061	480.427	317.486	184.008	220.829	0.61601	31.827	413.049	33.196	25.184	0.	303.122	361.361	0.11576	0.05784	929.162	313.319	390.504	395.546	13.919	486.479	212.084	253.471	31.352

447. 204	259. 445	783. 549	379. 572	190. 216	251. 141	286. 897	339. 838	475. 135	394. 046	398. 188	303. 122	0.	0.58 239	314. 698	297. 338	991. 248	0.10 197	0.87 382	0.92 424	430. 856	789. 601	32.2 25	327. 703	251. 434
456. 165	317. 684	841. 788	421. 705	185. 433	256. 965	345. 136	398. 077	451. 084	399. 893	456. 427	361. 361	0.58 239	0.	372. 937	355. 577	943. 419	0.49 676	0.29 143	0.34 185	489. 095	84.7 84	380. 489	385. 942	299. 263
38.5 25	244. 929	468. 851	317. 618	184. 021	219. 671	0.61 733	318. 138	413. 181	332. 092	251. 708	0.11 576	314. 698	372. 937	0.	0.17 36	929. 294	324. 895	40.2 08	407. 122	139. 058	474. 903	211. 952	253. 603	313. 388
382. 646	247. 533	486. 211	315. 014	18.3 76	221. 407	0.59 129	320. 742	410. 577	329. 488	254. 312	0.05 784	297. 338	355. 577	0.17 36	0.	92.6 69	307. 535	38.4 72	389. 762	141. 662	492. 263	214. 556	250. 999	315. 992
544. 044	117. 422	589. 597	611. 676	910. 915	312. 097	867. 561	124. 743	516. 113	597. 202	11.8 1	929. 162	991. 248	943. 419	929. 294	92.6 69	0.	993. 095	95.4 23	954. 186	106. 835	584. 197	114. 125	675. 691	124. 268
449. 051	269. 642	793. 746	381. 419	190. 401	25.2 16	297. 094	350. 035	476. 982	395. 893	408. 385	313. 319	0.10 197	0.49 676	324. 895	307. 535	993. 095	0.	0.77 185	0.82 227	441. 053	799. 798	332. 447	3.37 9	249. 587
485. 308	346. 827	870. 931	450. 848	186. 515	259. 879	374. 279	42.7 22	480. 227	429. 036	48.5 57	390. 504	0.87 382	0.29 143	40.2 08	38.4 72	95.4 23	0.77 185	0.19 0.	0.19 796	518. 238	876. 983	409. 632	415. 085	288. 452
49.0 35	351. 869	875. 973	45.5 89	184. 535	260. 383	379. 321	432. 262	485. 269	434. 078	490. 612	395. 546	0.92 424	0.34 185	407. 122	389. 762	954. 186	0.82 227	0.19 796	0.	52.3 28	882. 025	414. 674	420. 127	308. 248
524. 308	171. 411	478. 755	456. 676	197. 927	208. 055	200. 791	17.9 08	552. 239	47.1 15	11.2 65	13.9 19	430. 856	489. 095	139. 058	141. 662	106. 835	441. 053	518. 238	52.3 28	0.	484. 155	108. 606	392. 661	234. 666
391. 675	590. 026	0.06 052	426. 135	149. 511	253. 677	502. 704	663. 235	396. 756	447. 947	596. 805	486. 479	789. 601	84.7 84	474. 903	492. 263	584. 197	799. 798	876. 983	882. 025	484. 155	0.	557. 049	461. 898	658. 485
597. 202	0.62 805	551. 649	52.9 57	205. 216	218. 916	273. 685	106. 186	625. 133	544. 044	0.75 938	212. 084	32.2 25	380. 489	211. 952	214. 556	114. 125	332. 447	409. 632	414. 674	108. 606	557. 049	0.	465. 555	12.6 06
1316 47	4985 32	4558 46	0.64 015	1586 61	2445 28	1918 7	5717 41	1595 78	0.78 489	5053 11	2534 71	3277 03	3859 42	2536 03	2509 99	6756 91	3379	4150 85	4201 27	3926 61	4618 98	4655 55	0.	5669 91
698. 638	0.68 459	653. 085	631. 006	21.5 36	231. 522	375. 121	143. 648	726. 569	64.5 48	201. 998	31.3 52	251. 434	299. 263	313. 388	315. 992	124. 268	249. 587	288. 452	308. 248	234. 666	658. 485	12.6 06	566. 991	0.