

519.5  
R05  
C.2



CIB-ESPOL

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**

**Instituto de Ciencias Matemáticas**

**Ingeniería en Estadística Informática**

**“Técnicas Estadísticas Paramétricas y No  
Paramétricas Equivalentes: Resultados  
Comparativos Por Simulación”**



CIB-ESPOL

**TESIS DE GRADO**

Previa a la obtención del Título de:

**INGENIERO EN ESTADÍSTICA INFORMÁTICA**

Presentada por:

**Muman Andrés Rojas Dávila**

**GUAYAQUIL - ECUADOR**



CIB-ESPOL

**AÑO**

**2003**



# AGRADECIMIENTO

A Dios por la oportunidad de vivir,  
a mis padres y hermanas por el apoyo incondicional todos los días de mi vida,  
a mi familia por acompañarme siempre,  
al M.Sc. Gaudencio Zurita por todo lo que aprendí en estos años y por la confianza,  
a todas las personas que contribuyeron de alguna forma con este trabajo y  
a Mónica por estar ahora y siempre ahí.



# DEDICATORIA



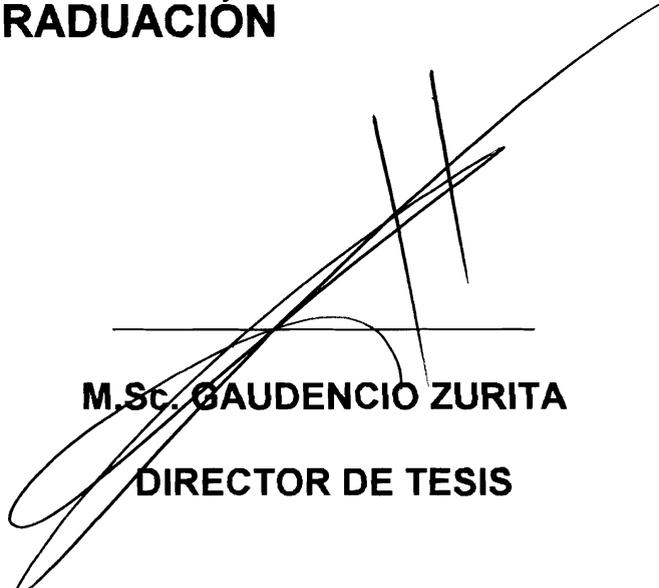
A Doménica, en su primer año de vida con nosotros.

# TRIBUNAL DE GRADUACIÓN



**MAT. JORGE MEDINA**

**DIRECTOR ICM**



**M.Sc. GAUDENCIO ZURITA**

**DIRECTOR DE TESIS**



**ING. WASHINGTON ARMAS**

**VOCAL**



**ING. VICENTE JAMA**

**VOCAL**

# DECLARACIÓN EXPRESA

“La responsabilidad del contenido de esta tesis de grado, me corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL”

(Reglamento de graduación de la ESPOL)



*M. Rojas D.*

---

Muman Andrés Rojas Dávila

# INDICE GENERAL

	Pág.
<b>Índice General</b>	<b>I</b>
<b>Simbología</b>	<b>IV</b>
<b>Índice de Gráficos</b>	<b>V</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>XIII</b>
<b>Resumen</b>	<b>XVIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>XIX</b>
<b>Capítulo 1: Estadística Paramétrica y No Paramétrica</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción	1
1.2 Estadística Inferencial	2
1.2.1 Estimación puntual	2
1.2.2 Estimación de intervalo	15
1.2.3 Prueba de Hipótesis	19
1.2.3.1 Hipótesis Simple	20
1.2.3.2 Hipótesis Compuesta	20
1.2.3.3 Hipótesis Nula	20
1.2.3.4 Hipótesis Alternativa	21
1.2.3.5 Contraste de Hipótesis	21
1.2.3.6 Error Tipo I y Tipo II	21
1.2.3.7 Región Crítica de un contraste de hipótesis	22
1.2.3.8 Potencia de una prueba	23
1.2.3.9 Robustez de una prueba	26
1.3 Estadística Paramétrica	26
1.3.1 Teorema del Límite Central	27
1.3.2 Teoría de Neyman y Pearson	28
1.3.3 El caso paramétrico: La prueba t	29
1.4 Estadística No Paramétrica	33
1.4.1 El caso no paramétrico: La prueba del signo	35
1.5 Equivalencia de pruebas estadísticas	38

<b>Capítulo 2: Técnicas Paramétricas y No Paramétricas a ser comparadas</b>	<b>39</b>
2.1 Introducción	39
2.2 Pruebas de hipótesis a la media de una población	41
2.2.1 Prueba t	41
2.2.2 Prueba de Wilcoxon para una muestra	42
2.3 Pruebas de hipótesis para la media de dos poblaciones	51
2.3.1 Prueba t para dos muestras	52
2.3.2 Prueba de Mann-Whitney	53
2.4 Pruebas de hipótesis para la varianza de dos muestras	59
2.4.1 Prueba F	59
2.4.2 Prueba de Ansari-Bradley	61
2.5 Obtención de los estimadores de $\beta_0$ y $\beta_1$ en regresión lineal simple	66
2.5.1 Mínimos cuadrados	67
2.5.2 Técnica de Theil	68
<b>Capítulo 3: Determinación de muestras</b>	<b>71</b>
3.1 Introducción	71
3.2 Distribución Normal	72
3.3 Distribución de Laplace	79
3.4 Distribución de Weibull	82
3.5 Distribución Binomial	85
<b>Capítulo 4: Comparación Numérica de Técnicas Paramétricas y No Paramétricas</b>	<b>88</b>
4.1 Introducción.	88
4.2 Comparación de técnicas de tendencia central de la muestra	91
4.2.1 Comparación en una muestra de una distribución Normal	92
4.2.2 Comparación en una muestra de una distribución simétrica	110
4.2.3 Comparación en una muestra de una distribución asimétrica	128
4.2.4 Comparación en una muestra de una distribución discreta	146
4.3 Comparación de técnicas de tendencia central de dos muestras	164
4.3.1 Comparación en dos muestras de una distribución Normal	164
4.3.2 Comparación en dos muestras de una distribución simétrica	187
4.3.3 Comparación en dos muestras de una distribución asimétrica	210
4.4 Comparación de hipótesis de la igualdad entre medidas de dispersión	221

4.4.1 Comparación en dos muestras de una distribución Normal	221
4.4.2 Comparación en dos muestras de una distribución simétrica	232
4.4.3 Comparación en dos muestras de una distribución asimétrica	243
4.5 Comparación de técnicas obtención de $b_0$ y $b_1$ en regresión lineal simple	255
4.5.1 El error sigue una distribución Normal	256
4.5.2 El error sigue una distribución simétrica	261

**Capítulo 5: Conclusiones y Recomendaciones** **269**

**Bibliografía**

**Anexos**

## SIMBOLOGÍA

$\mu$	Media poblacional
$\bar{x}$	Media aritmética muestral
$\tilde{\mu}$	Mediana poblacional
$\tilde{x}$	Mediana muestral
$\sigma^2$	Varianza poblacional
$\sigma$	Desviación estándar de la población
$H_0$	Hipótesis Nula
$H_1$	Hipótesis Alternativa
$\rho_{ij}$	Coefficiente de correlación entre la variable $X_i$ y la variable $X_j$
$\beta_0, \beta_1$	Parámetros del modelo de regresión lineal simple
$T^+, T$	Estadísticos de Wilcoxon
$U_1, U_2$	Estadísticos de Mann-Whitney
$W_1, W_2$	Estadísticos de Ansari-Bradley

## INDICE DE GRÁFICOS

		Pág.
Gráfico 1.1	Función de Probabilidad de la media aritmética para $n=3$ y $N=5$	5
Gráfico 1.2	Función de Probabilidad de la mediana muestral para $n=3$ y $N=5$	6
Gráfico 1.3	Función de Probabilidad de la media aritmética para $n=5$ y $N=15$	10
Gráfico 1.4	Función de Probabilidad de la mediana muestral para $n=5$ y $N=15$	11
Gráfico 1.5	Función de probabilidad del estadístico de orden 5 para $n=5$ y $N=15$	13
Gráfico 1.6	Función de probabilidad del estadístico de orden 1 para $n=5$ y $N=15$	14
Gráfico 1.7	Representación gráfica de $P(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$	16
Gráfico 1.8	Potencia de la prueba para el contraste especificado	24
Gráfico 1.9	Efecto de distintas regiones críticas en la potencia de la prueba especificada	26
Gráfico 1.10	Función de probabilidad para $r$ para $n=10$	37
Gráfico 2.1	Función de probabilidad de $T^+$ para $n=2$	45
Gráfico 2.2	Función de probabilidad de $T^+$ para $n=4$	47
Gráfico 2.3	Función de probabilidad de $U$ para $n=2$ y $m=2$	56
Gráfico 2.4	Función de probabilidad del estadístico de Ansari-Bradley para $n=2$ y $m=2$	62
Gráfico 3.1	Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal	72
Gráfico 3.2	Función de densidad de probabilidad de la distribución de Laplace	79
Gráfico 3.3	Función de densidad de probabilidad de la distribución de Weibull	82
Gráfico 3.4	Función de probabilidad de la distribución binomial	85
Gráfico 4.1	Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal( $0, \frac{1}{2}$ )	92
Gráfico 4.2	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, \frac{1}{2})$ Aceptaciones de la hipótesis nula	94
Gráfico 4.3	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, \frac{1}{2})$ Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba $Z$	96
Gráfico 4.4	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, \frac{1}{2})$ Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba $t$	96
Gráfico 4.5	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, \frac{1}{2})$ Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba de Wilcoxon	96
Gráfico 4.6	Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal( $0, 1$ )	98
Gráfico 4.7	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 1)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	100
Gráfico 4.8	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 1)$ Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba $Z$	102
Gráfico 4.9	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 1)$ Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba $t$	102
Gráfico 4.10	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 1)$ Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba de Wilcoxon	102
Gráfico 4.11	Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal( $0, 25$ )	104
Gráfico 4.12	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 25)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	106
Gráfico 4.13	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 25)$ Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba $Z$	108

Gráfico 4.14	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 25)$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t	108
Gráfico 4.15	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 25)$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon	108
Gráfico 4.16	Función de densidad de probabilidad de la distribución Laplace(0, $\frac{1}{2}$ )	110
Gráfico 4.17	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, \frac{1}{2})$ Aceptaciones de la hipótesis nula	112
Gráfico 4.18	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, \frac{1}{2})$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z	114
Gráfico 4.19	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, \frac{1}{2})$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t	114
Gráfico 4.20	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, \frac{1}{2})$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon	114
Gráfico 4.21	Función de densidad de probabilidad de la distribución Laplace(0, 1)	116
Gráfico 4.22	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 1)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	118
Gráfico 4.23	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 1)$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z	120
Gráfico 4.24	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 1)$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t	120
Gráfico 4.25	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 1)$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon	120
Gráfico 4.26	Función de densidad de probabilidad de la distribución Laplace(0, 5)	122
Gráfico 4.27	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 5)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	124
Gráfico 4.28	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 5)$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z	126
Gráfico 4.29	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 5)$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t	126
Gráfico 4.30	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 5)$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon	126
Gráfico 4.31	Función de densidad de probabilidad de la distribución Weibull(1, $\frac{1}{2}$ )	128
Gráfico 4.32	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, \frac{1}{2})$ Aceptaciones de la hipótesis nula	130
Gráfico 4.33	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, \frac{1}{2})$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z	132
Gráfico 4.34	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, \frac{1}{2})$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t	132
Gráfico 4.35	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, \frac{1}{2})$ Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon	132
Gráfico 4.36	Función de densidad de probabilidad de la distribución Weibull(1, 1)	134
Gráfico 4.37	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, 1)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	136
Gráfico 4.38	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, 1)$ Intervalos de confianza para	138

	el valor p: Prueba Z	
Gráfico 4.39	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Weibull(1, 1) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t	138
Gráfico 4.40	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Weibull(1, 1) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon	138
Gráfico 4.41	Función de densidad de probabilidad de la distribución Weibull(1, 3)	140
Gráfico 4.42	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Weibull(1, 3) Aceptaciones de la hipótesis nula	142
Gráfico 4.43	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Weibull(1, 3) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z	144
Gráfico 4.44	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Weibull(1, 3) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t	144
Gráfico 4.45	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Weibull(1, 3) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon	144
Gráfico 4.46	Función de probabilidad de la distribución Binomial(10, 0.2)	146
Gráfico 4.47	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Binomial(10, 0.2) Aceptaciones de la hipótesis nula	148
Gráfico 4.48	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Binomial(10, 0.2) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z	150
Gráfico 4.49	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Binomial(10, 0.2) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t	150
Gráfico 4.50	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Binomial(10, 0.2) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon	150
Gráfico 4.51	Función de probabilidad de la distribución Binomial(10, 0.5)	152
Gráfico 4.52	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Binomial(10, 0.5) Aceptaciones de la hipótesis nula	154
Gráfico 4.53	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Binomial(10, 0.5) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z	156
Gráfico 4.54	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Binomial(10, 0.5) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t	156
Gráfico 4.55	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Binomial(10, 0.5) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon	156
Gráfico 4.56	Función de probabilidad de la distribución Binomial(10, 0.8)	158
Gráfico 4.57	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Binomial(10, 0.8) Aceptaciones de la hipótesis nula	160
Gráfico 4.58	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Binomial(10, 0.8) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z	162
Gráfico 4.59	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Binomial(10, 0.8) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t	162
Gráfico 4.60	Resultados de la pruebas de tendencia central: X~ Binomial(10, 0.8) Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon	162
Gráfico 4.61	Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal(0,1)	165
Gráfico 4.62	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	167

Gráfico 4.63	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	167
Gráfico 4.64	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	168
Gráfico 4.65	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	168
Gráfico 4.66	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba t	170
Gráfico 4.67	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba Mann-Withney	170
Gráfico 4.68	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba t	171
Gráfico 4.69	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba Mann-Withney	171
Gráfico 4.70	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba t	172
Gráfico 4.71	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba Mann-Withney	172
Gráfico 4.72	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba t	173
Gráfico 4.73	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba Mann-Withney	173
Gráfico 4.74	Función de densidad de probabilidad de la distribución $N(0,1)$ y $N(0, 10)$	176
Gráfico 4.75	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	178
Gráfico 4.76	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	178
Gráfico 4.77	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	179
Gráfico 4.78	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	179
Gráfico 4.79	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba t	181
Gráfico 4.80	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba Mann-Withney	181
Gráfico 4.81	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba t	182
Gráfico 4.82	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba Mann-Withney	182
Gráfico 4.83	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba t	183
Gráfico 4.84	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba Mann-Withney	183
Gráfico 4.85	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba t	184

	$N(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba $t$	
Gráfico 4.86	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Whitney	184
Gráfico 4.87	Función de densidad de probabilidad de la distribución de Laplace(0,1)	188
Gráfico 4.88	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	190
Gráfico 4.89	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	190
Gráfico 4.90	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	191
Gráfico 4.91	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	191
Gráfico 4.92	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba $t$	193
Gráfico 4.93	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Whitney	193
Gráfico 4.94	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba $t$	194
Gráfico 4.95	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Whitney	194
Gráfico 4.96	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba $t$	195
Gráfico 4.97	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Whitney	195
Gráfico 4.98	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba $t$	196
Gráfico 4.99	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Whitney	196
Gráfico 4.100	Función de densidad de probabilidad de la distribución Laplace(0,1) y Laplace(0, 10)	199
Gráfico 4.101	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	201
Gráfico 4.102	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	201
Gráfico 4.103	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	202
Gráfico 4.104	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	202
Gráfico 4.105	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba $t$	204
Gráfico 4.106	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Whitney	204
Gráfico 4.107	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba $t$	205
Gráfico 4.108	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Whitney	205

	$X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Withney	
Gráfico 4.109	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba t	206
Gráfico 4.110	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Withney	206
Gráfico 4.111	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba t	207
Gráfico 4.112	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Withney	207
Gráfico 4.113	Función de densidad de probabilidad de la distribución de Weibull(1, 1)	210
Gráfico 4.114	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	212
Gráfico 4.115	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	212
Gráfico 4.116	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	213
Gráfico 4.117	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	213
Gráfico 4.118	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba t	215
Gráfico 4.119	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Withney	215
Gráfico 4.120	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba t	216
Gráfico 4.121	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Withney	216
Gráfico 4.122	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba t	217
Gráfico 4.123	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Withney	217
Gráfico 4.124	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba t	218
Gráfico 4.125	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Mann-Withney	218
Gráfico 4.126	Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal(0,1)	222
Gráfico 4.127	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	224
Gráfico 4.128	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	224
Gráfico 4.129	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	225
Gráfico 4.130	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	225
Gráfico 4.131	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ :	227

	Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba F	
Gráfico 4.132	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Ansari-Bradley	227
Gráfico 4.133	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba F	228
Gráfico 4.134	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Ansari-Bradley	228
Gráfico 4.135	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba F	229
Gráfico 4.136	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Ansari-Bradley	229
Gráfico 4.137	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba F	230
Gráfico 4.138	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Ansari-Bradley	230
Gráfico 4.139	Función de densidad de probabilidad de la distribución de Laplace(0,1)	232
Gráfico 4.140	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	235
Gráfico 4.141	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	235
Gráfico 4.142	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	236
Gráfico 4.143	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	236
Gráfico 4.144	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba F	238
Gráfico 4.145	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Ansari-Bradley	238
Gráfico 4.146	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba F	239
Gráfico 4.147	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Ansari-Bradley	239
Gráfico 4.148	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba F	240
Gráfico 4.149	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Ansari-Bradley	240
Gráfico 4.150	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba F	241
Gráfico 4.151	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor $p$ : Prueba Ansari-Bradley	241
Gráfico 4.152	Función de densidad de probabilidad de la distribución de Weibull(1,1)	243
Gráfico 4.153	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	246
Gráfico 4.154	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	246

	Weibull(1 , 1) : Aceptaciones de la hipótesis nula	
Gráfico 4.155	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim$ Weibull(1 , 1) y $X_2 \sim$ Weibull(1 , 1) : Aceptaciones de la hipótesis nula	247
Gráfico 4.156	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim$ Weibull(1 , 1) y $X_2 \sim$ Weibull(1 , 1) : Aceptaciones de la hipótesis nula	247
Gráfico 4.157	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim$ Weibull(1 , 1) y $X_2 \sim$ Weibull(1 , 1) : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba F	249
Gráfico 4.158	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=5$ $X_1 \sim$ Weibull(1 , 1) y $X_2 \sim$ Weibull(1 , 1) : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba Ansari-Bradley	249
Gráfico 4.159	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim$ Weibull(1 , 1) y $X_2 \sim$ Weibull(1 , 1) : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba F	250
Gráfico 4.160	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=15$ $X_1 \sim$ Weibull(1 , 1) y $X_2 \sim$ Weibull(1 , 1) : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba Ansari-Bradley	250
Gráfico 4.161	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim$ Weibull(1 , 1) y $X_2 \sim$ Weibull(1 , 1) : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba F	251
Gráfico 4.162	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=30$ $X_1 \sim$ Weibull(1 , 1) y $X_2 \sim$ Weibull(1 , 1) : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba Ansari-Bradley	251
Gráfico 4.163	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim$ Weibull(1 , 1) y $X_2 \sim$ Weibull(1 , 1) : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba F	252
Gráfico 4.164	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $n_2=100$ $X_1 \sim$ Weibull(1 , 1) y $X_2 \sim$ Weibull(1 , 1) : Intervalos de confianza para el valor p : Prueba Ansari-Bradley	252
Gráfico 4.165	Función de densidad de probabilidad de la distribución $N(0 , \sigma^2)$	256
Gráfico 4.166	Función de densidad de probabilidad de la distribución de Laplace(0 , $\beta$ )	261
Gráfico 4.167	Efecto de la distribución del error en la diferencia entre estimadores y parámetros: Técnica de Mínimos Cuadrados $\beta_0$ y $b_0$	266
Gráfico 4.168	Efecto de la distribución del error en la diferencia entre estimadores y parámetros: Técnica de Theil $\beta_0$ y $b_0$	267
Gráfico 4.169	Efecto de la distribución del error en la diferencia entre estimadores y parámetros: Técnica de Mínimos Cuadrados $\beta_1$ y $b_1$	268
Gráfico 4.170	Efecto de la distribución del error en la diferencia entre estimadores y parámetros: Técnica de Theil $\beta_1$ y $b_1$	268

## INDICE DE TABLAS

		Pág.
Tabla I	Valores de la media y mediana aritmética para $n=3$ y $N=5$	5
Tabla II	Frecuencias Absolutas y Relativas de la media aritmética y mediana muestrales para $n=3$ y $N=5$	5
Tabla III	Valores de la media aritmética y de la desviación estándar muestrales para $n=3$ y $N=5$	18
Tabla IV	Intervalos de confianza para la media poblacional para $n=3$ y $N=5$	19
Tabla V	Errores Tipo I y Tipo 2 para el contraste especificado	24
Tabla VI	Valores posibles de $r$ para $n=10$ (Prueba del Signo)	36
Tabla VII	Técnicas equivalentes a ser comparadas en la investigación	40
Tabla VIII	Valores de $T^+$ y $T^-$ para $n=2$	44
Tabla IX	Valores de $T^+$ y $T^-$ para $n=4$	46
Tabla X	Ejemplo de aplicación de la prueba de Wilcoxon	50
Tabla XI	Valores posibles de $U_1$ y $U_2$ para $n=2$ y $m=2$	55
Tabla XII	Ejemplo de aplicación de la prueba de Mann-Whitney	57
Tabla XIII	Valores posibles de $W_1$ y $W_2$ para $n=2$ y $m=2$	61
Tabla XIV	Ejemplo de aplicación de la prueba de Ansari-Bradley	64
Tabla XV	Datos del ejercicio de aplicación de la técnica de Theil	69
Tabla XVI	Valores posibles $S_{ij}$ para el ejercicio propuesto	70
Tabla XVII	Diversas características de la distribución de Laplace	80
Tabla XVIII	Diversas características de la distribución de Weibull	83
Tabla XIX	Diversas características de la distribución de Binomial	86
Tabla XX	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, \frac{1}{2})$ Aceptaciones de la hipótesis nula	93
Tabla XXI	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, \frac{1}{2})$ Intervalos de confianza para el valor plausible	95
Tabla XXII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, \frac{1}{2})$ Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible	97
Tabla XXIII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 1)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	99
Tabla XXIV	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 1)$ Intervalos de confianza para el valor plausible	101
Tabla XXV	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 25)$ Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible	103
Tabla XXVI	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 25)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	105
Tabla XXVII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 25)$ Intervalos de confianza para el valor plausible	107
Tabla XXVIII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim N(0, 25)$ Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible	109
Tabla XXIX	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, \frac{1}{2})$ Aceptaciones de la hipótesis nula	111
Tabla XXX	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, \frac{1}{2})$ Intervalos de confianza para el valor plausible	113

Tabla XXXI	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, \frac{1}{2})$ Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible	115
Tabla XXXII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 1)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	117
Tabla XXXIII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 1)$ Intervalos de confianza para el valor plausible	119
Tabla XXXIV	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 1)$ Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible	121
Tabla XXXV	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 5)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	123
Tabla XXXVI	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 5)$ Intervalos de confianza para el valor plausible	125
Tabla XXXVII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Laplace}(0, 5)$ Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible	127
Tabla XXXVIII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, \frac{1}{2})$ Aceptaciones de la hipótesis nula	129
Tabla XXXIX	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, \frac{1}{2})$ Intervalos de confianza para el valor plausible	131
Tabla XL	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, \frac{1}{2})$ Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible	133
Tabla XLI	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, 1)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	135
Tabla XLII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, 1)$ Intervalos de confianza para el valor plausible	137
Tabla XLIII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, 1)$ Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible	139
Tabla XLIV	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, 3)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	141
Tabla XLV	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, 3)$ Intervalos de confianza para el valor plausible	143
Tabla XLVI	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Weibull}(1, 3)$ Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible	145
Tabla XLVII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Binomial}(10, 0.2)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	147
Tabla XLVIII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Binomial}(10, 0.2)$ Intervalos de confianza para el valor plausible	149
Tabla XLIX	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Binomial}(10, 0.2)$ Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible	151
Tabla L	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	153
Tabla LI	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$ Intervalos de confianza para el valor plausible	155
Tabla LII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$ Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible	157
Tabla LIII	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Binomial}(10, 0.8)$ Aceptaciones de la hipótesis nula	159
Tabla LIV	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Binomial}(10, 0.8)$ Intervalos de confianza para el valor plausible	161
Tabla LV	Resultados de la pruebas de tendencia central: $X \sim \text{Binomial}(10, 0.8)$ Longitudes de los intervalos	163

	de confianza para el valor plausible	
Tabla LVI	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	166
Tabla LVII	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor plausible	169
Tabla LVIII	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Longitud de los intervalos de confianza para el valor plausible	174
Tabla LIX	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Longitud de los intervalos de confianza para la diferencia entre medias y medianas	175
Tabla LX	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para la diferencia entre medias y medianas	175
Tabla LXI	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	177
Tabla LXII	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor plausible	180
Tabla LXIII	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Longitud de los intervalos de confianza para el valor plausible	185
Tabla LXIV	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Longitud de los intervalos de confianza para la diferencia entre medias y medianas	186
Tabla LXV	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 10)$ : Intervalos de confianza para la diferencia entre medias y medianas	186
Tabla LXVI	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	189
Tabla LXVII	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor plausible	192
Tabla LXVIII	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Longitud de los intervalos de confianza para el valor plausible	197
Tabla LXIX	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Longitud de los intervalos de confianza para la diferencia entre medias y medianas	198
Tabla LXX	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para la diferencia entre medias y medianas	198
Tabla LXXI	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	200
Tabla LXXII	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Intervalos de confianza para el valor plausible	203
Tabla LXXIII	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Longitud de los intervalos de confianza para el valor plausible	208
Tabla LXXIV	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Longitud de los intervalos de confianza para la diferencia entre medias y medianas	209
Tabla LXXV	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$ : Intervalos de confianza para la diferencia entre medias y medianas	209
Tabla LXXVI	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	211

Tabla LXXVII	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor plausible	214
Tabla LXXVIII	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Longitud de los intervalos de confianza para el valor plausible	219
Tabla LXXIX	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Longitud de los intervalos de confianza para la diferencia entre medias y medianas	220
Tabla LXXX	Resultados de la pruebas de tendencia central para dos muestras: $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Intervalos de confianza para la diferencia entre medias y medianas	220
Tabla LXXXI	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	223
Tabla LXXXII	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor plausible	226
Tabla LXXXIII	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Longitud de los intervalos de confianza para el valor plausible	231
Tabla LXXXIV	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el cociente de varianzas	232
Tabla LXXXV	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	234
Tabla LXXXVI	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor plausible	237
Tabla LXXXVII	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Longitud de los intervalos de confianza para el valor plausible	242
Tabla LXXXVIII	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ : Intervalos de confianza para el cociente de varianzas	243
Tabla LXXXIX	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Aceptaciones de la hipótesis nula	245
Tabla XC	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Intervalos de confianza para el valor plausible	248
Tabla XCI	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Longitud de los intervalos de confianza para el valor plausible	253
Tabla XCII	Resultados de la pruebas de dispersión para dos muestras: $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$ : Intervalos de confianza para el cociente de varianzas	254
Tabla XCIII	Resultados de las técnicas de regresión: Intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros: $\beta_1 \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$	257
Tabla XCIV	Resultados de las técnicas de regresión: Intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros: $\beta_0 \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$	257
Tabla XCV	Resultados de las técnicas de regresión: Intervalos de confianza para el coeficiente de correlación $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$	258
Tabla XCVI	Resultados de las técnicas de regresión: Longitudes de los intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros: $\beta_1 \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$	258
Tabla XCVII	Resultados de las técnicas de regresión: Longitudes de los intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros: $\beta_0 \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$	259
Tabla XCVIII	Resultados de las técnicas de regresión: Longitudes de los intervalos de confianza para el coeficiente de correlación $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$	259

Tabla XCIX	Resultados de las técnicas de regresión: Intervalos de confianza para el valor plausible: $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$	260
Tabla C	Resultados de las técnicas de regresión: Intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros: $\beta_1 \quad \varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$	262
Tabla CI	Resultados de las técnicas de regresión: Intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros: $\beta_0 \quad \varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$	262
Tabla CII	Resultados de las técnicas de regresión: Intervalos de confianza para el coeficiente de correlación $\varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$	263
Tabla CIII	Resultados de las técnicas de regresión: Longitudes de los intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros: $\beta_1 \quad \varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$	263
Tabla CIV	Resultados de las técnicas de regresión: Longitudes de los intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros: $\beta_0 \quad \varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$	264
Tabla CV	Resultados de las técnicas de regresión: Longitudes de los intervalos de confianza para el coeficiente de correlación $\varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$	264
Tabla CVI	Resultados de las técnicas de regresión: Intervalos de confianza para el valor plausible: $\varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$	265

## RESUMEN

En la presente investigación se realiza un estudio comparativo entre técnicas estadísticas paramétricas y no paramétricas enfocado principalmente en el valor plausible de dichas técnicas, determinando el efecto en del mismo en los supuestos teóricos que poseen y su robustez. Se realizaron 100 simulaciones para cada caso indicado, de donde obtuvimos los siguientes resultados: En las pruebas de hipótesis de la media la prueba t resultó ser sensible a la simetría y la prueba de Wilcoxon, resultó sensible a la simetría y la continuidad. En las pruebas de hipótesis a la media de dos poblaciones las pruebas t para dos muestras y de Mann-Whitney resultaron ser robustas frente a sus supuestos, pero Mann-Whitney con menor potencia de explicación. En las pruebas de hipótesis de la varianza de dos poblaciones la prueba F se mostró sensible al supuesto de normalidad mientras que la prueba de Ansari-Bradley robusta frente a sus supuestos. En las técnicas de estimación de los parámetros de regresión cuando el error es normal ,la técnica de Mínimos Cuadrados obtuvo mejores estimaciones; si el error es simétrico y no es normal la técnica de Theil provee mejores estimaciones a mayor varianza, aunque sin superar mayormente a la técnica de Mínimos Cuadrados.

## INTRODUCCIÓN

Las técnicas que agrupa la Estadística Inferencial se dividen principalmente en dos partes: las técnicas paramétricas y las no paramétricas. Las primeras se basan en suposiciones específicas acerca de la población de la que se desea hacer algún tipo de inferencia, mientras que en cambio las técnicas no paramétricas hacen supuestos muy generales respecto a la distribución poblacional de la que se desea hacer inferencias. Son supuestos generales por ejemplo la simetría o continuidad de la distribución. Tradicionalmente lo que separa ambas técnicas estadísticas es el supuesto de que la población de la que se toman los datos sigue una distribución normal. En Freund J., Walpole R.(1980) puede apreciarse una característica de las pruebas paramétricas: puede demostrarse teóricamente que son las pruebas que producen la región crítica más potente, ello relega teóricamente a las pruebas no paramétricas en lo que respecta a potencia de explicación. Durante mucho tiempo los estadísticos han preferido las técnicas paramétricas o han optado por diversas transformaciones a fin de poder aplicarlas, dejando como recurso final a las pruebas no paramétricas cuando no se ha podido encontrar evidencia estadística de que la población sigue una distribución normal. Por otro lado Hollander M., Wolfe D. (1973) recalcan la falta de robustez de las pruebas paramétricas frente al supuesto de normalidad en la mayoría de los casos. Indican además que los supuestos de donde se parte para el desarrollo teórico de dichas técnicas son “fuertes”,

es decir difíciles de suponer sin pruebas de hipótesis apropiadas, mientras que las pruebas no paramétricas permiten soluciones “elegantes” donde los supuestos son más sencillos de cumplir que los propuestos por las técnicas paramétricas. Tenemos que teóricamente las pruebas paramétricas superan a las pruebas no paramétricas en potencia de explicación cuando la población es normal como se indicó anteriormente, entonces recurriremos para la comparación de ambas técnicas a simulaciones numéricas de muestras provenientes de diversas poblaciones a fin de establecer por medio de resultados numéricos el comportamiento de técnicas equivalentes en igualdad de condiciones, violando y cumpliendo sus supuestos a fin de determinar que pruebas se desempeñan mejor que otras en ciertos casos y el efecto de los supuestos teóricos de dichas pruebas en su robustez.

# CAPÍTULO 1

## 1. ESTADÍSTICA PARAMÉTRICA Y NO PARAMÉTRICA

### 1.1. Introducción

El presente capítulo incluye la base teórica de la investigación, es decir los conceptos estadísticos relacionados con las técnicas que serán parte del análisis a realizar. Se indicarán, para esto, en la sección 1.2 los conceptos relacionados con la Estadística Inferencial tales como estimación puntual y de intervalo, pruebas de hipótesis, errores tipo I y II, potencia y robustez de una prueba estadística entre otros.

En las secciones 1.3 y 1.4 se establecerán e ilustrarán de ser posible los conceptos relacionados con la Estadística Paramétrica y la Estadística No Paramétrica respectivamente, indicando sus diferencias. La sección 1.5 contiene la definición de equivalencia de pruebas estadísticas.

## 1.2. Estadística Inferencial

La Estadística Inferencial es la parte de la Estadística que, en base a una muestra, estima una o varias características de la población de donde proviene. Se tiene entonces que los problemas que contempla se dividen en problemas de estimación y pruebas de hipótesis. Estos problemas se diferencian en que en los de estimación se determina el valor de un parámetro en base a un grupo de opciones, mientras que la prueba de hipótesis decide si aceptar o rechazar un conjunto de valores específicos de parámetros. Los conceptos relacionados con los dos tipos de problemas se indican a continuación.

### 1.2.1. Estimación Puntual

Sea  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de tamaño  $n$  tomada de una población  $X$  uno de cuyos parámetros es  $\theta \in A$  ( $A \subseteq \mathbb{R}$ ). Un estimador  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  es una función  $\hat{\theta}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , cuyo valor  $\hat{\theta}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  está dado en términos de los valores muestrales, el cual es utilizado como la estimación puntual de un parámetro. Cuando se utiliza el valor de una estadística o valor estadístico para estimar un parámetro de una población, se denomina a esto estimación puntual, y nos referimos al valor de la estadística como un estimador puntual del parámetro  $\theta$ .

Ilustremos estos conceptos utilizando la siguiente población discreta:

$$X = \{ X_1, X_2, X_3, \dots, X_N \}$$

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad ; \quad N = 5$$

Donde:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & , x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & , \text{resto de } x \end{cases}$$

Calculamos la media y varianza poblacionales:

$$\mu = E[x] = \sum_{i=1}^n x_i P(X_i = x_i) = 1\left(\frac{1}{5}\right) + 2\left(\frac{1}{5}\right) + 3\left(\frac{1}{5}\right) + 4\left(\frac{1}{5}\right) + 5\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{15}{5} = 3$$

$$\sigma^2 = E[x^2] - \mu^2 = \sum_{i=1}^n ((x_i)^2 P(X_i = x_i)) - \mu^2 = \sum_{i=1}^5 ((x_i)^2 P(X_i = x_i)) - 9$$

$$1\left(\frac{1}{5}\right) + 4\left(\frac{1}{5}\right) + 9\left(\frac{1}{5}\right) + 16\left(\frac{1}{5}\right) + 25\left(\frac{1}{5}\right) - 9 = \left(\frac{55}{5}\right) - 9 = 2$$

Determinaremos la distribución de probabilidad de la media aritmética y la mediana muestral para  $n = 3$ : En la Tabla I se pueden apreciar todas las muestras posibles y a la vez todos los valores posibles de las medias y medianas muestrales para  $n = 3$  y  $N = 5$ . Tenemos un total de

$\binom{N}{n} = \binom{5}{3} = 10$  muestras posibles con las cuales obtendremos las

funciones de probabilidad de la media aritmética y la mediana muestral.

**Tabla I**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Valores de la media aritmética y mediana muestrales para  $n=3$  y  $N=5$**

Muestra			Mediana	Media
1	2	3	2	6/3
1	2	4	2	7/3
1	2	5	2	8/3
1	3	4	3	8/3
1	3	5	3	9/3
1	4	5	4	10/3
2	3	4	3	9/3
2	3	5	3	10/3
2	4	5	4	11/3
3	4	5	4	12/3

Elaboración: M. Rojas

Se pueden observar en la Tabla II las frecuencias absolutas y relativas de todos los valores posibles de la media aritmética y la mediana muestral indicados:

**Tabla II**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Frecuencias Absolutas y Relativas de la media aritmética y mediana muestrales para  $n=3$  y  $N=5$**

Media aritmética	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
6/3	1	1/10
7/3	1	1/10
8/3	2	2/10
9/3	2	2/10
10/3	2	2/10
11/3	1	1/10
12/3	1	1/10
Mediana muestral	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
2	3	3/10
3	4	4/10
4	3	3/10

Elaboración: M. Rojas

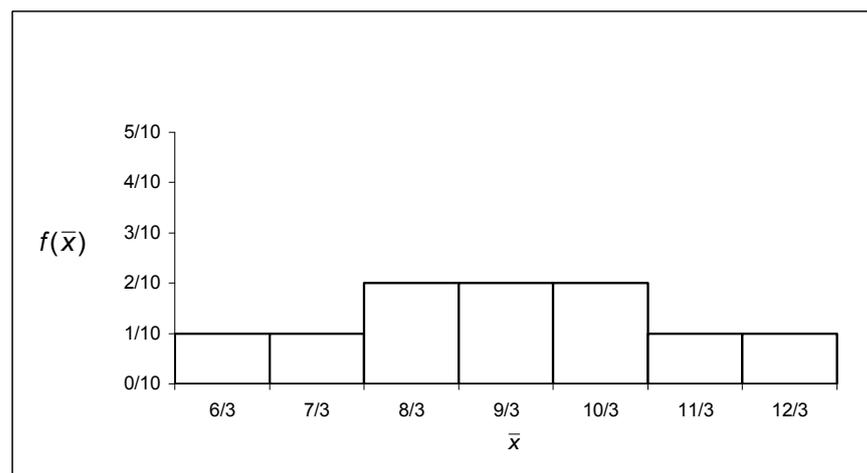
De donde se tiene que las distribuciones de probabilidad de la media aritmética y la mediana muestral para  $n = 3$  y  $N = 5$  son respectivamente:

$$f(\bar{X}) \begin{cases} 1/10 & \bar{X} = 6/3, 7/3, 11/3, 12/3 \\ 2/10 & \bar{X} = 8/3, 9/3, 10/3 \\ 0 & \text{Resto de } \bar{X} \end{cases}$$

$$f(\tilde{X}) \begin{cases} 3/10 & \tilde{X} = 2, 4 \\ 4/10 & \tilde{X} = 3 \\ 0 & \text{Resto de } \tilde{X} \end{cases}$$

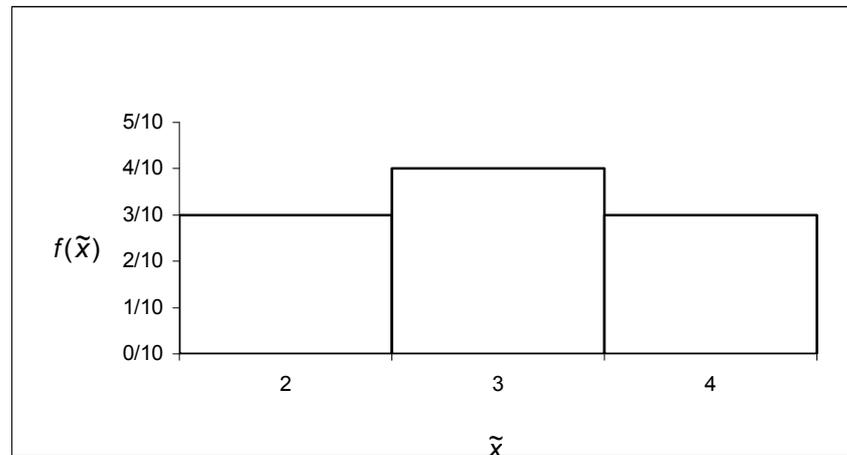
Los Gráficos 1.1 y 1.2 muestran los histogramas de estas funciones de probabilidad:

**Gráfico 1.1**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de Probabilidad de la media aritmética para  $n=3$  y  $N=5$**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 1.2**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de probabilidad de la mediana muestral para  $n=3$  y  $N=5$**



Elaboración: M. Rojas.

Se puede apreciar que ambas son simétricas alrededor de la media poblacional. Al obtener el valor esperado y varianza de ambas variables tenemos que:

$$\mu_{\bar{x}} = E[\bar{x}] = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i P(\bar{X}_i = \bar{x}_i) = \frac{1}{10} \left( \left( \frac{6}{3} \right) + \left( \frac{7}{3} \right) + \left( \frac{11}{3} \right) + \left( \frac{12}{3} \right) \right) + \frac{2}{10} \left( \frac{8}{3} + \frac{9}{3} + \frac{10}{3} \right) = 3$$

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\bar{x}} &= E[(\bar{x})^2] - \mu_{\bar{x}}^2 = \left( \sum_{i=1}^7 (\bar{x}_i)^2 P(\bar{X}_i = \bar{x}_i) \right) - 9 \\ &= \left( \frac{1}{10} \left( \left( \frac{6}{3} \right)^2 + \left( \frac{7}{3} \right)^2 + \left( \frac{11}{3} \right)^2 + \left( \frac{12}{3} \right)^2 \right) + \frac{2}{10} \left( \left( \frac{8}{3} \right)^2 + \left( \frac{9}{3} \right)^2 + \left( \frac{10}{3} \right)^2 \right) \right) - 9 \\ &= \left( \frac{1}{10} \left( \left( \frac{36}{9} \right) + \left( \frac{49}{9} \right) + \left( \frac{121}{9} \right) + \left( \frac{144}{9} \right) \right) + \frac{2}{10} \left( \left( \frac{64}{9} \right) + \left( \frac{81}{9} \right) + \left( \frac{100}{9} \right) \right) \right) - 9 \\ \sigma^2_{\bar{x}} &= \frac{1}{10} \left( \frac{360}{9} \right) + \frac{2}{10} \left( \frac{245}{9} \right) - 9 = \frac{30}{90} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \sigma^2 \left( \frac{1}{n} \right) \left( \frac{N-n}{N-1} \right) = 2 \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{5-3}{5-1} \right) = 2 \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{2}{4} \right) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Verificándose esta relación entre la varianza de la media aritmética con la varianza poblacional.

Se tiene el valor esperado de la mediana:

$$\mu_{\tilde{x}} = E[\tilde{x}] = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i P(\tilde{X}_i = \tilde{x}_i) = \frac{3}{10}(2+4) + \frac{4}{10}(3) = \frac{18+12}{10} = 3$$

De allí que la media aritmética y la mediana muestral sean estimadores insesgados de la media poblacional cuando  $X$  es simétrica con respecto a  $\mu$ .

Obteniendo la varianza de la mediana muestral se tiene que:

$$\sigma^2_{\tilde{x}} = E[(\tilde{x})^2] - \mu_{\tilde{x}}^2 = \left( \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i)^2 P(\tilde{X}_i = \tilde{x}_i) \right) - \mu_{\tilde{x}}^2$$

$$\sigma^2_{\tilde{x}} = \frac{3}{10}((2)^2 + (4)^2) + \frac{4}{10}((3)^2) - 9 = \frac{6}{10} = \frac{2}{3}$$

Para este caso (una población discreta) la mediana muestral tiene mayor varianza que la media muestral.

Probemos el procedimiento anterior en la siguiente población discreta:

$$X = \{ X_1, X_2, X_3, \dots, X_N \}$$

$$X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \}$$

Donde

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{15}, & x = 1, 2, \dots, 15 \\ 0, & \text{resto de } x \end{cases}$$

Calculamos la media y varianza poblacionales:

$$\mu = E[x] = \left( \sum_{i=1}^n x_i P(X_i = x_i) \right)$$

$$= \left( \frac{1}{15} \right) (1 + 2 + \dots + 14 + 15) = \left( \frac{1}{15} \right) (120) = 8$$

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2] = \left( \sum_{i=1}^n (x_i)^2 P(X_i = x_i) \right) - \mu^2 = \left( \sum_{i=1}^{15} (x_i)^2 \frac{1}{15} \right) - 8^2$$

$$= \frac{1}{15} \left( (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 + (6)^2 + (7)^2 + \dots + (15)^2 \right) - 64$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{15} (1240) - 64 = \frac{280}{15} = \frac{56}{3}$$

Determinaremos la función de probabilidad de la media y mediana muestrales para  $n = 5$  tomando todas las muestras posibles,

$\binom{N}{n} = \binom{15}{5} = 3003$  para nuestro caso y a la vez todos los valores

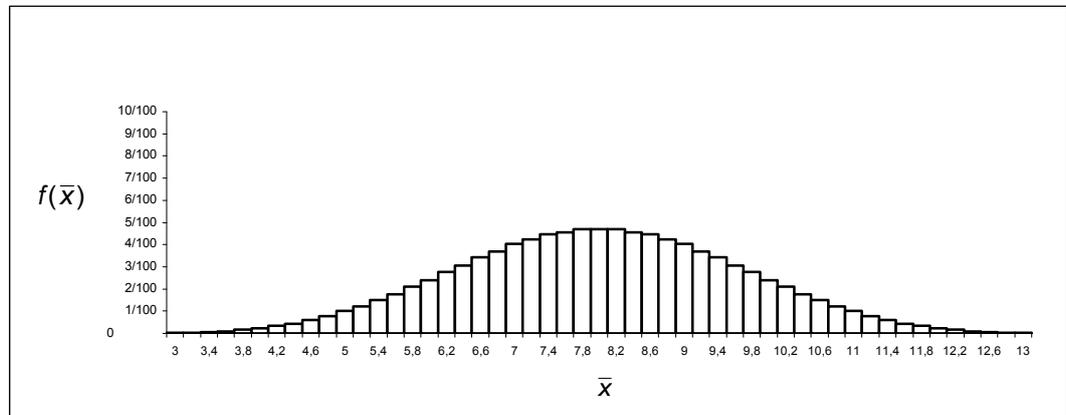
posibles de la media aritmética y la mediana muestral para  $n = 5$  y  $N =$

15.

$f(\bar{x})$	1/3003	$\bar{X} = 15/5$	,16/5	,64/5	,65/5
	2/3003	$\bar{X} = 17/5$	,63/5		
	3/3003	$\bar{X} = 18/5$	,62/5		
	5/3003	$\bar{X} = 19/5$	,61/5		
	7/3003	$\bar{X} = 20/5$	,60/5		
	10/3003	$\bar{X} = 21/5$	,59/5		
	13/3003	$\bar{X} = 22/5$	,58/5		
	18/3003	$\bar{X} = 23/5$	,57/5		
	23/3003	$\bar{X} = 24/5$	,56/5		
	30/3003	$\bar{X} = 25/5$	,55/5		
	36/3003	$\bar{X} = 26/5$	,54/5		
	45/3003	$\bar{X} = 27/5$	,53/5		
	53/3003	$\bar{X} = 28/5$	,52/5		
	63/3003	$\bar{X} = 29/5$	,51/5		
	72/3003	$\bar{X} = 30/5$	,50/5		
	83/3003	$\bar{X} = 31/5$	,49/5		
	92/3003	$\bar{X} = 32/5$	,48/5		
103/3003	$\bar{X} = 33/5$	,47/5			
111/3003	$\bar{X} = 34/5$	,46/5			
121/3003	$\bar{X} = 35/5$	,45/5			
127/3003	$\bar{X} = 36/5$	,44/5			
134/3003	$\bar{X} = 37/5$	,43/5			
137/3003	$\bar{X} = 38/5$	,42/5			
141/3003	$\bar{X} = 39/5$	,40/5	,41/5		
	0	Resto de $\bar{X}$			

En el Gráfico 1.3 puede apreciarse el histograma de la función de distribución de probabilidad de la media aritmética para  $n = 5$  y  $N = 15$ , el mismo que es simétrico alrededor de la media poblacional.

**Gráfico 1.3**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de probabilidad de la media aritmética para  $n=5$  y  $N=15$**



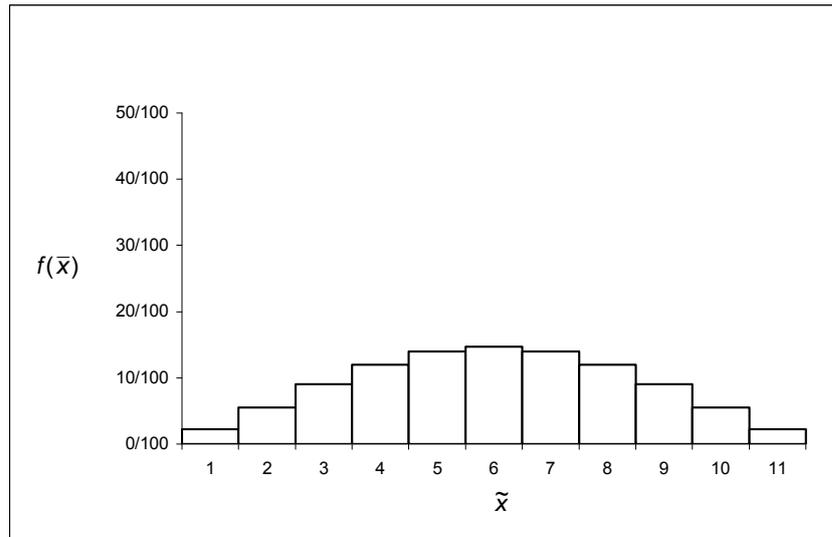
Elaboración: M. Rojas.

La distribución de probabilidad de la mediana muestral para  $n = 5$  y  $N = 15$  en la población  $X$  está dada por:

$$f(\tilde{x}) \left\{ \begin{array}{ll} 66/3003 & , \tilde{x} = 3 \\ 165/3003 & , \tilde{x} = 4, 12 \\ 270/3003 & , \tilde{x} = 5, 11 \\ 360/3003 & , \tilde{x} = 6, 10 \\ 420/3003 & , \tilde{x} = 7, 9 \\ 441/3003 & , \tilde{x} = 8 \\ 0 & , \text{Resto de } \tilde{x} \end{array} \right.$$

En el Gráfico 1.4 puede apreciarse el histograma de la función de distribución de probabilidad de  $\tilde{x}$  para  $n = 5$  y  $N = 15$ .

**Gráfico 1.4**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de probabilidad de la mediana muestral para  $n = 5$  y  $N = 15$**



Elaboración: M. Rojas.

De la misma forma que se obtuvieron para  $n = 5$  y  $N = 3$ :

$$\mu_{\bar{x}} = E[\bar{x}] = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i P(\bar{X}_i = \bar{x}_i) = \frac{24024}{3003} = 8$$

$$\mu_{\tilde{x}} = E[\tilde{x}] = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i P(\tilde{X}_i = \tilde{x}_i) = 8$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = E[(\bar{x})^2] - \mu_{\bar{x}}^2 = \left( \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i)^2 P(\bar{X}_i = \bar{x}_i) \right) - \mu_{\bar{x}}^2 = \frac{8008}{3003} = 2,6667$$

$$\sigma^2_{\tilde{x}} = E[(\tilde{x})^2] - \mu_{\tilde{x}}^2 = \left( \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i)^2 P(\tilde{X}_i = \tilde{x}_i) \right) - \mu_{\tilde{x}}^2 = \frac{17160}{3003} = 5,7142$$

De forma similar al procedimiento realizado con la media y mediana muestrales, se tiene que la función de probabilidad para el estadístico de orden 5,  $X_{(5)}$ , cuando  $n = 5$  y  $N = 15$  es:

$P(X_{(5)} = x_{(5)}) =$	}	1/3003	$x_{(5)} = 5$
		5/3003	$x_{(5)} = 6$
		15/3003	$x_{(5)} = 7$
		35/3003	$x_{(5)} = 8$
		70/3003	$x_{(5)} = 9$
		126/3003	$x_{(5)} = 10$
		210/3003	$x_{(5)} = 11$
		330/3003	$x_{(5)} = 12$
		495/3003	$x_{(5)} = 13$
		715/3003	$x_{(5)} = 14$
		1001/3003	$x_{(5)} = 15$
0	Resto de $x_{(5)}$		

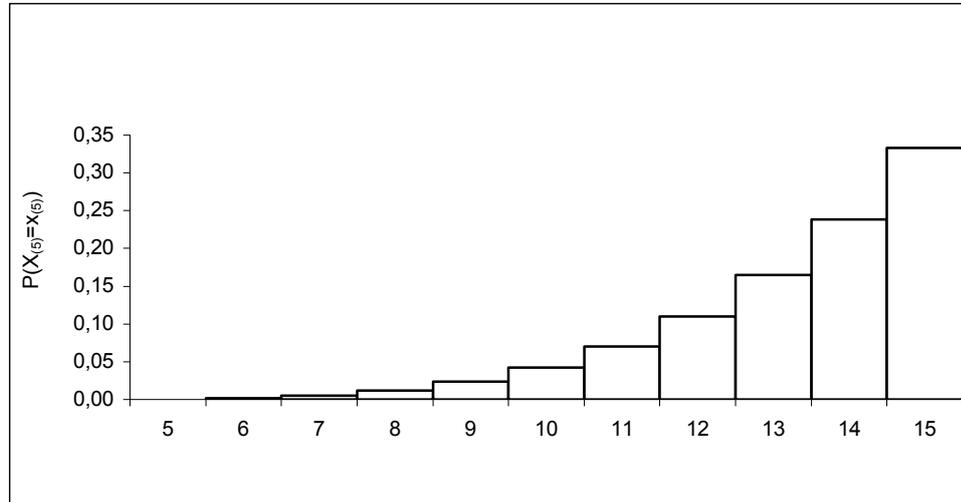
El Gráfico 1.5 nos muestra la representación de dicha función de probabilidad. Puede calcularse entonces que:

$$\mu_{x_{(5)}} = E[x_{(5)}] = \sum x_{(5)} P(X_{(5)} = x_{(5)}) = 13,3333$$

$$\sigma^2_{x_{(5)}} = E[(x_{(5)})^2] - \mu_{x_{(5)}}^2 = \left( \sum (x_{(5)})^2 P(X_{(5)} = x_{(5)}) \right) - \mu_{x_{(5)}}^2 = 3,1746$$

Puede apreciarse que el valor esperado de  $x_{(5)}$  no coincide con el parámetro  $X_{(5)}$ .

**Gráfico 1.5**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de probabilidad del estadístico de orden 5 para  $n=5$  y  $N=15$**



Elaboración: M. Rojas

De la misma forma la función de probabilidad para el estadístico de orden 1  $n = 5$  y  $N = 15$  es:

$P(X_{(1)}=x_{(1)})=$	1001/3003	$x_{(1)} = 1$
	715/3003	$x_{(1)} = 2$
	495/3003	$x_{(1)} = 3$
	330/3003	$x_{(1)} = 4$
	210/3003	$x_{(1)} = 5$
	126/3003	$x_{(1)} = 6$
	70/3003	$x_{(1)} = 7$
	35/3003	$x_{(1)} = 8$
	15/3003	$x_{(1)} = 9$
	5/3003	$x_{(1)} = 10$
	1/3003	$x_{(1)} = 11$
	0	Resto de $x_{(1)}$

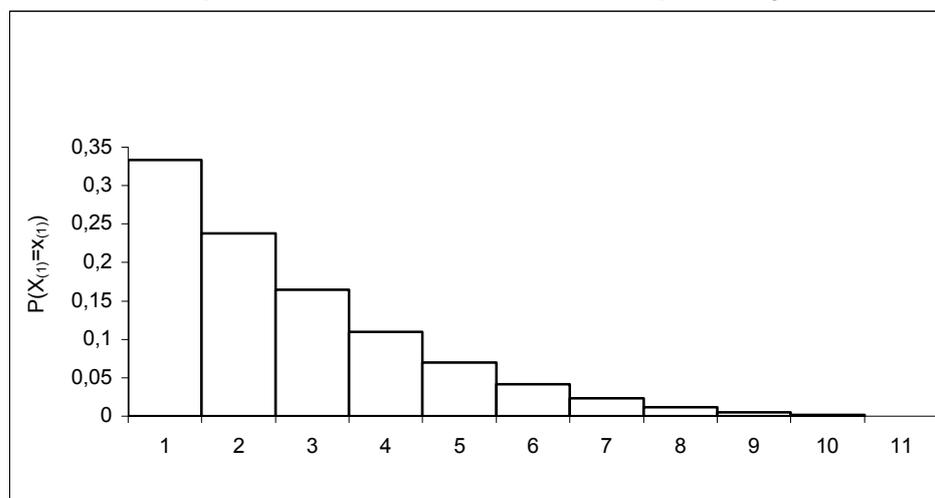
Dada esta función puede calcularse:

$$\mu_{x_{(1)}} = E[x_{(1)}] = \sum x_{(1)} P(X_{(1)} = x_{(1)}) = 2,6667$$

$$\sigma^2_{x_{(1)}} = E[(x_{(1)})^2] - \mu_{x_{(1)}}^2 = \left( \sum (x_{(1)})^2 P(X_{(1)} = x_{(1)}) \right) - \mu_{x_{(1)}}^2 = 3,1746$$

Para este caso tenemos que  $x_{(1)}$  y  $x_{(5)}$  tienen la misma varianza. El Gráfico 1.6 presenta el histograma de la función de probabilidad de  $x_{(1)}$ .

**Gráfico 1.6**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de probabilidad del estadístico de orden 1 para  $n=5$  y  $N=15$**



Elaboración: M. Rojas

### 1.2.2. Estimación de Intervalo

Una estimación de intervalo de un parámetro  $\theta$  es una región continua de  $R$  de la forma  $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$ , donde  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$ , son valores de variables aleatorias apropiadas. Si además agregamos que en base a la distribución del estimador  $\hat{\theta}$  podemos obtener la probabilidad de que el parámetro  $\theta$  se encuentre realmente en ese intervalo se tiene que:

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$$

De hecho estos intervalos no son únicos y se relacionan estrechamente con la muestra que los genera. Este intervalo recibe el nombre de intervalo del  $(1-\alpha)100\%$  de confianza y es la más común de las aplicaciones de las estimaciones de intervalo.

Estimemos un intervalo para la media poblacional de una población que sigue una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Primero recordemos las relaciones de la media aritmética con los parámetros poblacionales ilustradas anteriormente. Tenemos que  $\mu_{\bar{x}} = \mu$  y que

$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ . Basados en estas relaciones se puede decir que:

$$P(-Z_{\alpha/2} < \mathbf{Z} < Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

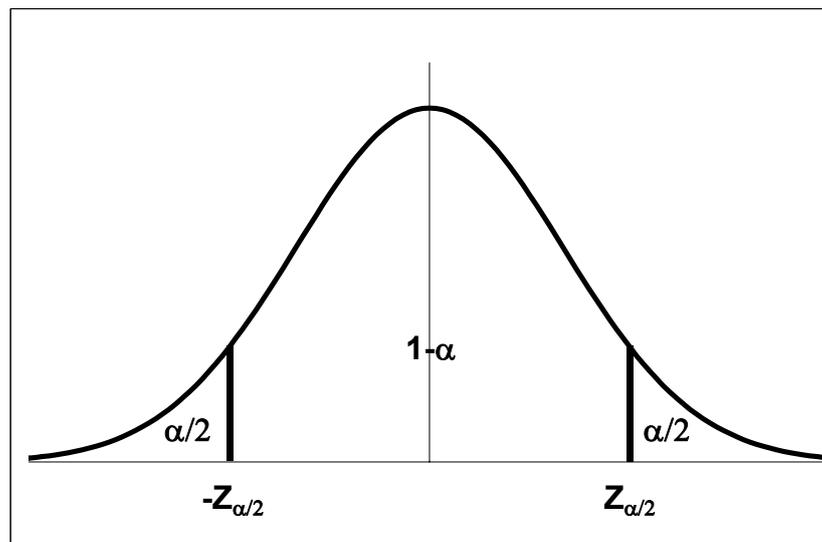
Donde:

$$\mathbf{Z} = \frac{\bar{\mathbf{x}} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

y  $Z_{\alpha/2}$  corresponde al valor tal que:

$$\int_{Z_{\alpha/2}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{\alpha}{2}$$

**Gráfico 1.7**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
 Representación gráfica de  $P(-Z_{\alpha/2} < \mathbf{Z} < Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$



Elaboración: M. Rojas

Entonces al reemplazar tenemos que:

$$P\left(-Z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Es decir para un valor de  $\alpha$  dado y suponiendo el parámetro poblacional  $\sigma^2$  conocido (o estimándolo apropiadamente), el intervalo dependerá únicamente del valor de la media aritmética obtenida. La sección 1.3 explica de manera más específica la obtención teórica de este intervalo.

Si se desea estimar un intervalo para la media poblacional de la población discreta siguiente cuando  $n = 3$  y  $N = 5$ :

$$X = \{1,2,3,4,5\}$$

Primero utilizaríamos la función de probabilidad de la media muestral obtenida anteriormente a fin de determinar las probabilidades de que el parámetro poblacional  $\mu$  se encuentre en los intervalos construidos en las muestras de tamaño 3 y la desviación estándar para cada caso.

En la Tabla III se indican los valores de la media aritmética y de las desviaciones con respecto a la misma correspondientes a  $n = 3$  y  $N = 5$ .

**Tabla III**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Valores de la media aritmética y desviación estándar muestrales para  $n=3$  y  $N=5$**

Muestra			$\bar{X}$	S
1	2	3	6/3	1,000
1	2	4	7/3	1,528
1	2	5	8/3	2,082
1	3	4	8/3	1,528
1	3	5	9/3	2,000
1	4	5	10/3	2,082
2	3	4	9/3	1,000
2	3	5	10/3	1,528
2	4	5	11/3	1,528
3	4	5	12/3	1,000

Elaboración: M. Rojas

Supongamos que  $X$  sigue una distribución normal (aunque es evidente que no lo es) y construyamos intervalos de la forma:

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Recordemos que:

$$\int_{z_{\alpha/2}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{\alpha}{2}$$

Para nuestro caso:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} = 0,1587 = \frac{\alpha}{2}$$

De donde se obtiene que  $\alpha=0,3173$  y nuestro intervalo de confianza es del  $(1-0,3173)100\% \cong 68,268\%$  de confianza

Para nuestro caso  $n = 3$ , se tiene en la Tabla IV que:

**Tabla IV**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Intervalos de confianza para de la media poblacional para  $n=3$  y  $N=5$**

Muestra			$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}$	Contiene a la media poblacional
1	2	3	1,423	2,577	No
1	2	4	1,451	3,215	Si
1	2	5	1,465	3,869	Si
1	3	4	1,785	3,549	Si
1	3	5	1,845	4,155	Si
1	4	5	2,131	4,535	Si
2	3	4	2,423	3,577	Si
2	3	5	2,451	4,215	Si
2	4	5	2,785	4,549	Si
3	4	5	3,423	4,577	No

Elaboración: M. Rojas

Nótese que se pueden generar 10 intervalos de confianza con una muestra de tamaño 3 con los estimadores indicados anteriormente. Solo 2 de ellos no contienen al parámetro poblacional.

### 1.2.3. Prueba de Hipótesis

Una hipótesis estadística es una afirmación o conjetura acerca de la distribución o del valor de los parámetros de la distribución de una o más variables aleatorias o poblaciones.

### 1.2.3.1. Hipótesis Simple

Una hipótesis estadística es simple si determina completamente a la población. Por ejemplo:

H: La población es Poisson con  $\lambda = 5$

En este caso al especificarse el parámetro poblacional  $\lambda$  se determina a toda la distribución.

### 1.2.3.2. Hipótesis Compuesta

Una hipótesis estadística es compuesta si no determina completamente a la población. Por ejemplo:

H: La población es Normal  $N(10, \sigma^2)$

En este caso solo se especifica un parámetro poblacional ( $\mu$ ) mientras que el parámetro de dispersión no es determinado.

### 1.2.3.3. Hipótesis Nula

Una hipótesis nula especifica que la distribución supuesta (o distribuciones según el caso) es miembro de una cierta clase. Usualmente la hipótesis nula equivale a especificar el valor de un parámetro.

$H_0$  es la hipótesis nula

$H_0: \mu = 10$

#### 1.2.3.4. Hipótesis Alternativa

Una hipótesis alternativa es aquella que especifica que la distribución supuesta (o distribuciones según el caso) no satisface la hipótesis nula anteriormente postulada. Por ejemplo:

$$H_1: \mu \neq 10$$

Donde se tiene además que  $H_0 \cap H_1 = \{ \}$ .

#### 1.2.3.5. Contraste de Hipótesis

El contraste de hipótesis es parte importante de la estadística inferencial. Sean  $H_0$  la hipótesis nula y  $H_1$  la hipótesis alternativa,  $\theta$  el parámetro o parámetros que se desea contrastar de una población  $X$ .

$$H_0: \theta \in \Theta_0$$

Vs.

$$H_1: \theta \in \Theta_1$$

Donde:

$$\Theta_0 \cap \Theta_1 = \{ \} \quad \text{y} \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \text{Espacio de parámetros}$$

#### 1.2.3.6. Error Tipo I y Tipo II

Dado un contraste de hipótesis:

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \text{ Vs. } H_1: \theta \in \Theta_0^c$$

Se incurre en un Error Tipo I si y solo si se rechaza  $H_0$  cuando  $H_0$  es verdadera.

$$\alpha = P(\text{rechazar } H_0 / H_0 \text{ es verdadera})$$

$$\alpha = P(\text{Error Tipo I})$$

Se incurre en un Error Tipo II si y solo si se acepta  $H_0$  cuando  $H_1$  es verdadera.

$$\beta = P(\text{rechazar } H_1 / H_1 \text{ es verdadera})$$

$$\beta = P(\text{Error Tipo II})$$

### 1.2.3.7. Región Crítica C de un Contraste de Hipótesis

Dada una muestra aleatoria  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  tomada de una población  $X$ , se denomina Región Crítica C del contraste de hipótesis  $H_0$  Vs.  $H_1$  al subconjunto de  $R^n$ , tal que, basado en la información proporcionada por la muestra aleatoria:

$$C = \{ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) / H_0 \text{ es rechazado} \}$$

$C^c$  es denominada Región de Aceptación.

### 1.2.3.8. Potencia de una Prueba

Sea  $\theta$  un parámetro poblacional de  $X$  acerca del cual desea hacerse algún tipo de inferencia. Se define a la potencia de una prueba  $K(\theta)$  frente a una alternativa específica como la probabilidad de rechazar la hipótesis nula. La potencia frente a una alternativa específica es igual a  $1-\beta$ , donde  $\beta$  es la probabilidad de un Error Tipo II para la alternativa especificada. Ilustraremos los conceptos de potencia de una prueba.

Tomemos una muestra aleatoria de tamaño 138 de una población que sigue una distribución normal con  $\mu=30$  y  $\sigma^2=36$ . Se postula el siguiente contraste:

$$H_0: \mu = 30$$

Vs.

$$H_1: \mu \neq 30$$

Donde:

$$C = \{ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) / \bar{x} < 29 \text{ o } \bar{x} > 31 \}$$

Un Error Tipo I consistiría en rechazar  $H_0$  cuando la media es realmente 30 y un Error Tipo II sería aceptar  $H_0$  cuando la media no es 30. En la Tabla V encontramos los valores de los errores para mejor explicación:

**Tabla V**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Errores Tipo I y II para el contraste especificado**

$H_0: \mu = 30$

Vs.

$H_1: \mu \neq 30$

$\mu$	Error tipo I	Error tipo II	Potencia de la prueba $K(\mu)$
27,00		0,001	0,999
27,50		0,002	0,998
28,00		0,026	0,974
28,50		0,164	0,836
29,00		0,500	0,500
29,50		0,835	0,165
30,00	0,050	0,950	0,050
30,50		0,835	0,165
31,00		0,500	0,500
31,50		0,164	0,836
32,00		0,025	0,975
32,50		0,002	0,998
33,00		0,001	0,999

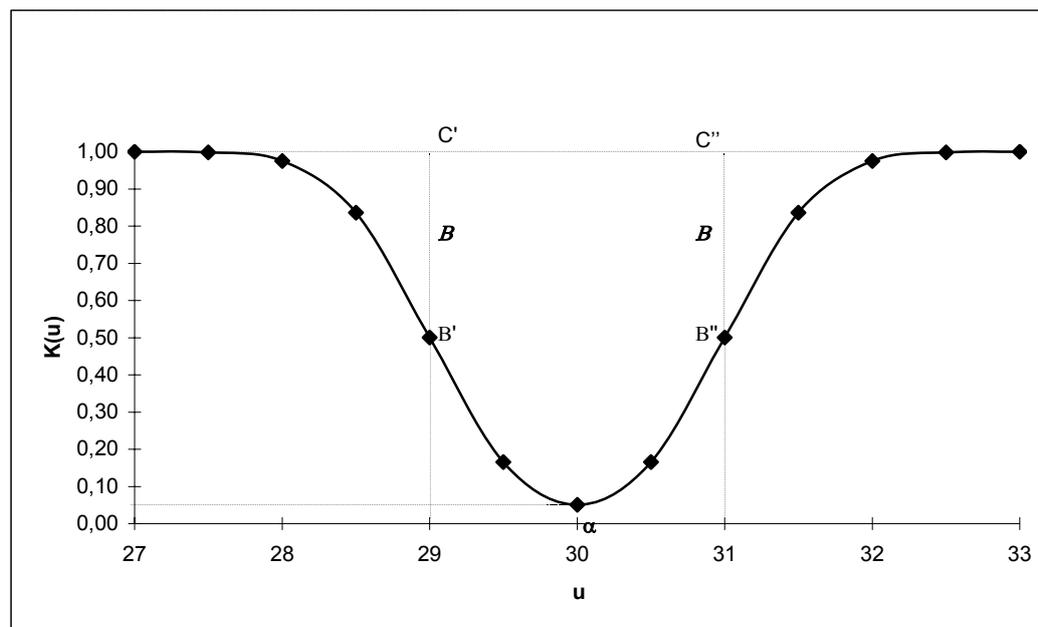
Elaboración: M. Rojas

**Gráfico 1.8**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Potencia de la Prueba para el contraste:**

$H_0: \mu = 30$

Vs

$H_1: \mu \neq 30$



Elaboración: M. Rojas

El valor  $p$  de la prueba es la probabilidad más alta de cometer un Error Tipo I, es decir la máxima probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando  $H_0$  es verdadera. Para nuestro caso el valor  $p$  de la prueba es 0.05 y es único ya que  $H_0$  es cierto solo para  $\mu = 30$ . La línea punteada horizontal en el Gráfico 1.7 señala el punto donde la gráfica posee un mínimo, justo donde se encuentra el valor del parámetro que deseamos contrastar. B'C' representa  $\beta$  (probabilidad de Error Tipo II) cuando  $\mu$  es igual a 29 y B''C'' representa  $\beta$  cuando  $\mu$  es igual a 31.

Observemos los efectos de diferentes regiones críticas para el mismo contraste de hipótesis en el Gráfico 1.8:

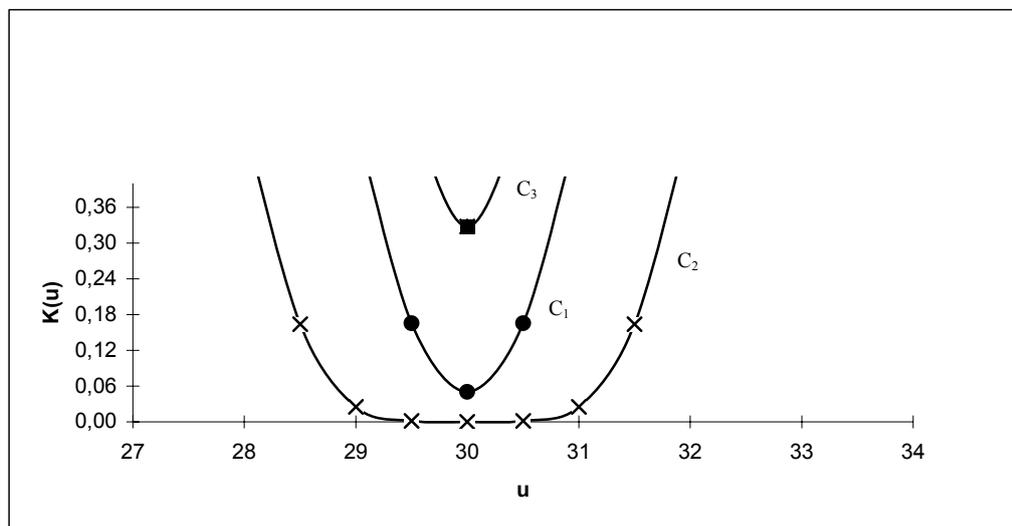
$$C_1 = \{ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) / \bar{x} < 29 \text{ o } \bar{x} > 31 \}$$

$$C_2 = \{ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) / \bar{x} < 29.5 \text{ o } \bar{x} > 30.5 \}$$

$$C_3 = \{ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) / \bar{x} < 28 \text{ o } \bar{x} > 32 \}$$

Podemos ver lo que sucede con el valor de  $\alpha$  al variar el tamaño de la región crítica: Para  $C_2$  (la región crítica se hace más grande) tenemos que el valor de  $\alpha$  aumenta mientras que para  $C_3$  (la región crítica se hace más pequeña) tenemos que el valor de  $\alpha$  disminuye.

**Gráfico 1.9**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Efecto de distintas regiones críticas en la potencia de la prueba especificada**



Elaboración: M. Rojas

### 1.2.3.9. Robustez de una prueba estadística

Un procedimiento estadístico es robusto, con respecto a un supuesto particular postulado, si el procedimiento es relativamente insensible a desviaciones de ese supuesto original.

## 1.3. Estadística Paramétrica

La estadística inferencial paramétrica hace suposiciones específicas acerca de la población o poblaciones que se muestrean. De allí la importancia del Teorema del Límite Central para esta clase de inferencias (el supuesto de normalidad es parte fundamental de las pruebas paramétricas). Los métodos descritos con anterioridad

(estimación puntual, estimación de intervalo y pruebas de hipótesis) en su forma paramétrica se derivan principalmente de trabajos realizados por Neyman y Pearson como proyecto conjunto. De hecho su trabajo se dirigió al problema principal de las pruebas de hipótesis: Construir una teoría matemática de pruebas que se utilicen para reducir la frecuencia de conclusiones erróneas respecto a las hipótesis consideradas. Como resultado se definieron una serie de estadísticos de prueba que, siendo fijo el Error Tipo I, dejan libre la probabilidad de Error Tipo II. De allí que la teoría de Neyman y Pearson haya dejado a un lado la dependencia entre probabilidades de Errores Tipo I y Tipo II para centrarse en restringir el tamaño de la región crítica.

### 1.3.1. Teorema del Límite Central

Sea  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , ambas finitas, defínase  $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ . Bajo estas condiciones la variable aleatoria:

$$Z = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

Converge en ley a una distribución Normal con  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ .

### 1.3.2. Teoría de Neyman y Pearson

Neyman y E. Pearson en 1933 establecieron la base de lo que sería la estadística inferencial paramétrica. Basaron su teoría en fijar la probabilidad de cometer un Error Tipo I a una constante  $\alpha$ ; es decir tratar de restringir la región crítica a un tamaño menor o igual que  $\alpha$  y buscar el estadístico de prueba que minimice la probabilidad de ocurrencia de un Error Tipo II o maximizar la probabilidad de no cometer un Error Tipo II. Sea  $\beta$  la probabilidad de cometer un Error Tipo II, se tratará de maximizar la probabilidad  $1-\beta$ . Esta cantidad recibe el nombre de potencia de la prueba. De encontrarse un máximo en la potencia de la prueba, este máximo será el que genere la región crítica más potente. Es allí donde Neyman y Pearson demostraron el siguiente teorema conocido como lema de Neyman y Pearson:

Sea el contraste de hipótesis:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

Vs.

$$H_1: \theta = \theta_1$$

Sea  $C$  un subconjunto de  $R^n$ ,  $\lambda$  una constante positiva y  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  una muestra aleatoria de tamaño  $n$  tomada de una población  $X$  con función de densidad  $f(x)$ , uno de cuyos parámetros es  $\theta$  y donde:

$$L_0 = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_0) \quad L_1 = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1)$$

$L_0$  y  $L_1$  se conocen como función de verosimilitud para los parámetros  $\theta_0$  y  $\theta_1$ . Considere las siguientes condiciones:

- i)  $\frac{L_0(\theta, X)}{L_1(\theta, X)} \leq \lambda$  Para todo  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in C$
- ii)  $\frac{L_0(\theta, X)}{L_1(\theta, X)} > \lambda$  Para todo  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in C^c$
- iii)  $P((x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in C / H_0) = \alpha$

Si se cumplen i), ii), iii) entonces  $C$  es la mejor región crítica de tamaño  $\alpha$  que se puede obtener para el contraste indicado.

### 1.3.3. El Caso Paramétrico: la prueba t para una sola muestra

Sean  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  una muestra aleatoria de tamaño  $n$  tomada de una población normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  desconocida donde  $n$  es pequeño. Sea el contraste de hipótesis:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

Vs

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

Tenemos que la función de verosimilitud para una población normal es:

$$L(\mu ; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}$$

Encontraremos los estimadores de máxima verosimilitud de  $\mu$  y  $\sigma^2$ .

$$\text{Max } L_0(\theta, X) = L(\mu, \sigma^2) = L\left(\mu_0, \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_0)^2}{n}, x_1, \dots, x_n\right)$$

$$\text{Max } L_1(\theta, X) = L(\mu, \sigma^2) = L\left(\bar{x}, \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}, x_1, \dots, x_n\right)$$

Efectuamos la prueba de razón de máxima verosimilitud indicada en el lema de Neyman y Pearson:

$$\frac{L_0(\theta, X)}{L_1(\theta, X)} \leq \lambda$$

$$\lambda = \frac{\frac{e^{-n \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_0)^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_0)^2}{2} \right)^{\frac{n}{2}}}}{\frac{e^{-n \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{2} \right)^{\frac{n}{2}}}}$$

Reducimos la expresión de  $\lambda$  a:

$$\lambda = \left( \frac{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)}{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 \right)} \right)^{\frac{n}{2}}$$

Donde utilizaremos el siguiente artificio:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu_0)^2$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n \left( (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu_0) \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n \left( (x_i - \bar{x})^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - \mu_0) + (\bar{x} - \mu_0)^2 \right)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n \left( (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \mu_0)^2 \right)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2$$

Tenemos entonces una nueva expresión para  $\lambda$  en términos de la media muestral:

$$\lambda = \left( \frac{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)}{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2 \right)} \right)^{\frac{n}{2}}$$

Simplificando:

$$\lambda = \left( \frac{1}{1 + \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \right)^{\frac{n}{2}}$$

Dado que:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\Rightarrow t^2(n-1) = \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{S^2/n} = \frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)}$$

$$\lambda = \left( \frac{1}{1 + \frac{t^2}{n-1}} \right)^{\frac{n}{2}}$$

Si  $\lambda$  es pequeño entonces  $t^2$  es grande y  $H_0$  debe ser rechazado.

Con  $(1-\alpha)100\%$  de confianza rechazaremos  $H_0$  en favor de  $H_1$  si  $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}$

donde  $|t| = \sqrt{t^2}$ .

Este procedimiento es análogo en el momento en que se necesita construir modelos paramétricos frente a problemas de intervalos de

confianza, pruebas de hipótesis de medias, varianzas, regresiones, tablas de análisis de varianza, tablas de contingencia y demás. Partimos de construir un estadístico de prueba que defina la región crítica más potente.

Aún así hay ciertas consideraciones en una prueba paramétrica:

- Una prueba paramétrica puede no funcionar bajo violaciones a sus supuestos, a menos que sea robusta.
- Siempre puede usarse una transformación (logarítmica, exponencial, etc.) de manera que puedan cumplirse los supuestos ya sean de normalidad u otros.
- La prueba dependerá del campo de aplicación. Si se sabe de antemano la distribución de la población por estudios anteriores será mejor optar por una prueba paramétrica.
- Las pruebas paramétricas pueden evaluar en diferente medida que las no paramétricas. La perspectiva de las pruebas puede ser distinta.

#### **1.4. Estadística No Paramétrica**

Si volvemos al ejemplo de la prueba t veremos que existen supuestos sobre las distribuciones poblacionales de la media muestral y del valor de la media poblacional. En el caso de que uno de sus supuestos no se cumpla, las técnicas paramétricas (si no son robustas) generarán

resultados erróneos y por ende las conclusiones de sus hipótesis serán inválidas. Las técnicas estadísticas no paramétricas ofrecen menor rigidez con respecto a sus condiciones que las técnicas paramétricas, aunque sacrificando para ello su potencia de explicación. Son procedimientos estadísticos que poseen ciertas propiedades bajo supuestos generales y sin importar la población de la cual los datos han sido obtenidos. La mayoría de las veces estos supuestos se refieren, por ejemplo, a la simetría o continuidad de la distribución poblacional. La inferencia no paramétrica constituye un campo muy amplio que va desde las equivalencias no paramétricas de las pruebas paramétricas existentes hasta llegar a las estimaciones de punto e intervalo de constantes poblacionales que no pueden ser llevadas a modelos paramétricos por su complejidad (percentiles, deciles, etc.) El rápido desarrollo de las técnicas no paramétricas ha sido en parte por las siguientes razones:

- Las técnicas no paramétricas hacen supuestos muy generales respecto a la distribución de probabilidad que siguen los datos. En particular, dejan de lado el supuesto de normalidad en una población.
- Son aplicables cuando la teoría de normalidad no puede ser utilizada, por ejemplo cuando no se trabaja con magnitudes de observaciones sino con sus rangos.

### 1.4.1. El caso no paramétrico: la prueba del signo de Fisher

Sean  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  una muestra aleatoria de tamaño  $n$  tomada de una población simétrica y continua con media  $\mu$ . Considere el siguiente contraste de hipótesis:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

Vs

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

Sean  $r$  el número de cantidades  $(x_i - \mu_0)$  que sean positivas y  $s$  el número de las mismas que sean negativas para  $i = 1, 2, \dots, n$ ; donde  $r + s \leq n$

.Definamos la función indicadora  $\psi_i$  donde:

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i - \mu_0) > 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Definamos además  $r$  en función de  $\psi_i$  como:

$$r = \sum_{i=1}^n \psi_i$$

Particularicemos el caso para  $n = 10$ . El número de casos posibles correspondientes a  $\psi_i$  equivalen a  $2^n = 2^{10} = 1024$ ; mientras que para  $r$  se obtienen valores enteros entre 0 y 10. Al tabular los valores posibles  $r$  en base de  $\psi_i$  y obtengamos su frecuencia relativa a fin de determinar la

función de probabilidad de los valores  $r$ . La Tabla VI resume estos valores:

**Tabla VI**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Valores posibles de  $r$  para  $n=10$**

<b>r</b>	<b>Frecuencia Absoluta</b>	<b>Frecuencia Relativa</b>
0	1	0,001
1	10	0,010
2	45	0,044
3	120	0,117
4	210	0,205
5	252	0,246
6	210	0,205
7	120	0,117
8	45	0,044
9	10	0,010
10	1	0,001

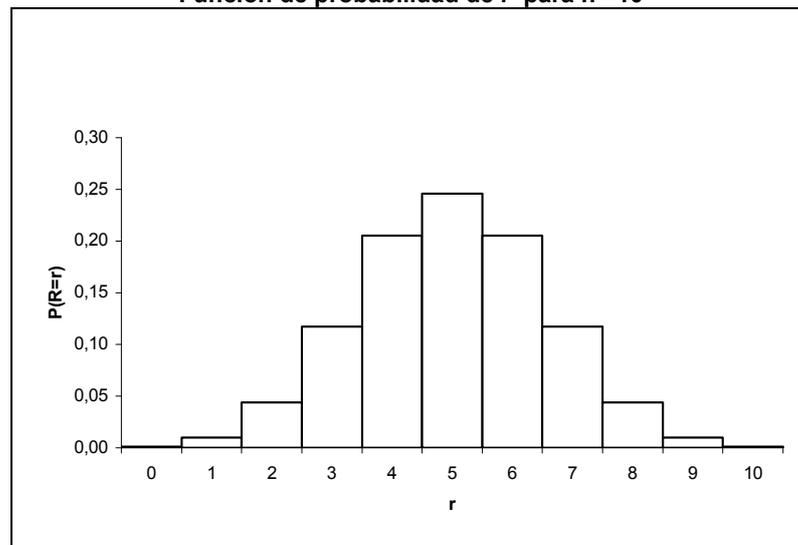
Elaboración: M. Rojas

De donde tendríamos que para  $n=10$ :

$$P(R=r) \left\{ \begin{array}{ll} 1/1024, & r = 0, 10 \\ 10/1024, & r = 1, 9 \\ 45/1024, & r = 2, 8 \\ 120/1024, & r = 3, 7 \\ 210/1024, & r = 4, 6 \\ 252/1024, & r = 5 \\ 0 & \text{resto de } r \end{array} \right.$$

La gráfica de la función de probabilidad de  $r$  considerando todos los valores posibles de  $\psi_i$  (que serían 1024 valores posibles para el valor de  $n$  indicado) es la indicada en el Gráfico 1.9:

**Gráfico 1.10**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de probabilidad de  $r$  para  $n = 10$**



Elaboración: M. Rojas

Puede demostrarse que al generalizar la distribución de  $r$ , esta sigue una distribución binomial con parámetro  $p = 1/2$ , lo cual nos sirve para establecer un contraste análogo en base a esta información :

$$H_0: E[r] = n \frac{1}{2}$$

Vs.

$$H_1: E[r] \neq n \frac{1}{2}$$

Para este contraste son aplicables las regiones críticas de los contrastes de hipótesis conocidos con respecto a parámetros de poblaciones binomiales.

### **1.5 Equivalencia de pruebas estadísticas**

Antes de establecer las técnicas a compararse cabe indicar que significa la equivalencia entre pruebas estadísticas, ya que compararemos técnicas paramétricas con su equivalente técnica no paramétrica. Dos pruebas estadísticas (Pruebas I y II) de la hipótesis nula  $H_0$  son equivalentes, si para cada posible conjunto de observaciones muestrales, la decisión alcanzada por la Prueba I concuerda con la alcanzada por la Prueba II. O lo que es lo mismo, la Prueba I es equivalente a la Prueba II si la Prueba I rechaza  $H_0$  si y solo si la Prueba II rechaza  $H_0$ , y la Prueba I acepta  $H_0$  si y solo si la Prueba II acepta  $H_0$  (Hollander M., Wolfe D. (1973)).

# CAPÍTULO 2

## 2.TÉCNICAS ESTADÍSTICAS A SER COMPARADAS

### 2.1 Introducción

Este capítulo contiene las características de las técnicas que van a ser comparadas. Se indicarán las técnicas equivalentes que serán parte de nuestro análisis, estableceremos sus supuestos e ilustraremos algunas de ellas. En la sección 2.2 se indicarán las pruebas de hipótesis para la media de una población, en la sección 2.3 se indicarán las pruebas concernientes a la media de dos poblaciones, en la sección 2.4 se indicarán las pruebas concernientes a la varianza de dos poblaciones y finalmente en la sección 2.5 a la obtención de los estimadores de  $\beta_0$  y  $\beta_1$  en regresión lineal simple. En la Tabla VII tenemos un breve resumen de las técnicas, con sus equivalencias paramétricas y no paramétricas, que serán objeto de nuestra investigación:

Tabla VII

**Estadística Paramétrica y No Paramétrica**  
**Técnicas equivalentes a ser comparadas en la investigación**

Contraste	Técnica paramétrica	Técnica no paramétrica equivalente
<p style="text-align: center;">Pruebas de hipótesis concernientes a la media de una población X:</p> <p style="text-align: center;"><math>H_0: \mu = \mu_0</math> vs. <math>H_1: \mu \neq \mu_0</math></p>	<p style="text-align: center;">Prueba t</p> <p style="text-align: center;">Supone que X sigue una distribución normal</p>	<p style="text-align: center;">Prueba de rangos con signo de Wilcoxon</p> <p style="text-align: center;">Supone simetría y continuidad de X</p>
<p style="text-align: center;">Pruebas de hipótesis concernientes la media de dos poblaciones <math>X_1</math> y <math>X_2</math>:</p> <p style="text-align: center;"><math>H_0: \mu_1 = \mu_2</math> vs. <math>H_1: \mu_1 \neq \mu_2</math></p>	<p style="text-align: center;">Prueba t para dos muestras</p> <p style="text-align: center;">Supone que <math>X_1</math> y <math>X_2</math> siguen distribuciones normales</p>	<p style="text-align: center;">Prueba U (Mann-Whitney)</p> <p style="text-align: center;">Supone continuidad de <math>X_1</math> y <math>X_2</math></p>
<p style="text-align: center;">Prueba de hipótesis para la varianza de dos poblaciones <math>X_1</math> y <math>X_2</math>:</p> <p style="text-align: center;"><math>H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1</math> vs. <math>H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1</math></p>	<p style="text-align: center;">Prueba F</p> <p style="text-align: center;">Supone que <math>X_1</math> y <math>X_2</math> siguen distribuciones normales</p>	<p style="text-align: center;">Prueba de Ansari-Bradley</p> <p style="text-align: center;">Supone que <math>\mu_1 = \mu_2</math></p>
<p style="text-align: center;">Obtención de los estimadores de <math>\beta_0</math> y <math>\beta_1</math> en regresión lineal simple</p>	<p style="text-align: center;">Método de mínimos cuadrados</p> <p style="text-align: center;">Supone normalidad del error</p>	<p style="text-align: center;">Método de Theil</p> <p style="text-align: center;">Supone simetría del error</p>

Fuente: Non-parametric Statistical Methods (Hollander, Wolfe; 1973)

Ahora se analizarán cada técnica por separado, indicando sus supuestos y características generales.

## 2.2. Prueba de Hipótesis para la media de una Población

Sean  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  una muestra aleatoria de tamaño  $n$  tomada de una población  $X$  que sigue una distribución con media  $\mu$ , se establece el contraste:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

Vs.

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

o como hipótesis alternativa  $H_1: \mu > \mu_0$  o  $H_1: \mu < \mu_0$ . Donde la región crítica está dada por las técnicas que se indicarán a continuación.

### 2.2.1. Prueba t (paramétrica)

La prueba t se basa en la demostración realizada en el Capítulo 1.

Sean  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  una muestra aleatoria independiente de tamaño  $n$  tomada de una población  $X$  que sigue una distribución Normal con media  $\mu$  y varianza desconocida, la región de rechazo del contraste antes

indicado está dada sobre la base del estadístico  $t$ , donde puede demostrarse que:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

sigue una distribución  $t$  con  $(n-1)$  grados de libertad,.

#### **2.2.1.1. Comandos en el paquete estadístico Systat 10.0 para realizar la prueba t**

El comando para efectuar la prueba t es:

TTEST

USE "Nombre del archivo"

TEST "Variable" = "Valor a contrastar"

#### **2.2.2. Prueba de rangos con signo de Wilcoxon (no paramétrica)**

Sea una muestra  $x_1, x_2, \dots, x_n$  aleatoria independiente tomada de una población  $X$  que sigue una distribución que es continua y simétrica. El contraste de hipótesis que se define es:

$$H_0: \tilde{\mu} = \mu_0$$

Vs.

$$H_1: \tilde{\mu} \neq \mu_0$$

Donde  $\tilde{\mu}$  es la mediana poblacional, por ello se exige que  $X$  sea una población que siga una distribución simétrica, de forma que los contrastes de hipótesis de las pruebas  $t$  y de Wilcoxon sean equivalentes.

Se define la variable aleatoria  $D_i$  como  $D_i = |x_i - \mu_0|$  para  $i=1,2,\dots,n$ . Sean  $R_i$  los rangos correspondientes a las magnitudes de  $D_i$  ordenadas de menor a mayor. Defínase la función indicadora  $\psi_i$  como:

$$\psi_i = \begin{cases} 0 & R_i < 0 \\ 1 & R_i > 0 \end{cases}$$

Puede demostrarse que el estadístico  $T^+$ :

$$T^+ = \sum_{i=1}^n R_i \psi_i$$

sigue una distribución de probabilidad que dependerá del valor de  $n$ .

Tabularemos a continuación esta distribución para  $n = 2$ . Tenemos, para empezar,  $2^2 = 4$  posibles resultados para  $r$ . En la Tabla VIII se indican las combinaciones de los signos y los valores de  $T^+$  y  $T^-$  correspondientes a  $n = 2$ .

**Tabla VIII**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Valores de  $T^+$  y  $T^-$  para  $n = 2$**

Signos		$T^+$	$T^-$
+	+	0	3
-	+	1	2
+	-	2	1
-	-	3	0

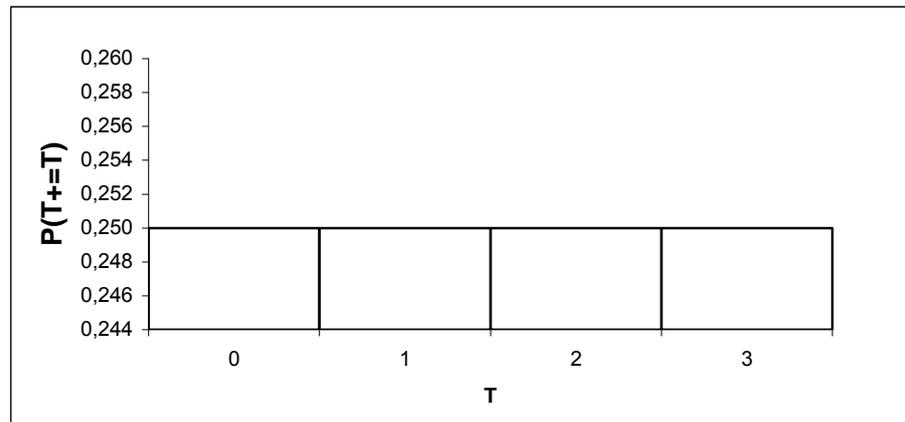
Elaboración: M. Rojas.

Tenemos entonces que:

$$P(T^+ = T^-) = \begin{cases} \frac{1}{4} & T = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

El Gráfico 2.1 nos muestra la función de probabilidad de  $T^+$  para  $n = 2$ .

**Gráfico 2.1**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de probabilidad de  $T^+$  para  $n = 2$**



Elaboración: M. Rojas.

Tabularemos a continuación esta distribución para  $n = 4$ . Tenemos, para empezar  $2^4$  posibles resultados para  $r$ . En la Tabla IX se indican las combinaciones de los signos y los valores de  $T^+$  y  $T^-$  correspondientes a  $n = 4$ .

**Tabla IX**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Valores de  $T^+$  y  $T^-$  para  $n = 4$**

Signos				$T^+$	$T^-$
+	+	+	+	0	10
+	+	-	+	1	9
+	-	+	+	2	8
-	+	+	+	3	7
-	-	+	+	3	7
+	+	+	-	4	6
-	+	-	+	4	6
+	-	-	+	5	5
-	+	+	-	5	5
+	-	+	-	6	4
-	-	-	+	6	4
+	+	-	-	7	3
-	-	+	-	7	3
-	+	-	-	8	2
+	-	-	-	9	1
-	-	-	-	10	0

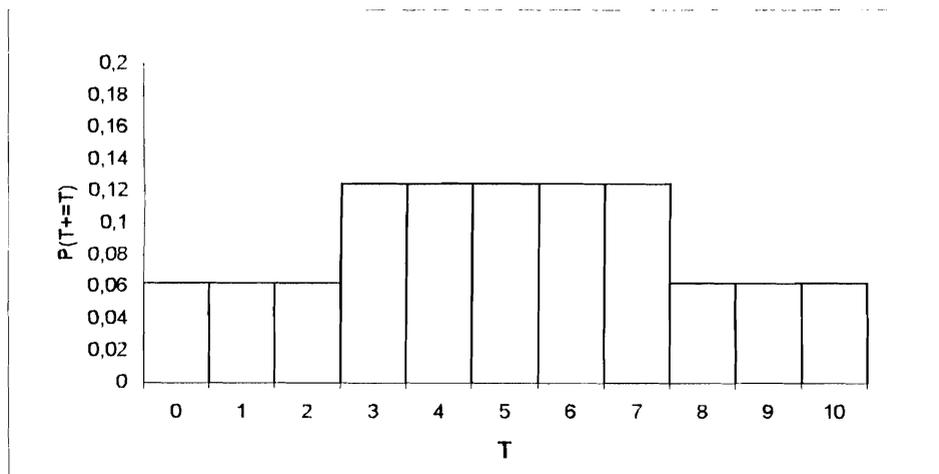
Elaboración: M. Rojas.

.Tenemos entonces que:

$$P(T^+ = T^-) = \begin{cases} \frac{1}{16} & T = 0, 1, 2, 8, 9, 10 \\ \frac{2}{16} & T = 3, 4, 5, 6, 7 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

El Gráfico 2.2 nos muestra la función de probabilidad de  $T^+$ .

**Gráfico 2.2**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de probabilidad de  $T^*$  para  $n = 4$**



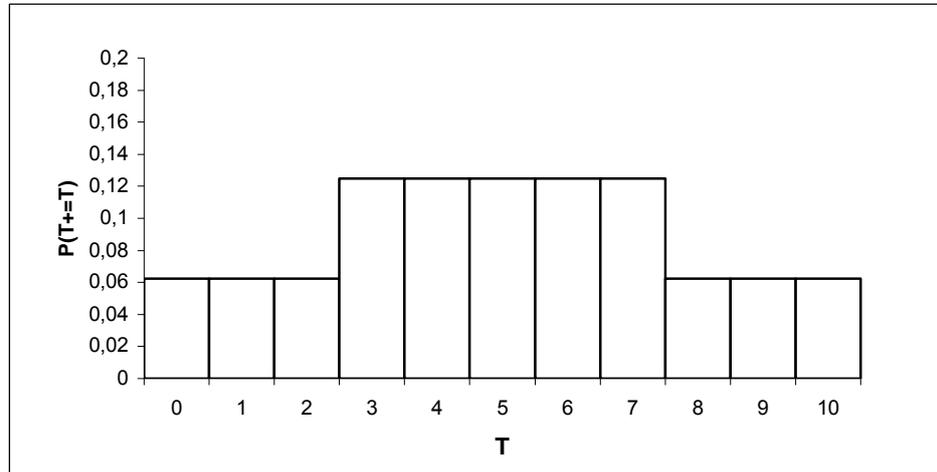
Elaboración M Rojas

La función indicadora  $\psi_i$  puede únicamente tomar dos valores como puede apreciarse. De hecho si la distribución de  $X$  es simétrica, se tiene que  $P(\psi_i = 0) = P(\psi_i = 1) = \frac{1}{2}$ , de donde se puede inferir claramente que los  $\psi_i$  son variables aleatorias independientes que siguen una distribución de Bernoulli con parámetro  $p = \frac{1}{2}$ . Si  $T' = \sum_{i=1}^n R_i \psi_i$  entonces al obtener:

$$E[T'] = R_1 E[\psi_1] + R_2 E[\psi_2] + R_3 E[\psi_3] + \dots + R_n E[\psi_n]$$

$$E[T'] = R_1 \frac{1}{2} + R_2 \frac{1}{2} + R_3 \frac{1}{2} + \dots + R_n \frac{1}{2}$$

**Gráfico 2.2**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de probabilidad de  $T^+$  para  $n = 4$**



Elaboración: M. Rojas.

La función indicadora  $\psi_i$  puede únicamente tomar dos valores como puede apreciarse. De hecho si la distribución de  $X$  es simétrica, se tiene que  $P(\psi_i = 0) = P(\psi_i = 1) = 1/2$ , de donde se puede inferir claramente que los  $\psi_i$  son variables aleatorias independientes que siguen una distribución de

Bernoulli con parámetro  $p = 1/2$ . Si  $T^+ = \sum_{i=1}^n R_i \psi_i$  entonces al obtener:

$$E[T^+] = R_1 E[\psi_1] + R_2 E[\psi_2] + R_3 E[\psi_3] + \dots + R_n E[\psi_n]$$

$$E[T^+] = R_1 \frac{1}{2} + R_2 \frac{1}{2} + R_3 \frac{1}{2} + \dots + R_n \frac{1}{2}$$

Si tenemos  $n$  datos, tendremos que  $\sum_{i=1}^n R_i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

$$E[T^+] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{1}{2} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) = \left( \frac{n(n+1)}{4} \right)$$

y para la varianza:

$$\text{Var}[T^+] = R_1^2 \text{Var}[\psi_1] + R_2^2 \text{Var}[\psi_2] + R_3^2 \text{Var}[\psi_3] + \dots + R_n^2 \text{Var}[\psi_n]$$

$$\text{Var}[T^+] = R_1^2 \frac{1}{4} + R_2^2 \frac{1}{4} + R_3^2 \frac{1}{4} + \dots + R_n^2 \frac{1}{4}$$

Si tenemos  $n$  datos, tendremos que

$$\sum_{i=1}^n R_i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

De donde:

$$\text{Var}[T^+] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n R_i^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \right)$$

De allí que para valores de  $n$  grandes puede demostrarse que:

$$T^* = \frac{T^+ - [n(n+1)/4]}{[n(n+1)(2n+1)/24]^{1/2}}$$

sigue una distribución normal con media 0 y varianza 1. Para  $n \geq 15$  se considera apropiado suponer que  $T^+$  sigue una distribución normal (Freund J., Walpole R. (1990))

Ilustremos esta prueba con el siguiente ejercicio de aplicación: Los valores indicados en la Tabla X son registros de las cantidades en dólares que gastaron  $n = 16$  personas. Determinaremos utilizando la prueba de Wilcoxon si en promedio las personas gastaron 10 dólares o no. Planteamos la siguiente hipótesis:

$$H_0: \mu = 10$$

Vs.

$$H_1: \mu \neq 10$$

Tenemos entonces que los  $x_i$  corresponden a los registros de las cantidades gastadas en dólares:

**Tabla X**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Ejemplo de aplicación de la prueba de Wilcoxon**

$x_i$	$D_i$	$\psi_i$	$R_i$
10,15	0,150	1	2
9,84	-0,160	0	3
13,75	3,750	1	14
8,63	-1,370	0	10
11,09	1,090	1	8
15,63	5,630	1	16
6,65	-3,350	0	13
9,27	-0,730	0	6
8,80	-1,200	0	9
11,45	1,450	1	11
10,29	0,290	1	4
9,51	-0,490	0	5
13,80	3,800	1	15
10,00	0,000	1	1
7,48	-2,520	0	12
9,11	-0,890	0	7

Elaboración: M. Rojas.

$$T^+ = \sum_{i=1}^n R_i \psi_i = 2 + 14 + 8 + 16 + 11 + 4 + 15 + 1 = 71$$

Utilizando la aproximación normal ya que  $n \geq 15$  (Freund J., Walpole R. (1990)):

$$T^* = \frac{T^+ - 68}{[374]^{1/2}} = \frac{71 - 68}{[374]^{1/2}} = 0,008$$

Tenemos que el valor  $p$  de la prueba es 0,496, se acepta la hipótesis nula. Existe evidencia estadística para decir que las personas gastan en promedio 10 dólares en el período investigado.

#### **2.2.2.2. Comandos en el paquete estadístico Systat 10.0 para realizar la prueba de Wilcoxon**

El comando para efectuar la prueba de Wilcoxon esta disponible únicamente para dos muestras. Se incluye un código fuente de lenguaje C con dicha prueba para fines de aplicación (Anexo 1).

#### **2.3.2. Prueba de hipótesis para la media de dos poblaciones**

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $y_1, y_2, \dots, y_m$  dos muestras aleatorias independientes tomadas de dos poblaciones  $X$  y  $Y$  que siguen distribuciones con medias  $\mu_1$  y  $\mu_2$  respectivamente se establece el contraste:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

vs.

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

o como hipótesis alternativa  $H_1: \mu_1 > \mu_2$  o  $H_1: \mu_1 < \mu_2$ . Donde la región crítica está dada por las técnicas que se indicarán a continuación.

### 2.3.1. Prueba t para dos muestras (paramétrica)

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $y_1, y_2, \dots, y_m$  dos muestras aleatorias independientes tomadas de dos poblaciones normales  $X$  y  $Y$  con varianzas desconocidas, puede demostrarse, mediante la técnica de máxima verosimilitud ilustrada en el capítulo anterior con la prueba t, que se produce el siguiente estimador:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

donde

$$s_p = \frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{n+m-2}$$

y puede demostrarse que  $t$  sigue una distribución t con  $(n + m - 2)$  grados de libertad.

### 2.3.1.2. Comandos en el paquete estadístico Systat 10.0 para realizar la prueba t para dos muestras

El comando para efectuar la prueba t para dos muestras es:

TTEST

USE "Nombre del archivo"

TEST "Variable" \* "Identificador"\$

### 2.3.2. Prueba U (Mann-Whitney) (no paramétrica)

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $y_1, y_2, \dots, y_m$  dos muestras aleatorias independientes tomadas de dos poblaciones continuas  $X$  y  $Y$ . Se define el siguiente contraste de hipótesis:

$$H_0: \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$$

Vs.

$$H_1: \tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$$

Donde  $\tilde{\mu}_1$  y  $\tilde{\mu}_2$  corresponden a las medianas poblacionales de  $X$  y  $Y$ . Sea  $R_k$  los rangos de la muestra combinada de  $X$  y  $Y$  de tamaño  $n + m$ . Sea  $R_{x_i}$  los rangos  $R_k$  correspondientes a la muestra proveniente de la

población X y sean  $R_{y_i}$  los rangos  $R_k$  correspondientes a la muestra proveniente de la población Y. Se tienen los estadísticos  $W_1$  y  $W_2$ :

$$W_1 = \sum_{i=1}^n R_{x_i} \quad \text{y} \quad W_2 = \sum_{i=1}^m R_{y_i}$$

de donde de forma análoga a la prueba de Wilcoxon, puede demostrarse que:

$$W_1 + W_2 = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2}$$

De donde se obtiene el estadístico U como:

$$U = \text{Min} \left( W_1 - \frac{n(n+1)}{2}, W_2 - \frac{m(m+1)}{2} \right)$$

El cual sigue una distribución de probabilidad que puede obtenerse tabulando sus valores posibles. Por ejemplo para  $n = 2$  y  $m = 2$  donde

tenemos que existen  $\binom{n+m}{m} = \binom{4}{2} = 6$  valores posibles en los rangos.

Estos valores se aprecian en la Tabla XI:

**Tabla XI**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Valores posibles de  $U_1$  y  $U_2$  para  $n=2$  y  $m=2$**

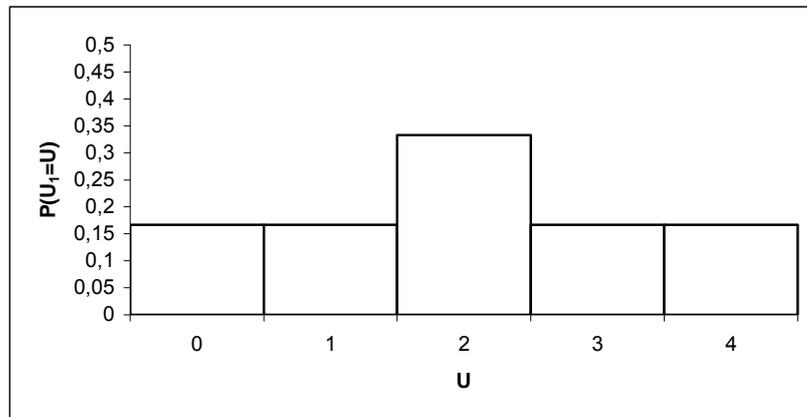
<b>Rangos</b>				<b><math>U_1</math></b>	<b><math>U_2</math></b>
<b>X</b>	<b>Y</b>				
1	2	3	4	0	4
1	3	2	4	1	3
1	4	2	3	2	2
2	3	1	4	2	2
2	4	1	3	3	1
3	4	1	2	4	0

Elaboración: M. Rojas.

$$P(U_1 = U) = \begin{cases} \frac{1}{6} & U = 0, 1, 3, 4 \\ \frac{2}{6} & U = 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad P(U_2 = U) = \begin{cases} \frac{1}{6} & U = 0, 1, 3, 4 \\ \frac{2}{6} & U = 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

De donde tenemos que las distribuciones de probabilidad de  $U_1$  y  $U_2$  son iguales y simétricas alrededor de 2, para este caso:

**Gráfico 2.3**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de probabilidad de U para  $n = 2$  y  $m = 2$**



Elaboración: M. Rojas

Puede demostrarse, de forma similar al estadístico de Wilcoxon, que para el estadístico  $U$ :

$$E[U] = \frac{nm}{2} \quad y \quad Var[U] = \frac{mn(m+n+1)}{12}$$

de donde  $U$  puede aproximarse a una distribución normal estándar utilizando estos parámetros para valores de  $n$  y  $m$  grandes. Para  $n \geq 8$  y  $m \geq 8$  se considera apropiado suponer que  $U$  sigue una distribución normal (Freund J., Walpole R. (1990))

Ilustremos esta prueba con un ejercicio de aplicación: Los  $x_i$  y  $y_i$  que se indican en la Tabla XII representan el número de asaltos realizados en una ciudad 6 días en verano, 6 días en invierno. Determinaremos utilizando la prueba U si el número promedio de robos en ambas estaciones es igual. Se plantea el siguiente contraste:

$$H_0: \mu_{\text{verano}} = \mu_{\text{invierno}}$$

Vs.

$$H_1: \mu_{\text{verano}} \neq \mu_{\text{invierno}}$$

Tenemos entonces en la Tabla XII que:

**Tabla XII**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Ejemplo de aplicación de la prueba de Mann-Withney**

$x_i$	$y_i$	$R_x$	$R_y$
3	2	1	
6	7	1	6
2	2		
5	0	5	3
3	1		
2	5	9	1
3	2	1	
8	9	2	8
2	1		
8	8	7	2
3	2	1	
5	2	0	4

Elaboración: M. Rojas.

$$W_1 = \sum_{i=1}^6 R_x = 54 \quad W_2 = \sum_{i=1}^6 R_y = 24$$

$$U_1 = W_1 - \frac{n(n+1)}{2} = 54 - \frac{6(6+1)}{2} = 54 - 21 = 33$$

$$U_2 = W_2 - \frac{m(m+1)}{2} = 24 - \frac{6(6+1)}{2} = 24 - 21 = 3$$

De donde  $U = \text{Min}(U_1, U_2) = 3$ . Como los tamaños de muestra son menores que 8 utilizaremos los valores críticos de U tabulados en Hollander, Wolfe (1973), con un 95% de confianza este es igual a 5. De donde para un  $\alpha=0,05$  se rechaza la hipótesis nula de que los robos en promedio son iguales en ambas estaciones.

### **2.3.2.2. Comandos en el paquete estadístico Systat 10.0 para realizar la prueba U (Mann-Whitney)**

El comando para efectuar la prueba U es:

USE "Nombre del archivo"

KRUSKAL "Variable" \* "Identificador"

Mann Whitney es un caso particular cuando  $n = 2$  de la prueba de Kruskal-Wallis, técnica no paramétrica que generaliza los problemas de análisis de varianza a  $n$  muestras.

#### 2.4. Prueba de hipótesis para la varianza de dos muestras

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $y_1, y_2, \dots, y_m$  dos muestras aleatorias independientes tomadas de dos poblaciones que siguen distribuciones  $X$  y  $Y$  con varianza  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$  se establece el contraste:

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \equiv \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

vs.

$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \equiv \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Donde la región crítica está dada por las técnicas que se indicarán a continuación.

### 2.4.1. Prueba F (paramétrica)

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $y_1, y_2, \dots, y_m$  dos muestras aleatorias independientes tomadas de dos poblaciones normales  $X$  y  $Y$  con varianzas  $\sigma_x^2$  y  $\sigma_y^2$  respectivamente. Mediante la técnica de máxima verosimilitud se construye el siguiente estimador:

$$F = \frac{s_x^2 \sigma_y^2}{s_y^2 \sigma_x^2}$$

Si  $H_0$  es cierto entonces  $\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = 1$ . Puede demostrarse que  $F$  sigue una distribución F con  $(n-1, m-1)$  grados de libertad de donde se obtienen las regiones críticas para el contraste de hipótesis indicado anteriormente.

#### 2.4.1.1. Comandos en el paquete estadístico Systat 10.0 para realizar la Prueba F

El comando para efectuar la prueba F es:

USE "Nombre del archivo"

ANOVA

CATEGORY "Variable" \* "Identificador"

ESTIMATE

### 2.4.2.1. Prueba de Ansari-Bradley (no paramétrica)

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $y_1, y_2, \dots, y_m$  dos muestras aleatorias independientes tomadas de dos poblaciones continuas  $X$  y  $Y$  con varianzas  $\sigma_x^2$  y  $\sigma_y^2$  y con  $\tilde{\mu}_x = \tilde{\mu}_y$  (medianas poblacionales iguales). Sea  $N = m + n$ , defínase  $RK_i$  como los rangos correspondientes a la muestra combinada ordenada de tamaño  $N$ , de tal manera que  $RK_1=1, RK_2=2, \dots, RK_{n/2}= N/2, RK_{n/2 + 1}= N/2, \dots, RK_N =1$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Sean  $R_j$  los rangos  $RK_i$  correspondientes a los valores de la variable  $X$  para  $j=1, 2, \dots, n$ . Entonces puede demostrarse que el estadístico  $W$ :

$$W = \sum_{i=1}^n R_i$$

Sigue la misma distribución que el estadístico de Wilcoxon (Mann-Whitney). La función de probabilidad de  $W$  está dada por los valores de  $n$  y  $m$ . Obtengamos la distribución de  $W$  para un caso particular. Por ejemplo para  $n = 2$  y  $m = 2$  tenemos que existen  $\binom{n+m}{m} = \binom{4}{2} = 6$  valores posibles en los rangos. En la Tabla XIII pueden apreciarse todos los rangos posibles para esos tamaños de muestra:

**Tabla XIII**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Valores posibles de  $W_1$  y  $W_2$  para  $n=2$  y  $m=2$**

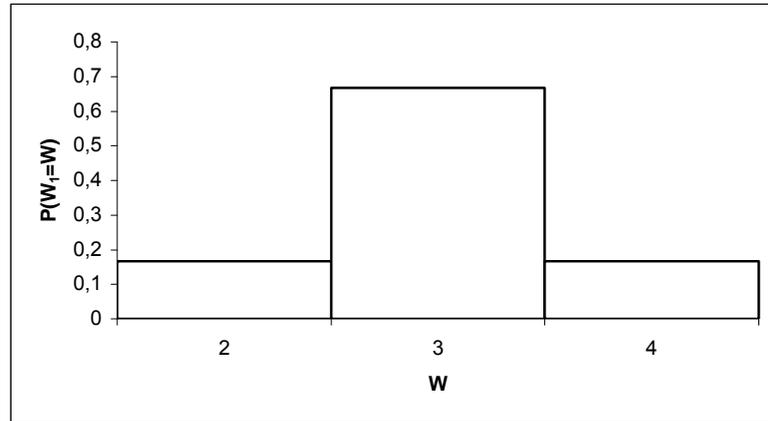
Rangos				$W_1$	$W_2$
X	Y				
1	1	2	2	2	4
1	2	1	2	3	3
2	1	2	1	3	3
1	2	2	1	3	3
2	1	1	2	3	3
2	2	1	1	4	2

Elaboración: M. Rojas

$$P(W_1 = W) = \begin{cases} \frac{1}{6} & W = 2, 4 \\ \frac{4}{6} & W = 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad P(W_2 = W) = \begin{cases} \frac{1}{6} & W = 2, 4 \\ \frac{4}{6} & W = 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

De donde se tiene que las distribuciones de probabilidad de  $W_1$  y  $W_2$  son iguales y simétricas alrededor de 3, para este caso.

**Gráfico 2.4**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de probabilidad del estadístico de Ansari-Bradley para  $n = 2$  y  $m = 2$**



Elaboración: M. Rojas

De esta manera, al generalizar puede establecerse que:

$$E[W] = \frac{n(m+n+2)}{4} \quad y \quad Var[W] = \frac{mn(m+n+2)(m+n-2)}{48(m+n-1)}$$

si la suma  $n + m$  es un número par y;

$$E[W] = \frac{m(m+n+1)^2}{4(m+n)} \quad y \quad Var[W] = \frac{mn(m+n+1)[3+(m+n)^2]}{48(m+n)^2}$$

si la suma  $n + m$  es un número impar, de donde para tamaños de muestra grandes:

$$W^* = \begin{cases} \frac{W - [n(m+n+2)/4]}{\{mn(m+n+2)(m+n-2)/[48(m+n-1)]\}^{1/2}} & \text{si } m+n \text{ es par} \\ \frac{W - \{m(m+n+1)^2/[4(m+n)]\}}{\{mn(m+n+1)[3+(m+n)^2]/[48(m+n)^2]\}^{1/2}} & \text{Si } m+n \text{ es impar} \end{cases}$$

donde  $W^*$  sigue una distribución normal estándar. Puede considerarse apropiado utilizar la aproximación normal si  $m + n \geq 20$  (Hollander, Wolfe(1973)).

Ilustraremos esta prueba con un ejercicio de aplicación: La Tabla XIV muestra los resultados de una prueba aplicada a 9 mujeres casadas y a 9 solteras. Utilizaremos la prueba de Ansari-Bradley para determinar si las calificaciones tienen la misma varianza. Partimos del supuesto de que ambas calificaciones tienen medianas iguales y postulamos el siguiente contraste:

$$H_0: \sigma^2_{\text{casadas}} = \sigma^2_{\text{solteras}}$$

Vs.

$$H_1: \sigma^2_{\text{casadas}} \neq \sigma^2_{\text{solteras}}$$

**Tabla XIV**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Ejemplo de aplicación de la prueba de Ansari- Bradley**

Solteras	Casadas	RK <sub>s</sub>	RK <sub>c</sub>
88	73	1	7
68	77	4	5
77	67	5	3
82	74	2	6
63	74	1	6
80	64	3	2
78	71	4	5
71	71	5	5
72	72	6	6

Elaboración: M. Rojas.

De donde obtenemos el estadístico  $W$ :

$$W = \sum_{i=1}^9 R_i = 31$$

Se recurre a los valores tabulados de  $W$  que pueden encontrarse en Hollander, Wolfe (1973): Para  $W = 31$ ,  $m = 9$  y  $n = 9$  se tiene que el valor  $p$  de la prueba es 0,0037, por ello se rechaza la hipótesis nula de que ambas calificaciones tiene la misma varianza.

### 2.4.2.3. Comandos en el paquete estadístico Systat 10.0 para realizar la prueba de Ansari-Bradley

No existen comandos definidos para esta prueba, por ello se adjunta un código fuente de la misma en Lenguaje C (Anexos 3) .

## 2.5. Obtención de los estimadores de $\beta_0$ y $\beta_1$ en regresión lineal simple

Sean las observaciones pareadas  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  provenientes de poblaciones  $X$  y  $Y$  respectivamente. La ecuación resultante de  $E[Y | x]$  recibe el nombre de regresión de  $Y$  en  $x$  donde  $x$  es un elemento de la población  $X$ . Si  $E[Y | x] = \beta_0 + \beta_1 x$  se dice que la ecuación correspondiente a  $E[Y | x]$  es de regresión lineal simple.

Para cada valor observado  $y_i$  proveniente de  $Y$ :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon_i$$

Donde  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $\sigma_{\varepsilon_i}^2$  son parámetros desconocidos. Se procede a estimar  $\beta_0$  y  $\beta_1$  como  $b_0$  y  $b_1$ . De donde se tiene que

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

Las siguientes técnicas obtienen  $b_0$  y  $b_1$  en base a las observaciones dadas.

### 2.5.1. Método de mínimos cuadrados (paramétrica)

El método de Mínimos Cuadrados supone que los  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$  y que  $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  ;  $i \neq j$ . Sea  $e_i = y_i - \hat{y}_i$  se tratará de minimizar:

$$Q = \sum_{i=1}^n (e_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2$$

Entonces se obtienen las derivadas parciales de  $Q$  con respecto a los parámetros  $b_0$  y  $b_1$  y las igualamos a cero a fin de obtener el mínimo de la ecuación indicada.

Es decir:

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = \frac{\partial Q}{\partial b_1} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = \sum_{i=1}^n (-2)[y_i - (b_0 + b_1 x)] = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_1} = \sum_{i=1}^n (-2)x_i [y_i - (b_0 + b_1 x)] = 0$$

de donde se obtiene al resolver el sistema que:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})} \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

Siendo estos los coeficientes de la denominada recta de mínimos cuadrados.

### 2.5.1.1. Comandos en el paquete estadístico Systat 10.0 para realizar el método de Mínimos Cuadrados

El comando para obtener los estimadores de mínimos cuadrados de la regresión lineal simple es:

```
USE "Nombre del archivo"
REGRESS MODEL
"Variable Y" = CONSTANT + "variable X"
ESTIMATE
```

### 2.5.2. Método de Theil (no paramétrica)

El método de Theil supone que los  $\varepsilon_i$  siguen una distribución idéntica y continua. Ordénense las observaciones pareadas  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  en base a las magnitudes de  $x_i$  de menor a mayor. Es decir  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Sea

$N = \binom{n}{2}$  y sean los  $N$  valores muestrales  $S_{ij} = (y_j - y_i) / (x_j - x_i)$ ;  $i < j$

De allí los estimadores  $b_1$  y  $b_0$  son iguales a:

$$b_1 = \tilde{S}_{ij} \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

es decir  $b_1$  es la mediana de todos los valores muestrales  $S_{ij}$  y  $b_0$  se obtiene en base a la ecuación de mínimos cuadrados.

Ilustraremos esta técnica con un ejercicio de aplicación: En la Tabla XV se indican los resultados de administrar  $x$  miligramos de veneno a la comida de un grupo de 25 ratones. La variable dependiente será el número de muertes en el grupo.

**Tabla XV**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Datos para el ejercicio aplicado de la técnica de Theil**

Dosis	Muertes
4	1
6	3
8	6
10	8
12	14
14	16
16	20
18	21

Elaboración: M. Rojas.

Obtenemos todos los  $S_{ij}$  posibles. Para nuestro caso tenemos que serán posibles  $\binom{N}{2} = \binom{8}{2} = 28$  valores de  $S_{ij}$ . En la Tabla XVI:

**Tabla XVI**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Valores de posibles  $S_{ij}$  para el ejercicio propuesto**

1,00	1,50	1,00	3,00	1,00	2,00	0,50
1,25	1,25	2,00	2,00	1,50	1,25	
1,17	1,83	1,67	2,00	1,17		
1,63	1,63	1,75	1,63			
1,50	1,70	1,50				
1,58	1,50					
1,43						

Elaboración: M. Rojas

La mediana de los  $S_{ij}$  es igual a 1,50, que es el estimador del parámetro  $\beta_1$ .

La estimación por mínimos cuadrados es 1,554 para el mismo parámetro.

### **2.5.2.1. Comandos en el paquete estadístico Systat 10.0 para aplicar el método de Theil**

No existen comandos en Systat 10.0. Se incluye un código fuente en Lenguaje C para fines de aplicación de esta prueba (Anexo 3).

# CAPITULO 3

## 3. DETERMINACIÓN DE MUESTRAS

### 3.1 Introducción

Parte importante de nuestra investigación es determinar los tamaños de muestras de las poblaciones que elegiremos para comparar las pruebas paramétricas y no paramétricas. En la sección 3.1 se indicarán las características de la distribución normal, en la sección 3.2 se indicarán las características de la distribución de Laplace, en la sección 3.3 se indicarán las características de la distribución de Weibull y en la sección 3.4 se indicarán las características de la distribución binomial. En todas las secciones se ilustrará gráficamente la función de probabilidad asociada a dichas distribuciones y se planteará un algoritmo para simular las muestras provenientes de dichas poblaciones.

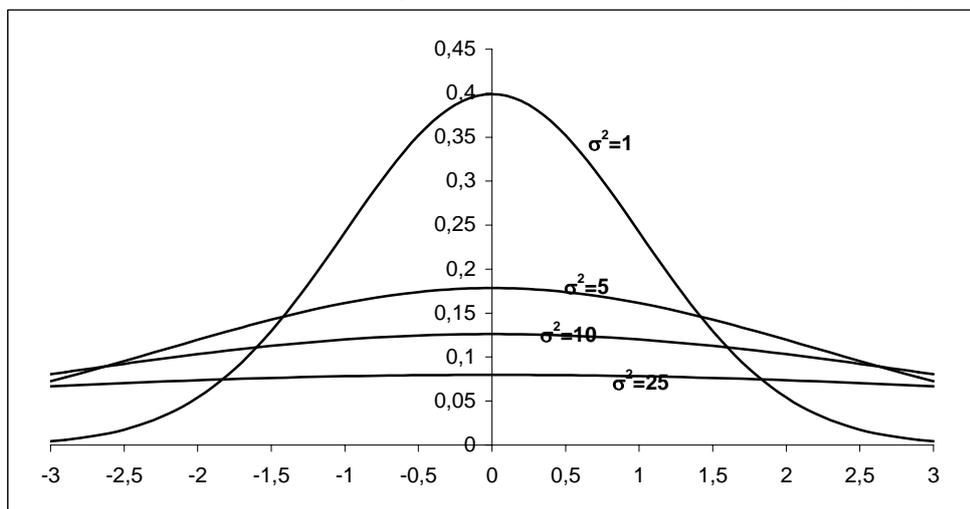
### 3.2 Distribución normal

Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución normal (también llamada distribución de Gauss) con parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$  si y sólo si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \begin{array}{l} \sigma > 0 \\ -\infty < \mu < \infty \\ -\infty < x < \infty \end{array}$$

Donde  $\mu$  es el parámetro de tendencia central y  $\sigma^2$  es el parámetro de dispersión con respecto a  $\mu$  de la población. El Gráfico 3.1 muestra la función de densidad de probabilidad de la distribución normal para  $\mu = 0$  y distintos valores de  $\sigma^2$ .

**Gráfico 3.1**  
Estadística Paramétrica y No Paramétrica  
Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal(0,  $\sigma^2$ )



Elaboración: M. Rojas.

Por definición la función generadora de momentos de una variable aleatoria continua es:

$$E[e^{xt}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x) dx$$

Para el caso de la distribución normal:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(-2xt\sigma^2 + (x-\mu)^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx$$

Completamos el cuadrado del exponente de forma que :

$$-2xt\sigma^2 + (x-\mu)^2 = (x - (\mu + t\sigma^2))^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4$$

Entonces tenemos que:

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}t\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(\mu+t\sigma^2)}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx$$

El integral a la derecha coincide con el integral de la función de densidad de una distribución normal con parámetros  $\mu+t\sigma^2$  y  $\sigma$ , por consiguiente es 1. Entonces se concluye que:

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}t\sigma^2}$$

Ahora

$$\frac{\partial M_x(t)}{\partial t} = e^{\mu t + \frac{1}{2}t\sigma^2} (\mu + t\sigma^2) = M_x(t)(\mu + t\sigma^2)$$

$$\frac{\partial^2 M_x(t)}{\partial t^2} = e^{\mu t + \frac{1}{2}t\sigma^2} ((\mu + t\sigma^2)^2 + \sigma^2) = M_x(t)((\mu + t\sigma^2)^2 + \sigma^2)$$

Si evaluamos ambas derivadas en  $t = 0$  tenemos que:

$$\frac{\partial M_x(0)}{\partial t} = \mu$$

$$\frac{\partial^2 M_x(0)}{\partial t^2} = \mu^2 + \sigma^2$$

De donde:

$$E[X] = \frac{\partial M_x(0)}{\partial t} = \mu$$

y:

$$\text{Var}[X] = \frac{\partial^2 M_x(0)}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial M_x(0)}{\partial t} \right)^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

Quedando demostrado que  $\mu$  y  $\sigma^2$  son la media y varianza de la distribución Normal respectivamente.

Derivemos una vez mas la función generadora de momentos para obtener el tercer momento con respecto a la media de nuestra función:

$$\frac{\partial^3 M_x(t)}{\partial t^3} = M_x(t) \left( 2\sigma^2(\mu + \sigma^2 t) + \left( (\mu + \sigma^2 t)^2 + \sigma^2 \right) (\mu + \sigma^2 t) \right)$$

$$\frac{\partial^3 M_x(0)}{\partial t^3} = 2\sigma^2 \mu + \mu^3 + \mu \sigma^2 = \mu^3 + 3\mu \sigma^2 = E[X^3]$$

:

$$E[(x - \mu)^3] = E[X^3] - 3\mu E[X^2] + 3\mu^2 E[X] - \mu^3$$

$$E[(x - \mu)^3] = \mu^3 + 3\mu \sigma^2 - 3\mu^3 - 3\mu \sigma^2 + 3\mu^3 - \mu^3 = 0$$

El sesgo de la función está dado por:  $\frac{E[(x-\mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{0}{\sigma^3} = 0$

Por ende se tiene que el sesgo de la distribución Normal es 0, es decir es simétrica alrededor de  $\mu$ .

Derivemos por cuarta vez la función generadora de momentos

$$\frac{\partial^4 M_x(t)}{\partial t^4} = M_x(t) \left( 3\sigma^4 + 3\sigma^2(\mu + \sigma^2 t)^2 + (3\sigma^2\mu + 3\sigma^4 t + (\mu + \sigma^2 t)^3)(\mu + \sigma^2 t) \right)$$

$$\frac{\partial^4 M_x(0)}{\partial t^4} = 3\sigma^4 + 3\sigma^2\mu^2 + 3\sigma^2\mu^2 + \mu^4 = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4 = E[x^4]$$

Obtendremos la expresión de la kurtosis de la función:

$$E[(x-\mu)^4] = E[x^4] - 4\mu E[x^3] + 6\mu^2 E[x^2] - 4\mu^3 E[x] + \mu^4$$

La kurtosis está dada por:  $\frac{E[(x-\mu)^4]}{\sigma^4}$

Para nuestro caso particular:

$$E[(x-\mu)^4] = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4 - 4\mu^4 - 12\sigma^2\mu^2 + 6\mu^4 + 6\sigma^2\mu^2 - 4\mu^4 - \mu^4 = 3\sigma^4$$

$$\frac{E[(x-\mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3$$

De donde se tiene que el coeficiente de kurtosis de la distribución normal es 3, sin importar el valor de los demás parámetros poblacionales.

### 3.2.2 Simulación de muestras provenientes de una población normal

Demostraremos que  $F(x) \sim U(0,1)$ . Sea  $F(x)$  la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $X$ . Sea además  $Y = F(x)$ .

Derivando  $Y$  con respecto a  $x$  tenemos que:

$$\frac{dY}{dx} = F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dY} = \frac{1}{\frac{dY}{dx}} = \frac{1}{f(x)} \quad \forall f(x) > 0$$

En base a la técnica de transformación de una variable que enuncia:

Sea  $f(x)$  el valor de la densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $X$ . Si la función dada por  $y = u(x)$  es diferenciable y creciente o decreciente para todos los valores de  $X$  tales que  $f(x)$  sea diferente de 0, entonces para estos valores de  $X$ , la ecuación  $y = u(x)$  puede resolverse de forma única para  $x$  con el fin de producir  $x = w(y)$  y para los valores de  $y$  correspondientes la densidad de probabilidad de  $Y = u(X)$  está dada por:

$$g(y) = f[w(y)] \cdot |w'(y)|$$

Siempre que  $u'(x)$  sea diferente de 0. En otro punto  $g(Y) = 0$ .

Para nuestro caso particular:

$$g(y) = f(x) \cdot \left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1$$

Para  $0 < y < 1$ , lo que es la densidad de una distribución uniforme con  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ , quedando completa nuestra demostración.

Sean las variables aleatorias:

$$R_i \sim U(0,1) \quad i = 1,2,\dots,n$$

Para la distribución uniforme con parámetros  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$  se conoce que:

$$\mu = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \frac{1}{12}$$

Aplicando el Teorema del Límite Central a los  $R_i$  tenemos que:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n R_i - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}}$$

Donde  $Z$  es un número aleatorio que sigue una distribución Normal con parámetros  $\mu=0$  y  $\sigma^2=1$ .

Se puede demostrar que para  $n = 12$  se obtienen buenas aproximaciones, entonces se tiene que:

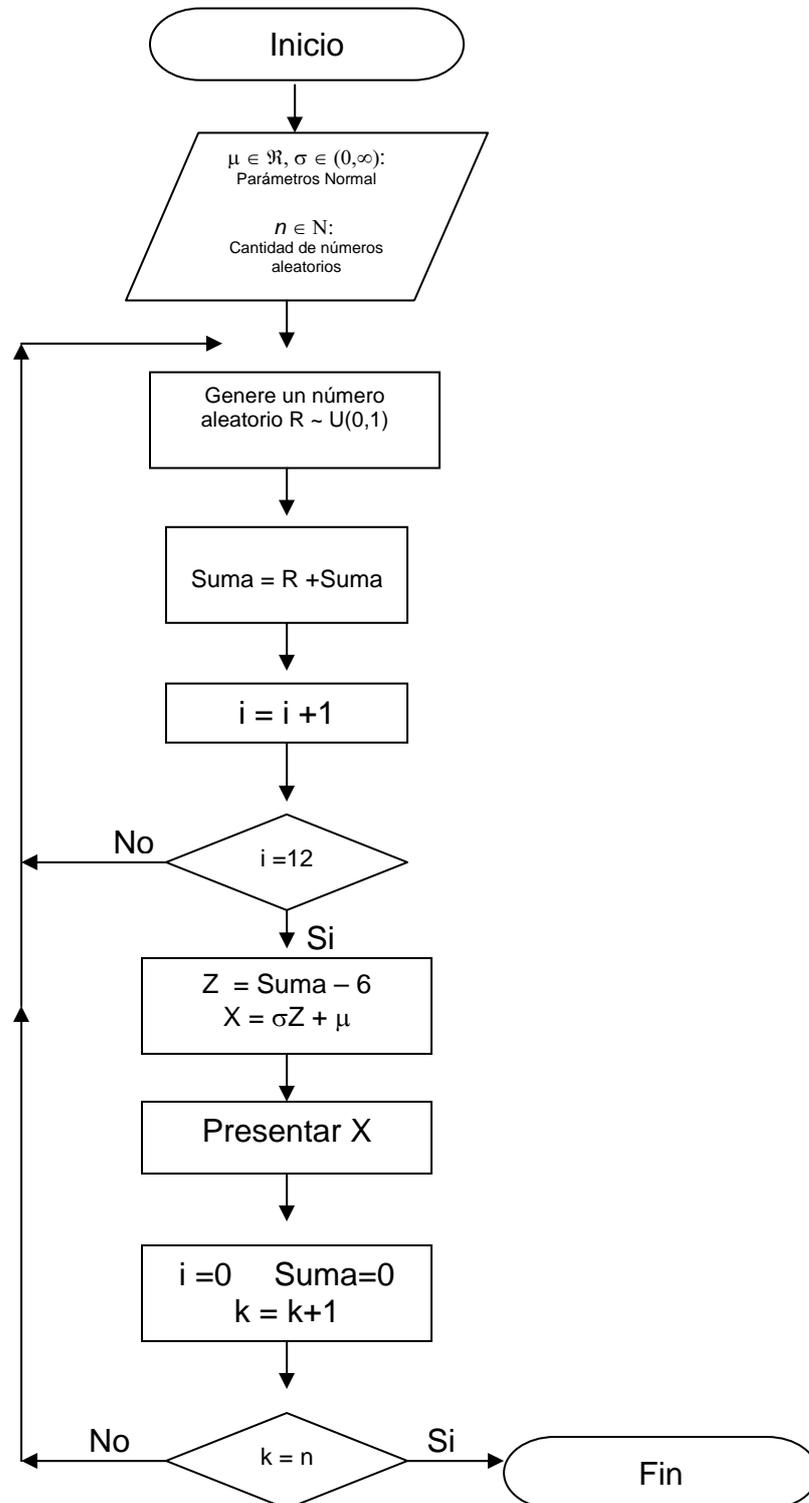
$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{12} R_i - 12\mu}{\sqrt{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}} = \frac{\sum_{i=1}^{12} R_i - 12(1/2)}{\sqrt{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}} = \left( \sum_{i=1}^{12} R_i \right) - 6$$

Si se desea obtener números aleatorios  $X$  que sigan una distribución

$N(\mu, \sigma^2)$  se utiliza la siguiente expresión:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad X = \sigma Z + \mu$$

**3.2.3 Diagrama de flujo de la simulación de una muestra de tamaño  $n$  proveniente de una población normal con parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$**



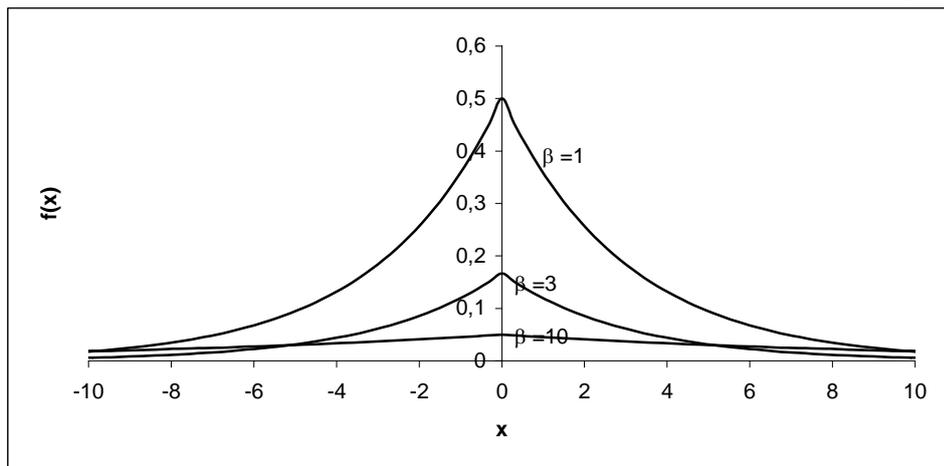
### 3.3 Distribución de Laplace

Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución de Laplace (o distribución exponencial doble) si y solo si tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{e^{-\left(\frac{|x-\alpha|}{\beta}\right)}}{2\beta} \quad \begin{array}{l} \beta > 0 \\ -\infty < \alpha < \infty \\ -\infty < x < \infty \end{array}$$

Donde  $\alpha$  es el parámetro de tendencia central y  $\beta$  es el parámetro de dispersión con respecto a  $\alpha$ . El Gráfico 3.2 muestra la función de densidad de probabilidad de la distribución de Laplace para  $\alpha = 0$  y distintos valores de  $\beta$ .

**Gráfico 3.2**  
Estadística Paramétrica y No Paramétrica  
Función de densidad de probabilidad de la distribución de Laplace(0,  $\beta$ )



Elaboración: M. Rojas.

La Tabla XVI resume algunas características de la distribución de Laplace:

**Tabla XVII**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Diversas características de la distribución de Laplace**

Función generadora de momentos	$\frac{1}{1-\beta^2 t^2} (e^{\alpha t}) \quad t < \frac{1}{\beta}$
Media	$\alpha$
Mediana	$\alpha$
Moda	$\alpha$
Varianza	$2\beta^2$
Sesgo	0
Kurtosis	6

Elaboración: M. Rojas.

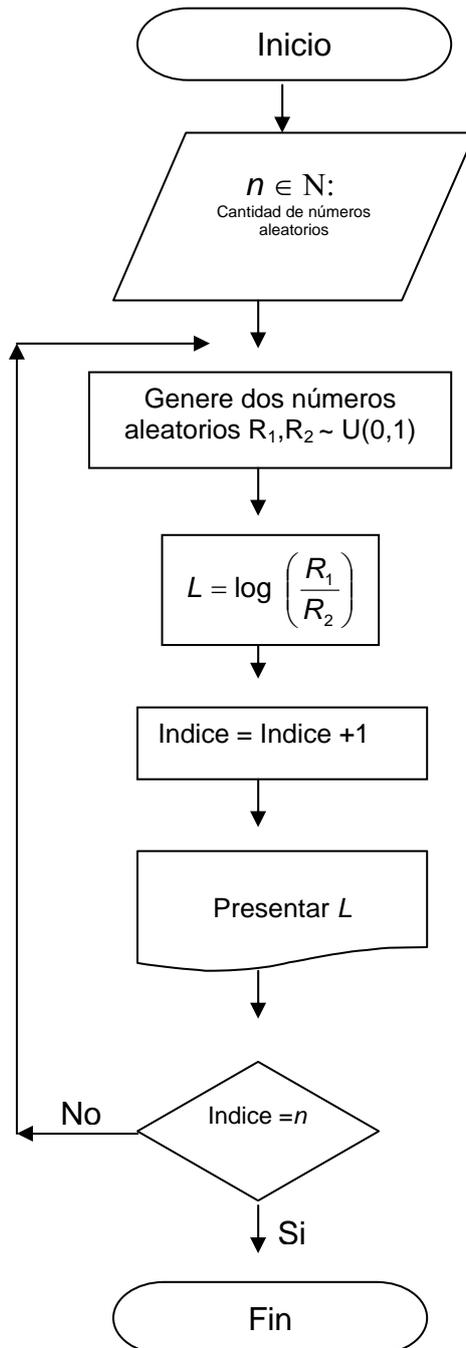
### 3.3.1 Simulación de muestras provenientes de una población de Laplace

Puede demostrarse la siguiente relación entre la distribución de Laplace y la distribución Uniforme:

$$L = \log \left( \frac{R_1}{R_2} \right)$$

Donde  $L$  es un número aleatorio que sigue una distribución de Laplace con parámetros  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ , y donde  $R_1$  y  $R_2$  son números aleatorios independientes que siguen una distribución uniforme con parámetros  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ .

**3.3.2 Diagrama de flujo de la simulación de una muestra de tamaño  $n$  proveniente de una población de Laplace con parámetros  $0$  y  $1$**



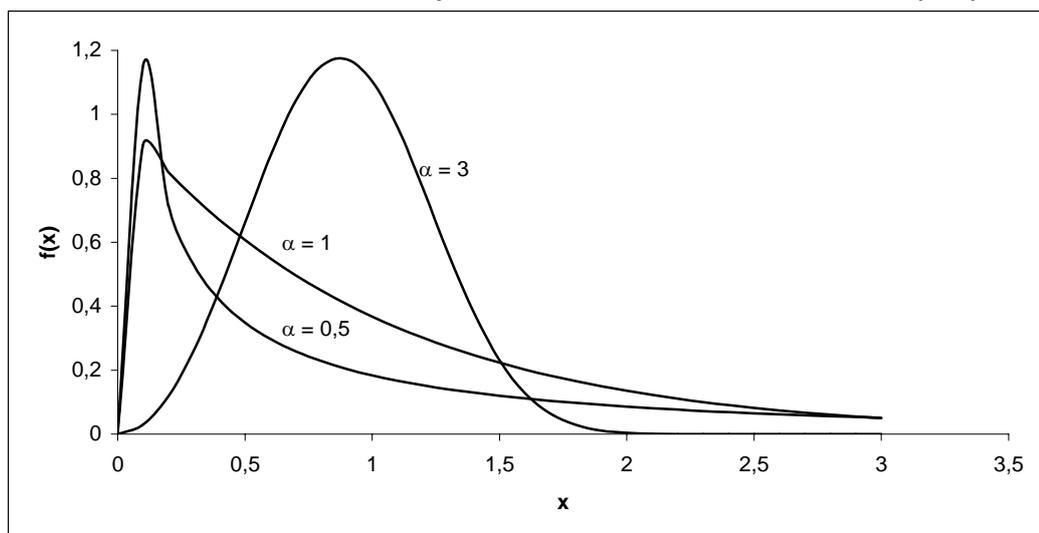
### 3.4 Distribución de Weibull

Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución de Weibull si y solo si tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \beta^{-\alpha} \alpha x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} & x > 0 \quad \beta > 0 \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Donde  $\beta$  es el parámetro de dispersión y  $\alpha$  es el parámetro de forma de la misma. En el Gráfico 3.3 puede apreciarse la distribución de Weibull estándar ( $\beta = 1$ ) y a su vez el efecto del parámetro  $\alpha$  en la misma. El valor de  $\alpha$  determinará la simetría o asimetría de la distribución.

**Gráfico 3.3**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución de Weibull(1,  $\alpha$ )**



Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla XVII se resumen algunas características de la distribución de Weibull (donde  $\Gamma(x)$  es la función gamma de  $x$ ):

**Tabla XVIII**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Diversas características de la distribución de Weibull**

Función generadora de momentos factoriales	$t^{\Gamma\left(1+\frac{t}{\alpha}\right)}$
Media	$\beta\left(\Gamma\left[\frac{\alpha+1}{\alpha}\right]\right)$
Mediana	$\beta(\log 2)^{1/2}$
Moda	$\beta\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ para $\alpha \geq 1$
Varianza	$\beta^2\left(\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)\right) - \left(\beta\left(\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\right)\right)^2$

Elaboración: M. Rojas.

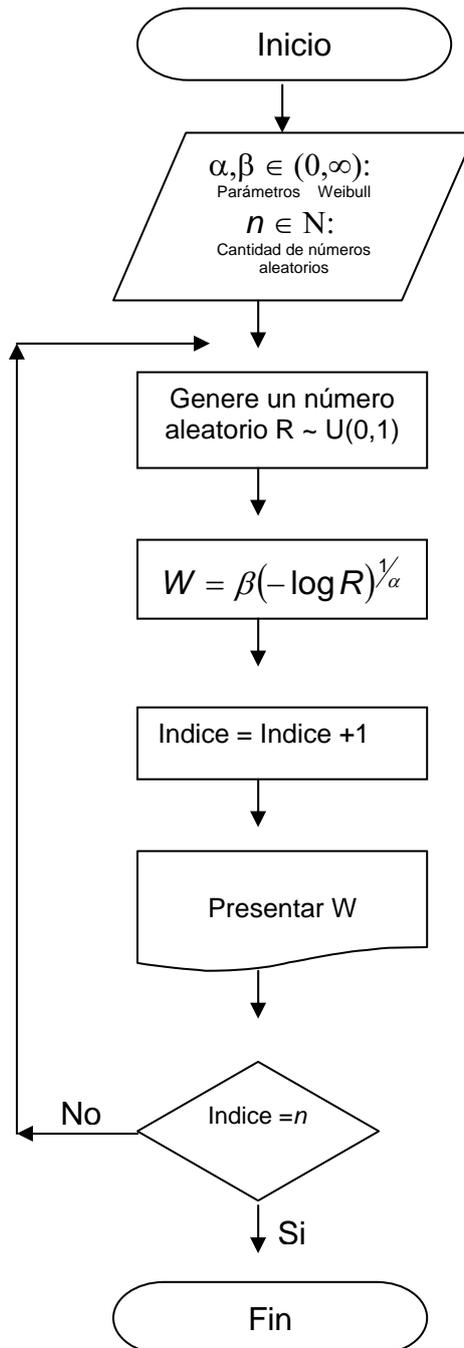
### 3.4.1 Simulación de muestras provenientes de una población de Weibull

Puede demostrarse la siguiente relación entre la distribución de Weibull y la distribución Uniforme:

$$W = \beta(-\log R)^{1/\alpha}$$

Donde  $W$  es un número aleatorio que sigue una distribución de Weibull con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , y  $R$  es un número aleatorio que sigue una distribución uniforme con parámetros  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ .

**3.4.2 Diagrama de flujo de la simulación de una muestra de tamaño  $n$  proveniente de una población de Weibull con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$**



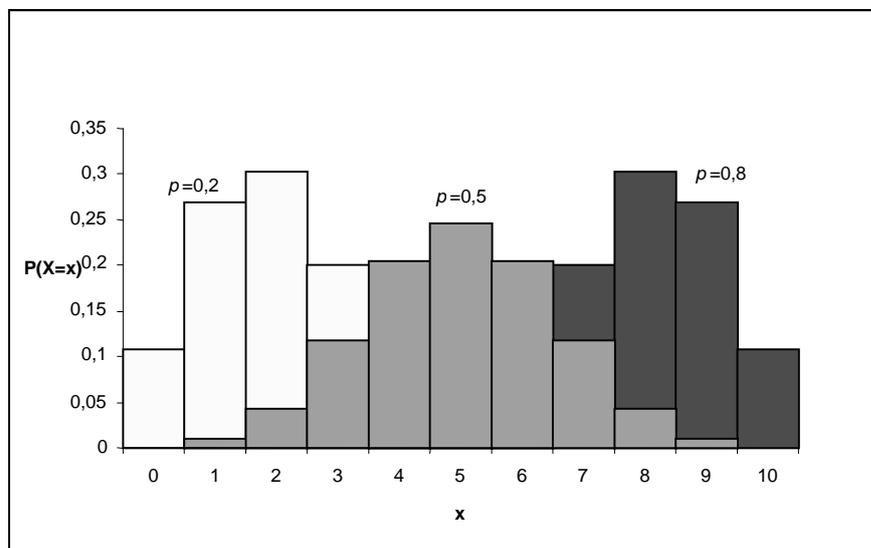
### 3.5 Distribución Binomial

Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución Binomial si y solo si su distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \begin{array}{l} 0 < p < 1 \\ n = 1, 2, 3, \dots \\ x = 0, 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Donde  $n$  es el número de repeticiones Bernoulli (donde solo existen dos resultados: éxito o fracaso) y  $p$  es la probabilidad de éxito de las mismas. El Gráfico 3.4 muestra el efecto del parámetro  $p$  en la función de probabilidad de la distribución Binomial.

**Gráfico 3.4**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Función de probabilidad de la distribución Binomial( $x: 10; p$ )**



Elaboración: M. Rojas.

El valor del parámetro  $p$  determina la simetría de la distribución.

En la Tabla XVIII se indican algunas características de la distribución Binomial:

**Tabla XIX**  
*Estadística Paramétrica y No Paramétrica*  
**Diversas características de la distribución Binomial**

Función generadora de momentos	$(pe^t + q)^n$
Media	$np$
Moda	$p(n+1) - 1 \leq x \leq p(n+1)$
Varianza	$npq$
Sesgo	$\frac{q-p}{(npq)^{\frac{1}{2}}}$
Kurtosis	$3 - \frac{6}{n} + \frac{1}{npq}$

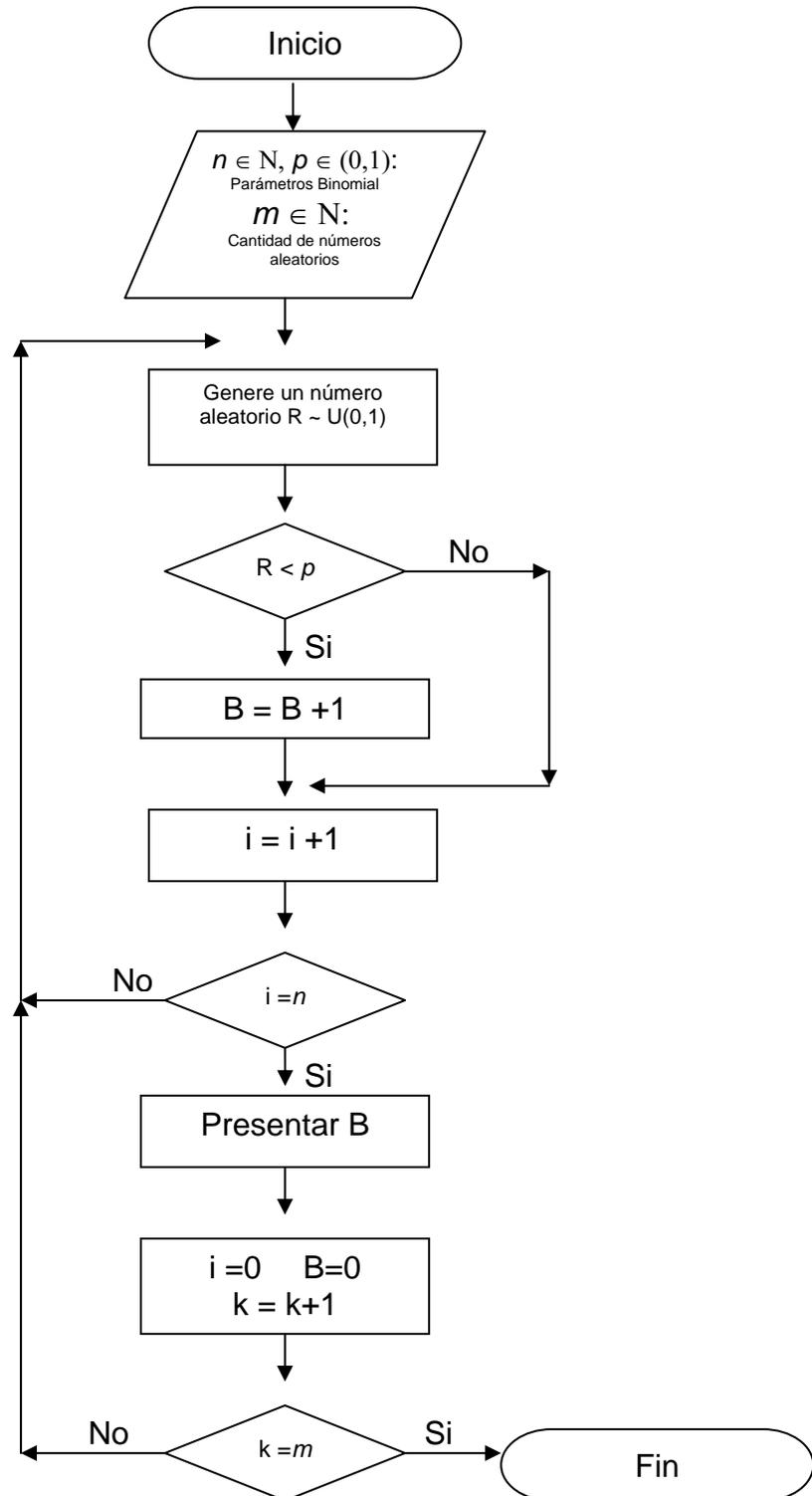
Elaboración: M. Rojas.

### 3.5.1 Simulación de muestras provenientes de una población binomial

El algoritmo para simular números aleatorios que siguen una distribución Binomial se basa en el Método de Rechazo. El Método de Rechazo reparte puntos de manera uniforme y aleatoria bajo la curva de una función de probabilidad  $f(x)$ . Para nuestro caso:

1. Genere  $n$  números aleatorios uniformes con  $\alpha=0$  y  $\beta=1$  a quienes denotaremos por  $R_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. Sea  $B$  el número de veces que los  $R_i$  son menores que  $p$ .
3.  $B$  es un número aleatorio que sigue una distribución Binomial con parámetros  $n$  y  $p$ , respectivamente

**3.5.2 Diagrama de flujo de la simulación de una muestra de tamaño  $m$  proveniente de una población binomial con parámetros  $n$  y  $p$**



# **CAPITULO 4**

## **4.COMPARACIÓN NUMÉRICA DE TÉCNICAS PARAMÉTRICAS Y NO PARAMÉTRICAS**

### **4.1 Introducción**

Para efectuar la comparación numérica contemplaremos los conceptos de potencia de una prueba estadística revisados anteriormente. En la sección 4.1 se comparan las técnicas de prueba de hipótesis a la media de una población, en la sección 4.2 se comparan las técnicas de prueba de hipótesis a la igualdad de media de dos poblaciones, en la sección 4.3 se comparan las técnicas de prueba de hipótesis a la igualdad de medidas de dispersión de dos poblaciones y en la sección 4.4 las técnicas de obtención de estimadores en regresión lineal simple.

El procedimiento a seguir será el de simular una muestra de tamaño  $n$  de una población  $X$  que se indicará en su momento. Luego se postulará el siguiente contraste:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

Vs.

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

Donde  $\theta$  es el parámetro que se desea inferir de dicha distribución y  $\theta_0$  es el valor verdadero del mismo. Aplicaremos, a las muestras anteriormente simuladas, las técnicas paramétricas y no paramétricas equivalentes para ese contraste de hipótesis y estudiaremos el efecto de los supuestos de ambas pruebas, su valor  $p$  o valor plausible.

Ilustraremos el procedimiento que se utiliza para obtener las tablas que se indican a continuación en este capítulo. Por ejemplo este es el procedimiento utilizado en el caso normal para la prueba de hipótesis a la media de una población: Se genera una muestra aleatoria de tamaño 5 proveniente de una población  $X$  que sigue una distribución  $N(0, 1)$ . Al aplicar el algoritmo correspondiente a simulación de números aleatorios que sigan una distribución normal (Capítulo 3) se obtuvieron los siguientes 5 números:

-0,4110      0,7687      -0,1627      1,0962      0,6913

Si se desea realizar algún tipo de inferencia con respecto a la media poblacional, entonces el parámetro  $\theta$  será igual a  $\mu$ . El contraste de hipótesis que estableceremos para este caso será:

$$H_0: \mu = 0$$

Vs.

$$H_1: \mu \neq 0$$

Apliquemos a estos valores que toma  $X$  la prueba  $t$  (paramétrica) y de Wilcoxon (no paramétrica) a fin de contrastar la media poblacional (que sabemos es cero). Sabemos que la prueba de Wilcoxon contrasta la *mediana* poblacional mientras que la prueba  $t$  contrasta la *media* poblacional y que ambas pruebas son equivalentes si  $X$  es simétrica, como en este caso. La distribución normal es simétrica alrededor de  $\mu$  y es continua, por ello cumplimos todos los supuestos relacionados con dichas pruebas estadísticas. Al aplicar las pruebas obtendremos dos valores  $p$  (0,08 y 0,04 respectivamente después de aplicar la prueba  $t$  y de Wilcoxon). Este procedimiento se denominará una *corrida*.

Se realizan 100 corridas a fin de estimar un intervalo de confianza para el valor plausible por medio sus valores generados con cada muestra simulada y en base a un tamaño de muestra que se indicará previamente. De la misma forma cualquier parámetro del cual se indique un intervalo de confianza será calculado de la misma manera.

De antemano se conocen los parámetros poblacionales, por ello la hipótesis nula se postulará con el valor verdadero del parámetro que se desea inferir. Para determinar que prueba es la más potente se verificará el número de veces que la hipótesis nula (que de antemano se conoce es verdadera) es aceptada después de 100 corridas. Una prueba será más potente que otra si acepta en mayor número de veces la hipótesis nula (verdadera de antemano) que su equivalente.

A fin de establecer estos resultados se utilizaron rutinas diseñadas en el lenguaje de programación Microsoft Visual Basic en combinación con la hoja electrónica de cálculo Microsoft Excel (para manejar las corridas en conjunto, la generación de muestras aleatorias y el cálculo de los intervalos de confianza respectivos), y junto con el paquete de software estadístico Systat 10.0 (a fin de determinar valores plausibles en las pruebas disponibles) y Lenguaje C (para determinar estadísticos de prueba que no se encontraban en los paquetes antes indicados).

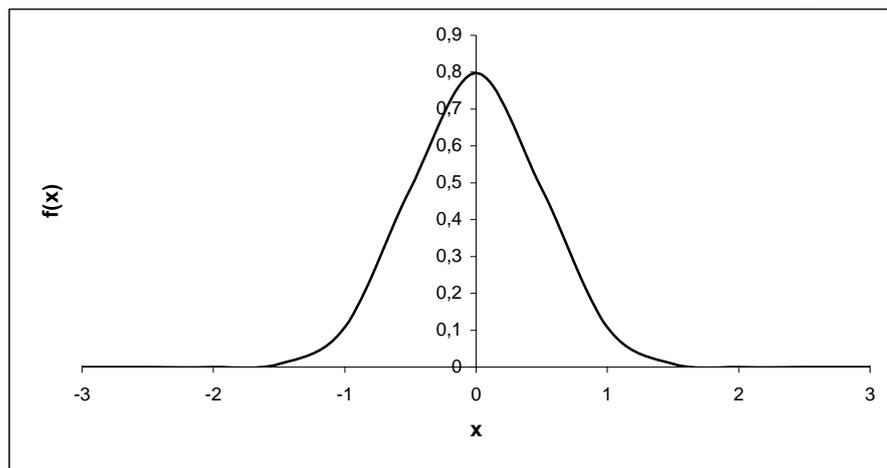
#### **4.2 Comparación de técnicas de tendencia central de la muestra**

Serán motivo de nuestro análisis tres pruebas : la prueba Z, la prueba t (pruebas paramétricas) y la prueba de Wilcoxon (prueba no paramétrica). Se harán 100 corridas con muestras de tamaño 5,15,30, 50 y 100 para cada caso.

## 4.2.1 Comparación en una muestra de una distribución Normal

Caso 1:  $X \sim N(0, \frac{1}{2})$

**Gráfico 4.1**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal(0,  $\frac{1}{2}$ )**



Elaboración: M. Rojas

El contraste de hipótesis para este caso será:

$$H_0: \mu = 0$$

VS

$$H_1: \mu \neq 0$$

Los siguientes son los resultados obtenidos para muestras provenientes de una distribución Normal con parámetros  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = \frac{1}{2}$  después de 100 corridas.

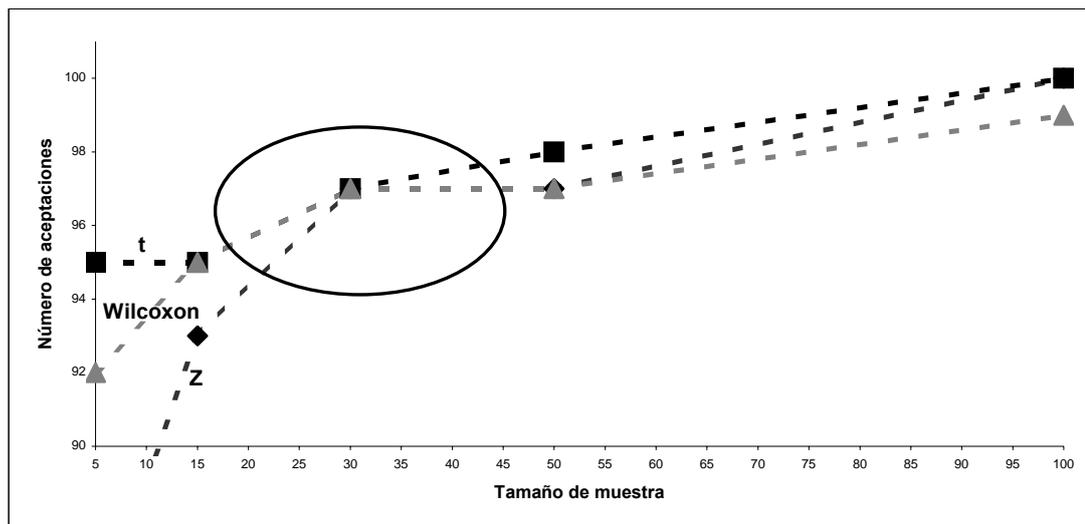
Observamos en la Tabla XX que el mayor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 100 correspondiendo a todas las pruebas; para  $\alpha=0,05$  fue de 100 correspondiendo a las pruebas Z y t; para  $\alpha=0,1$  fue de 97 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon. De la misma forma el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 93 correspondiendo a la prueba Z; para  $\alpha=0,05$  fue de 85 correspondiendo a la prueba Z; para  $\alpha=0,1$  fue de 81 correspondiendo a la prueba Z. Para tamaños de muestra grandes las pruebas son equivalentes. La prueba más potente en tamaños de muestra pequeños es la prueba t en la mayoría de los casos, debido a que aceptó la hipótesis nula un mayor número de veces. Las pruebas Z, t y de Wilcoxon se vuelven equivalentes para  $n \geq 30$ . El Gráfico 4.2 representa los resultados obtenidos.

**Tabla XX**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim N(0, \frac{1}{2})$

Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas									
$H_0: \mu = 0$ Vs. $H_1: \mu \neq 0$									
Tamaño de muestra	$\alpha = .01$			$\alpha = .05$			$\alpha = .10$		
	Pruebas			Pruebas			Pruebas		
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon
5	93	100	100	85	95	92	81	89	85
15	98	99	100	93	95	95	84	90	89
30	100	100	100	97	97	97	93	94	94
50	100	100	100	97	98	97	91	92	92
100	100	100	100	100	100	99	94	94	97

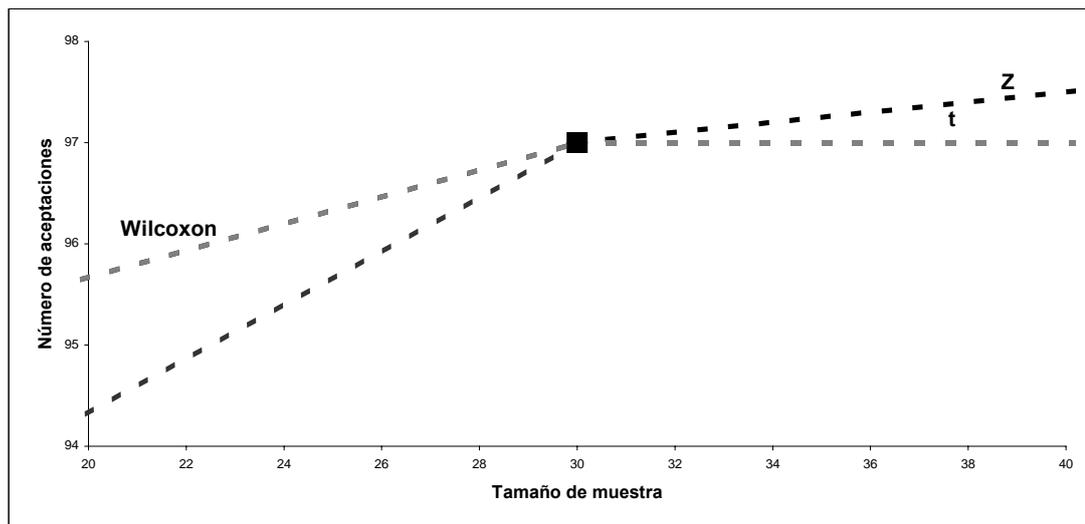
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.2**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim N(0, \frac{1}{2})$   
**Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu = 0$   
 Vs.  
 $H_1: \mu \neq 0$   
 $\alpha = .05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.2 (Detalle)**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim N(0, \frac{1}{2})$



Elaboración: M. Rojas.

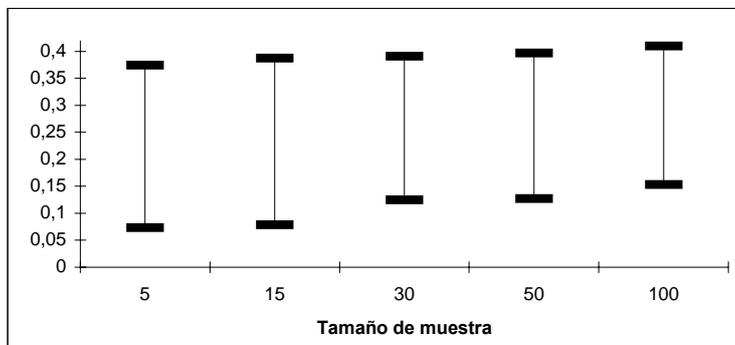
Puede apreciarse en la Tabla XXI que el valor plausible esperado de la prueba t es mayor que el de su equivalente no paramétrico (prueba de Wilcoxon) en tamaños de muestra pequeños y que llega a ser superado únicamente por la prueba Z en el caso en que el tamaño de muestra sea grande. Por otro lado la media aritmética tiene valores más cercanos a la media poblacional (cero, como establecimos anteriormente) que la mediana muestral. A medida que el tamaño de muestra aumenta tenemos que la media aritmética se acerca más al valor de la media poblacional que la mediana muestral. Los Gráficos 4.3 a 4.5 representan los resultados obtenidos.

**Tabla XXI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Intervalos de confianza para el valor plausible y para la media y mediana poblacionales:**  
 $X \sim N(0, \frac{1}{2})$

Tamaño de muestra	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ $H_0: \mu = 0$ Vs. $H_1: \mu \neq 0$			$\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{x} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0.2241 ± 0.1506	0.2447 ± 0.1411	0.2396 ± 0.1399	0.0698 ± 0.3211	0.0662 ± 0.3336
15	0.2330 ± 0.1545	0.2387 ± 0.1518	0.2465 ± 0.1584	0.0480 ± 0.1964	0.0515 ± 0.2319
30	0.2580 ± 0.1331	0.2626 ± 0.1308	0.2589 ± 0.1310	0.0144 ± 0.1187	0.0155 ± 0.1606
50	0.2620 ± 0.1351	0.2616 ± 0.1333	0.2585 ± 0.1336	0.0087 ± 0.0901	0.0038 ± 0.1247
100	0.2815 ± 0.1285	0.2802 ± 0.1271	0.2809 ± 0.1333	-0.0026 ± 0.0565	-0.0119 ± 0.0705

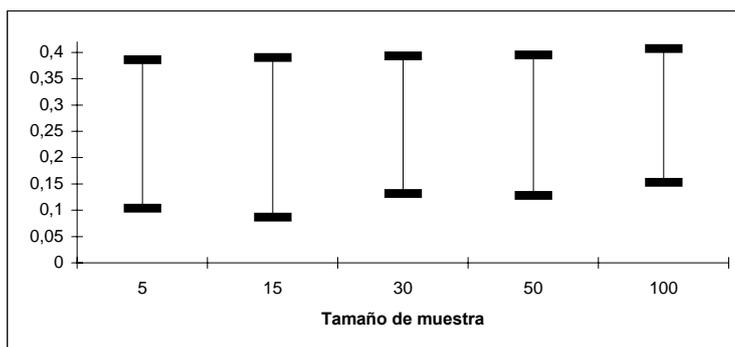
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.3**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor  $p$  : Prueba Z**  
**Caso Normal( $0, \frac{1}{2}$ ): 100 corridas**



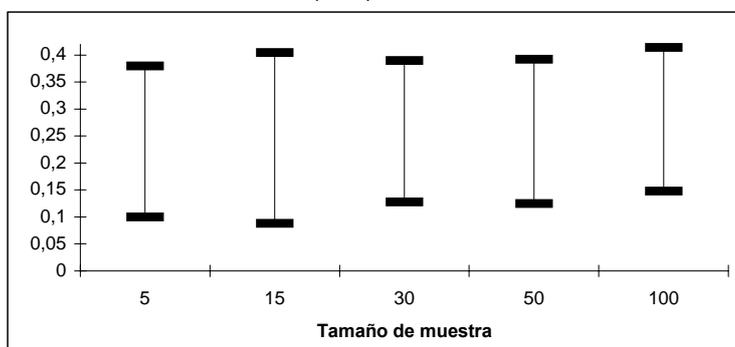
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.4**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor  $p$  : Prueba t**  
**Caso Normal( $0, \frac{1}{2}$ ): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.5**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor  $p$  : Prueba de Wilcoxon**  
**Caso Normal( $0, \frac{1}{2}$ ): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla XXII que las longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible de la pruebas paramétricas no difieren considerablemente de las longitudes de su equivalente no paramétrico (la prueba de Wilcoxon), aunque a medida que el tamaño de muestra aumenta las longitudes de los intervalos en la prueba Z se reducen y son menores que los de la prueba de Wilcoxon.

Los intervalos de confianza de las media aritmética son menores en longitud que los de la mediana para todos los tamaños de muestra considerados.

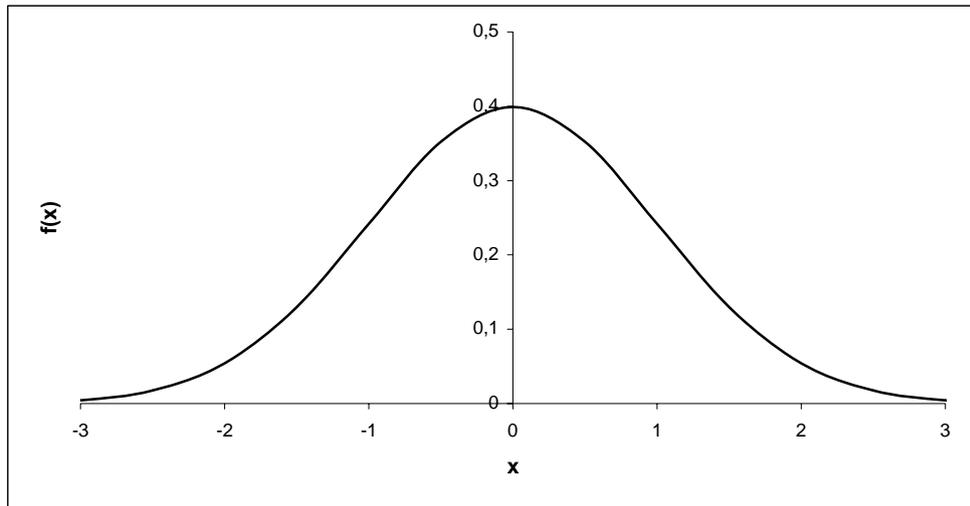
**Tabla XXII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible y para la media y mediana poblacionales:**  
 $X \sim N(0, \frac{1}{2})$

Tamaño de muestra	$L_p$ $H_0: \mu = 0$ Vs. $H_1: \mu \neq 0$			$L_{\bar{x}}$	$L_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,3012	0,2822	0,2798	0,6422	0,6672
15	0,3090	0,3036	0,3168	0,3928	0,4638
30	0,2662	0,2616	0,2620	0,2374	0,3212
50	0,2702	0,2666	0,2672	0,1802	0,2494
100	0,2570	0,2542	0,2666	0,1130	0,1410

Elaboración: M. Rojas.

**Caso 2:  $X \sim N(0, 1)$** 

**Gráfico 4.6**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal(0, 1)**



Elaboración: M. Rojas.

El contraste de hipótesis para este caso será:

$$H_0: \mu = 0$$

VS

$$H_1: \mu \neq 0$$

Los siguientes son los resultados obtenidos para muestras provenientes de una distribución Normal con parámetros  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$  después de 100 corridas.

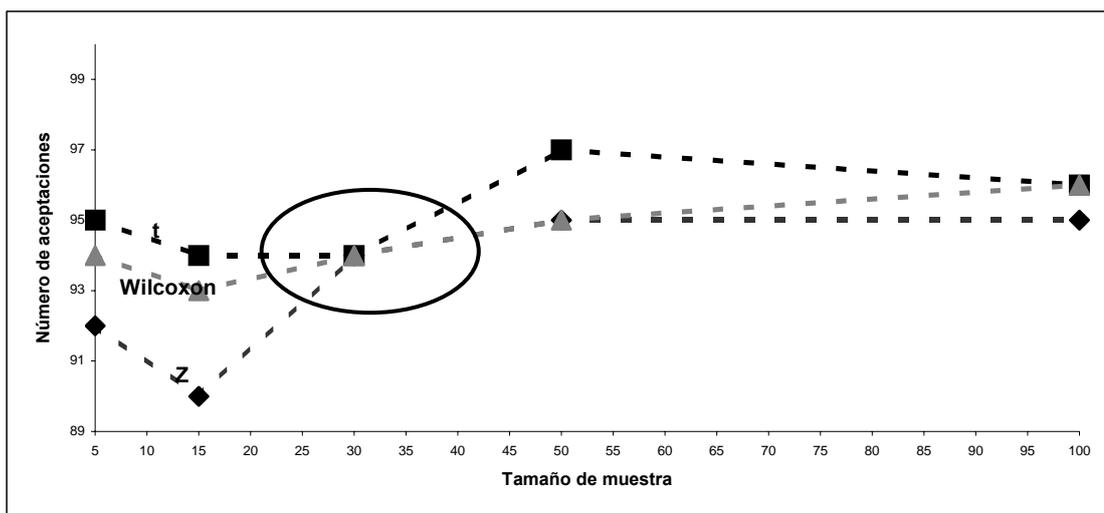
En la Tabla XXIII tenemos que el mayor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 100 correspondiendo a todas las pruebas; para  $\alpha=0,05$  fue de 97 correspondiendo a la prueba t; para  $\alpha=0,1$  fue de 93 correspondiendo a la prueba t. De la misma forma el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 94 correspondiendo a la prueba Z; para  $\alpha=0,05$  fue de 90 correspondiendo a la prueba Z; para  $\alpha=0,1$  fue de 82 correspondiendo a la prueba Z. Para tamaños de muestra grandes podemos decir que las pruebas son equivalentes. La prueba de Wilcoxon(no paramétrica) y la prueba t son las más potentes para tamaños de muestra pequeños, sin que su potencia difiera considerablemente entre una u otra. El Gráfico 4.7 representa los resultados obtenidos.

**Tabla XXIII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim N(0, 1)$

Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas $H_0: \mu = 0$ VS $H_1: \mu \neq 0$									
Tamaño de muestra	$\alpha = .01$			$\alpha = .05$			$\alpha = .10$		
	Pruebas			Pruebas			Pruebas		
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon
5	94	97	100	92	95	94	82	93	89
15	97	98	98	90	94	93	86	89	88
30	100	100	100	94	94	94	88	91	92
50	98	98	99	95	97	95	90	90	90
100	99	99	99	95	96	96	84	84	86

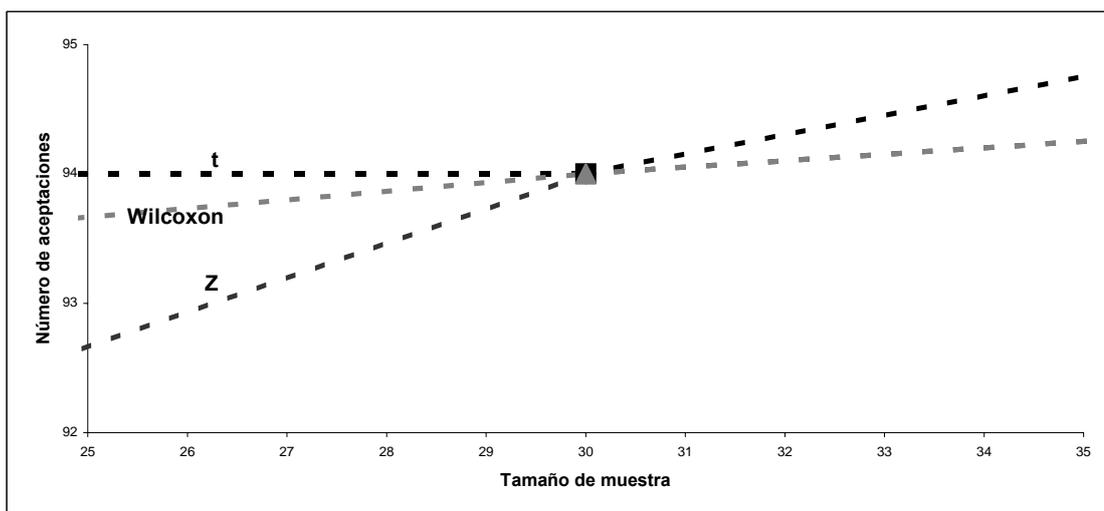
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.7**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim N(0, 1)$   
**Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu = 0$   
**Vs.**  
 $H_1: \mu \neq 0$   
 $\alpha = .05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.7 (Detalle)**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim N(0, 1)$



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla XXIV que el valor plausible de la prueba  $t$  es mayor que el de su equivalente no paramétrico (prueba de Wilcoxon) en la mayoría de los casos, excepto el caso en que la muestra es pequeña. Para muestras de tamaño grande los valores plausibles de las pruebas paramétricas tienen magnitudes muy cercanas entre sí y superan a la magnitud del valor plausible de la prueba de Wilcoxon.

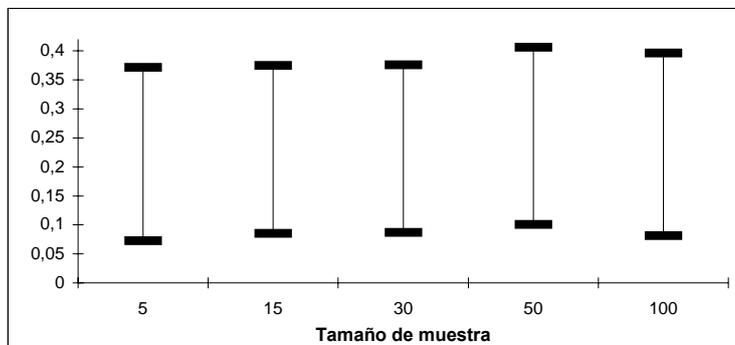
El valor de la mediana muestral es más cercano al de la media poblacional únicamente cuando el tamaño de muestra es pequeño, y es superada por la media aritmética a medida que el tamaño de muestra aumenta. Los Gráficos 4.8 a 4.10 representan los resultados obtenidos.

**Tabla XXIV**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Intervalos de confianza para el valor plausible y para la media y mediana poblacionales:**  
 $X \sim N(0, 1)$

Tamaño de muestra	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ $H_0: \mu = 0$ Vs. $H_1: \mu \neq 0$			$\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{x} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0.2220 ± 0.1495	0.2410 ± .1399	0.2380 ± 0.1409	0.0238 ± 0.2650	0.0104 ± 0.3255
15	0.2301 ± 0.1450	0.2351 ± .1424	0.2378 ± 0.1417	0.0354 ± 0.2606	0.0451 ± 0.3035
30	0.2312 ± 0.1445	0.2353 ± 0.1432	0.2382 ± 0.1487	-0.0353 ± 0.2470	-0.0748 ± 0.2944
50	0.2534 ± 0.1528	0.2569 ± 0.1512	0.2540 ± 0.1528	-0.0080 ± 0.2983	0.0232 ± 0.3417
100	0.2389 ± 0.1573	0.2404 ± 0.1574	0.2362 ± 0.1530	-0.0454 ± 0.2713	-0.0410 ± 0.3237

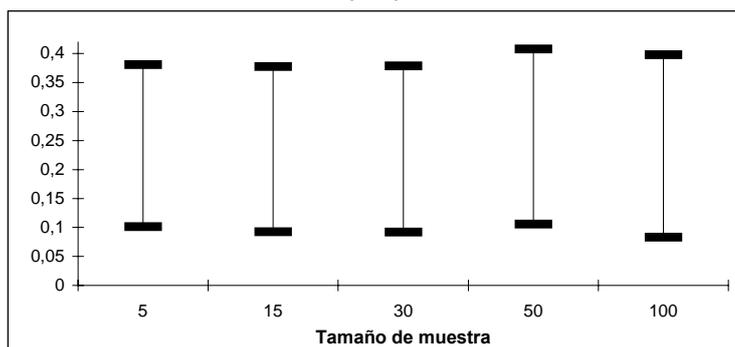
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.8**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z**  
**Caso Normal(0, 1): 100 corridas**



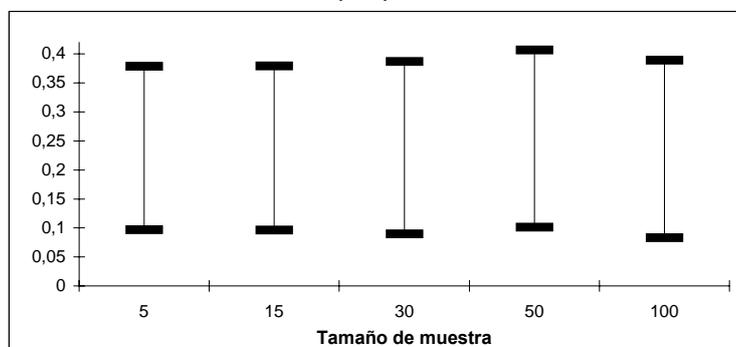
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.9**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p : Prueba t**  
**Caso Normal(0, 1): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.10**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon**  
**Caso Normal(0, 1): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla XXV que las longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba de Wilcoxon son menores a los de sus equivalentes paramétricos (Prueba Z y t) a medida que el tamaño de la muestra aumenta, aunque para tamaños de muestra pequeños las longitudes de los intervalos de confianza de la prueba t son menores. La longitud del intervalo de confianza del valor plausible para la prueba Z se acerca al valor de la longitud del intervalo correspondiente a la prueba t a medida que el tamaño de muestra aumenta.

Los intervalos de confianza de la media aritmética son menores en longitud que los de la mediana para todos los tamaños de muestras considerados en las simulaciones.

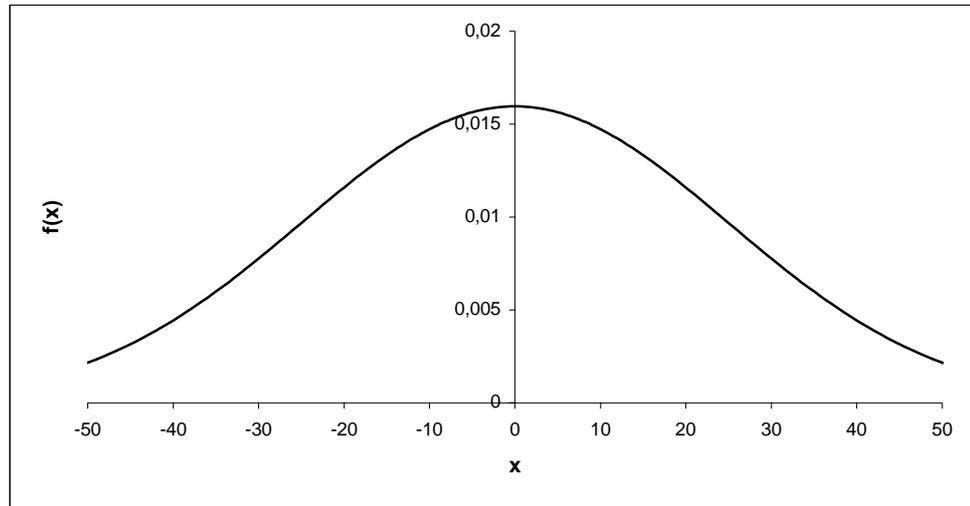
**Tabla XXV**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible y para la media y mediana poblacionales:**  
 $X \sim N(0, 1)$

Tamaño de muestra	$L_p$ $H_0: \mu = 0$ Vs. $H_1: \mu \neq 0$			$L_{\bar{x}}$	$L_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,2990	0,2798	0,2818	0,5300	0,6510
15	0,2900	0,2848	0,2834	0,5212	0,6070
30	0,2890	0,2864	0,2974	0,4940	0,5888
50	0,3056	0,3024	0,3056	0,5966	0,6834
100	0,3146	0,3148	0,3060	0,5426	0,6474

Elaboración: M. Rojas.

**Caso 3:  $X \sim N(0, 25)$** 

**Gráfico 4.11**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal(0 , 25)**



Elaboración: M. Rojas.

El contraste de hipótesis para este caso será:

$$H_0: \mu = 0$$

VS

$$H_1: \mu \neq 0$$

Los siguientes son los resultados obtenidos para muestras provenientes de una distribución Normal con parámetros  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 25$ .

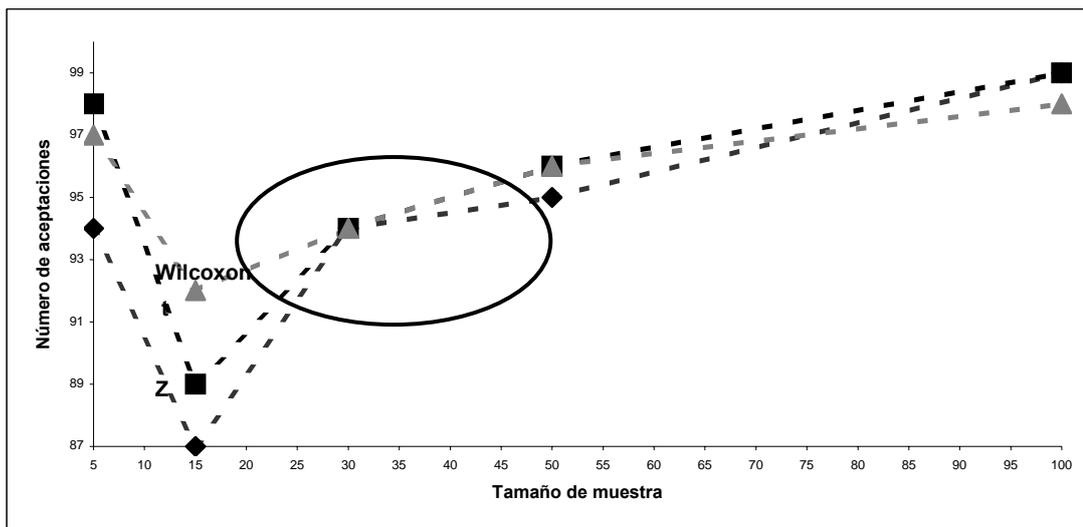
En la Tabla XXVI tenemos que el mayor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 100 correspondiendo a todas las pruebas; para  $\alpha=0,05$  fue de 98 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,1$  fue de 98 correspondiendo a las pruebas Z y t. De la misma forma el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 97 correspondiendo a la prueba Z; para  $\alpha=0,05$  fue de 87 correspondiendo a la prueba Z; para  $\alpha=0,1$  fue de 82 correspondiendo a la prueba Z. Para tamaños de muestra grandes las pruebas son equivalentes. Para tamaños de muestra pequeños la prueba t (paramétrica) y la prueba de Wilcoxon(no paramétrica) no difieren considerablemente en su potencia. El Gráfico 4.12 representa los resultados obtenidos.

**Tabla XXVI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim N(0, 25)$

Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas $H_0: \mu = 0$ VS $H_1: \mu \neq 0$									
Tamaño de muestra	$\alpha = .01$			$\alpha = .05$			$\alpha = .10$		
	Pruebas			Pruebas			Pruebas		
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon
5	98	100	100	94	98	97	86	94	91
15	97	98	99	87	89	92	82	84	83
30	98	99	99	94	94	94	85	87	88
50	100	100	100	95	96	96	93	94	90
100	100	100	100	99	99	98	98	98	95

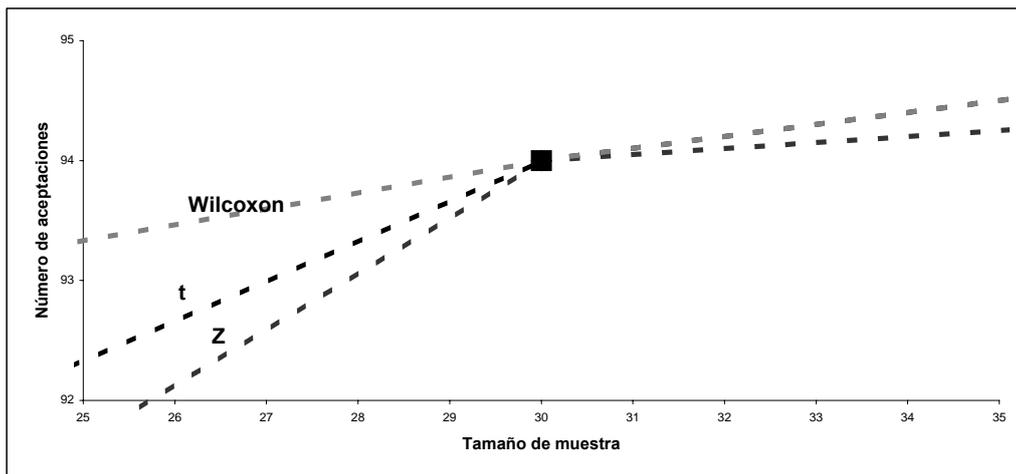
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfica 4.12**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim N(0, 25)$   
**Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu = 0$   
 VS  
 $H_1: \mu \neq 0$   
 $\alpha = .05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfica 4.12 (Detalle)**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim N(0, 25)$



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla XXVII que el valor plausible de la prueba t es mayor que el de su equivalente no paramétrico en todos los casos considerados en la simulación. El valor plausible de las pruebas Z y t no difieren considerablemente a medida que el tamaño de muestra aumenta.

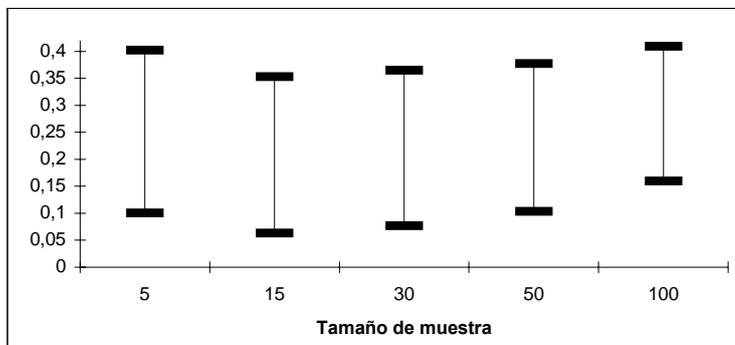
Para este caso el valor de la mediana muestral es más cercano a la media poblacional que el valor de la media aritmética. De hecho solo en tamaños de muestra pequeños la magnitud de la media aritmética tiene valores más cercanos a la media poblacional que los de la mediana muestral. Los Gráficos 4.13 a 4.15 representan los resultados obtenidos.

**Tabla XXVII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Intervalos de confianza para el valor plausible y para la media y mediana poblacionales:**  
 **$X \sim N(0, 25)$**

Tamaño de muestra	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ H <sub>0</sub> : $\mu = 0$ Vs. H <sub>1</sub> : $\mu \neq 0$			$\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{x} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0.2512 ± 0.1508	0.2698 ± 0.1401	0.2566 ± 0.1366	-0.0853 ± 1.8877	-0.1638 ± 2.4025
15	0.2080 ± 0.1450	0.2159 ± 0.1419	0.2158 ± 0.1461	-0.1454 ± 1.4582	-0.2194 ± 1.9559
30	0.2209 ± 0.1438	0.2249 ± 0.1427	0.2172 ± 0.1369	-0.1314 ± 0.9592	-0.0458 ± 1.1883
50	0.2406 ± 0.1369	0.2417 ± 0.1364	0.2411 ± 0.1444	-0.1088 ± 0.6573	-0.0450 ± 0.8337
100	0.2847 ± 0.1248	0.2839 ± 0.1240	0.2818 ± 0.1344	-0.0351 ± 0.3765	0.0193 ± 0.5087

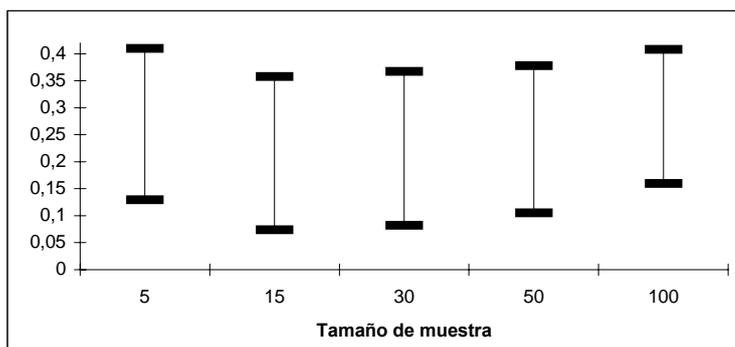
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.13**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z**  
**Caso Normal(0 , 25): 100 corridas**



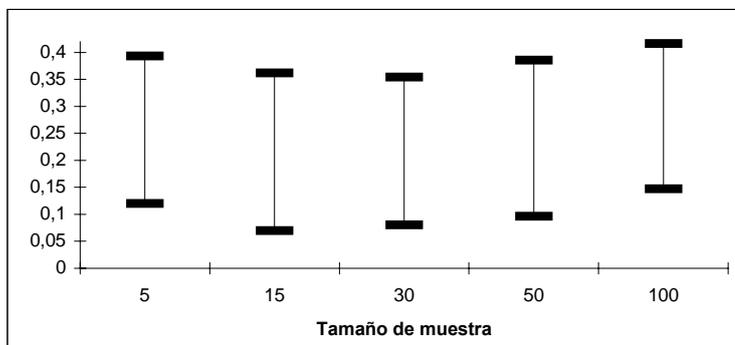
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.14**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t**  
**Caso Normal(0 , 25): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.15**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Wilcoxon**  
**Caso Normal(0 , 25): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla XXVIII que la longitud de los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba de Wilcoxon es menor que la longitud de los intervalos de sus equivalentes paramétricos a medida que el tamaño de la muestra aumenta en los casos considerados, aunque para tamaños de muestra grandes la longitud de los intervalos para las pruebas paramétricas llega a ser menor en longitud que los correspondientes a la prueba de Wilcoxon.

Los intervalos de confianza de las medias aritmética son menores en longitud que los de la mediana para todos los casos considerados en las simulaciones.

**Tabla XXVIII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible y para la media y mediana poblacionales:**  
 **$X \sim N(0, 25)$**

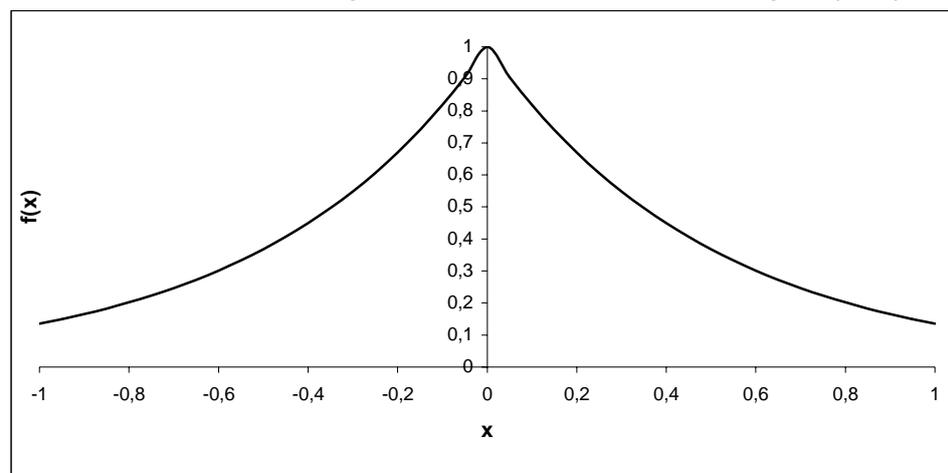
Tamaño de muestra	$L_p$ $H_0: \mu = 0$ Vs. $H_1: \mu \neq 0$			$L_{\bar{x}}$	$L_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,3016	0,2802	0,2732	3,7754	4,8050
15	0,2900	0,2838	0,2922	2,9164	3,9118
30	0,2876	0,2854	0,2738	1,9184	2,3766
50	0,2738	0,2728	0,2888	1,3146	1,6674
100	0,2496	0,2480	0,2688	0,7530	1,0174

Elaboración: M. Rojas.

## 4.2.2 Comparación en una muestra de una distribución simétrica

Caso 1:  $X \sim \text{Laplace} (0, \frac{1}{2})$

**Gráfico 4.16**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución de Laplace(0,  $\frac{1}{2}$ )**



Elaboración: M. Rojas

El contraste de hipótesis será:

$$H_0: \alpha = 0$$

VS

$$H_1: \alpha \neq 0$$

Los siguientes son resultados obtenidos para muestras aleatorias provenientes de una distribución de Laplace con parámetros  $\alpha = 0$  y  $\beta = \frac{1}{2}$ .

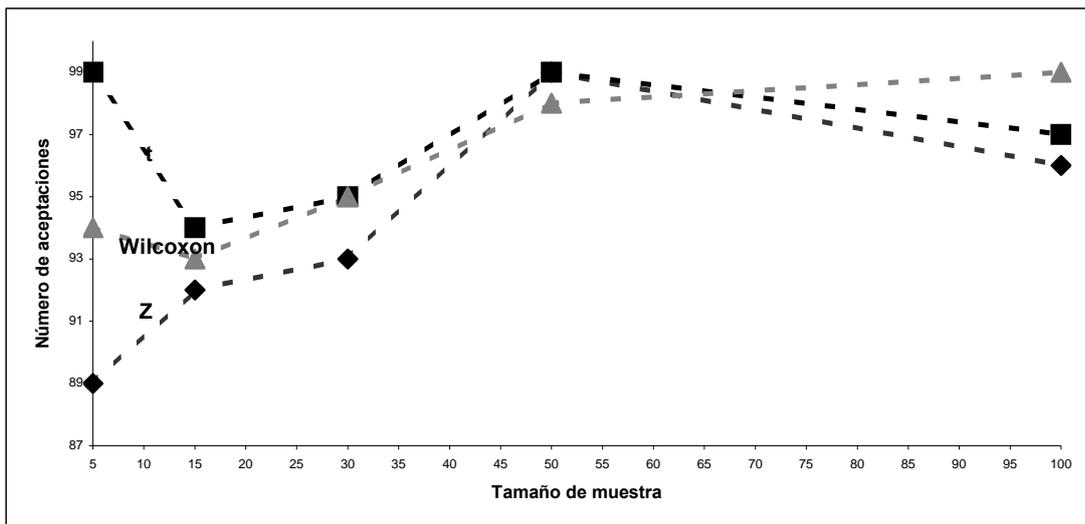
En la Tabla XXIX tenemos que el mayor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 100 correspondiendo a todas las pruebas; para  $\alpha=0,05$  fue de 99 correspondiendo a todas las pruebas; para  $\alpha=0,1$  fue de 90 para todas las pruebas. De la misma forma el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 97 correspondiendo a la prueba Z; para  $\alpha=0,05$  fue de 89 correspondiendo a la prueba Z; para  $\alpha=0,1$  fue de 84 correspondiendo a la prueba Z. Para tamaños de muestra grandes las pruebas son equivalentes y para tamaños de muestra pequeños la prueba t resultó ser la más potente para todos los casos contemplados en la simulación. El Gráfico 4.17 representa los resultados obtenidos.

**Tabla XXIX**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Laplace}(0, \frac{1}{2})$

Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas $H_0: \alpha = 0$ VS $H_1: \alpha \neq 0$									
Tamaño de muestra	$\alpha = .01$			$\alpha = .05$			$\alpha = .10$		
	Pruebas			Pruebas			Pruebas		
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon
5	98	100	100	89	99	94	84	91	86
15	97	98	100	92	94	93	89	90	90
30	99	99	99	93	95	95	88	90	89
50	100	100	99	99	99	98	93	95	93
100	100	100	100	96	97	99	90	90	92

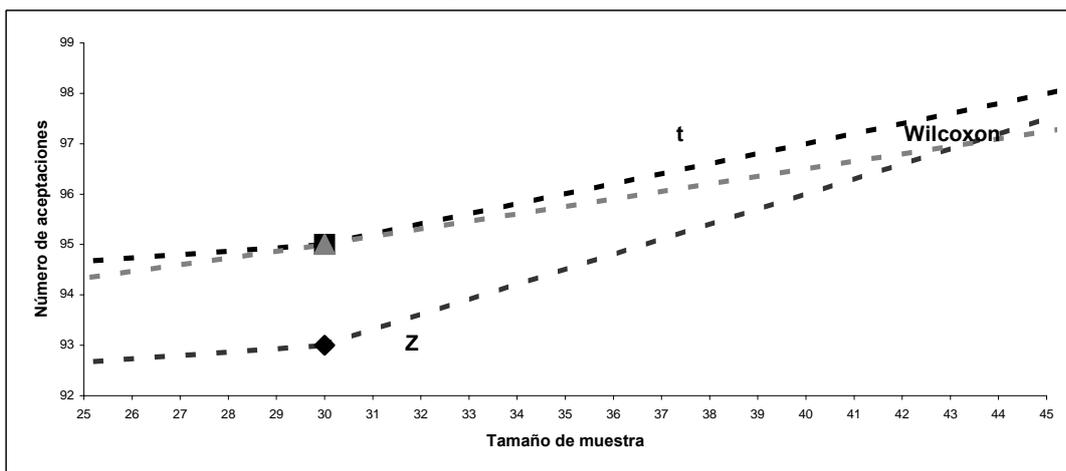
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.17**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Laplace}(0, \frac{1}{2})$   
**Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \alpha = 0$   
 VS  
 $H_1: \alpha \neq 0$   
 $\alpha = .05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.17 (Detalle)**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Laplace}(0, \frac{1}{2})$



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla XXX que el valor plausible de la prueba  $t$  es mayor que el de su equivalente no paramétrico en los casos en que el tamaño de muestra es pequeño. El valor plausible de la prueba de Wilcoxon aumenta a medida que el tamaño de muestra aumenta.

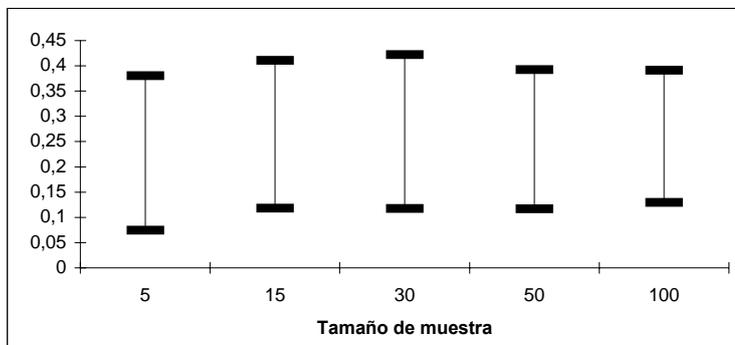
Para este caso los valores de mediana muestral y de la media aritmética no difieren considerablemente. Sus magnitudes son más cercanas a la media poblacional a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Los Gráficos 4.18 a 4.20 representan los resultados obtenidos.

**Tabla XXX**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Intervalos de confianza para el valor plausible y para la media y mediana poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Laplace}(0, \frac{1}{2})$**

Tamaño de muestra	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ $H_0: \alpha = 0 \text{ VS } H_1: \alpha \neq 0$			$\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{x} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,2276 ± 0,1528	0,2484 ± 0,1418	0,2366 ± 0,1375	-0,0070 ± 0,2847	0,0094 ± 0,2658
15	0,2648 ± 0,1463	0,2706 ± 0,1438	0,2638 ± 0,1543	0,0294 ± 0,3698	0,0143 ± 0,3336
30	0,2699 ± 0,1521	0,2733 ± 0,1509	0,2710 ± 0,1537	0,0990 ± 0,3334	0,0536 ± 0,2617
50	0,2546 ± 0,1377	0,2575 ± 0,1368	0,2614 ± 0,1489	0,0159 ± 0,3184	-0,0223 ± 0,2593
100	0,2606 ± 0,1308	0,2611 ± 0,1310	0,2644 ± 0,1383	-0,0143 ± 0,3494	0,0187 ± 0,3076

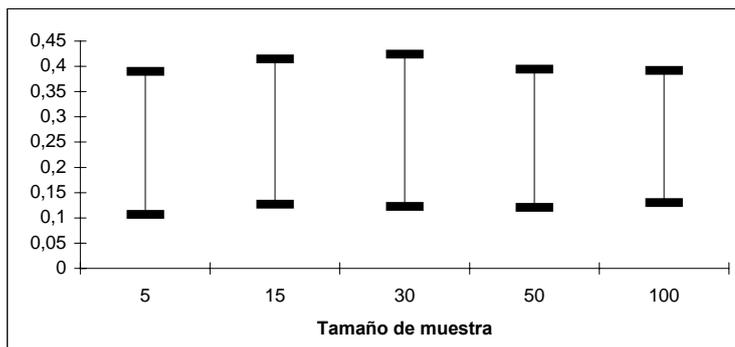
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.18**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z**  
**Caso Laplace(0, 1/2): 100 corridas**



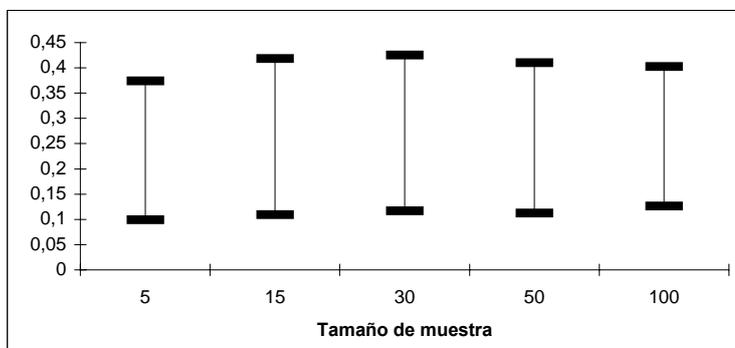
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.19**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t**  
**Caso Laplace(0, 1/2): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.20**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Wilcoxon**  
**Caso Laplace(0, 1/2): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla XXXI que las longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba de Wilcoxon son menores que las longitudes de los intervalos de sus equivalentes paramétricos únicamente en el caso en que el tamaño de la muestra es pequeño, para tamaños de muestra grandes las longitudes de los intervalos para las pruebas paramétricas llega a ser menores en longitud que los correspondientes a la prueba de Wilcoxon.

Los intervalos de confianza de las mediana muestral son menores en longitud que los de la media aritmética para todos los casos considerados en las simulaciones.

**Tabla XXXI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible y para la media y mediana poblacionales:**  
**Caso Laplace(0 , 1/2)**

Tamaño de muestra	$L_p$ $H_0: \alpha = 0$ VS $H_1: \alpha \neq 0$			$L_{\bar{x}}$	$L_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,3056	0,2836	0,2750	0,5694	0,5316
15	0,2926	0,2876	0,3086	0,7396	0,6672
30	0,3042	0,3018	0,3074	0,6668	0,5234
50	0,2754	0,2736	0,2978	0,6368	0,5186
100	0,2616	0,2620	0,2766	0,6988	0,6152

Elaboración: M. Rojas.

$X \sim \text{Laplace}(0, 1)$

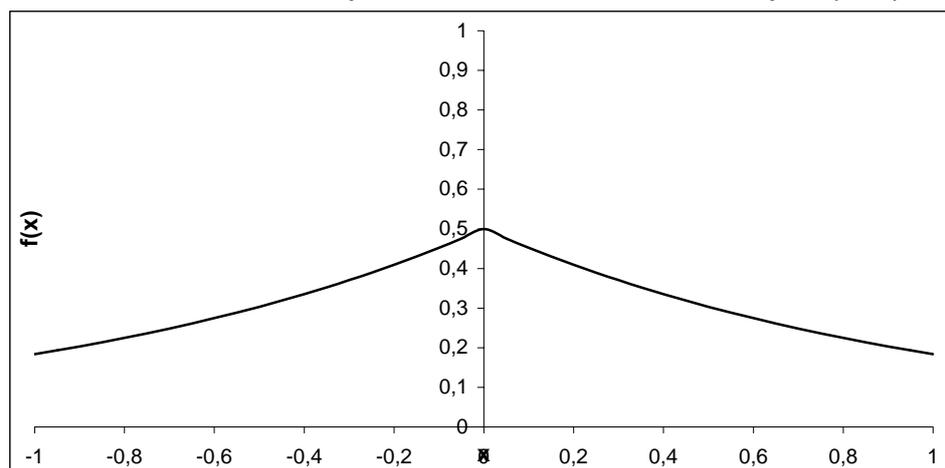
El contraste de hipótesis para este caso será:

$$H_0: \alpha = 0$$

VS

$$H_1: \alpha \neq 0$$

**Gráfico 4.21**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución de Laplace(0, 1)**



Elaboración: M. Rojas.

Los siguientes son los resultados obtenidos para muestras provenientes de una distribución de Laplace con parámetros  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ .

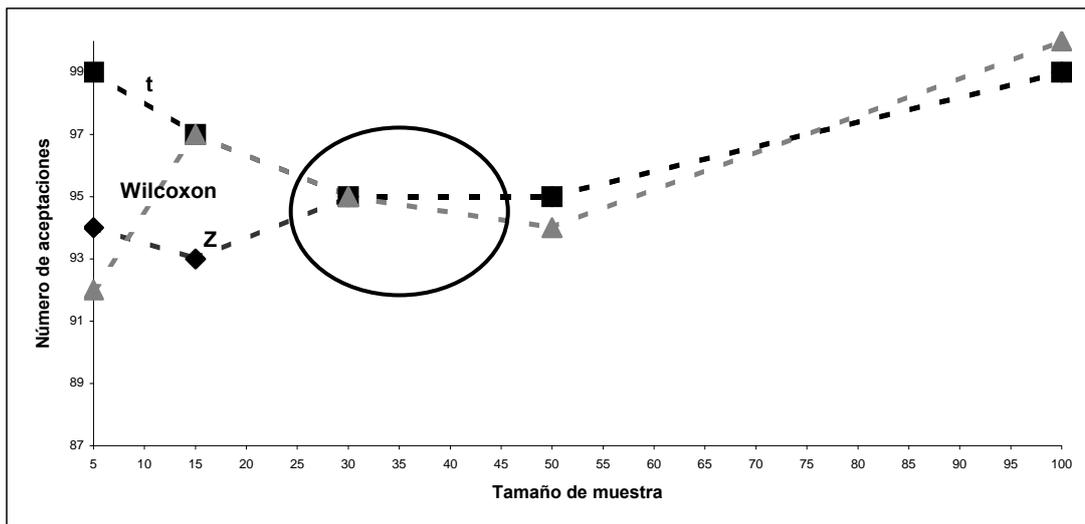
En la Tabla XXXII tenemos que el mayor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 100 correspondiendo a todas las pruebas; para  $\alpha=0,05$  fue de 100 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,1$  fue de 97 para la prueba t. De la misma forma el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 97 correspondiendo a la prueba Z; para  $\alpha=0,05$  fue de 92 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,1$  fue de 83 correspondiendo a la prueba Z. Para tamaños de muestra grandes las pruebas son equivalentes, mientras que para tamaños de muestra pequeños la prueba t resultó ser más potente. El Gráficos 4.22 representa los resultados obtenidos.

**Tabla XXXII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Caso Laplace(0 , 1)**

Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas $H_0: \alpha = 0$ VS $H_1: \alpha \neq 0$									
Tamaño de muestra	$\alpha = .01$			$\alpha = .05$			$\alpha = .10$		
	Pruebas			Pruebas			Pruebas		
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon
5	99	100	100	94	99	92	83	95	88
15	97	100	100	93	97	97	85	90	91
30	97	98	100	95	95	95	93	93	93
50	99	99	100	95	95	94	91	91	92
100	100	100	100	99	99	100	97	97	93

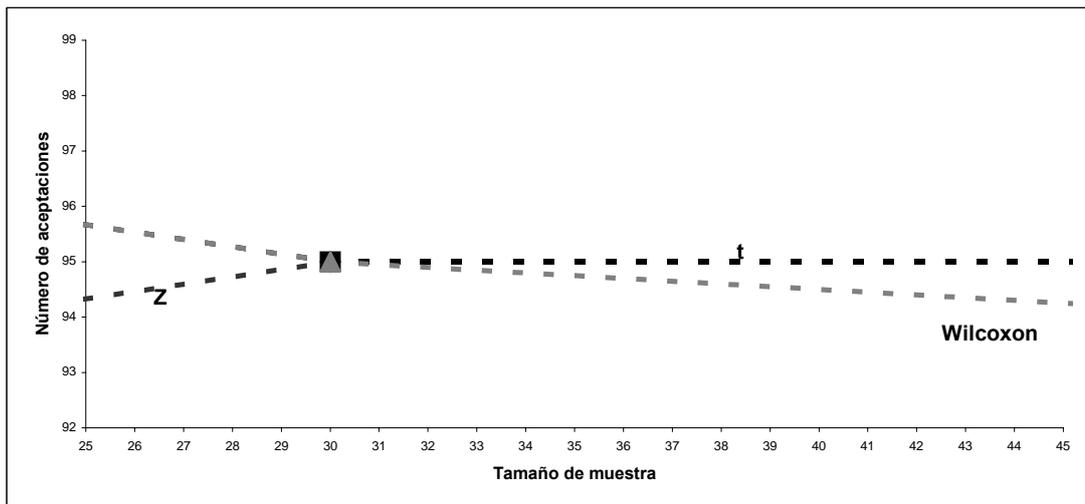
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.22**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 Caso Laplace(0 , 1)  
**Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \alpha = 0$   
 VS  
 $H_1: \alpha \neq 0$   
 $\alpha = .05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.22 (Detalle)**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 Caso Laplace(0 , 1)



Elaboración: M. Rojas.

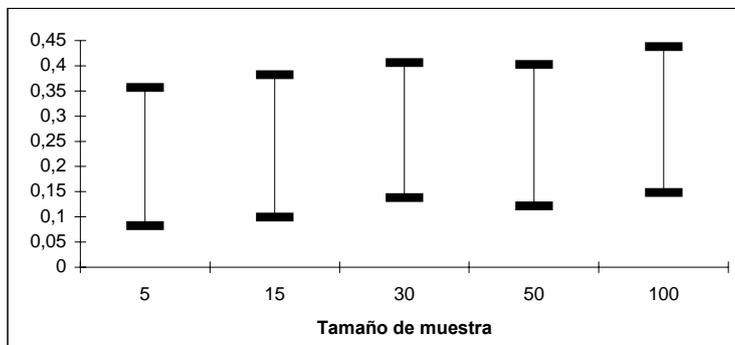
Puede apreciarse en la Tabla XXXIII que el valor plausible de la prueba  $t$  es mayor que el de su equivalente no paramétrico en los casos en que el tamaño de muestra es pequeño. El valor plausible de la prueba de Wilcoxon aumenta a medida que el tamaño de muestra aumenta. Para este caso los valores de mediana muestral y de la media aritmética no difieren considerablemente. Sus magnitudes son más cercanas a la media poblacional y a medida que aumenta el tamaño de la muestra la mediana poblacional se acerca más que la media aritmética a la media poblacional. Los Gráficos 4.23 a 4.25 representan los resultados obtenidos.

**Tabla XXXIII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Intervalos de confianza para el valor  $p$  estimado y para la media y mediana muestrales:**  
 **$X \sim \text{Laplace}(0, 1)$**

Tamaño de muestra	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ $H_0: \alpha = 0 \text{ VS } H_1: \alpha \neq 0$			$\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{x} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,2197 ± 0,1371	0,2423 ± 0,1264	0,2264 ± 0,1298	0,0397 ± 0,4949	-0,0228 ± 0,3974
15	0,2409 ± 0,1415	0,2463 ± 0,1390	0,2550 ± 0,1476	-0,0100 ± 0,4764	-0,0232 ± 0,4824
30	0,2722 ± 0,1342	0,2765 ± 0,1320	0,2780 ± 0,1283	-0,0159 ± 0,5236	-0,0385 ± 0,4248
50	0,2622 ± 0,1404	0,2654 ± 0,1391	0,2673 ± 0,1367	0,0166 ± 0,5701	0,0327 ± 0,4618
100	0,2934 ± 0,1448	0,2942 ± 0,1450	0,2873 ± 0,1469	-0,0356 ± 0,4866	-0,0195 ± 0,4183

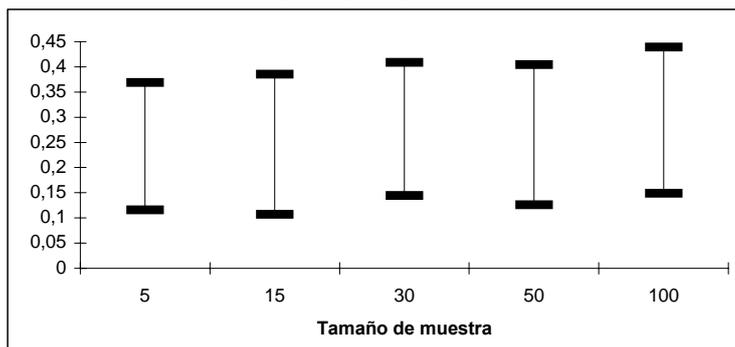
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.23**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z**  
**Caso Laplace(0, 1): 100 corridas**



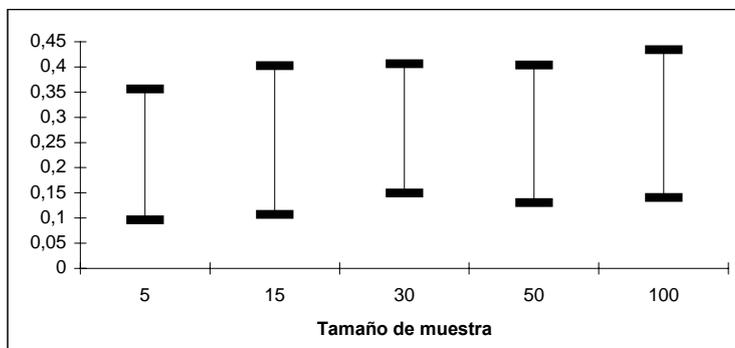
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.24**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t**  
**Caso Laplace(0, 1): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.25**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Wilcoxon**  
**Caso Laplace(0, 1): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla XXXIV que las longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba de Wilcoxon son menores que las correspondientes a los intervalos de sus equivalentes paramétricos (Prueba Z y t) excepto para tamaños de muestra grandes donde la longitud de los intervalos para las pruebas paramétricas llega a ser menor que los correspondientes a la prueba de Wilcoxon. Sin embargo para tamaños de muestra pequeños la prueba t (paramétrica) produce intervalos de confianza de menor longitud.

En el caso de la media y mediana muestrales los intervalos de confianza de las mediana muestral son menores en longitud que los de la media aritmética para todos los tamaños de muestra indicados.

**Tabla XXXIV**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible y para la media y mediana poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Laplace}(0, 1)$**

Tamaño de muestra	$L_p$ $H_0: \alpha = 0$ VS $H_1: \alpha \neq 0$			$L_{\bar{X}}$	$L_{\tilde{X}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,2742	0,2528	0,2596	0,9898	0,7948
15	0,2830	0,2780	0,2952	0,9528	0,9648
30	0,2684	0,2640	0,2566	1,0472	0,8496
50	0,2808	0,2782	0,2734	1,1402	0,9236
100	0,2896	0,2900	0,2938	0,9732	0,8366

Elaboración: M. Rojas.

$X \sim \text{Laplace}(0, 5)$

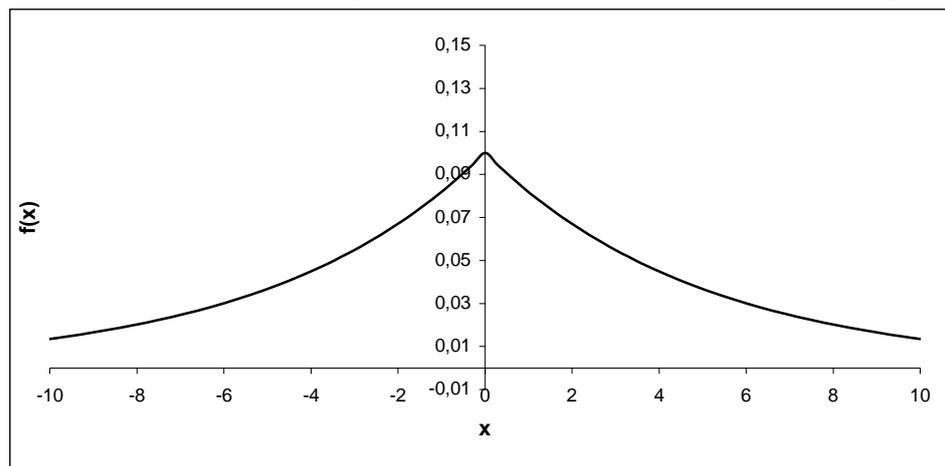
El contraste de hipótesis será:

$$H_0: \alpha = 0$$

VS

$$H_1: \alpha \neq 0$$

**Gráfico 4.26**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución de Laplace(0, 5)**



Elaboración: M. Rojas.

Los siguientes son los resultados obtenidos para muestras provenientes de una distribución de Laplace con parámetros  $\alpha = 0$  y  $\beta = 5$ .

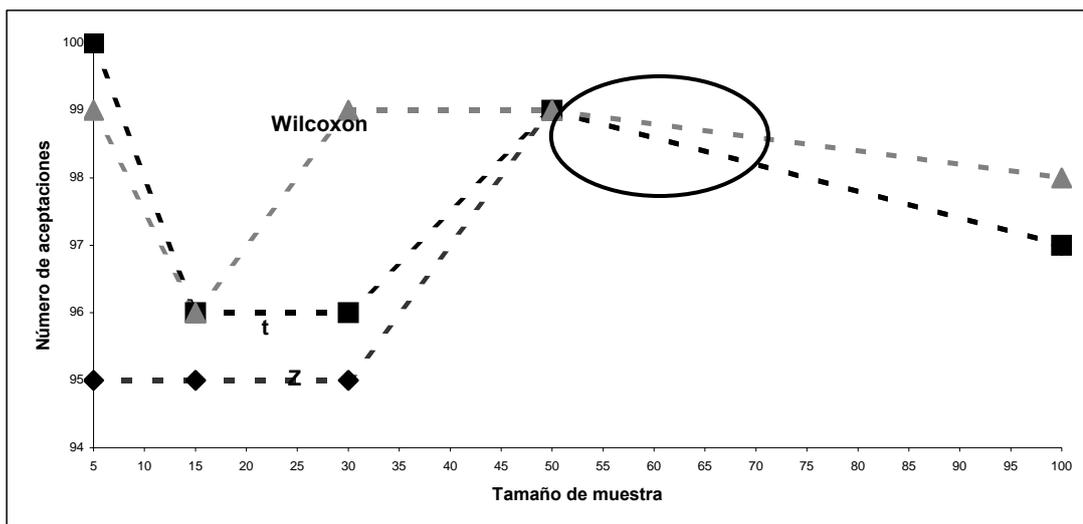
En la Tabla XXXV tenemos que el mayor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 100 correspondiendo a todas las pruebas; para  $\alpha=0,05$  fue de 100 correspondiendo a la prueba t; para  $\alpha=0,1$  fue de 98 para la prueba de Wilcoxon. De la misma forma el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 99 correspondiendo a todas las pruebas; para  $\alpha=0,05$  fue de 95 correspondiendo a la prueba Z; para  $\alpha=0,1$  fue de 89 correspondiendo a la prueba Z. Para tamaños de muestra grandes las pruebas son equivalentes, mientras que para tamaños de muestra pequeños la prueba t se mantuvo como la prueba más potente. El Gráfico 4.27 representa los resultados obtenidos.

**Tabla XXXV**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 **$X \sim \text{Laplace}(0, 5)$**

Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas									
$H_0: \alpha = 0$ VS $H_1: \alpha \neq 0$									
Tamaño de muestra	$\alpha = .01$			$\alpha = .05$			$\alpha = .10$		
	Pruebas			Pruebas			Pruebas		
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon
5	99	100	100	95	100	99	89	97	90
15	99	100	100	95	96	96	91	93	89
30	99	99	100	95	96	99	93	93	90
50	100	100	100	99	99	99	94	94	98
100	99	99	99	97	97	98	97	97	96

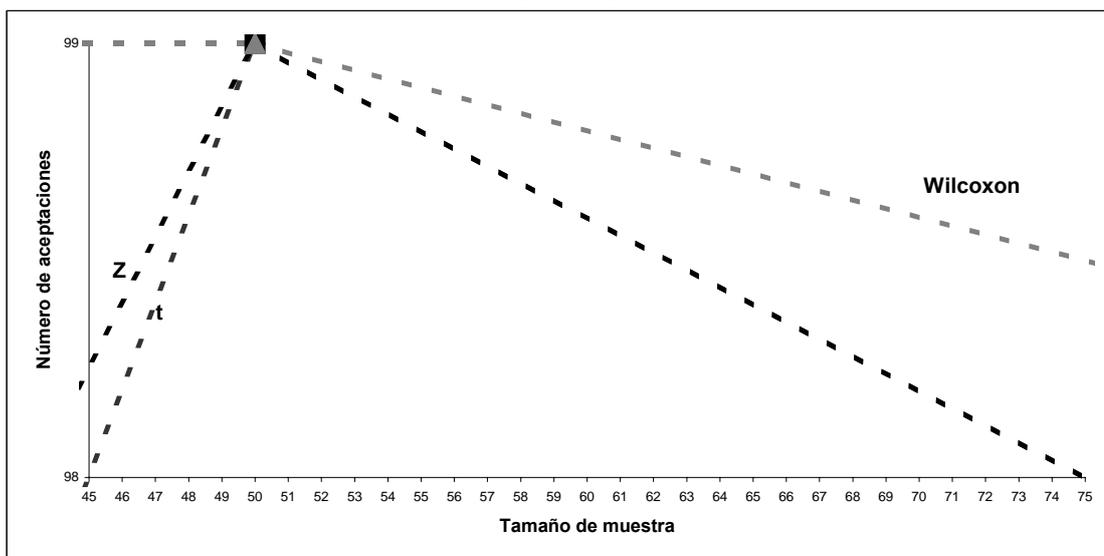
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.27**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Laplace}(0, 5)$   
**Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \alpha = 0$   
 VS  
 $H_1: \alpha \neq 0$   
 $\alpha = .05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.27 (Detalle)**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Laplace}(0, 5)$



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla XXXVI que el valor plausible de la prueba  $t$  es mayor que el de su equivalente no paramétrico en la mayoría de los casos considerados en la simulación. El valor plausible de la prueba  $Z$  llega a tener magnitud muy cercana a la correspondiente a la prueba  $t$ . Solo en el caso en que el tamaño de muestra era 100 el valor plausible de la prueba de Wilcoxon superó en magnitud al correspondiente a sus equivalentes paramétricos.

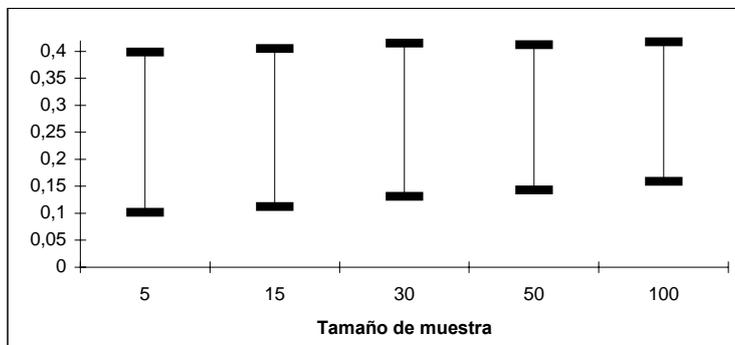
Para este caso los valores de mediana muestral se acercan más al valor verdadero de la media poblacional en tamaños de muestra pequeños, mientras que a medida que el tamaño de muestra aumenta el valor de la media aritmética se acerca en mayor medida al valor de la media poblacional. Los Gráficos 4.28 a 4.30 representan los resultados obtenidos.

**Tabla XXXVI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Intervalos de confianza para el valor plausible y para la media y mediana poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Laplace}(0, 5)$**

Tamaño de muestra	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ $H_0: \alpha = 0$ VS $H_1: \alpha \neq 0$			$\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{x} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,2501 ± 0,1484	0,2716 ± 0,1351	0,2572 ± 0,1294	0,1854 ± 1,1336	0,0589 ± 0,8838
15	0,2587 ± 0,1463	0,2655 ± 0,1429	0,2538 ± 0,1413	0,1281 ± 1,3773	0,0701 ± 1,0736
30	0,2734 ± 0,1420	0,2758 ± 0,1411	0,2784 ± 0,1367	0,1367 ± 0,7827	0,1211 ± 0,7143
50	0,2779 ± 0,1347	0,2797 ± 0,1343	0,2789 ± 0,1300	-0,0214 ± 0,8491	-0,0710 ± 0,7975
100	0,2886 ± 0,1292	0,2884 ± 0,1291	0,2946 ± 0,1313	0,0977 ± 1,088	-0,0046 ± 1,0108

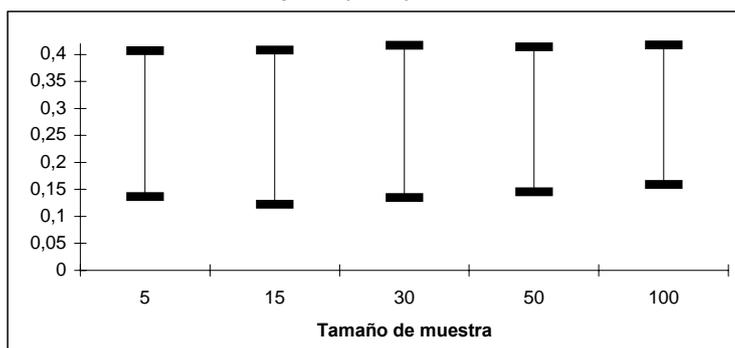
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.28**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z**  
**Caso Laplace(0, 5): 100 corridas**



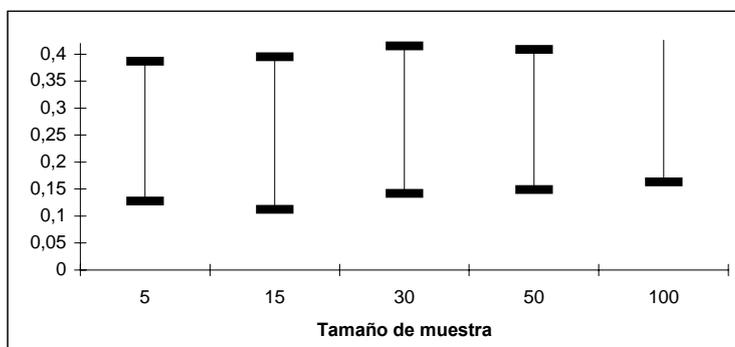
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.29**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t**  
**Caso Laplace(0, 5): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.30**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Wilcoxon**  
**Caso Laplace(0, 5): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla XXXVII que las longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba de Wilcoxon son menores que las longitudes de los intervalos de sus equivalentes paramétricos excepto para tamaños de muestra grandes donde las longitudes de los intervalos para las pruebas paramétricas llegan a ser menores que los correspondientes a la prueba de Wilcoxon (no paramétrica).

En el caso de la media y mediana muestrales los intervalos de confianza de las mediana muestral son menores en longitud que los correspondientes a la media aritmética para todos los casos contemplados en la simulación.

**Tabla XXXVII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Longitudes de los intervalos de confianza para valor plausible y para la media y mediana poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Laplace}(0, 5)$**

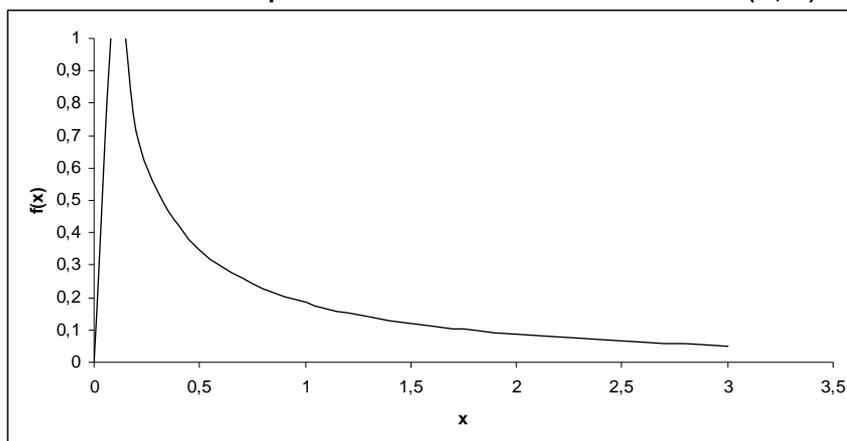
Tamaño de muestra	$L_p$ $H_0: \alpha = 0$ VS $H_1: \alpha \neq 0$			$L_{\bar{X}}$	$L_{\tilde{X}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,2968	0,2702	0,2588	2,2672	1,7676
15	0,2926	0,2858	0,2826	2,7546	2,1472
30	0,2840	0,2822	0,2734	1,5654	1,4286
50	0,2694	0,2686	0,2600	1,6982	1,5950
100	0,2584	0,2582	0,2626	2,1760	2,0216

Elaboración: M. Rojas.

### 4.2.3 Comparación en una muestra de una distribución asimétrica

#### Caso 1: $X \sim \text{Weibull}(1, \frac{1}{2})$

**Gráfico 4.31**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución de Weibull(1,  $\frac{1}{2}$ )**



Elaboración: M. Rojas.

El sesgo para este caso es 1.1674. Para la distribución de Weibull con parámetros 1 y 0,5 el contraste de hipótesis es el siguiente:

$$H_0: \mu = 2$$

VS

$$H_1: \mu \neq 2$$

Los siguientes son los resultados obtenidos para la distribución indicada.

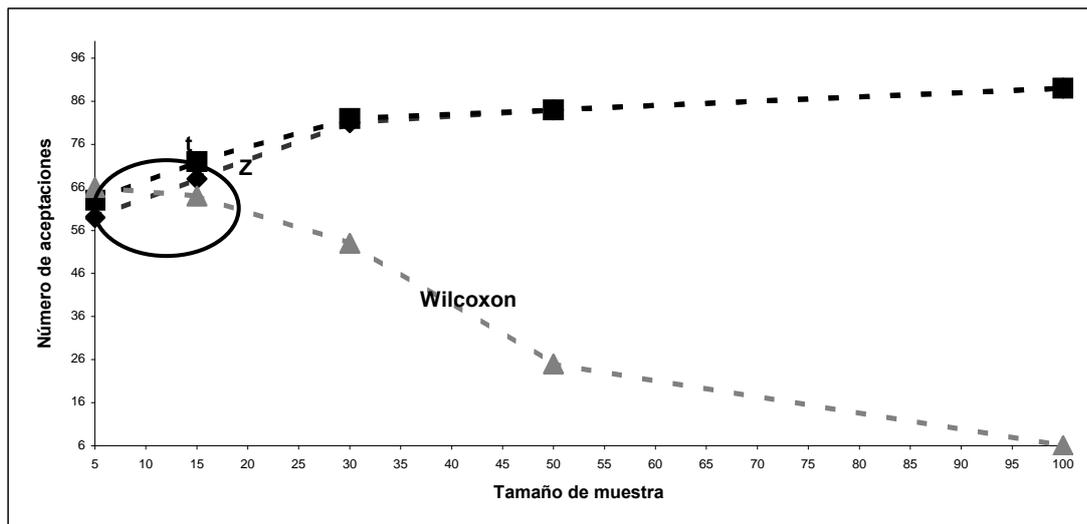
En la Tabla XXXVIII tenemos que el mayor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 93 correspondiendo a la prueba t; para  $\alpha=0,05$  fue de 89 correspondiendo a las pruebas t y Z; para  $\alpha=0,1$  fue de 88 para la prueba Z. De la misma forma el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 19 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,05$  fue de 6 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,1$  fue de 4 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon. Tenemos entonces que las pruebas paramétricas se mantuvieron más potentes que la prueba no paramétrica, ya que se puede apreciar que la prueba de Wilcoxon perdió de forma considerable su potencia de explicación. El Gráfico 4.32 representa los resultados obtenidos.

**Tabla XXXVIII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 **$X \sim \text{Weibull}(1, \frac{1}{2})$**

Tamaño de muestra	Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas								
	$\alpha = .01$			$\alpha = .05$			$\alpha = .10$		
	Pruebas			Pruebas			Pruebas		
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon
5	63	75	100	59	63	66	55	60	61
15	78	80	86	68	72	64	64	65	46
30	87	88	72	81	82	53	76	77	37
50	88	89	50	84	84	25	80	80	16
100	92	93	19	89	89	6	87	88	4

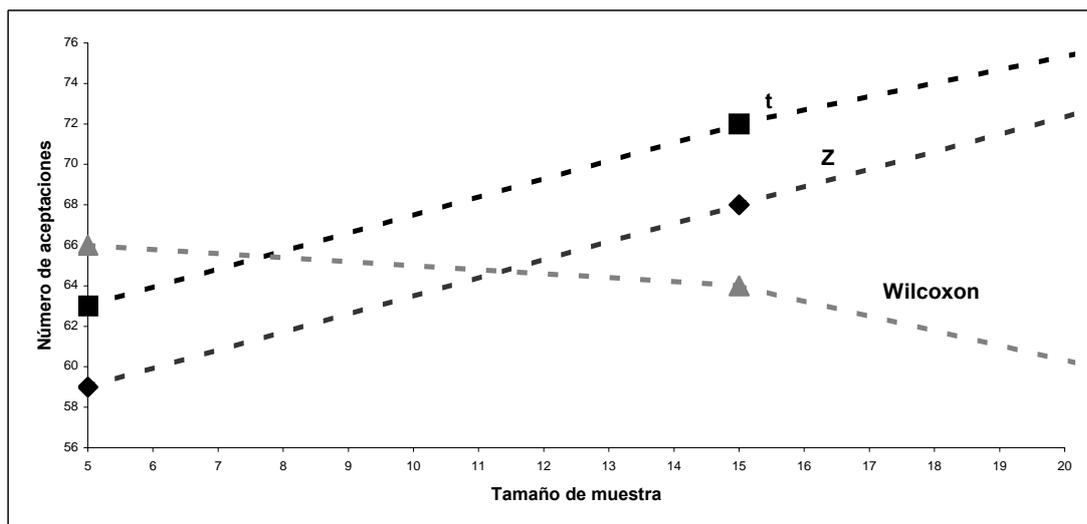
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.32**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Weibull}(1, \frac{1}{2})$   
**Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu = 2$   
 VS  
 $H_1: \mu \neq 2$   
 $\alpha = .05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.32 (Detalle)**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Weibull}(1, \frac{1}{2})$



Elaboración: M. Rojas.

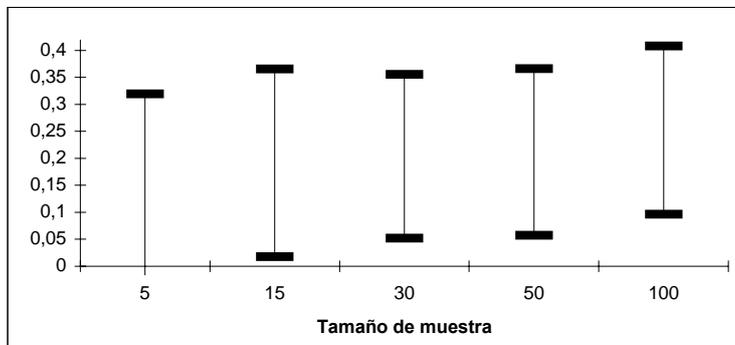
Puede apreciarse en la Tabla XXXIX que el valor plausible de la prueba  $t$  es mayor que el de su equivalente no paramétrico (prueba de Wilcoxon) en todos los tamaños de muestra contemplados en la simulación. El valor plausible de la prueba  $Z$  llega a ser muy cercano al obtenido para la prueba  $t$  a medida que el tamaño de muestra aumenta. El valor plausible de la prueba de Wilcoxon disminuye en magnitud a medida que el tamaño de muestra aumenta. Para este caso los valores de mediana muestral se alejan considerablemente del valor verdadero de la media poblacional. El valor de la media aritmética, en cambio, se mantiene muy cercano a el valor real de la media poblacional. Los Gráficos 4.33 a 4.35 representan los resultados obtenidos.

**Tabla XXXIX**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Intervalos de confianza para el valor plausible y la media y mediana poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Weibull}(1, \frac{1}{2})$**

Tamaño de muestra	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ $H_0: \mu = 2 \text{ VS } H_1: \mu \neq 2$			$\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{x} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,1516 ± 0,1679	0,1645 ± 0,1669	0,1592 ± 0,1436	2,1301 ± 1,248	0,7203 ± 0,7119
15	0,1915 ± 0,1740	0,1958 ± 0,1734	0,1015 ± 0,1269	1,8051 ± 0,9011	0,5521 ± 0,3055
30	0,2039 ± 0,1519	0,2073 ± 0,1516	0,0832 ± 0,1202	1,8659 ± 0,9353	0,5898 ± 0,3707
50	0,2116 ± 0,1545	0,2143 ± 0,1543	0,0322 ± 0,0688	1,8105 ± 0,8314	0,6020 ± 0,4299
100	0,2523 ± 0,1557	0,2532 ± 0,1561	0,0054 ± 0,0151	1,6888 ± 0,7281	0,5901 ± 0,3592

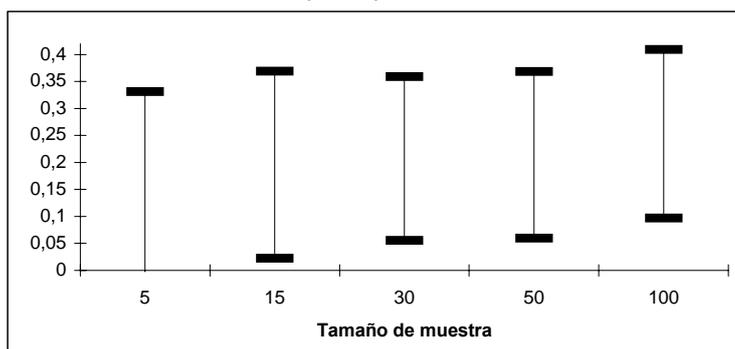
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.33**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z**  
**Caso Weibull (1, 1/2): 100 corridas**



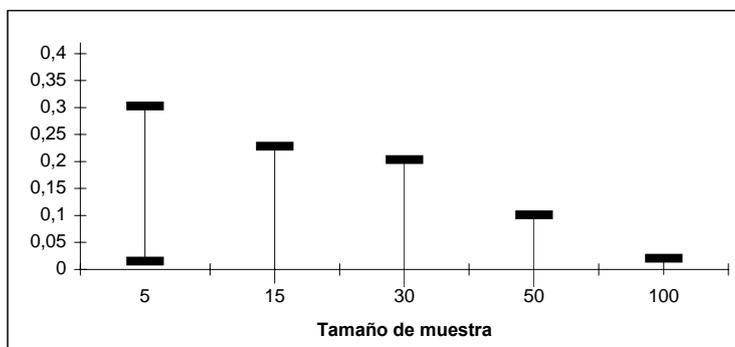
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.34**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t**  
**Caso Weibull (1, 1/2): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.35**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Wilcoxon**  
**Caso Weibull (1, 1/2): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla XL puede apreciarse que las longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba de Wilcoxon son menores que las longitudes de los intervalos de sus equivalentes paramétricos (prueba Z y t), y que este comportamiento se mantiene aún a medida que el tamaño de muestra aumenta. El intervalo de confianza del valor plausible de la prueba Z es menor en longitud que el correspondiente a la prueba t a medida que el tamaño de muestra aumenta.

En el caso de la media y mediana muestrales los intervalos de confianza de la mediana muestral son menores en longitud que los correspondientes a la media aritmética para todos los tamaños de muestra considerados en la simulación.

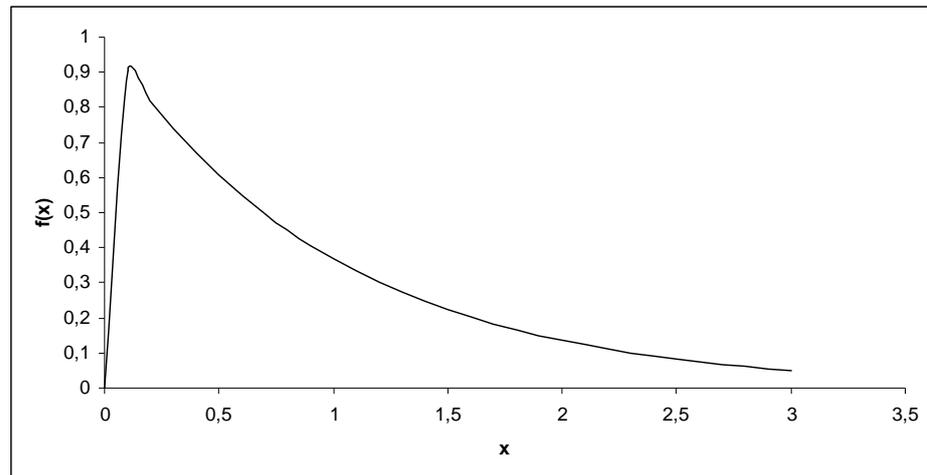
**Tabla XL**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Longitudes de intervalos de confianza para el valor plausible y la media y mediana poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Weibull}(1, \frac{1}{2})$**

Tamaño de muestra	$L_p$ $H_0: \mu = 2 \text{ VS } H_1: \mu \neq 2$			$L_{\bar{X}}$	$L_{\tilde{X}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,3358	0,3338	0,2872	2,4960	1,4238
15	0,3480	0,3468	0,2538	1,8022	0,6110
30	0,3038	0,3032	0,2404	1,8706	0,7414
50	0,3090	0,3086	0,1376	1,6628	0,8598
100	0,3114	0,3122	0,0302	1,4562	0,7184

Elaboración: M. Rojas.

## Caso 2: $X \sim \text{Weibull}(1, 1)$

**Gráfico 4.36**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución de Weibull(1, 1)**



Elaboración: M. Rojas.

El sesgo para este caso es 0,1674. Para la distribución de Weibull con parámetros 1 y 1 el contraste de hipótesis es el siguiente:

$$H_0: \mu = 1$$

VS

$$H_1: \mu \neq 1$$

Los siguientes son los resultados obtenidos para la distribución indicada.

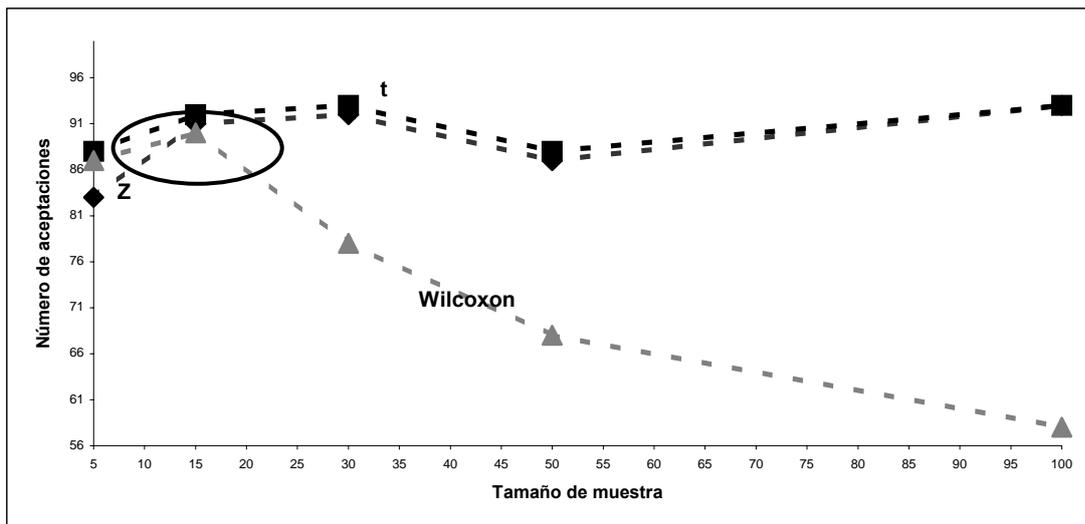
En la Tabla XLI tenemos que el mayor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 100 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,05$  fue de 93 correspondiendo a las pruebas t y Z; para  $\alpha=0,1$  fue de 90 para las pruebas Z y t. De la misma forma el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 79 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,05$  fue de 58 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,1$  fue de 44 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon. La prueba de Wilcoxon(no paramétrica) pierde su potencia a medida que el tamaño de muestra aumenta, mientras que las pruebas paramétricas mantienen potencias de magnitudes muy cercanas sin importar el tamaño de muestra considerado. El Gráficos 4.37 representa los resultados obtenidos.

**Tabla XLI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**X ~ Weibull (1 , 1)**

Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas									
$H_0: \mu = 1$ VS $H_1: \mu \neq 1$									
Tamaño de muestra	$\alpha = .01$			$\alpha = .05$			$\alpha = .10$		
	Pruebas			Pruebas			Pruebas		
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon
5	87	94	100	83	88	87	79	85	85
15	95	96	97	91	92	90	87	89	81
30	94	95	90	92	93	78	86	88	66
50	96	98	83	87	88	68	83	83	57
100	97	97	79	93	93	58	90	90	44

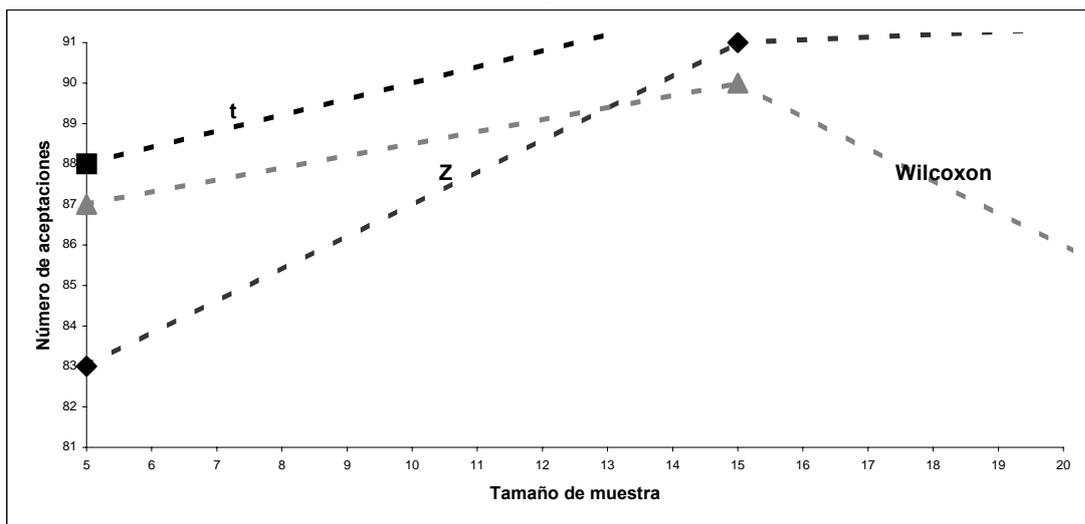
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.37**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu = 1$   
 VS  
 $H_1: \mu \neq 1$   
 $\alpha = .05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.37 (Detalle)**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Weibull}(1, 1)$



Elaboración: M. Rojas.

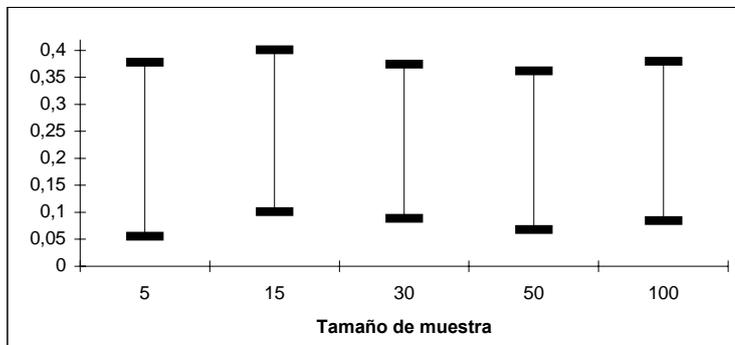
Puede apreciarse en la Tabla XLII que el valor plausible de la prueba t es mayor que el de su equivalente no paramétrico (prueba de Wilcoxon) en todos los tamaños de muestra contemplados en la simulación. El valor plausible de la prueba Z llega a ser cercano al de la prueba t a medida que el tamaño de muestra aumenta. El valor plausible de la prueba de Wilcoxon disminuye en magnitud a medida que el tamaño de muestra aumenta. Para este caso los valores de mediana muestral se alejan del valor verdadero de la media poblacional. El valor de la media aritmética, en cambio, se mantiene cercano al valor de la media poblacional y se acerca más a este a medida que el tamaño de muestra aumenta. Los Gráficos 4.38 a 4.40 representan los resultados obtenidos.

**Tabla XLII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Intervalos de confianza para el valor plausible y la media y mediana poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Weibull}(1, 1)$**

Tamaño de muestra	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ $H_0: \mu = 1 \text{ VS } H_1: \mu \neq 1$			$\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{x} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,2170 ± 0,1612	0,2365 ± 0,1537	0,2237 ± 0,1375	0,9339 ± 0,2395	0,6681 ± 0,2801
15	0,2511 ± 0,1501	0,2581 ± 0,1469	0,2204 ± 0,1523	0,9493 ± 0,2141	0,6988 ± 0,2504
30	0,2315 ± 0,1428	0,2358 ± 0,1414	0,1842 ± 0,1675	0,9612 ± 0,2181	0,6879 ± 0,2378
50	0,2148 ± 0,1470	0,2164 ± 0,1469	0,1430 ± 0,1574	1,0052 ± 0,3031	0,7540 ± 0,3148
100	0,2324 ± 0,1476	0,2319 ± 0,1473	0,1004 ± 0,1339	1,0454 ± 0,2500	0,7502 ± 0,2888

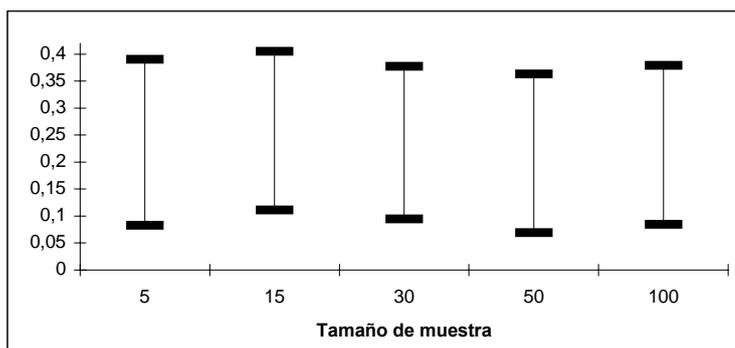
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.38**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z**  
**Caso Weibull (1, 1): 100 corridas**



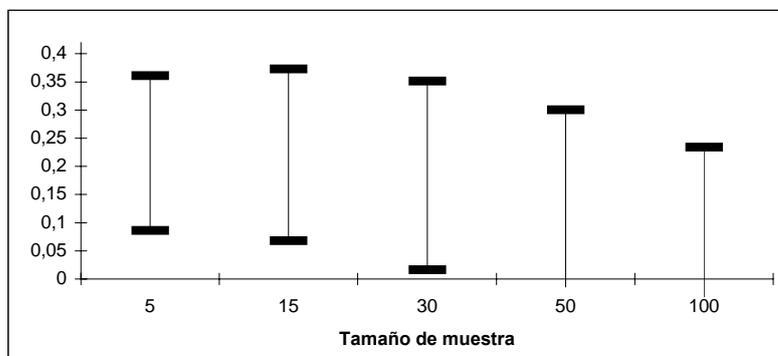
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.39**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t**  
**Caso Weibull (1, 1): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.40**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon**  
**Caso Weibull (1, 1): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla XLIII puede apreciarse que las longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba de t son menores que las longitudes de los intervalos de su equivalente no paramétrico (prueba de Wilcoxon). El intervalo de confianza del valor plausible de la prueba Z alcanza en longitud a el correspondiente a la prueba t a medida que el tamaño de muestra aumenta.

En el caso de la media y mediana muestrales los intervalos de confianza de las media aritmética son menores en longitud que los correspondientes a la mediana muestral para todos los casos contemplados en la simulación.

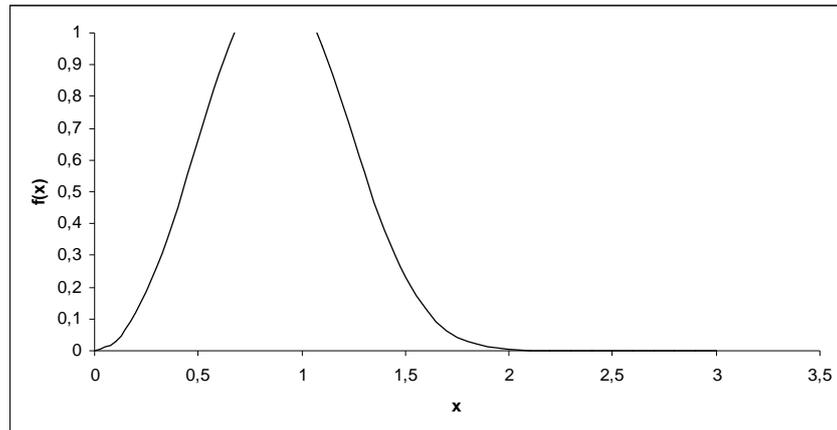
**Tabla XLIII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible y la media y mediana**  
**poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Weibull}(1, 1)$**

Tamaño de muestra	$L_p$ $H_0: \mu = 1 \text{ VS } H_1: \mu \neq 1$			$L_{\bar{x}}$	$L_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,3224	0,3074	0,2750	0,4790	0,5602
15	0,3002	0,2938	0,3046	0,4282	0,5008
30	0,2856	0,2828	0,3350	0,4362	0,4756
50	0,2940	0,2938	0,3148	0,6062	0,6296
100	0,2952	0,2946	0,2678	0,5000	0,5776

Elaboración: M. Rojas.

**Caso 3:  $X \sim \text{Weibull}(1, 3)$** 

**Gráfico 4.41**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución de Weibull(1, 3)**



Elaboración: M. Rojas.

El sesgo para este caso es 0,0604. Para la distribución de Weibull con parámetros 1 y 3 el contraste de hipótesis es el siguiente:

$$H_0: \mu = 0,89298$$

VS

$$H_1: \mu \neq 0,89298$$

Los siguientes son los resultados obtenidos para la distribución indicada.

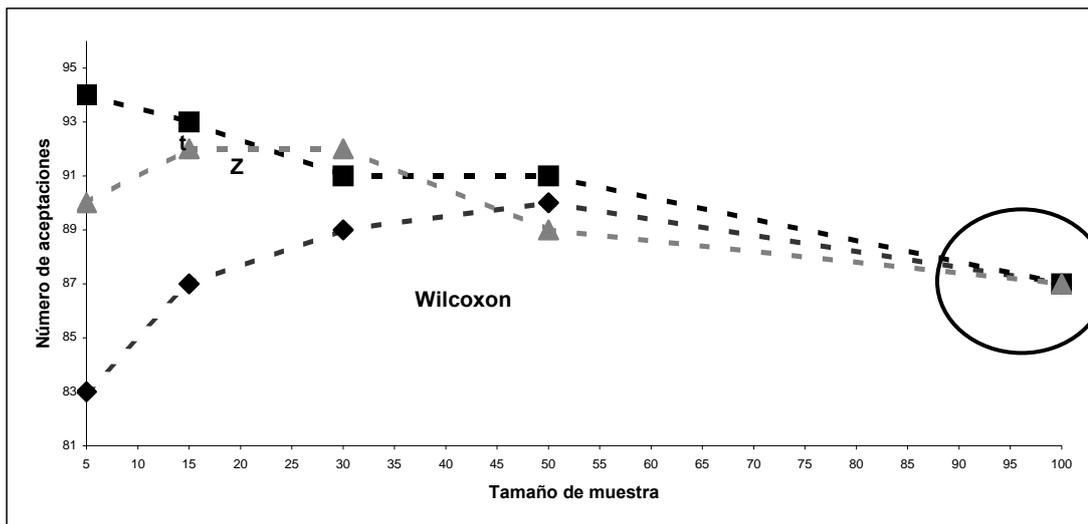
En la Tabla XLIV tenemos que el mayor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 100 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,05$  fue de 94 correspondiendo a la prueba t; para  $\alpha=0,1$  fue de 88 para la prueba t. De la misma forma el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 93 correspondiendo a la prueba Z; para  $\alpha=0,05$  fue de 83 correspondiendo a la prueba Z; para  $\alpha=0,1$  fue de 79 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon. Para tamaños de muestra grandes las pruebas fueron equivalentes, mientras que para tamaños de muestra pequeños la prueba t resultó ser más potente que su equivalente no paramétrico, la prueba de Wilcoxon. El Gráficos 4.42 representa los resultados obtenidos.

**Tabla XLIV**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 **$X \sim \text{Weibull}(1, 3)$**

Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas									
$H_0: \mu = 0.89298$ VS $H_1: \mu \neq 0.89298$									
Tamaño de muestra	$\alpha = .01$			$\alpha = .05$			$\alpha = .10$		
	Pruebas			Pruebas			Pruebas		
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon
5	93	99	100	83	94	90	79	88	82
15	96	96	97	87	93	92	83	83	85
30	96	98	99	89	91	92	84	85	86
50	97	99	98	90	91	89	82	82	83
100	99	99	99	87	87	87	83	83	79

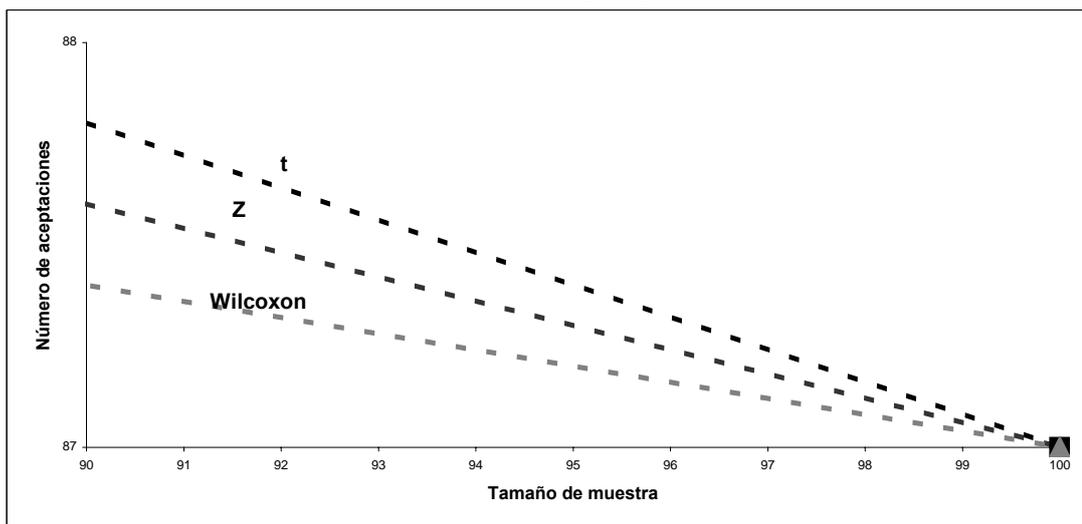
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.42**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Weibull}(1, 3)$   
**Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu = 0.89298$   
 VS  
 $H_1: \mu \neq 0.89298$   
 $\alpha = .05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.42 (Detalle)**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Weibull}(1, 3)$



Elaboración: M. Rojas.

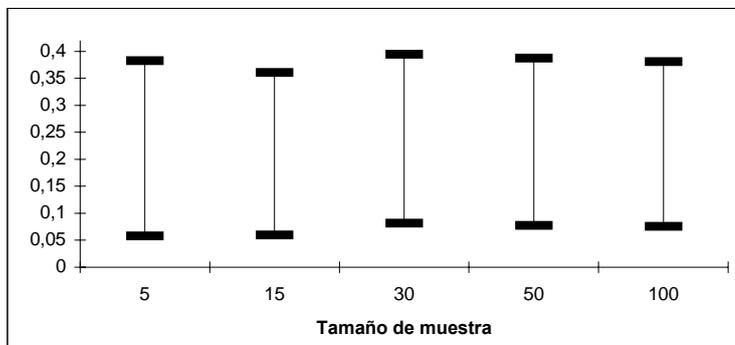
Puede apreciarse en la Tabla XLV que el valor plausible de la prueba t es mayor que el de su equivalente no paramétrico (prueba de Wilcoxon) en todos los tamaños de muestra contemplados en la simulación. La magnitud de el valor plausible de la prueba Z llega a ser muy cercano al correspondiente a la prueba t a medida que el tamaño de muestra aumenta. Para este caso los valores de mediana muestral y de la media aritmética son cercanos al valor verdadero de la media poblacional y se acercan más a este a medida que el tamaño de muestra aumenta en ambos casos. Los Gráficos 4.43 a 4.45 representan los resultados obtenidos.

**Tabla XLV**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Intervalos de confianza para el valor plausible y la media y mediana poblacionales:**  
**X ~ Weibull (1, 3)**

Tamaño de muestra	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ H <sub>0</sub> : $\mu = 0.89298$ VS H <sub>1</sub> : $\mu \neq 0.89298$			$\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{x} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba T	Prueba de Wilcoxon		
5	0,2203 ± 0,1623	0,2381 ± 0,1517	0,2166 ± 0,1424	0,9023 ± 0,0939	0,8858 ± 0,1149
15	0,2101 ± 0,1506	0,2160 ± 0,1483	0,2117 ± 0,1451	0,8609 ± 0,0771	0,8598 ± 0,0973
30	0,2381 ± 0,1562	0,2418 ± 0,1551	0,2333 ± 0,1515	0,8947 ± 0,1139	0,8811 ± 0,1329
50	0,2325 ± 0,1549	0,2317 ± 0,1525	0,2168 ± 0,1478	0,8866 ± 0,0826	0,8820 ± 0,1165
100	0,2283 ± 0,1524	0,2295 ± 0,1526	0,2177 ± 0,1494	0,9173 ± 0,0841	0,9154 ± 0,0991

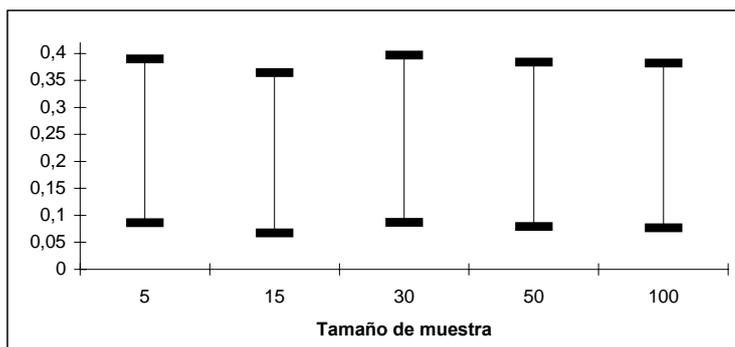
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.43**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z**  
**Caso Weibull (1, 3): 100 corridas**



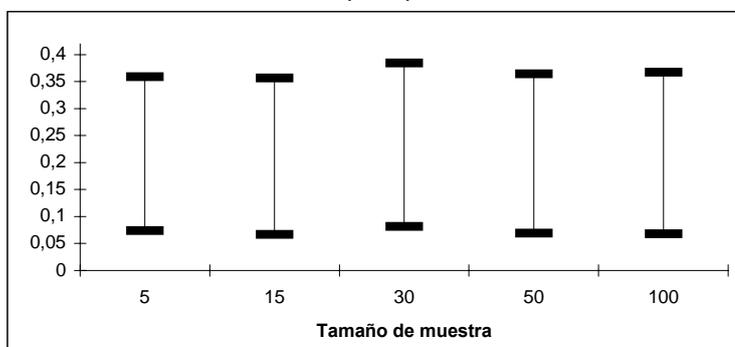
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.44**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t**  
**Caso Weibull (1, 1): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.45**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon**  
**Caso Weibull (1, 3): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla XLVI puede apreciarse que las longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba de Wilcoxon (no paramétrica) son menores que las longitudes de los intervalos de sus equivalentes no paramétrico (prueba Z y t) para todos los tamaños de muestra contemplados, aunque a medida que el tamaño de muestras aumenta sus longitudes no difieren considerablemente.

En el caso de la media y mediana muestrales los intervalos de confianza de la media aritmética son menores en longitud que los correspondientes a la mediana muestral para todos los casos contemplados en la simulación.

**Tabla XLVI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible y la media y mediana**  
**poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Weibull}(1, 3)$**

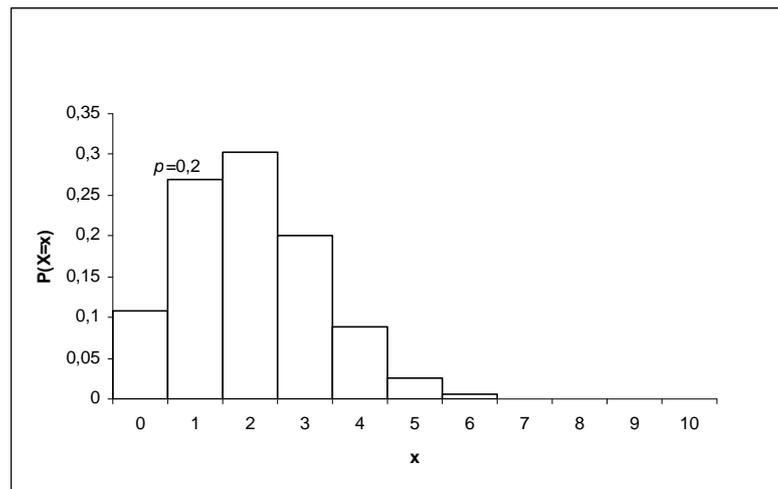
Tamaño de muestra	$L_p$ $H_0: \mu = 0.89298$ VS $H_1: \mu \neq 0.89298$			$L_{\bar{x}}$	$L_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba T	Prueba de Wilcoxon		
5	0,3246	0,3034	0,2848	0,1878	0,2298
15	0,3012	0,2966	0,2902	0,1542	0,1946
30	0,3124	0,3102	0,3030	0,2278	0,2658
50	0,3098	0,3050	0,2956	0,1652	0,2330
100	0,3048	0,3052	0,2988	0,1682	0,1982

Elaboración: M. Rojas.

#### 4.2.4 Comparación en una muestra de una distribución discreta

Caso 1:  $X \sim b(x: 10, \frac{2}{10})$

**Gráfico 4.46**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de probabilidad de la distribución Binomial(x: 10 ; 0,2)**



Elaboración: M. Rojas

El sesgo para este caso es 0,4743. La hipótesis será:

$$H_0: \mu = 2$$

VS

$$H_1: \mu \neq 2$$

Los siguientes son los resultados obtenidos para la distribución indicada.

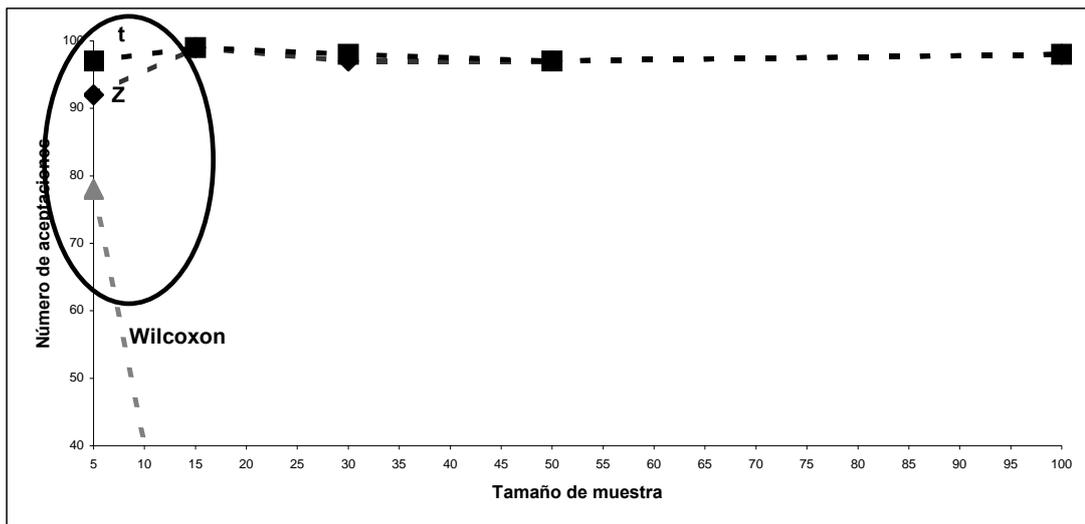
En la Tabla XLVII tenemos que el mayor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 100 correspondiendo a todas las pruebas; para  $\alpha=0,05$  fue de 98 correspondiendo a las pruebas t y Z; para  $\alpha=0,1$  fue de 98 para las pruebas Z y t. De la misma forma el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 0 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,05$  fue de 0 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,1$  fue de 0 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon. Las pruebas paramétricas fueron más potentes que la prueba de Wilcoxon (no paramétrica) para todos los casos contemplados en las simulaciones. El Gráficos 4.47 representa los resultados obtenidos.

**Tabla XLVII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Binomial}(10, 0,2)$

Tamaño de muestra	Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas								
	$\alpha = .01$			$\alpha = .05$			$\alpha = .10$		
	Pruebas			Pruebas			Pruebas		
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon
5	97	99	100	92	97	78	90	92	52
15	100	100	42	99	99	2	96	97	0
30	99	100	0	97	98	0	94	96	0
50	100	100	0	97	97	0	95	95	0
100	100	100	0	98	98	0	98	98	0

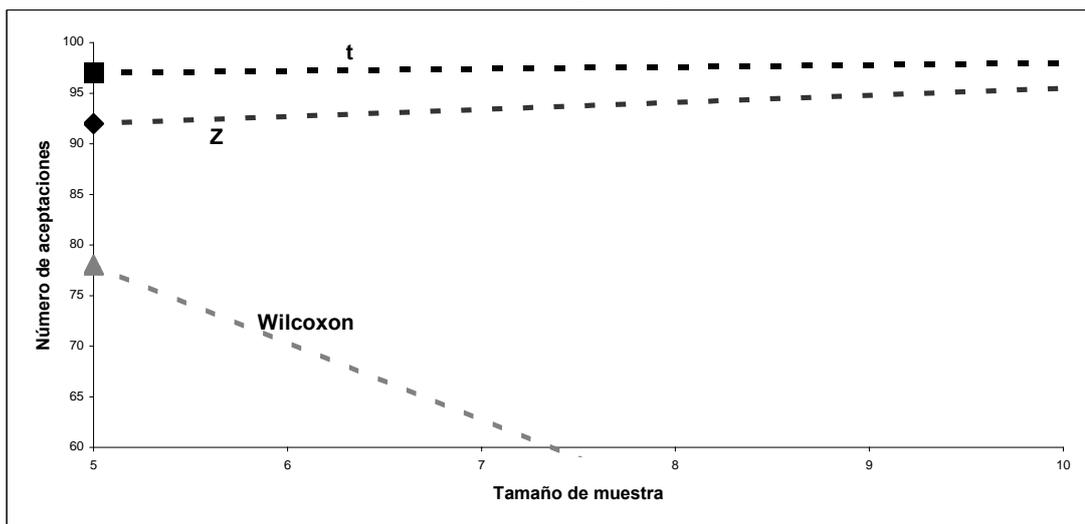
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.47**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Binomial}(10, 0,2)$   
**Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu = 2$   
 VS  
 $H_1: \mu \neq 2$   
 $\alpha = .05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.47 (Detalle)**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Binomial}(10, 0,2)$



Elaboración: M. Rojas.

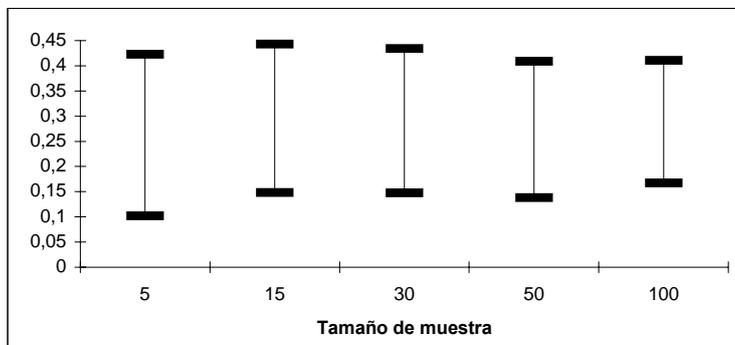
Puede apreciarse en la Tabla XLVIII que el valor plausible de la prueba de Wilcoxon (prueba no paramétrica) es sumamente bajo sin importar el tamaño de muestra que se esté considerando. Por otro lado la magnitud de el valor plausible de la prueba Z llega a ser muy cercano al correspondiente a la prueba t a medida que el tamaño de muestra aumenta. Para este caso los valores de mediana muestral y de la media aritmética son de magnitud cercana al valor verdadero de la media poblacional y se acercan más a este a medida que el tamaño de muestra aumenta en ambos casos. Los Gráficos 4.48 a 4.50 representan los resultados obtenidos.

**Tabla XLVIII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Intervalos de confianza para el valor plausible estimado y la media y mediana poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Binomial}(10, 0,2)$**

Tamaño de muestra	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ $H_0: \mu = 2 \text{ VS } H_1: \mu \neq 2$			$\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{x} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,2623 $\pm$ 0,1604	0,2802 $\pm$ 0,1496	0,0810 $\pm$ 0,0726	2,0629 $\pm$ 0,2385	1,9900 $\pm$ 0,3332
15	0,2958 $\pm$ 0,1472	0,2996 $\pm$ 0,1440	0,0058 $\pm$ 0,0063	1,9608 $\pm$ 0,3117	1,8300 $\pm$ 0,4618
30	0,2909 $\pm$ 0,1433	0,2935 $\pm$ 0,1423	0,0002 $\pm$ 0,0005	2,0200 $\pm$ 0,2754	1,9650 $\pm$ 0,3844
50	0,2735 $\pm$ 0,1355	0,2754 $\pm$ 0,1351	0,0000 $\pm$ 0,0000	2,0535 $\pm$ 0,2899	1,8900 $\pm$ 0,3377
100	0,2890 $\pm$ 0,1219	0,2911 $\pm$ 0,1212	0,0000 $\pm$ 0,0000	2,0281 $\pm$ 0,2635	1,9850 $\pm$ 0,4631

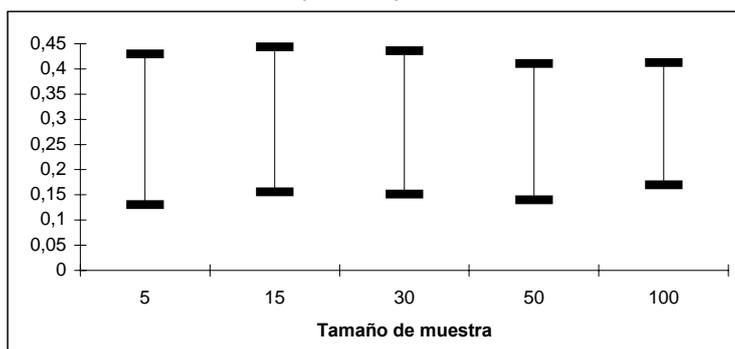
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.48**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z**  
**Caso Binomial (10 , 0.2): 100 corridas**



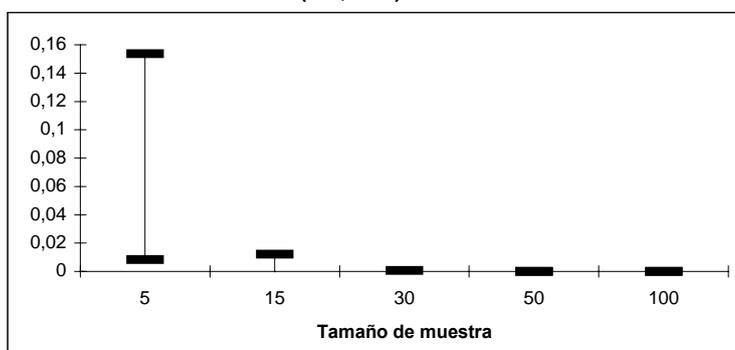
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.49**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t**  
**Caso Binomial (10 , 0.2): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.50**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon**  
**Caso Binomial (10 , 0.2): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla XLIX puede apreciarse que las longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba de Wilcoxon (no paramétrica) son menores que las longitudes de los intervalos de sus equivalentes paramétricos ( prueba Z y t ) para todos los tamaños de muestra contemplados. La diferencia entre las longitudes de los intervalos de confianza correspondientes a la prueba t y Z se reduce a medida que el tamaño de muestras aumenta.

En el caso de la media y mediana muestrales los intervalos de confianza de la media aritmética son menores en longitud que los correspondientes a la mediana muestral para todos los casos contemplados en la simulación.

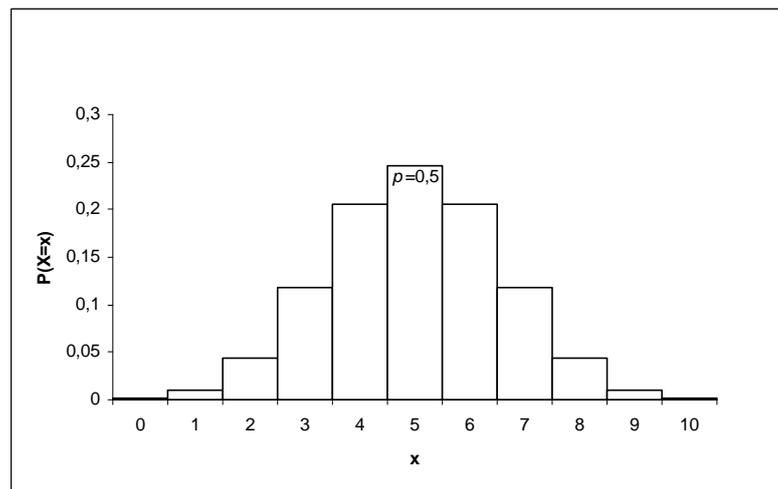
**Tabla XLIX**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible y la media y mediana poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Binomial}(10, 0,2)$**

Tamaño de muestra	$L_p$ $H_0: \mu = 2 \text{ VS } H_1: \mu \neq 2$				
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	$L_{\bar{X}}$	$L_{\tilde{X}}$
5	0,3208	0,2992	0,1452	0,4770	0,6664
15	0,2944	0,2880	0,0126	0,6234	0,9236
30	0,2866	0,2846	0,0010	0,5508	0,7688
50	0,2710	0,2702	0,0000	0,5798	0,6754
100	0,2438	0,2424	0,0000	0,5270	0,9262

Elaboración: M. Rojas.

Caso 2:  $X \sim b(x: 10, \frac{5}{10})$

**Gráfico 4.51**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de probabilidad de la distribución Binomial(x: 10 ; 0,2)**



Elaboración: M. Rojas.

El sesgo para este caso es 0. La hipótesis será:

$$H_0: \mu = 5$$

VS

$$H_1: \mu \neq 5$$

Los siguientes son los resultados obtenidos para la distribución indicada.

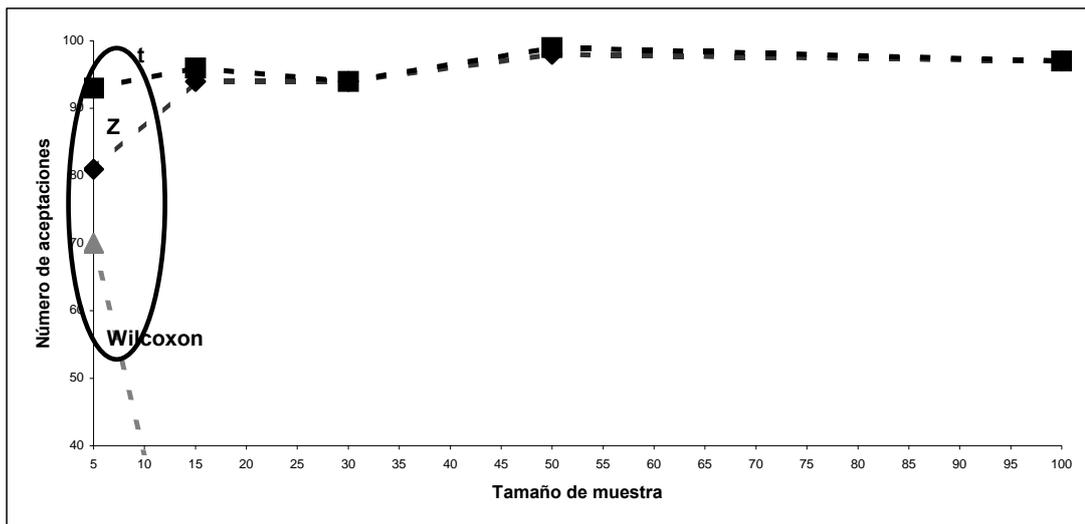
En la Tabla L tenemos que el mayor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 100 correspondiendo a todas las pruebas; para  $\alpha=0,05$  fue de 99 correspondiendo a la prueba t; para  $\alpha=0,1$  fue de 100 para las pruebas Z y t. De la misma forma el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 0 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,05$  fue de 0 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,1$  fue de 0 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon. Las pruebas paramétricas fueron más potentes que la prueba de Wilcoxon(prueba no paramétrica) para todos los casos contemplados en la simulación. El Gráfico 4.52 representa los resultados obtenidos.

**Tabla L**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Binomial}(10, 0,5)$

Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas									
$H_0: \mu = 5$ VS $H_1: \mu \neq 5$									
Tamaño de muestra	$\alpha = .01$			$\alpha = .05$			$\alpha = .10$		
	Pruebas			Pruebas			Pruebas		
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon
5	93	99	100	81	93	70	93	99	100
15	97	97	43	94	96	7	97	97	43
30	98	98	0	94	94	0	98	98	0
50	100	100	0	98	99	0	100	100	0
100	100	100	0	97	97	0	100	100	0

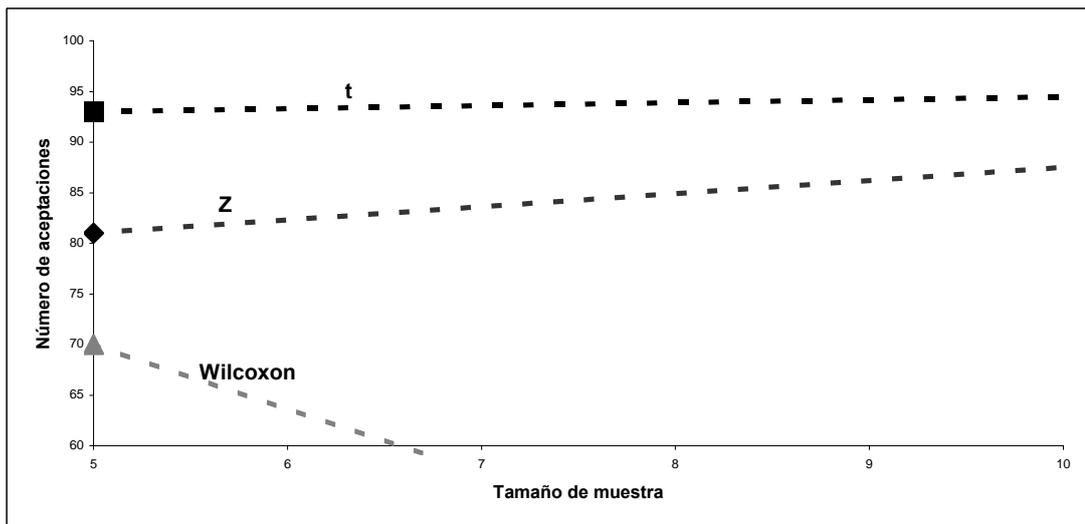
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.52**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Binomial}(10, 0,5)$   
**Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu = 5$   
 VS  
 $H_1: \mu \neq 5$   
 $\alpha = .05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.52 (Detalle)**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Binomial}(10, 0,5)$



Elaboración: M. Rojas.

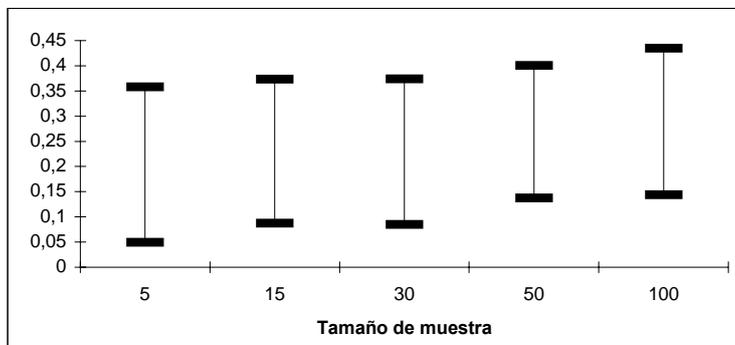
Como puede apreciarse en la Tabla LI, el valor plausible de la prueba de Wilcoxon (prueba no paramétrica) es sumamente bajo sin importar el tamaño de muestra que se esté considerando. Por otro lado la magnitud de el valor plausible de la prueba Z llega a ser muy cercano al correspondiente a la prueba t a medida que el tamaño de muestra aumenta. Para este caso los valores de mediana muestral y de la media aritmética son de magnitud cercana al valor verdadero de la media poblacional y se acercan más a este a medida que el tamaño de muestra aumenta en ambos casos. Los Gráficos 4.53 a 4.55 representan los resultados obtenidos.

**Tabla LI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Intervalos de confianza para el valor plausible y la media y mediana poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Binomial}(10, 0,5)$**

Tamaño de muestra	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ $H_0: \mu = 5 \text{ VS } H_1: \mu \neq 5$			$\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{x} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,2038 ± 0,1542	0,2263 ± 0,1445	0,0669 ± 0,0566	5,0585 ± 0,4241	5,1000 ± 0,4975
15	0,2302 ± 0,1428	0,2349 ± 0,1397	0,0089 ± 0,0140	5,0481 ± 0,368	4,9550 ± 0,4665
30	0,2296 ± 0,1445	0,2330 ± 0,1436	0,0004 ± 0,0006	5,0051 ± 0,4375	5,0900 ± 0,5336
50	0,2692 ± 0,1316	0,2710 ± 0,1313	0,0000 ± 0,0000	5,0285 ± 0,3838	5,0600 ± 0,4454
100	0,2893 ± 0,1453	0,2903 ± 0,1455	0,0000 ± 0,0000	5,0246 ± 0,3569	5,0300 ± 0,4596

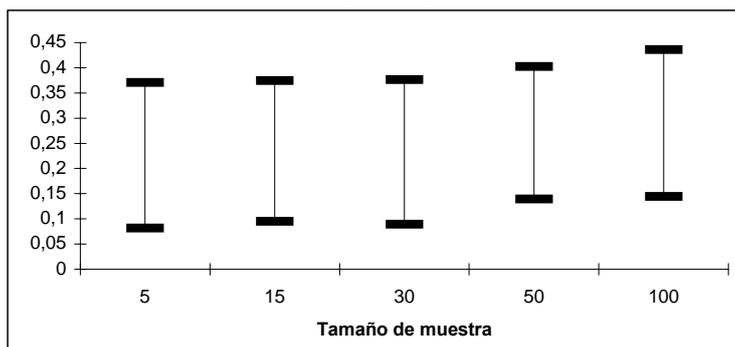
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.53**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z**  
**Caso Binomial (10 , 1/2): 100 corridas**



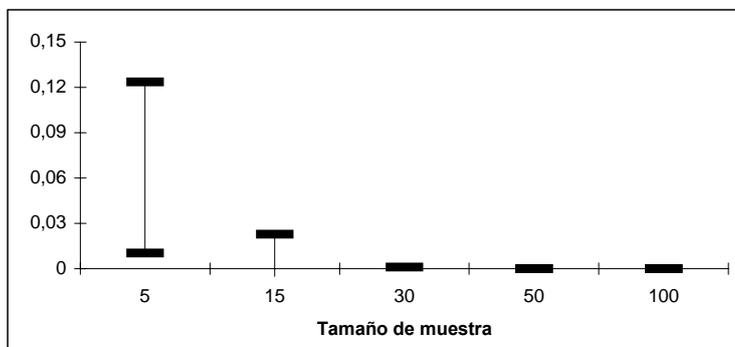
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.54**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t**  
**Caso Binomial (10 , 1/2): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.55**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon**  
**Caso Binomial (10 , 1/2): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla LII puede apreciarse que las longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba de Wilcoxon (no paramétrica) son menores que las longitudes de los intervalos de sus equivalentes no paramétrico (prueba Z y t) para todos los tamaños de muestra contemplados. La diferencia entre las longitudes de los intervalos de confianza correspondientes a la prueba t y Z se reduce a medida que el tamaño de muestras aumenta.

En el caso de la media y mediana muestrales los intervalos de confianza de la media aritmética son menores en longitud que los correspondientes a la mediana muestral para todos los casos contemplados en la simulación.

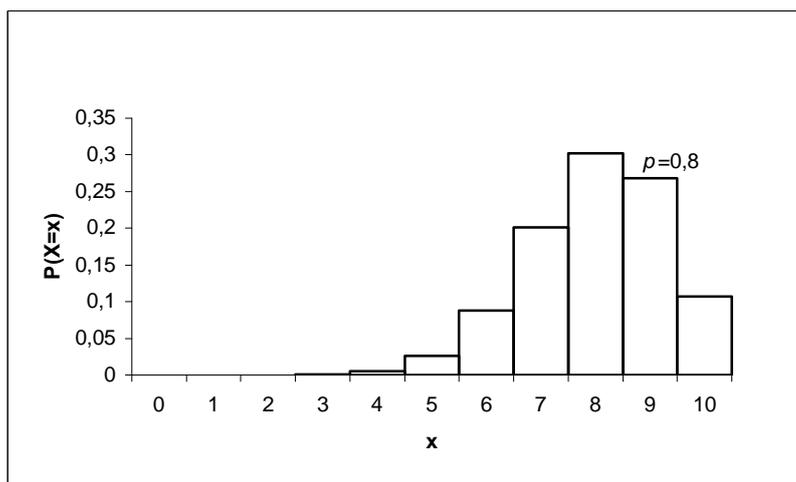
**Tabla LII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible y la media y mediana**  
**poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Binomial}(10, 0,5)$**

Tamaño de muestra	$L_p$ $H_0: \mu = 5 \text{ VS } H_1: \mu \neq 5$			$L_{\bar{X}}$	$L_{\tilde{X}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,3084	0,2890	0,1132	0,8482	0,9950
15	0,2856	0,2794	0,0280	0,7360	0,9330
30	0,2890	0,2872	0,0012	0,8750	1,0672
50	0,2632	0,2626	0,0000	0,7676	0,8908
100	0,2906	0,2910	0,0000	0,7138	0,9192

Elaboración: M. Rojas.

**Caso 3:**  $X \sim b(x: 10, \frac{8}{10})$

**Gráfico 4.56**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de probabilidad de la distribución Binomial(x: 10 ; 0,8)**



Elaboración: M. Rojas.

El sesgo para este caso es -0,4743. La hipótesis será:

$$H_0: \mu = 8$$

VS

$$H_1: \mu \neq 8$$

Los siguientes son los resultados obtenidos para la distribución indicada.

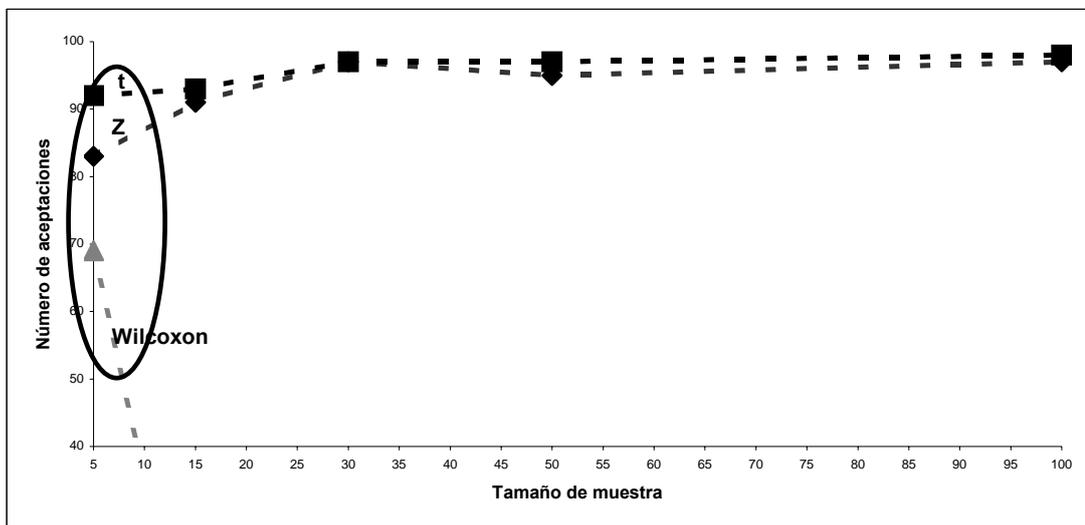
En la Tabla LIII tenemos que el mayor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 100 correspondiendo a todas las pruebas; para  $\alpha=0,05$  fue de 98 correspondiendo a la prueba t; para  $\alpha=0,1$  fue de 95 para las pruebas Z y t. De la misma forma el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,01$  fue de 0 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,05$  fue de 0 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon; para  $\alpha=0,1$  fue de 0 correspondiendo a la prueba de Wilcoxon. La prueba de Wilcoxon mantuvo su potencia de explicación alta para tamaños de muestra pequeños, pero a medida que el tamaño de muestra aumentó, tenemos que las pruebas paramétricas (Prueba Z y t) se volvieron más potentes que ella. El Gráfico 4.57 representa los resultados obtenidos.

**Tabla LIII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 **$X \sim \text{Binomial}(10, 0,8)$**

Número de Aceptaciones de la Hipótesis Nula después de 100 corridas									
$H_0: \mu = 8$ VS $H_1: \mu \neq 8$									
Tamaño de muestra	$\alpha = .01$			$\alpha = .05$			$\alpha = .10$		
	Pruebas			Pruebas			Pruebas		
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon
5	92	99	100	83	92	69	83	84	25
15	97	99	28	91	93	1	88	89	0
30	100	100	0	97	97	0	88	92	0
50	99	100	0	95	97	0	93	93	0
100	100	100	0	97	98	0	95	95	0

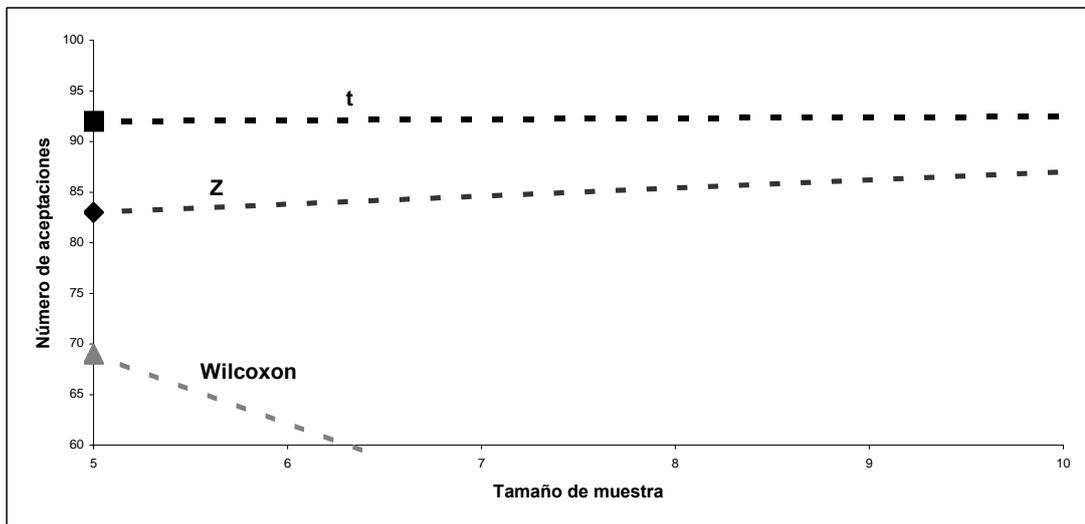
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.57**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Binomial}(10, 0,8)$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.57 (Detalle)**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
 $X \sim \text{Binomial}(10, 0,8)$



Elaboración: M. Rojas.

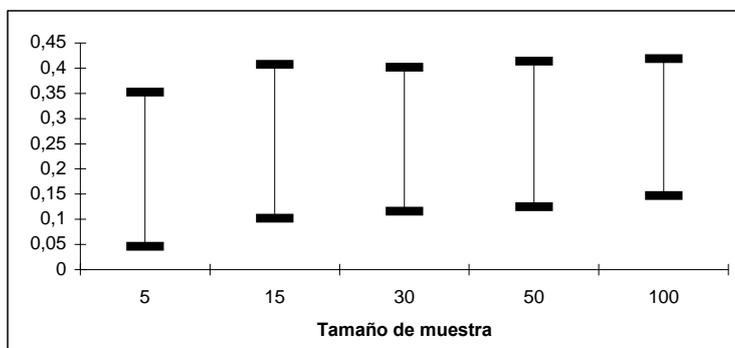
Como puede apreciarse en la Tabla LIV, el valor plausible de la prueba de Wilcoxon (prueba no paramétrica) es muy bajo sin importar el tamaño de muestra que consideramos en las simulaciones. Por otro lado la magnitud de el valor plausible de la prueba Z llega a ser cercano al correspondiente a la prueba t a medida que el tamaño de muestra aumenta. Para este caso los valores de mediana muestral y de la media aritmética son de magnitud cercana al valor verdadero de la media poblacional y más aún a medida que el tamaño de muestra aumenta en ambos casos. Los Gráficos 4.58 a 4.60 representan los resultados obtenidos.

**Tabla LIV**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Intervalos de confianza para el valor plausible y la media y mediana poblacionales:**  
 **$X \sim \text{Binomial}(10, 0,8)$**

Tamaño de muestra	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ $H_0: \mu = 8 \text{ VS } H_1: \mu \neq 8$			$\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{x} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,1993 ± 0,1533	0,2209 ± 0,1446	0,0487 ± 0,0353	7,9738 ± 0,3297	8,0250 ± 0,4227
15	0,2546 ± 0,1527	0,2620 ± 0,1487	0,0046 ± 0,0062	8,0002 ± 0,2956	8,0500 ± 0,4174
30	0,2587 ± 0,1429	0,2620 ± 0,1418	0,0002 ± 0,0003	8,0157 ± 0,3051	8,0350 ± 0,3353
50	0,2696 ± 0,1445	0,2692 ± 0,1430	0,0000 ± 0,0000	8,0158 ± 0,3282	8,0500 ± 0,4113
100	0,2831 ± 0,1358	0,2851 ± 0,1354	0,0000 ± 0,0000	7,9847 ± 0,3510	8,0700 ± 0,3555

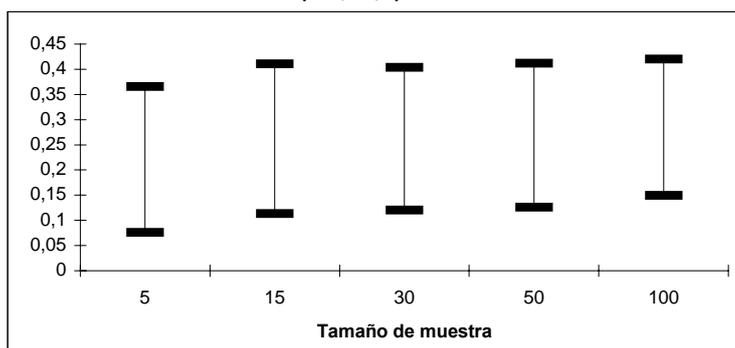
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.58**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba Z**  
**Caso Binomial (10 , 0,8): 100 corridas**



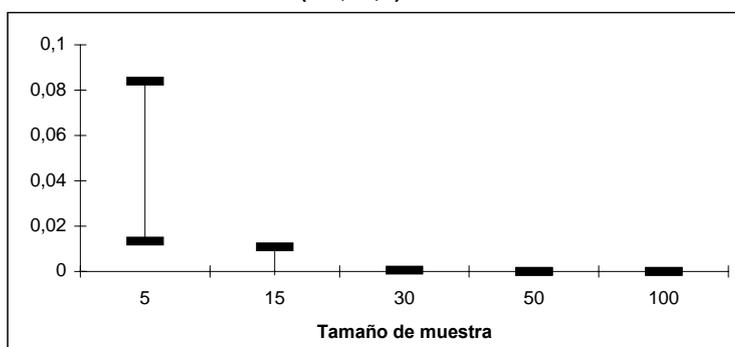
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.59**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba t**  
**Caso Binomial (10 , 0,8): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.60**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Intervalos de confianza para el valor p: Prueba de Wilcoxon**  
**Caso Binomial (10 , 0,8): 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla LV puede apreciarse que las longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba de Wilcoxon (no paramétrica) son menores que las longitudes de los intervalos de sus equivalentes paramétrico (prueba Z y t) para todos los tamaños de muestra contemplados. La diferencia entre las longitudes de los intervalos de confianza correspondientes a la prueba t y Z se reduce a medida que el tamaño de muestras aumenta.

En el caso de la media y mediana muestrales los intervalos de confianza de la media aritmética son menores en longitud que los correspondientes a la mediana muestral para todos los casos contemplados en la simulación.

**Tabla LV**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central:**  
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible y la media y mediana muestrales:**  
 **$X \sim \text{Binomial}(10, 0,8)$**

Tamaño de muestra	$L_p$ $H_0: \mu = 8 \text{ VS } H_1: \mu \neq 8$			$\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{x} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}}$
	Prueba Z	Prueba t	Prueba de Wilcoxon		
5	0,3066	0,2892	0,0706	0,6594	0,8454
15	0,3054	0,2974	0,0124	0,5912	0,8348
30	0,2858	0,2836	0,0006	0,6102	0,6706
50	0,2890	0,2860	0,0000	0,6564	0,8226
100	0,2716	0,2708	0,0000	0,7020	0,7110

Elaboración: M. Rojas.

### **4.3 Comparación de pruebas de hipótesis a la diferencia entre medidas de tendencia central de dos muestras**

Este grupo comprende 2 pruebas: la prueba t para dos muestras (paramétrica) y la prueba de Mann-Withney (no paramétrica). Se harán 100 corridas con muestras de tamaño 5,15,30, 50 y 100 provenientes de la población  $X_1$  y con muestras de tamaño 5,15,30, 50 y 100 provenientes de la población  $X_2$  para cada caso.

#### **4.3.1 Comparación en dos muestras provenientes de una distribución Normal**

Para este caso el contraste de hipótesis será:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

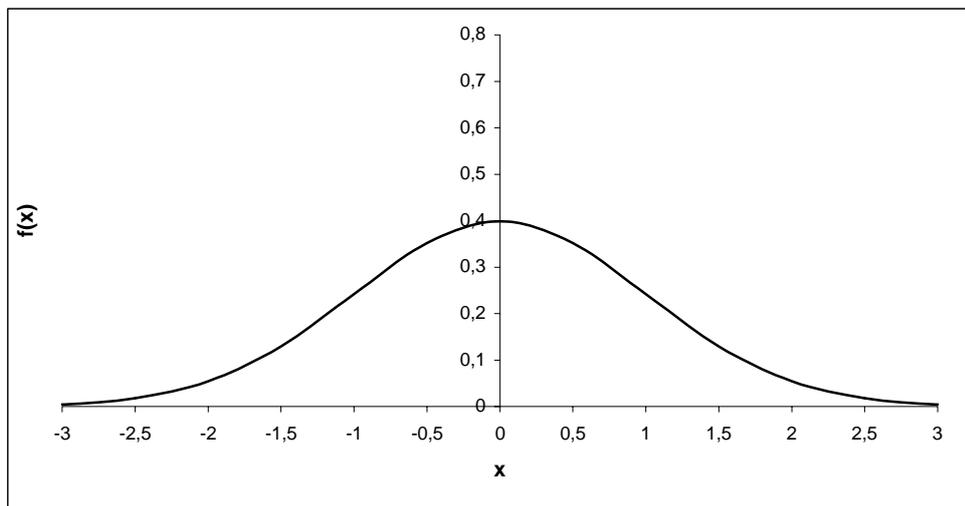
Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Es decir que las medias de las poblaciones de las que provienen las muestras son iguales. En esta comparación se respeta el supuesto de la prueba t para dos muestras (paramétrica) que indica que ambas muestras deben provenir de distribuciones normales y a la vez se respeta el supuesto de forma de la distribución para la prueba de Mann-Withney (no paramétrica).

**Caso 1:  $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$**

**Gráfico 4.61**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal(0, 1)**



Elaboración: M. Rojas.

Los siguientes son los resultados para dos muestras provenientes de dos distribuciones normales con parámetros  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ . Para este caso el contraste de hipótesis será:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$$

Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$$

En la Tabla LVI puede apreciarse que el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula de la prueba t para dos muestras para  $\alpha=0,1$  fue de 90 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 95 de 100 corridas y

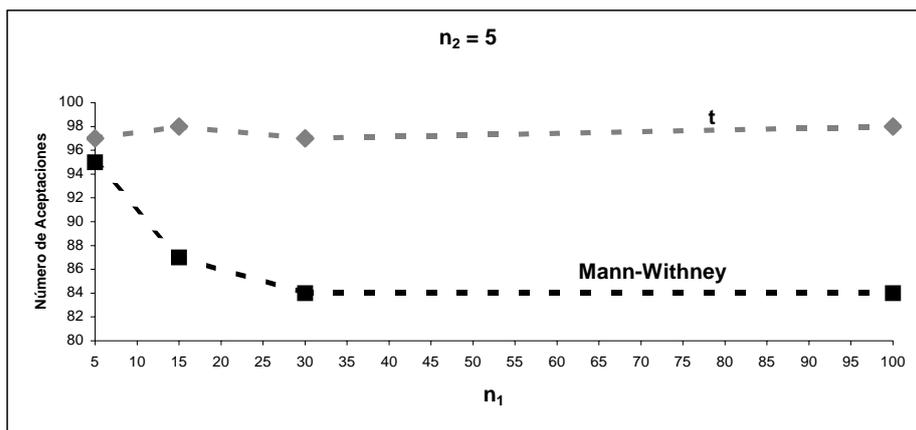
$\alpha=0,01$  fue de 97 de 100 corridas. Para la prueba de Mann-Withney el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,1$  fue de 75 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 81 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 93 de 100 corridas. Para tamaños de muestra grandes para ambas poblaciones se tiene que la prueba t es más potente que su equivalente no paramétrico(Mann-Withney) mientras que si difieren considerablemente los tamaños de muestra tenemos que la prueba de Mann-Withney es más potente en solo algunos casos. Los Gráficos 4.62 a 4.65 representan los resultados obtenidos.

**Tabla LVI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$

		$\alpha = 0.1$				$\alpha = 0.05$				$\alpha = 0.01$					
		<b>Prueba t (paramétrica)</b>													
		$n_2$				$n_2$				$n_2$					
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	5	97	97	93	97	5	97	99	97	99	5	99	100	99	100
15	5	96	96	92	94	15	98	96	95	97	15	99	100	97	99
30	5	97	96	93	92	30	97	99	95	96	30	99	100	99	100
100	5	97	96	95	90	100	98	100	95	98	100	99	100	99	99
		<b>Prueba Mann-Withney (no paramétrica)</b>													
		$n_2$				$n_2$				$n_2$					
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	5	91	100	98	100	5	95	100	98	100	5	100	100	100	100
15	5	81	87	90	98	15	87	93	95	100	15	98	100	98	100
30	5	79	75	83	93	30	84	91	88	98	30	95	99	97	100
100	5	75	76	76	89	100	84	81	83	93	100	93	96	93	98

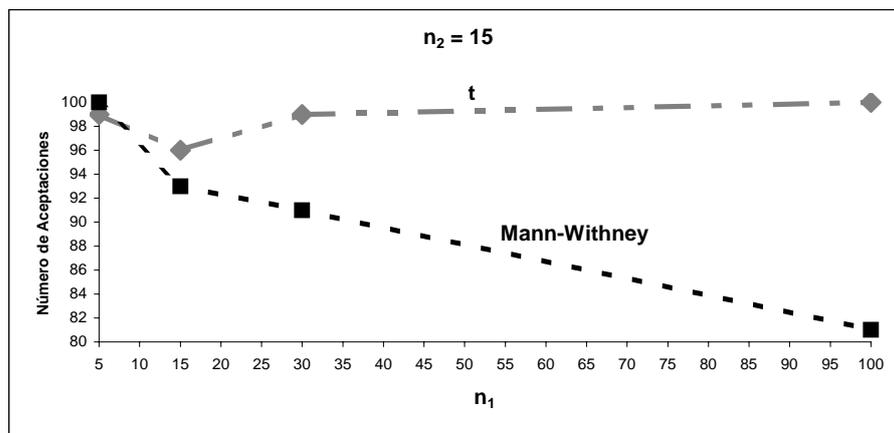
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.62**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



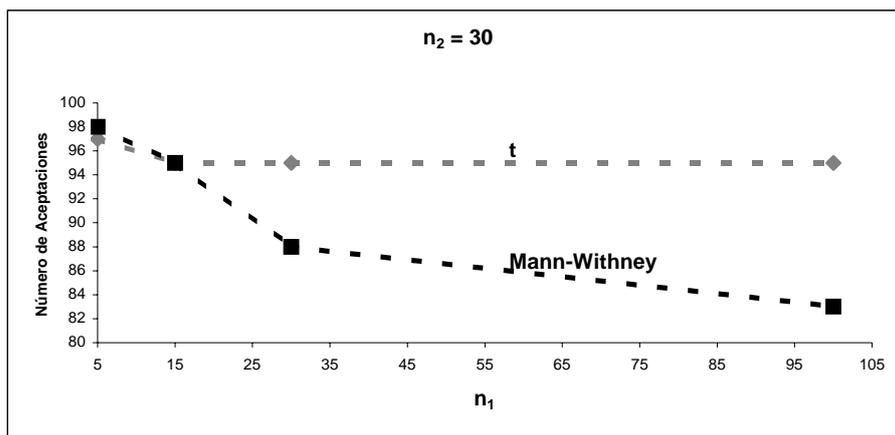
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.63**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



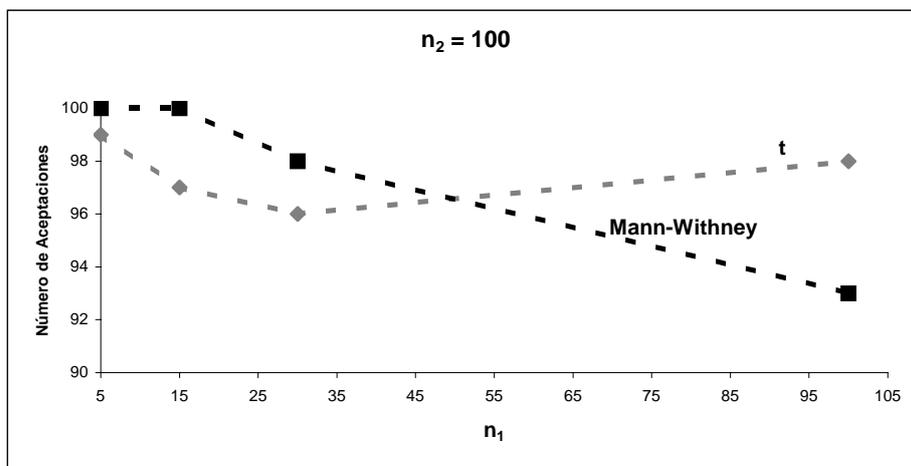
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.64**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
 Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.65**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
 Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

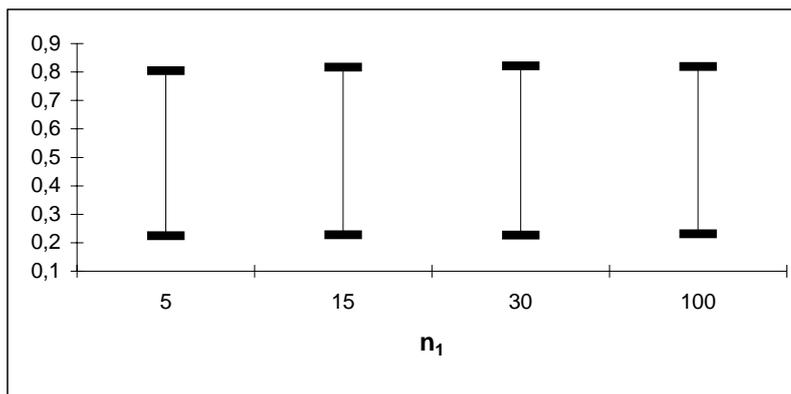
Puede apreciarse en la Tabla LVII que la prueba t presentó en promedio el mayor valor plausible para todas las corridas y para todos los tamaños de muestras considerados. La más alta magnitud del valor plausible de la prueba t para dos muestras se registró con  $n_1=5$  y  $n_2=100$  mientras que la menor se registró con  $n_1=30$  y  $n_2=30$ . Para la Prueba de Mann-Withney el más alto valor plausible se registró con  $n_1=5$  y  $n_2=100$  mientras que el menor se registró con  $n_1=15$  y  $n_2=100$ . Los Gráficos 4.66 a 4.73 representan los resultados obtenidos.

**Tabla LVII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Intervalos de confianza para el valor plausible:**

Prueba t (paramétrica)					Prueba Mann-Withney (no paramétrica)				
$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ <small><math>H_0: \mu_1 = \mu_2</math> Vs <math>H_1: \mu_1 \neq \mu_2</math></small>					$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ <small><math>H_0: \mu_1 = \mu_2</math> Vs <math>H_1: \mu_1 \neq \mu_2</math></small>				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,5146 ± 0,2903	0,4923 ± 0,3033	0,4678 ± 0,2747	0,5063 ± 0,2832	5	0,2217 ± 0,1317	0,2772 ± 0,1305	0,3029 ± 0,1210	0,3588 ± 0,1050
15	0,5226 ± 0,2946	0,5094 ± 0,3100	0,4700 ± 0,2815	0,4839 ± 0,3076	15	0,1986 ± 0,1418	0,2327 ± 0,1459	0,2547 ± 0,1391	0,3177 ± 0,1260
30	0,5240 ± 0,2971	0,4930 ± 0,3084	0,4470 ± 0,2786	0,4609 ± 0,2917	30	0,1941 ± 0,1466	0,2063 ± 0,1500	0,2212 ± 0,1482	0,2825 ± 0,1409
100	0,5251 ± 0,2939	0,4810 ± 0,2922	0,4687 ± 0,2863	0,4635 ± 0,2714	100	0,1845 ± 0,1459	0,1746 ± 0,1373	0,2008 ± 0,1530	0,2473 ± 0,1535

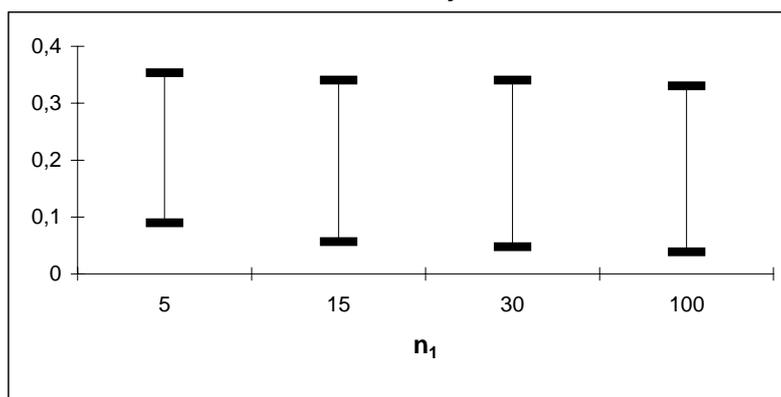
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.66**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$**   
**Prueba t: 100 corridas**



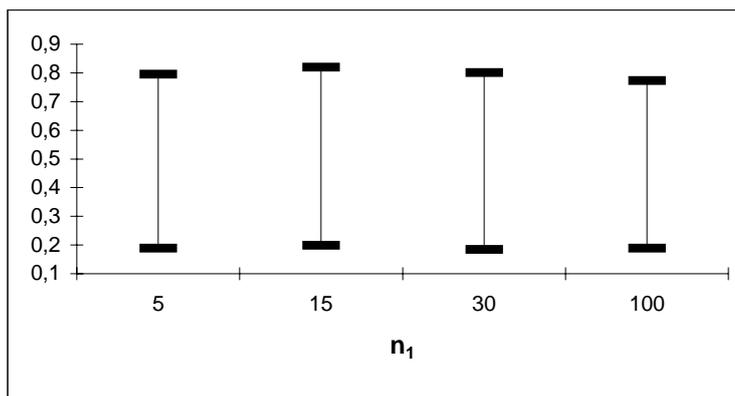
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.67**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$**   
**Prueba Mann-Withney: 100 corridas**



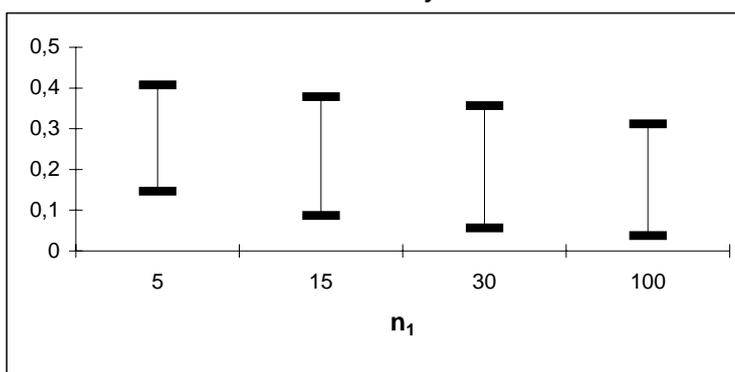
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.68**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$**   
**Prueba t: 100 corridas**



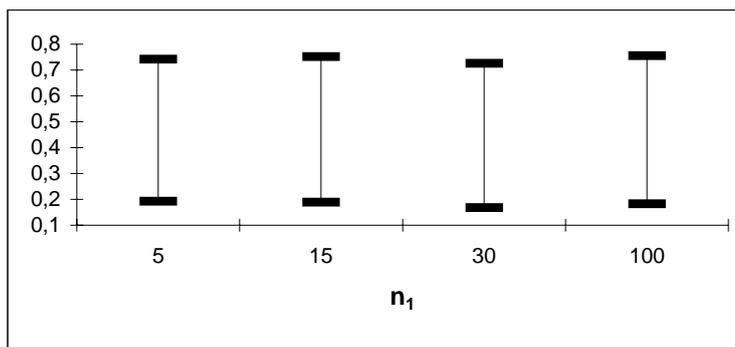
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.69**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$**   
**Prueba Mann-Withney: 100 corridas**



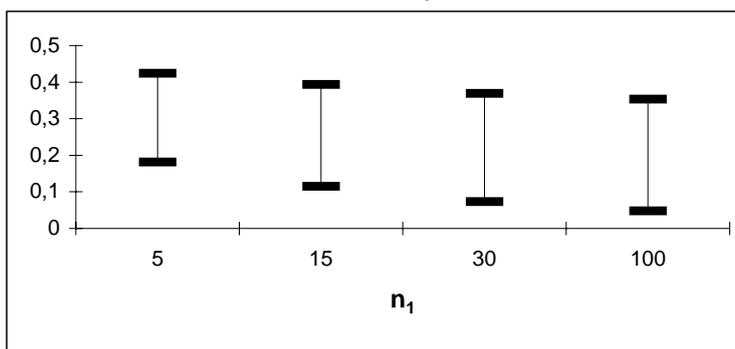
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.70**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba t: 100 corridas**



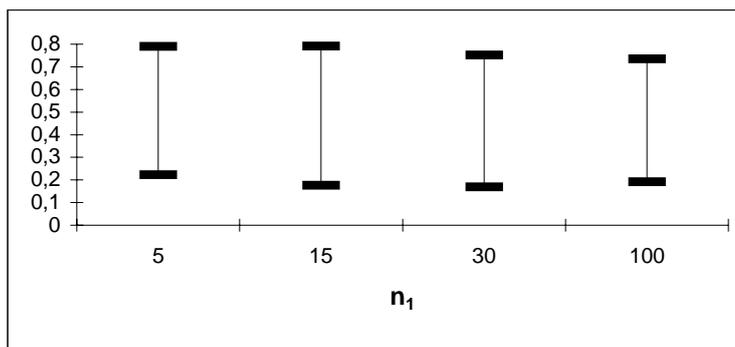
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.71**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba Mann-Whitney: 100 corridas**



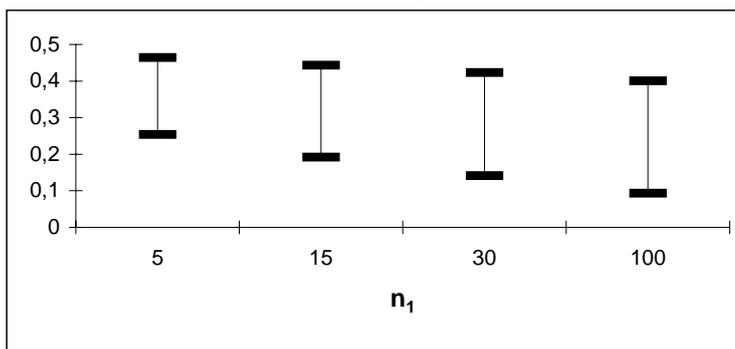
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.72**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba t: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.73**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba Mann-Withney: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

Pueden apreciarse en las Tablas LVIII y LIX las longitudes de los intervalos de confianza del valor plausible y de las medias y medianas muestrales. El intervalo más largo para el valor plausible se registró en  $n_1=15$  y  $n_2=100$  y corresponde a la prueba t mientras que la menor se registró con  $n_1=5$  y  $n_2=100$  y corresponde a la prueba de Mann-Withney. Para las medias y medianas muestrales el intervalo de mayor longitud corresponde a la mediana muestral en  $n_1=100$  y  $n_2=100$  y el de menor longitud corresponde a la media muestral en  $n_1=30$  y  $n_2=30$ .

**Tabla LVIII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Longitud de los intervalos de confianza para el valor plausible**

		Prueba t (paramétrica)						Prueba Mann-Withney (no paramétrica)			
		$L_p$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$						$L_p$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$			
		$n_2$						$n_2$			
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100
5		0,5806	0,6066	0,5494	0,5664	5		0,2634	0,2610	0,2420	0,2100
15		0,5892	0,6200	0,5630	0,6152	15		0,2836	0,2918	0,2782	0,2520
30		0,5942	0,6168	0,5572	0,5834	30		0,2932	0,3000	0,2964	0,2818
100		0,5878	0,5844	0,5726	0,5428	100		0,2918	0,2746	0,3060	0,3070

Elaboración: M. Rojas.

**Tabla LIX**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Longitudes de los intervalos de confianza para la diferencia de medias y medianas:**

$L_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$					$L_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	1,5130	1,5230	2,0244	1,6486	5	2,0890	1,8442	2,8012	2,0776
15	1,6186	2,0340	2,1188	1,5866	15	1,6840	2,8390	2,3322	2,3408
30	1,6672	1,9626	1,4780	2,1896	30	2,2452	2,3508	2,1954	1,9920
100	2,1754	1,7276	1,3736	1,8018	100	2,2528	1,7276	1,4332	2,5484

Elaboración: M. Rojas.

La Tabla LIX muestra que el valor más cercano a que la diferencia entre medias sea igual a 0 es 0,0021 y corresponde a la diferencia de medianas en  $n_1=100$  y  $n_2=30$  y el más alejado de la diferencia es el correspondiente a la mediana muestral en  $n_1=100$  y  $n_2=100$ .

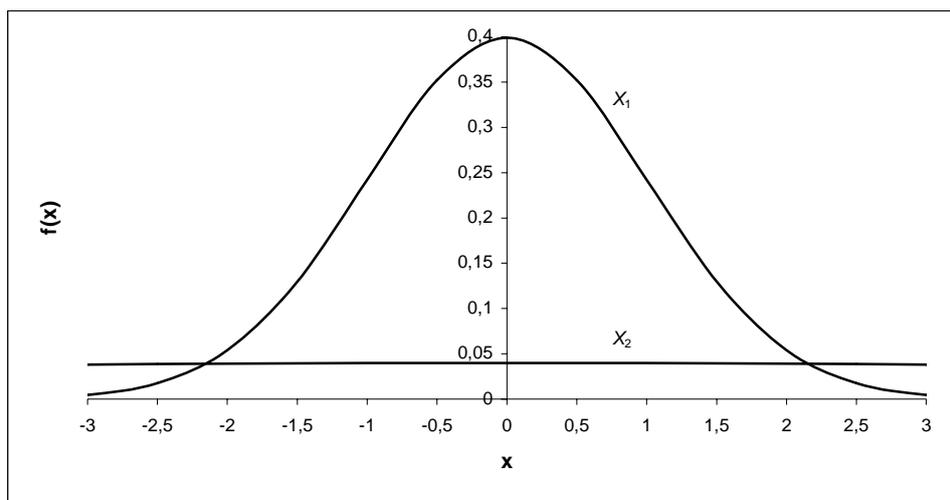
**Tabla LX**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Intervalos de confianza para la diferencia de medias y medianas**

$\hat{\mu}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$					$\hat{\mu}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	-0,0702 ± 0,7565	-0,1681 ± 0,7615	-0,3793 ± 1,0122	0,2711 ± 0,8243	5	0,1034 ± 1,0445	-0,2661 ± 0,9221	-0,2652 ± 1,4006	0,2132 ± 1,0388
15	-0,0604 ± 0,8093	0,2198 ± 1,0170	-0,1038 ± 1,0594	0,2079 ± 0,7933	15	-0,0188 ± 0,8420	0,0547 ± 1,4195	-0,1864 ± 1,1661	0,3781 ± 1,1704
30	-0,0704 ± 0,8336	-0,0929 ± 0,9813	0,1191 ± 0,7390	-0,4543 ± 1,0948	30	0,0312 ± 1,1226	-0,2101 ± 1,1754	0,3117 ± 1,0977	-0,4372 ± 0,9960
100	0,1353 ± 1,0877	0,0500 ± 0,8638	-0,1646 ± 0,6868	-0,0938 ± 0,9009	100	-0,1173 ± 1,1264	0,1712 ± 0,8638	0,0021 ± 0,7166	-0,5294 ± 1,2742

Elaboración: M. Rojas.

**Caso 2:  $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$**

**Gráfico 4.74**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución  $X_1:N(0, 1)$  y  $X_2:N(0, 10)$**



Elaboración: M. Rojas.

Los siguientes son los resultados después de 100 corridas para dos muestras provenientes de dos distribuciones normales con parámetros  $\mu_1 = 0$  y  $\sigma_1^2 = 1$  y  $\mu_2 = 0$  y  $\sigma_2^2 = 10$  respectivamente.

Para este caso el contraste de hipótesis será:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$$

Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$$

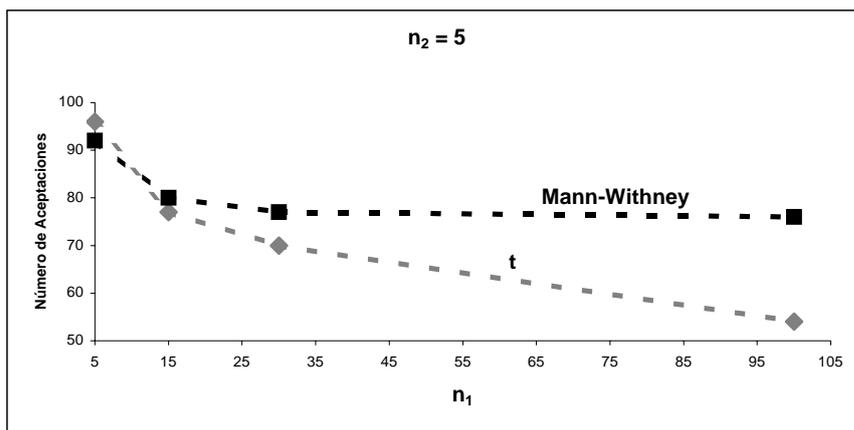
En la Tabla LXI puede apreciarse que el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula de la prueba t para dos muestras para  $\alpha=0,1$  fue de 47 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 54 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 68 de 100 corridas. Para la prueba de Mann-Withney el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,1$  fue de 65 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 76 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 89 de 100 corridas. Para tamaños de muestra grandes la prueba t fue más potente que la prueba de Mann-Withney, mientras que si los tamaños de muestra difieren considerablemente tenemos que la prueba de Mann-Withney es más potente que su equivalente no paramétrico. Los Gráficos 4.75 a 4.78 representan los resultados obtenidos.

**Tabla LXI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
**Vs**  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$

		$\alpha = 0.1$				$\alpha = 0.05$				$\alpha = 0.01$							
		<b>Prueba t (paramétrica)</b>															
		$n_2$				$n_2$				$n_2$							
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100
5		92	99	100	100		96	100	100	100		98	100	100	100		
15		73	91	99	100		77	95	100	100		88	98	100	100		
30		63	81	94	99		70	83	97	100		79	93	99	100		
100		47	62	75	96		54	72	85	96		68	81	90	99		
		<b>Prueba Mann-Withney (no paramétrica)</b>															
		$n_2$				$n_2$				$n_2$							
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100
5		89	93	99	100	5		92	95	100	100	5		97	100	100	100
15		69	82	90	99	15		80	87	96	99	15		93	94	99	100
30		70	76	87	95	30		77	82	91	97	30		92	91	98	99
100		65	75	78	84	100		76	77	86	91	100		90	89	94	98

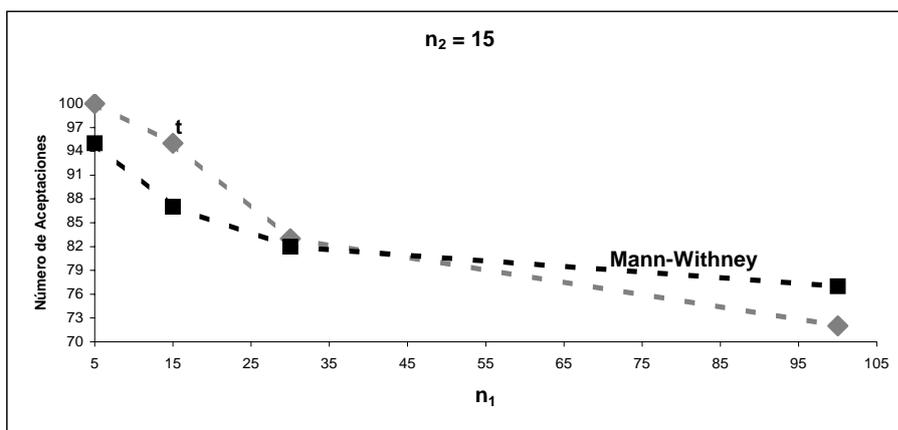
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.75**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
 Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



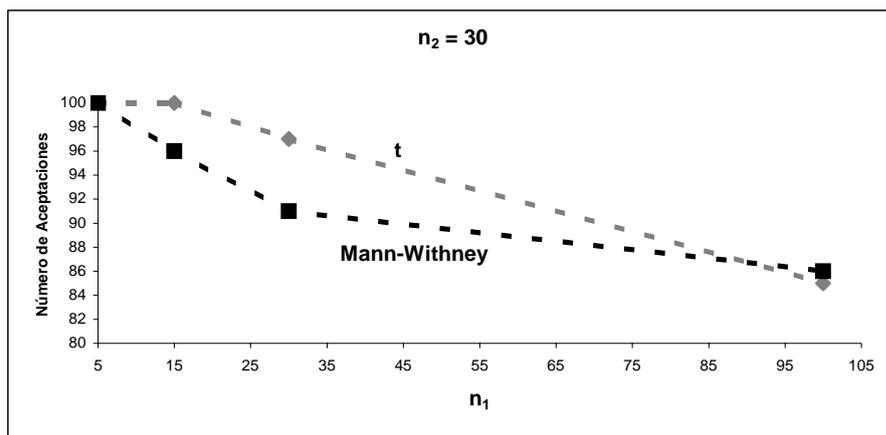
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.76**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
 Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



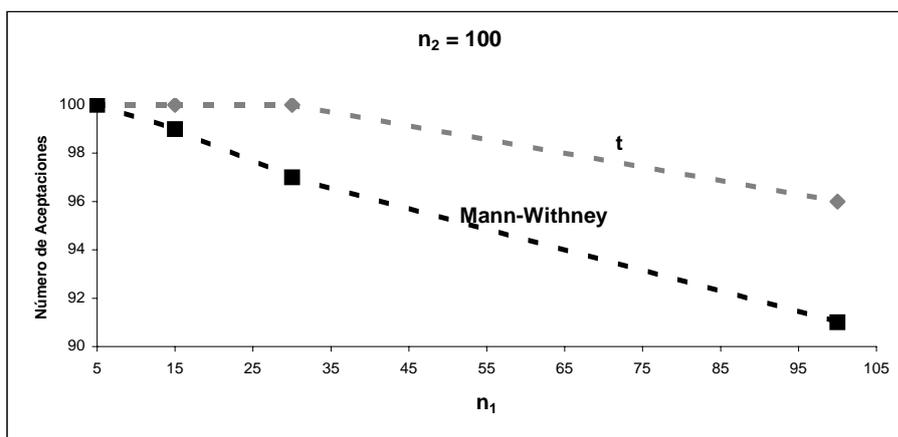
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.77**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.78**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

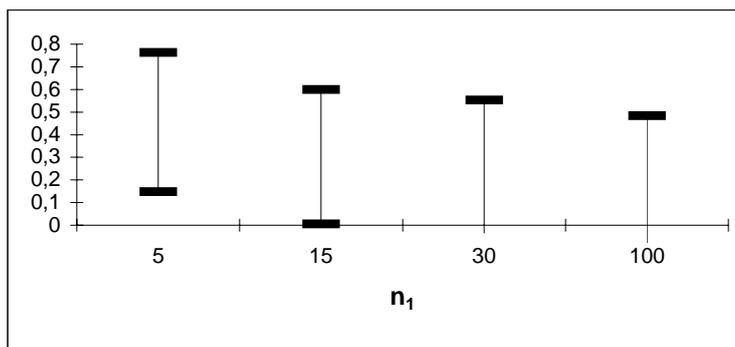
Puede apreciarse en la Tabla LXII que la prueba t presentó en promedio mayor valor plausible para todas las corridas y para todos los tamaños de muestras considerados. El más alto valor plausible para la prueba t para dos muestras se registró con  $n_1=5$  y  $n_2=100$  mientras que el menor se registró con  $n_1=100$  y  $n_2=5$ . Para la Prueba de Mann-Withney el valor plausible más alto se registró con  $n_1=5$  y  $n_2=100$  mientras que el menor se registró con  $n_1=100$  y  $n_2=5$ . Los Gráficos 4.79 a 4.86 representan los resultados obtenidos.

**Tabla LXII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$**

Prueba t (paramétrica)					Prueba Mann-Withney (no paramétrica)				
$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ <small><math>H_0: \mu_1 = \mu_2</math> Vs <math>H_1: \mu_1 \neq \mu_2</math></small>					$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ <small><math>H_0: \mu_1 = \mu_2</math> Vs <math>H_1: \mu_1 \neq \mu_2</math></small>				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,4555 ± 0,3079	0,6679 ± 0,2694	0,7152 ± 0,1937	0,7827 ± 0,1484	5	0,2057 ± 0,145	0,2766 ± 0,1395	0,3182 ± 0,123	0,3531 ± 0,1002
15	0,3026 ± 0,2966	0,4872 ± 0,3101	0,5812 ± 0,2659	0,7083 ± 0,2230	15	0,1755 ± 0,1483	0,222 ± 0,1538	0,2599 ± 0,1367	0,3108 ± 0,1327
30	0,2585 ± 0,2943	0,4025 ± 0,3241	0,4392 ± 0,2659	0,6198 ± 0,2567	30	0,1653 ± 0,1466	0,2035 ± 0,1559	0,2188 ± 0,1361	0,2601 ± 0,1366
100	0,2004 ± 0,2832	0,2927 ± 0,3176	0,3084 ± 0,2996	0,4574 ± 0,2752	100	0,1602 ± 0,1467	0,1937 ± 0,1598	0,2012 ± 0,1482	0,2141 ± 0,1534

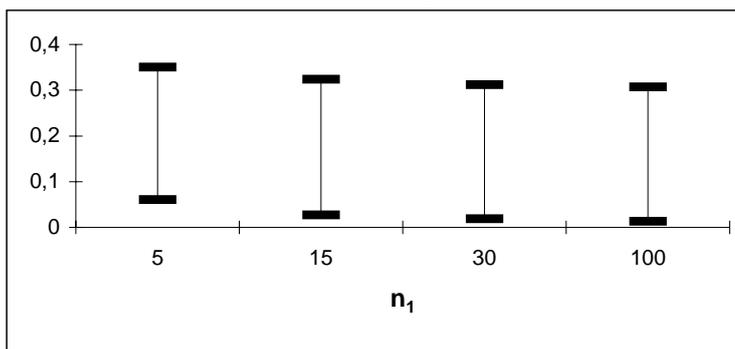
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.79**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$**   
**Prueba t: 100 corridas**



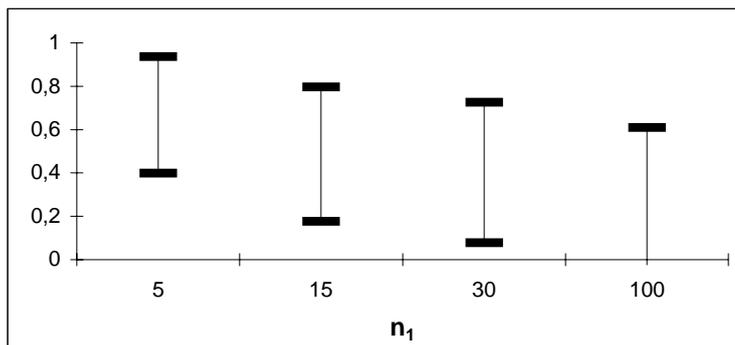
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.80**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$**   
**Prueba Mann-Withney: 100 corridas**



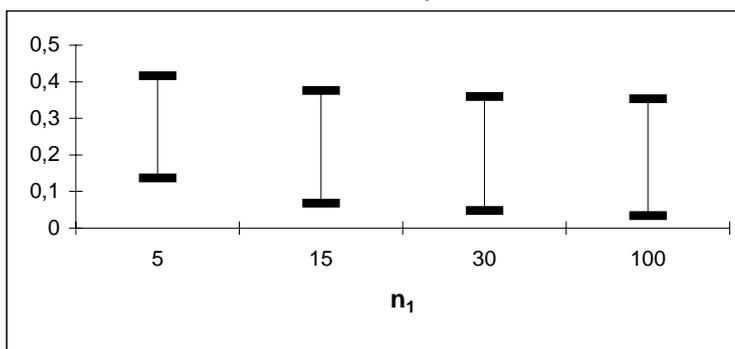
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.81**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$**   
**Prueba t: 100 corridas**



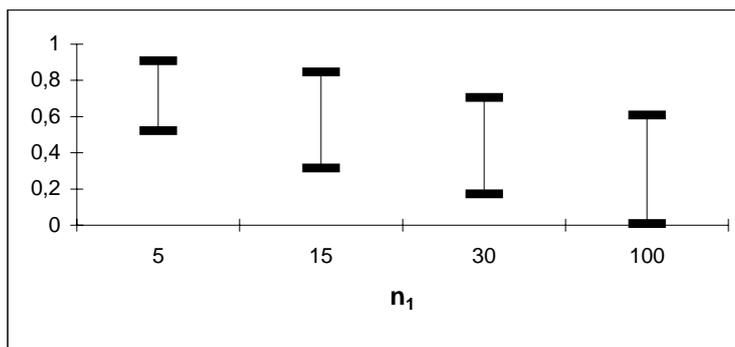
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.82**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$**   
**Prueba Mann-Withney: 100 corridas**



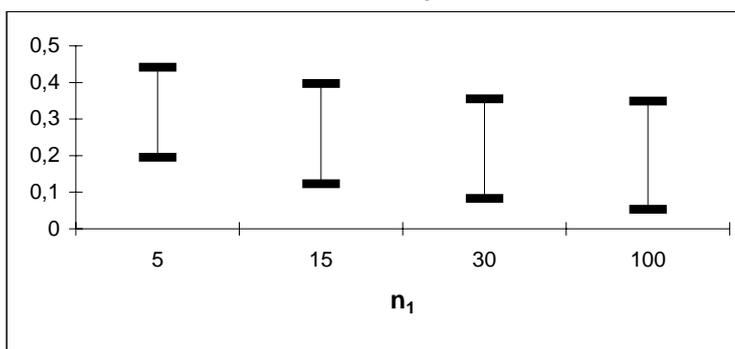
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.83**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_S$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba t: 100 corridas**



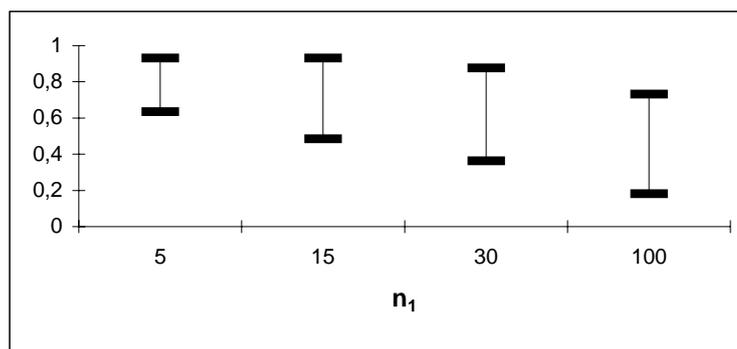
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.84**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_S$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba Mann-Whitney: 100 corridas**



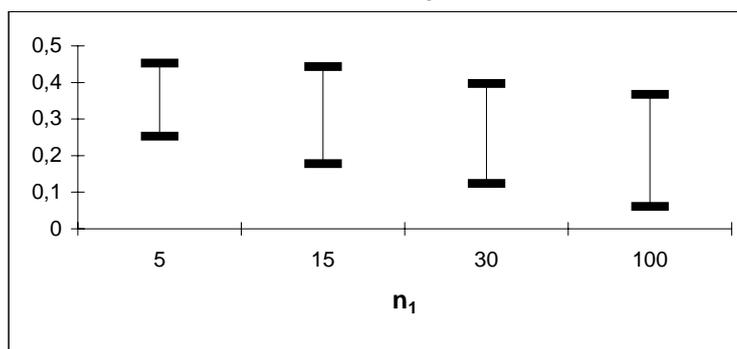
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.85**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba t: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.86**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba Mann-Withney: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

Pueden apreciarse en las Tablas LXIII y LXIV las longitudes de los intervalos de confianza del valor plausible, de las medias y medianas muestrales. El intervalo más largo para el valor plausible se registró en  $n_1=100$  y  $n_2=15$  y corresponde a la prueba t mientras que la menor se registró con  $n_1=5$  y  $n_2=100$  y corresponde a la prueba de Mann-Withney. Para las medias y medianas muestrales el intervalo de mayor longitud corresponde a la mediana muestral en  $n_1=5$  y  $n_2=5$  y el de menor longitud corresponde a la media muestral en  $n_1=100$  y  $n_2=100$ .

**Tabla LXIII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible**

Prueba t (paramétrica)					Prueba Mann-Withney (no paramétrica)				
$L_p$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$					$L_p$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,6158	0,5388	0,3874	0,2968	5	0,2900	0,2790	0,2460	0,2004
15	0,5932	0,6202	0,5318	0,4460	15	0,2966	0,3076	0,2734	0,2654
30	0,5886	0,6482	0,5318	0,5134	30	0,2932	0,3118	0,2722	0,2732
100	0,5664	0,6352	0,5992	0,5504	100	0,2934	0,3196	0,2964	0,3068

Elaboración: M. Rojas.

**Tabla LXIV**  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
**Longitudes de los intervalos de confianza para la diferencia de medias y medianas:**

		$L_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$						$L_{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2}$			
		$n_2$						$n_2$			
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100
5		3,2252	1,9086	1,4046	0,9990	5		4,0274	2,2982	1,7172	1,4294
15		3,1884	1,8850	1,2872	0,8506	15		3,8680	2,3346	1,5198	1,1486
30		3,2066	1,9144	1,3076	0,8148	30		3,7946	2,2844	1,4734	1,0376
100		1,1678	1,864	1,2466	0,7230	100		3,7492	2,2058	1,3998	0,9364

Elaboración: M. Rojas.

La Tabla LXV muestra que el valor más cercano a que la diferencia entre medias sea igual a 0 es 0,0019 y corresponde a la diferencia de medias en  $n_1=5$  y  $n_2=5$  y el más alejado de la diferencia es el correspondiente a la mediana muestral en  $n_1=100$  y  $n_2=5$ .

**Tabla LXV**  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 10)$   
**Intervalos de confianza para la diferencia de medias y medianas**

		$\hat{\mu}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$						$\hat{\mu}_{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2} \pm \hat{\sigma}_{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2}$			
		$n_2$						$n_2$			
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100
5		0,0019 ± 1,6126	-0,0213 ± 0,9543	-0,018 ± 0,7023	-0,0175 ± 0,4995	5		-0,0507 ± 2,0137	-0,0019 ± 1,1491	0,0029 ± 0,8586	0,0295 ± 0,7147
15		0,0142 ± 1,5942	-0,0091 ± 0,9425	-0,0058 ± 0,6436	-0,0053 ± 0,4253	15		-0,0498 ± 1,934	-0,001 ± 1,1673	0,0037 ± 0,7599	0,0303 ± 0,5743
30		0,0217 ± 1,6033	-0,0016 ± 0,9572	0,0017 ± 0,6538	0,0023 ± 0,4074	30		-0,0597 ± 1,8973	-0,0109 ± 1,1422	-0,0062 ± 0,7367	0,0204 ± 0,5188
100		0,0214 ± 1,5839	-0,0018 ± 0,932	0,0015 ± 0,6233	0,002 ± 0,3615	100		-0,0608 ± 1,8746	-0,012 ± 1,1029	-0,0072 ± 0,6999	0,0194 ± 0,4682

Elaboración: M. Rojas.

#### 4.3.2 Comparación en dos muestras provenientes de una distribución simétrica

Se tomarán muestras provenientes de una distribución de Laplace. Para este caso la hipótesis será:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

Vs

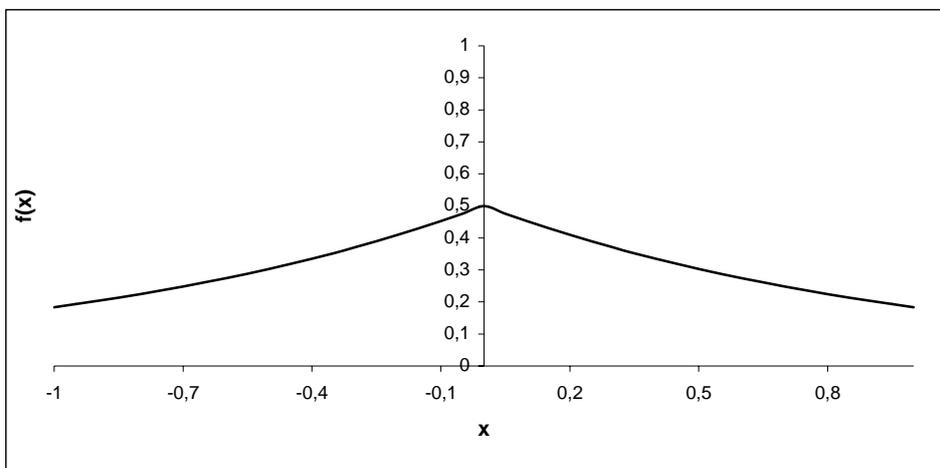
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Es decir que las medias de las poblaciones de las que provienen las muestras son iguales. Violaremos el supuesto de normalidad de la prueba t para dos muestras y mantendremos el supuesto de simetría de la prueba de Mann-Whitney.

##### **Caso 1: $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ y $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$**

Los siguientes son los resultados después de 100 corridas para dos muestras provenientes de dos distribuciones de Laplace con parámetros  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ .

**Gráfico 4.87**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución de Laplace(0 , 1)**



Elaboración: M. Rojas.

Para este caso el contraste de hipótesis será:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$$

Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$$

En la Tabla LXVI puede apreciarse que el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula de la prueba t para dos muestras para  $\alpha=0,1$  fue de 92 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 95 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 99 de 100 corridas. Para la prueba de Mann-Withney el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,1$  fue de 87 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 94 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 97 de 100 corridas. Para tamaños de muestra grandes la prueba t se

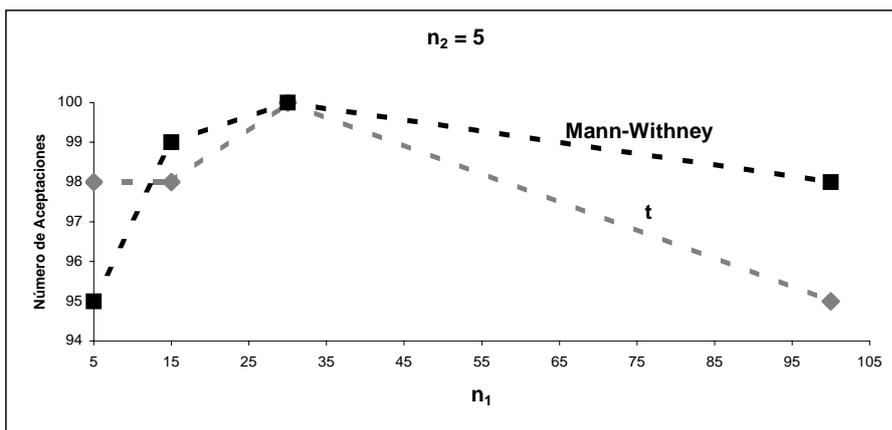
mantuvo como la más potente, aún en los casos en que los tamaños de muestra diferían considerablemente. La prueba de Mann-Withney resultó tener menos potente que la prueba t para dos muestras en los casos considerados en la simulación. Los Gráficos 4.88 a 4.91 representan los resultados obtenidos.

**Tabla LXVI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$

$\alpha = 0.1$					$\alpha = 0.05$					$\alpha = 0.01$				
Prueba t (paramétrica)														
$n_2$					$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	94	96	92	93	5	98	99	96	97	5	100	100	99	98
15	98	95	93	93	15	98	97	96	95	15	100	99	99	99
30	97	94	95	95	30	100	98	97	98	30	100	99	99	100
100	94	92	95	94	100	95	97	97	99	100	100	100	98	100
Prueba Mann-Withney (no paramétrica)														
$n_2$					$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	88	89	89	87	5	95	96	95	97	5	99	100	100	99
15	93	89	86	88	15	99	94	92	94	15	100	97	99	99
30	93	92	89	91	30	100	95	95	94	30	100	98	99	99
100	92	87	85	88	100	98	95	96	94	100	100	100	99	100

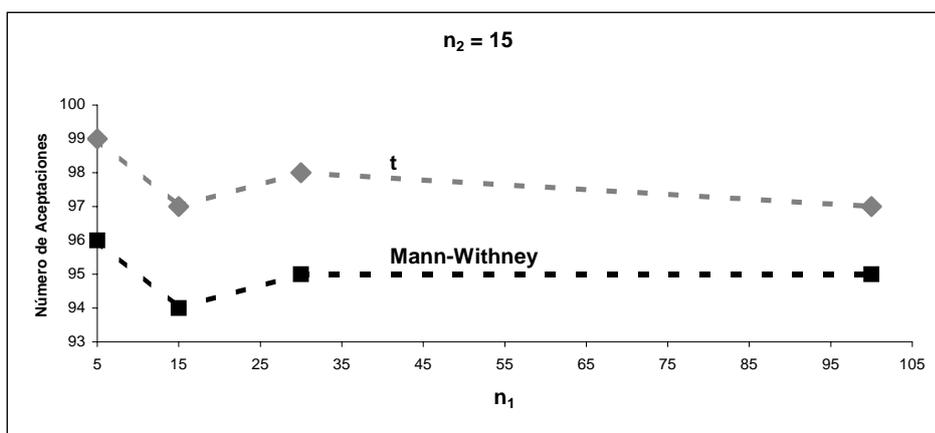
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.88**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
**Vs**  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



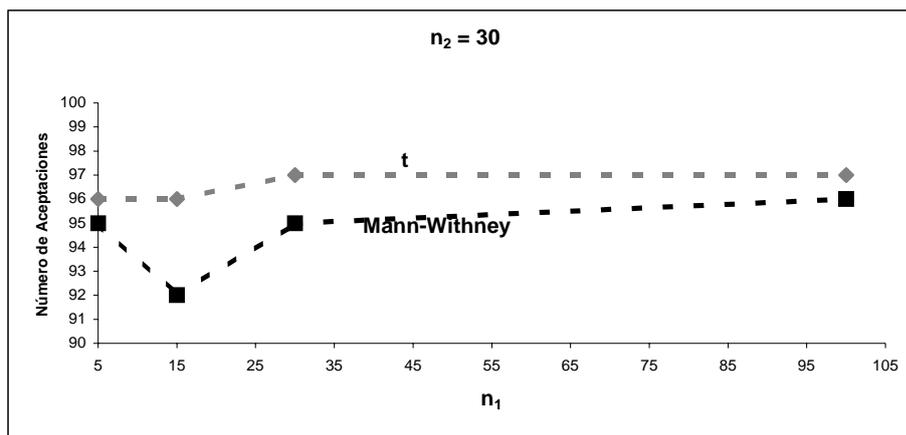
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.89**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
**Vs**  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



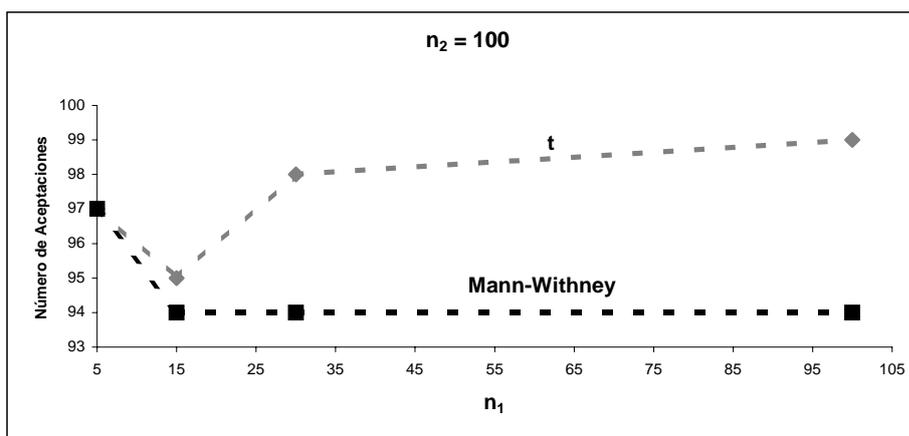
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.90**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
 Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.91**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
 Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla LXVII que la prueba t presentó en promedio el mayor valor plausible para todas las corridas y para todos los tamaños de muestras considerados. El más alto valor plausible para la prueba t de dos muestras se registró con  $n_1=100$  y  $n_2=5$  mientras que el menor se registró con  $n_1=5$  y  $n_2=100$ . Para la Prueba de Mann-Whitney el más alto valor plausible se registró con  $n_1=100$  y  $n_2=30$  mientras que el menor se registró con  $n_1=5$  y  $n_2=30$ . Los Gráficos 4.92 a 4.99 representan los resultados obtenidos.

**Tabla LXVII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
**Intervalos de confianza para el valor plausible**

Prueba t (paramétrica)					Prueba Mann-Whitney (no paramétrica)				
$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ <small>H<sub>0</sub>: <math>\mu_1 = \mu_2</math> Vs H<sub>1</sub>: <math>\mu_1 \neq \mu_2</math></small>					$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ <small>H<sub>0</sub>: <math>\mu_1 = \mu_2</math> Vs H<sub>1</sub>: <math>\mu_1 \neq \mu_2</math></small>				
<b>n<sub>2</sub></b>					<b>N<sub>2</sub></b>				
<b>n<sub>1</sub></b>	5	15	30	100	<b>n<sub>1</sub></b>	5	15	30	100
5	0,4954 ± 0,2936	0,4634 ± 0,2843	0,4608 ± 0,3054	0,4253 ± 0,2758	5	0,2583 ± 0,1474	0,2279 ± 0,1381	0,2244 ± 0,1432	0,2109 ± 0,1344
15	0,5516 ± 0,2830	0,4836 ± 0,2746	0,4777 ± 0,2890	0,5039 ± 0,3041	15	0,2676 ± 0,1426	0,2420 ± 0,1430	0,2471 ± 0,1495	0,2390 ± 0,1470
30	0,5558 ± 0,2937	0,5038 ± 0,2873	0,4968 ± 0,2723	0,4902 ± 0,2843	30	0,2703 ± 0,1432	0,2436 ± 0,1421	0,2503 ± 0,1459	0,2324 ± 0,1462
100	0,5559 ± 0,2856	0,5223 ± 0,2948	0,5068 ± 0,3026	0,4471 ± 0,2888	100	0,2731 ± 0,1365	0,2588 ± 0,1510	0,2611 ± 0,1567	0,2387 ± 0,1517

Elaboración: M. Rojas.

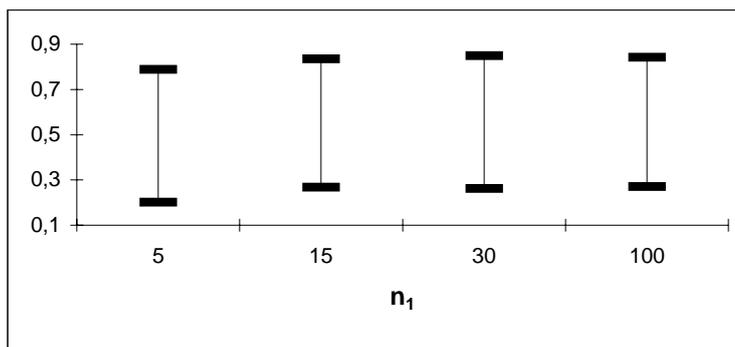
**Gráfico 4.92**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$   
 Prueba t: 100 corridas



Elaboración: M. Rojas.

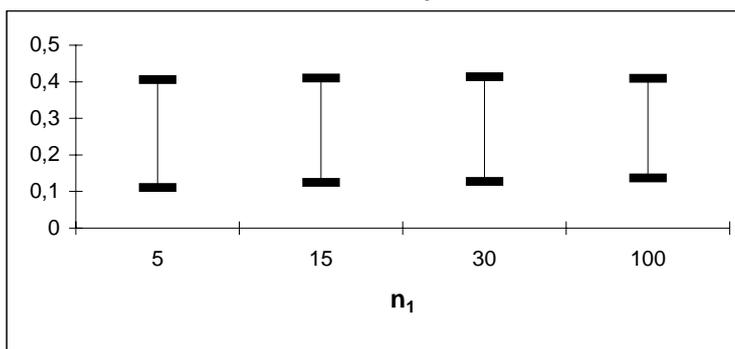
**Gráfico 4.93**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$   
 Prueba Mann-Withney: 100 corridas



Elaboración: M. Rojas.

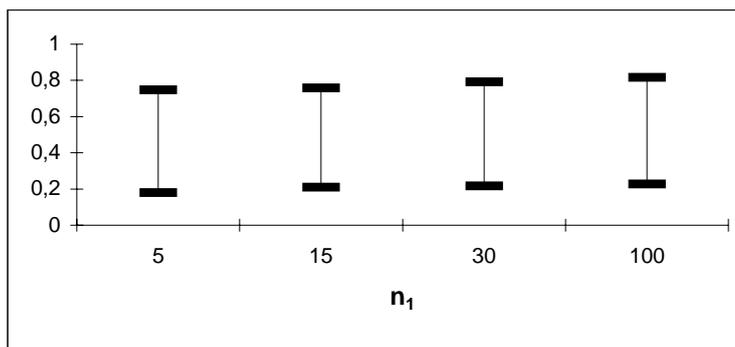
**Gráfico 4.94**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$**   
**Prueba t: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

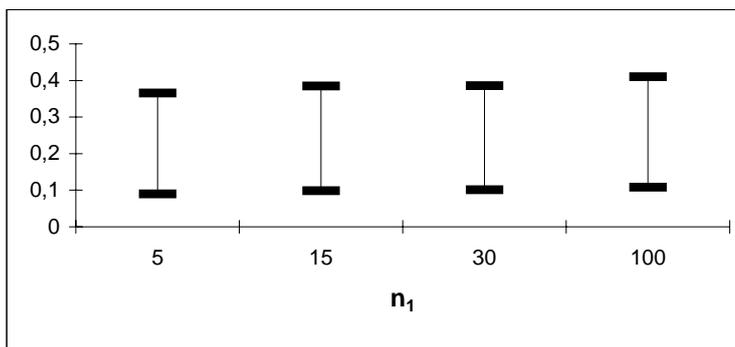
**Gráfico 4.95**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

Vs

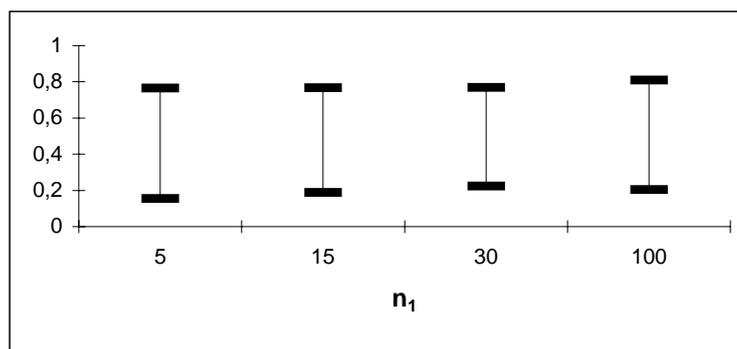
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$**   
**Prueba Mann-Withney: 100 corridas**



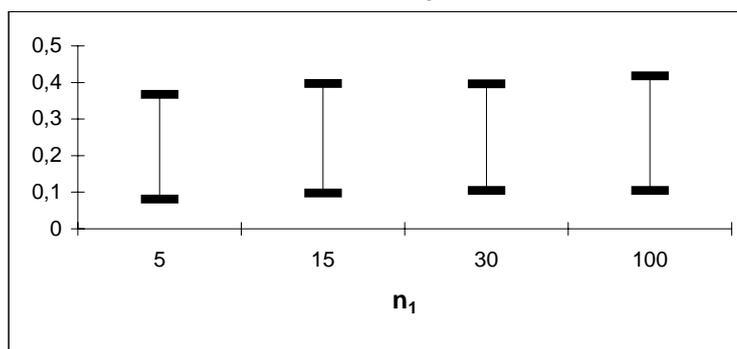
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.96**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba t: 100 corridas**



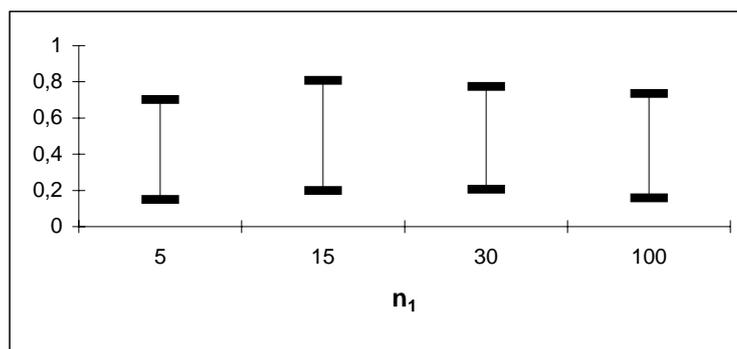
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.97**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba Mann-Whitney: 100 corridas**



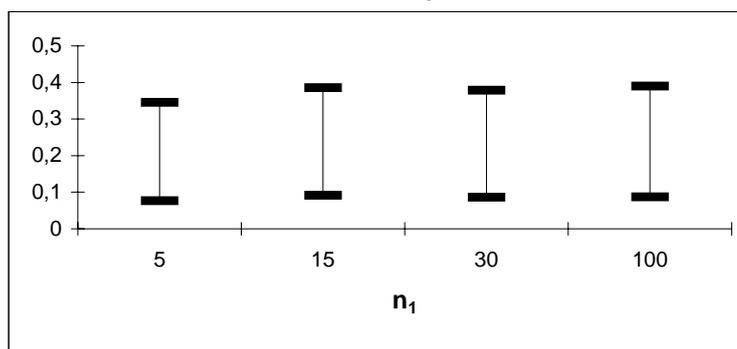
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.98**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba t: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.99**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba Mann-Whitney: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

Pueden apreciarse en las Tablas LXVIII y LXIX las longitudes de los intervalos de confianza del valor plausible y de las medias y medianas muestrales. El intervalo más largo para el valor plausible se registró en  $n_1=5$  y  $n_2=5$  y corresponde a la prueba t mientras que la menor se registró con  $n_1=100$  y  $n_2=100$  y corresponde a la prueba de Mann-Withney. Para las medias y medianas muestrales el intervalo de mayor longitud corresponde a la media muestral en  $n_1=5$  y  $n_2=5$  y el de menor longitud corresponde a la mediana muestral en  $n_1=100$  y  $n_2=100$ .

**Tabla LXVIII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor p**

Prueba t (paramétrica)					Prueba Mann-Withney (no paramétrica)				
$L_p$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$					$L_p$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,5872	0,5686	0,6108	0,5516	5	0,2948	0,2762	0,2864	0,2688
15	0,5660	0,5492	0,578	0,6082	15	0,2852	0,2860	0,2990	0,2940
30	0,5874	0,5746	0,5446	0,5686	30	0,2864	0,2842	0,2918	0,2924
100	0,5712	0,5896	0,6052	0,5776	100	0,2730	0,3020	0,3134	0,3034

Elaboración: M. Rojas.

**Tabla LXIX**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
**Longitudes de los intervalos de confianza para la diferencia de medias y medianas**

		$L_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$						$L_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$			
		$n_2$						$n_2$			
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100
5		2,5678	2,1736	2,1204	2,0958	5		2,3446	2,0454	1,9436	1,8818
15		1,8386	1,4818	1,3404	1,1954	15		1,6410	1,2842	1,0730	0,9558
30		1,7676	1,2548	1,0430	0,8750	30		1,5658	1,0858	0,8242	0,6836
100		1,7314	1,1052	0,8756	0,6174	100		1,4924	0,9484	0,6458	0,4486

Elaboración: M. Rojas.

La Tabla LXX muestra que el valor más cercano a que la diferencia entre medias sea igual a 0 es 0,0006 y corresponde a la diferencia de medianas en  $n_1=15$  y  $n_2=15$  y el más alejado de la diferencia es el correspondiente a la media muestral en  $n_1=100$  y  $n_2=100$ .

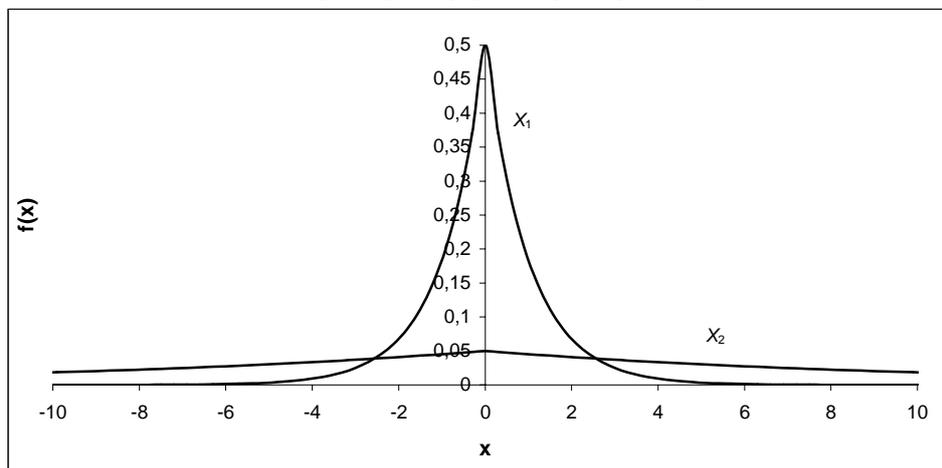
**Tabla LXX**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
**Intervalos de confianza para la diferencia de medias y medianas**

		$\hat{\mu}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$						$\hat{\mu}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$			
		$n_2$						$n_2$			
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100
5		-0,0650 ± 1,2839	-0,0764 ± 1,0868	-0,0962 ± 1,0602	-0,0781 ± 1,0479	5		-0,0721 ± 1,1723	-0,0855 ± 1,0227	-0,1025 ± 0,9718	-0,0757 ± 0,9409
15		-0,0275 ± 0,9193	-0,0389 ± 0,7409	-0,0587 ± 0,6702	-0,0406 ± 0,5977	15		0,0202 ± 0,8205	0,0068 ± 0,6421	-0,0102 ± 0,5365	0,0166 ± 0,4779
30		0,0105 ± 0,8838	-0,0009 ± 0,6274	-0,0207 ± 0,5215	-0,0026 ± 0,4375	30		0,0298 ± 0,7829	0,0164 ± 0,5429	-0,0006 ± 0,4121	0,0262 ± 0,3418
100		0,0273 ± 0,8657	0,0159 ± 0,5526	-0,0038 ± 0,4378	0,0143 ± 0,3087	100		0,0173 ± 0,7462	0,0039 ± 0,4742	-0,0131 ± 0,3229	0,0138 ± 0,2243

Elaboración: M. Rojas.

**Caso 2:  $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$**

**Gráfico 4.100**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución**  
 $X_1: \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2: \text{Laplace}(0, 10)$



Elaboración: M. Rojas.

Los siguientes son los resultados después de 100 corridas para dos muestras provenientes de dos distribuciones de Laplace con parámetros  $\alpha_1 = 0$  y  $\beta_1 = 1$  y  $\alpha_2 = 0$  y  $\beta_2 = 10$  respectivamente.

Para este caso el contraste de hipótesis será:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$$

Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$$

En la Tabla LXXI puede apreciarse que el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula de la prueba t para dos muestras para

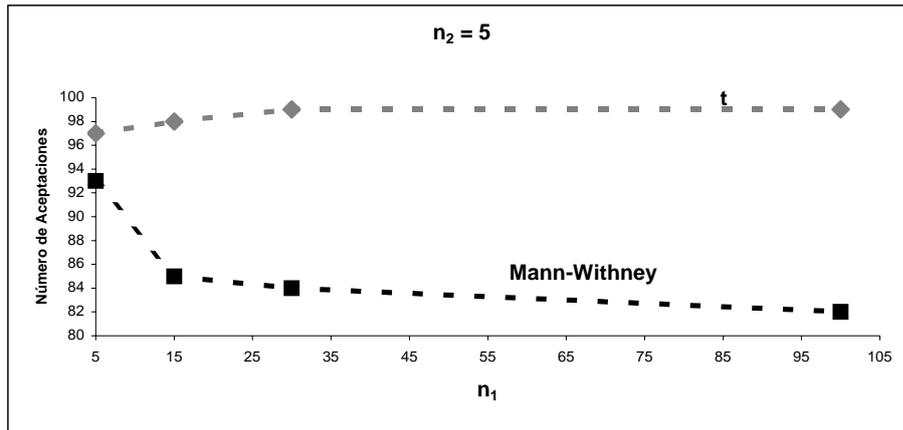
$\alpha=0,1$  fue de 94 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 97 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 100 corridas. Para la prueba de Mann-Withney el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,1$  fue de 76 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 84 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 93 de 100 corridas. Para tamaños de muestra grandes la prueba t fue más potente que su equivalente no paramétrico(Prueba de Mann-Withney). De la misma forma cuando los tamaños de muestra difieren la prueba t sigue manteniéndose como la más potente. Los Gráficos 4.101 a 4.104 representan los resultados obtenidos.

**Tabla LXXI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$

		$\alpha = 0.1$					$\alpha = 0.05$					$\alpha = 0.01$					
		Prueba t (paramétrica)															
		$n_2$					$n_2$					$n_2$					
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100
5		94	97	95	97	5		97	99	97	99	5		100	100	100	100
15		94	98	99	100	15		98	99	100	100	15		100	100	100	100
30		95	99	98	99	30		99	99	100	100	30		100	100	100	100
100		95	99	97	98	100		99	99	100	99	100		100	100	100	100
		Prueba Mann-Withney (no paramétrica)															
		$n_2$					$n_2$					$n_2$					
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100
5		90	96	99	100	5		93	97	99	100	5		99	99	100	100
15		79	90	97	100	15		85	96	99	100	15		99	98	100	100
30		76	86	92	98	30		84	92	97	100	30		97	97	100	100
100		76	76	83	89	100		82	85	93	92	100		93	96	97	98

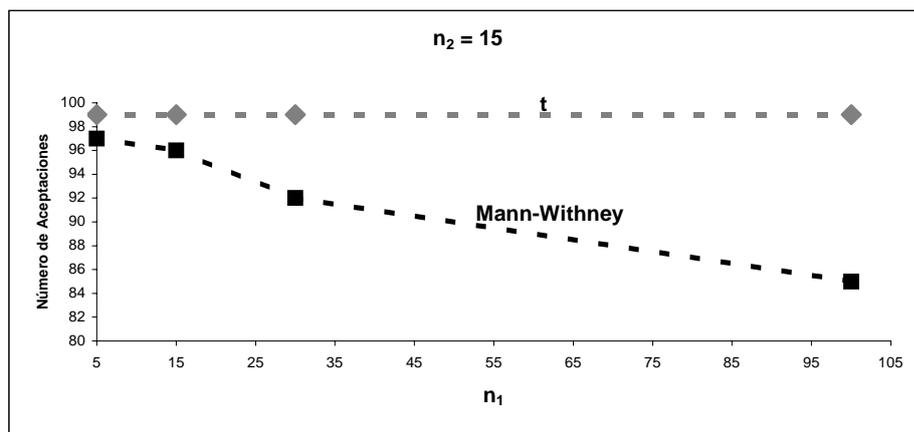
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.101**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
**Vs**  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



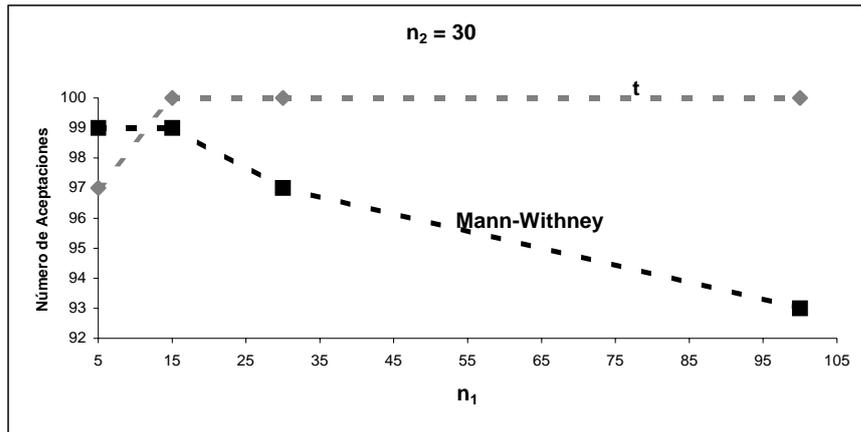
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.102**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
**Vs**  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



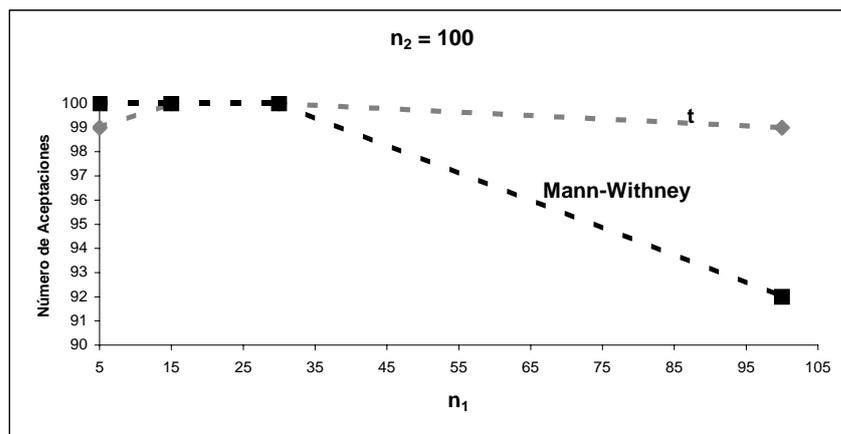
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.103**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
**Vs**  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.104**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$   
**Vs**  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla LXXII que la prueba t presentó en promedio el mayor valor plausible para todas las corridas y para todos los tamaños de muestras considerados. El más alto valor plausible de la prueba t para dos muestras se registró con  $n_1=15$  y  $n_2=100$  mientras que el menor se registró con  $n_1=15$  y  $n_2=5$ . Para la Prueba de Mann-Withney el más alto valor plausible se registró con  $n_1=100$  y  $n_2=15$  mientras que el menor se registró con  $n_1=100$  y  $n_2=5$ . Los Gráficos 4.105 a 4.112 representan los resultados obtenidos.

**Tabla LXXII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$   
**Intervalos de confianza para el valor plausible**

Prueba t (paramétrica)					Prueba Mann-Withney (no paramétrica)				
$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$					$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,4886 ± 0,2874	0,5107 ± 0,2877	0,5213 ± 0,2866	0,5241 ± 0,2854	5	0,2321 ± 0,1404	0,2817 ± 0,1418	0,2957 ± 0,1222	0,3305 ± 0,1191
15	0,4764 ± 0,2921	0,4983 ± 0,293	0,548 ± 0,2826	0,5768 ± 0,2737	15	0,2024 ± 0,152	0,2313 ± 0,1444	0,2686 ± 0,1297	0,3258 ± 0,1076
30	0,4776 ± 0,2842	0,4888 ± 0,2823	0,5346 ± 0,2774	0,5217 ± 0,2785	30	0,1931 ± 0,1459	0,2183 ± 0,1476	0,2412 ± 0,1345	0,2963 ± 0,1292
100	0,4919 ± 0,2912	0,4823 ± 0,2834	0,5437 ± 0,2955	0,5127 ± 0,3023	100	0,1919 ± 0,1496	0,2016 ± 0,1487	0,2162 ± 0,1483	0,245 ± 0,1476

Elaboración: M. Rojas.

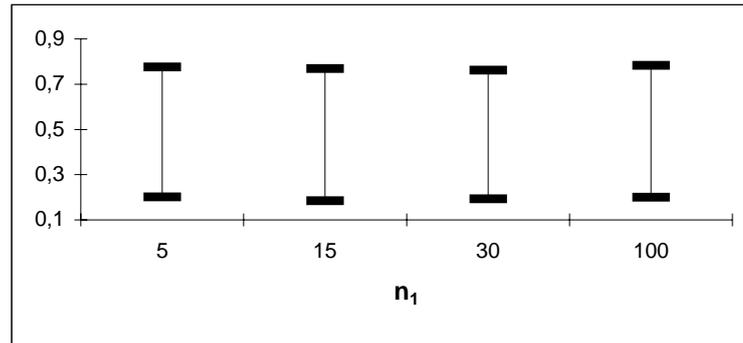
**Gráfico 4.105**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$V_s$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$   
 Prueba t: 100 corridas



Elaboración: M. Rojas.

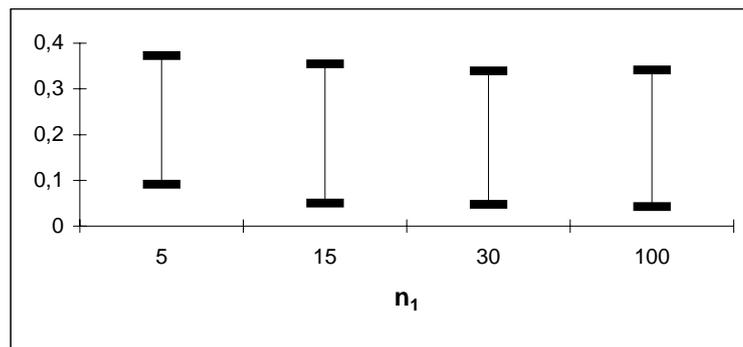
**Gráfico 4.106**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$V_s$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$   
 Prueba Mann-Withney: 100 corridas



Elaboración: M. Rojas.

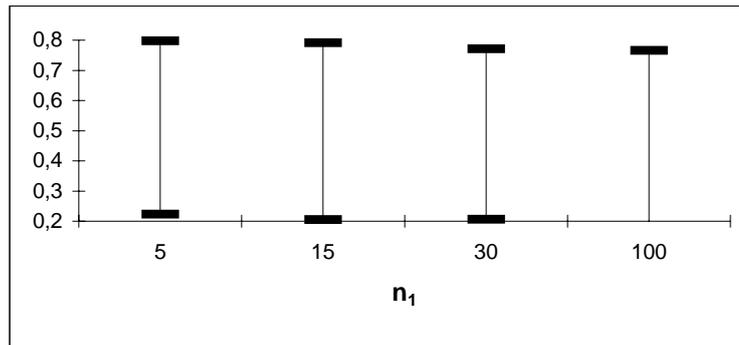
**Gráfico 4.107**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$**   
**Prueba t: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

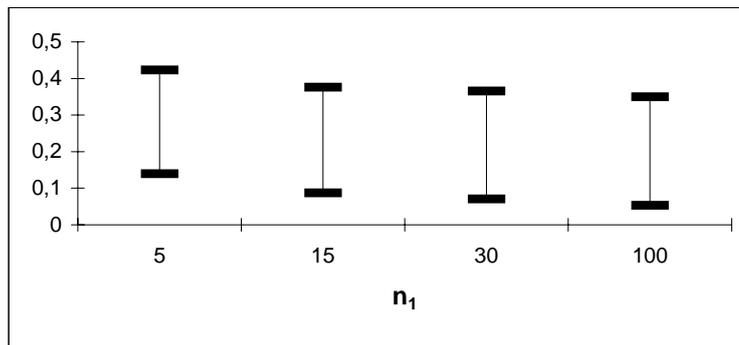
**Gráfico 4.108**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$**   
**Prueba Mann-Withney: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

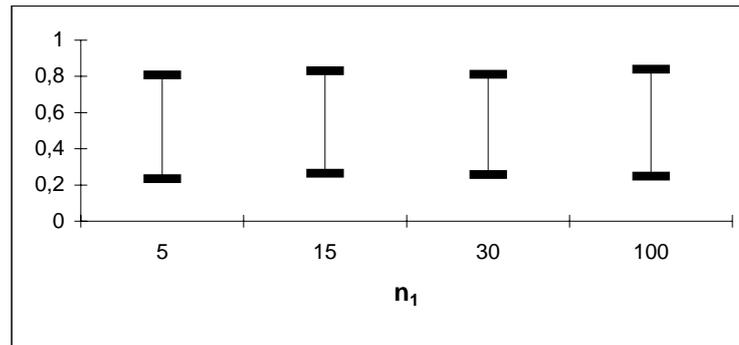
**Gráfico 4.109**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba t: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

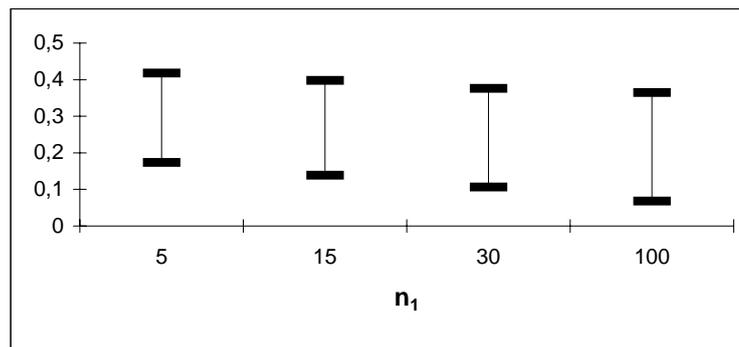
**Gráfico 4.110**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba Mann-Withney: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

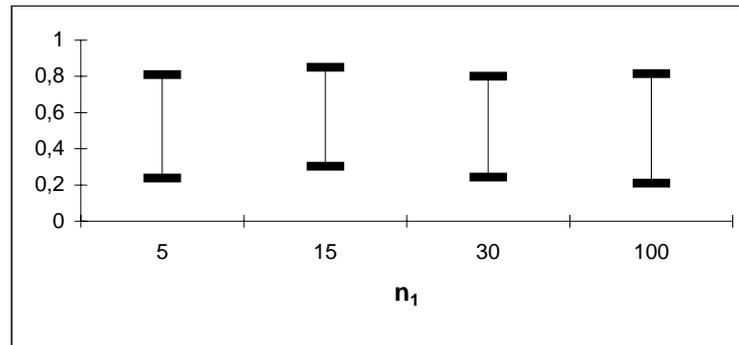
**Gráfico 4.111**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba t: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

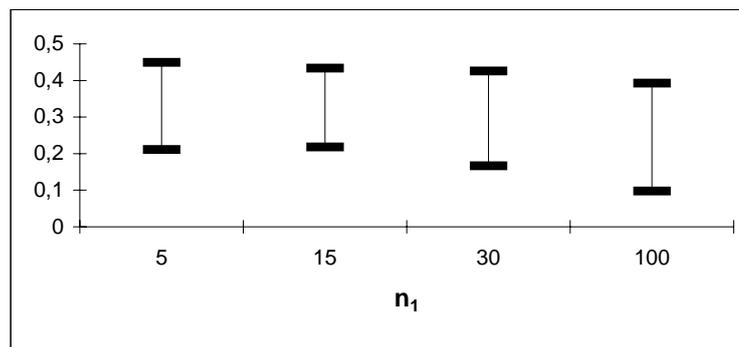
**Gráfico 4.112**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba Mann-Whitney: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

Pueden apreciarse en las Tablas LXXIII y LXXIV las longitudes de los intervalos de confianza del valor plausible, de las medias y medianas muestrales. El intervalo más largo para el valor plausible se registró en  $n_1=100$  y  $n_2=100$  y corresponde a la prueba t mientras que la menor se registró con  $n_1=5$  y  $n_2=30$  y corresponde a la prueba de Mann-Withney. Para las medias y medianas muestrales el intervalo de mayor longitud corresponde a la mediana muestral en  $n_1=5$  y  $n_2=5$  y el de menor longitud corresponde a la media muestral en  $n_1=100$  y  $n_2=100$ .

**Tabla LXXIII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$   
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible**

Prueba t (paramétrica)					Prueba Mann-Withney (no paramétrica)				
$L_p$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$					$L_p$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,5748	0,5754	0,5732	0,5708	5	0,2808	0,2836	0,2444	0,2382
15	0,5842	0,5860	0,5652	0,5474	15	0,3040	0,2888	0,2594	0,2152
30	0,5684	0,5646	0,5548	0,5570	30	0,2918	0,2952	0,2690	0,2584
100	0,5824	0,5668	0,5910	0,6046	100	0,2992	0,2974	0,2966	0,2952

Elaboración: M. Rojas.

**Tabla LXXIV**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$   
**Longitudes de los intervalos de confianza para la diferencia de medias y medianas**

		$L_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$						$L_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$			
		$n_2$						$n_2$			
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100
5		0,1330	0,1122	0,1034	0,1004	5		0,1598	0,1276	0,1158	0,1110
15		0,1138	0,0730	0,0636	0,0638	15		0,1380	0,0880	0,0790	0,0756
30		0,1038	0,0664	0,0584	0,0506	30		0,1312	0,0812	0,0724	0,0614
100		0,0960	0,0526	0,0416	0,0312	100		0,1248	0,0674	0,0542	0,0408

Elaboración: M. Rojas.

La Tabla LXXV muestra que el valor más cercano a que la diferencia entre medias sea igual a 0 es 0,0004 y corresponde a la diferencia de medias en  $n_1=30$  y  $n_2=5$  y el más alejado de la diferencia es el correspondiente a la mediana muestral en  $n_1=100$  y  $n_2=5$ .

**Tabla LXXV**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 10)$   
**Intervalos de confianza para la diferencia de medias y medianas**

		$\hat{\mu}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$						$\hat{\mu}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$			
		$n_2$						$n_2$			
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$		5	15	30	100
5		0,0019 ± 0,0665	0,0011 ± 0,0561	0,0016 ± 0,0517	0,0028 ± 0,0502	5		-0,0011 ± 0,0799	-0,0033 ± 0,0638	-0,0021 ± 0,0579	-0,0012 ± 0,0555
15		0,0000 ± 0,0569	-0,0008 ± 0,0365	-0,0003 ± 0,0318	0,001 ± 0,0319	15		-0,0036 ± 0,0690	-0,0059 ± 0,044	-0,0047 ± 0,0395	-0,0037 ± 0,0378
30		-0,0004 ± 0,0519	-0,0012 ± 0,0332	-0,0007 ± 0,0292	0,0005 ± 0,0253	30		-0,0009 ± 0,0656	-0,0031 ± 0,0406	-0,0019 ± 0,0362	-0,0009 ± 0,0307
100		-0,0017 ± 0,0480	-0,0025 ± 0,0263	-0,002 ± 0,0208	-0,0007 ± 0,0156	100		-0,0019 ± 0,0624	-0,0042 ± 0,0337	-0,003 ± 0,0271	-0,0020 ± 0,0204

Elaboración: M. Rojas.

### 4.3.3 Comparación en dos muestras provenientes de una distribución asimétrica

Se tomarán muestras provenientes de una distribución de Weibull. Para este caso la hipótesis será:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = 1$$

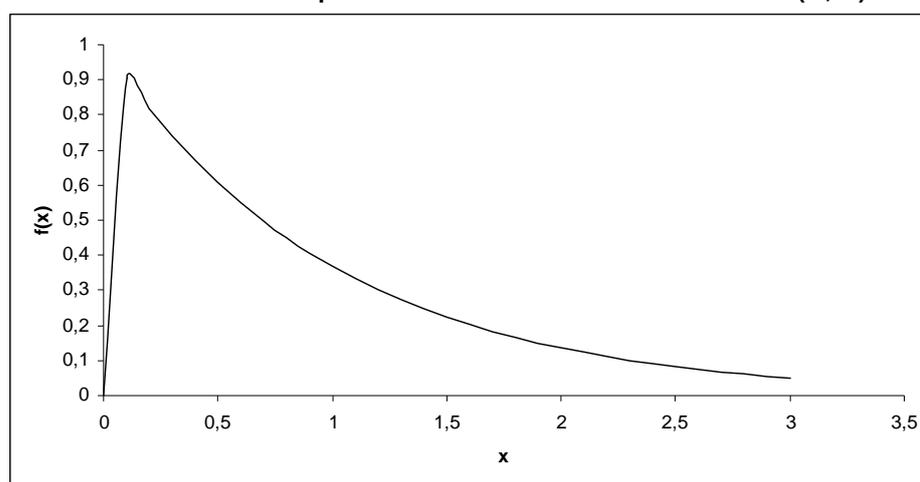
Vs

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 1$$

**Caso:  $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$**

Los siguientes son los resultados después de 100 corridas para dos muestras provenientes de dos distribuciones de Weibull con parámetros  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$ .

**Gráfico 4.113**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución de Weibull(1, 1)**



Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla LXXVI puede apreciarse que el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula de la prueba t para dos muestras para

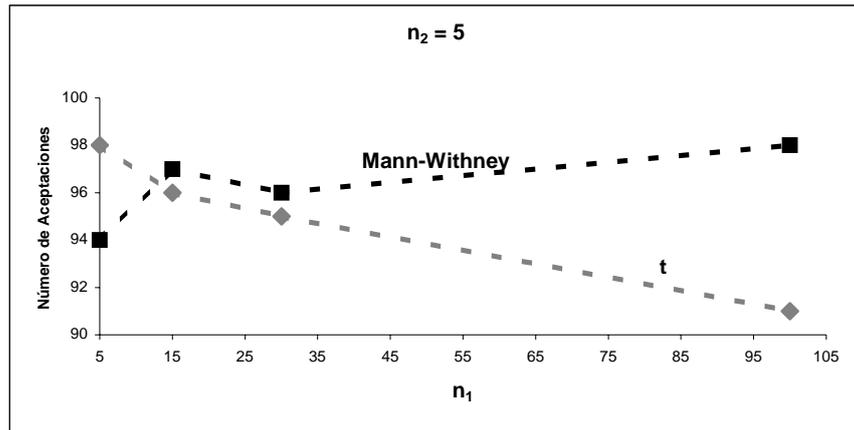
$\alpha=0,1$  fue de 86 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 91 de 100 corridas y para  $\alpha=0,01$  fue de 97 de 100 corridas. Para la prueba de Mann-Whitney el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,1$  fue de 85 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 92 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 98 de 100 corridas. La prueba t fue más potente que la prueba de Mann-Whitney para todos los casos considerados en la simulación. Solamente en un caso donde las muestras difieren considerablemente en tamaño ( $n_1=30$  y  $n_2=5$ ) superó en potencia a la prueba t. Los Gráficos 4.114 a 4.117 representan los resultados obtenidos.

**Tabla LXXVI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 1$   
**Vs**  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 1$

		$\alpha = 0.1$				$\alpha = 0.05$				$\alpha = 0.01$					
		Prueba t (paramétrica)													
		$n_2$				$n_2$				$n_2$					
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5		97	94	89	90	5	98	96	93	91	5	100	100	97	95
15		94	98	95	93	15	96	100	98	96	15	99	100	100	98
30		89	94	96	91	30	95	97	98	95	30	99	100	100	98
100		86	97	98	97	100	91	97	98	99	100	97	99	100	100
		Prueba Mann-Whitney (no paramétrica)													
		$n_2$				$n_2$				$n_2$					
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5		91	89	86	85	5	94	95	95	92	5	100	100	100	100
15		93	89	95	87	15	97	97	98	92	15	100	100	100	100
30		93	91	91	90	30	96	96	95	94	30	100	99	98	98
100		95	95	92	90	100	98	98	98	96	100	100	100	100	99

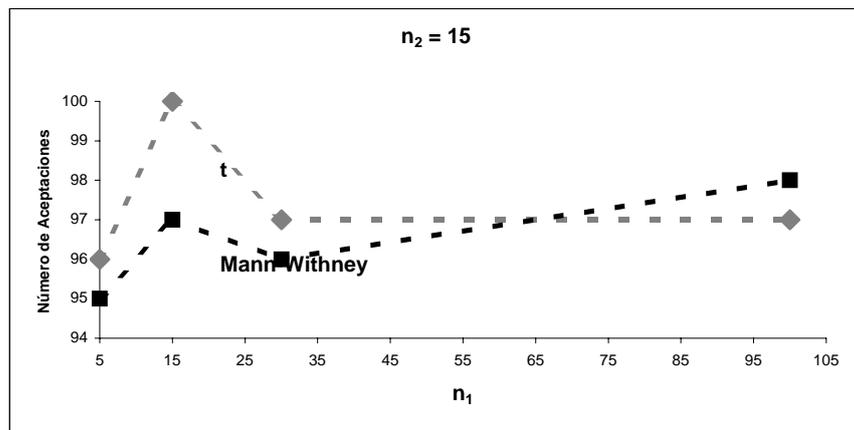
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.114**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 1$   
**Vs**  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$



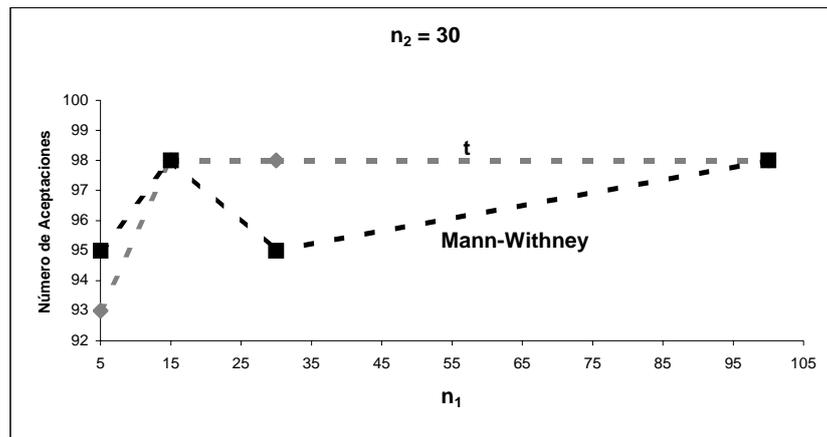
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.115**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 1$   
**Vs**  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$



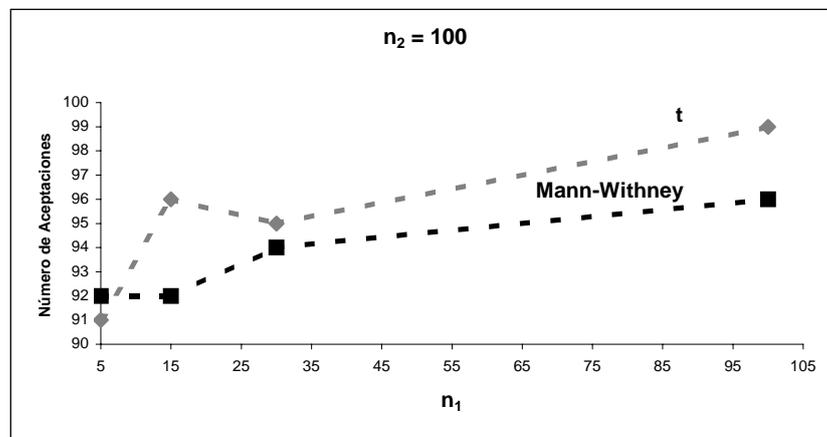
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.116**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 1$   
**Vs**  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.117**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 1$   
**Vs**  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

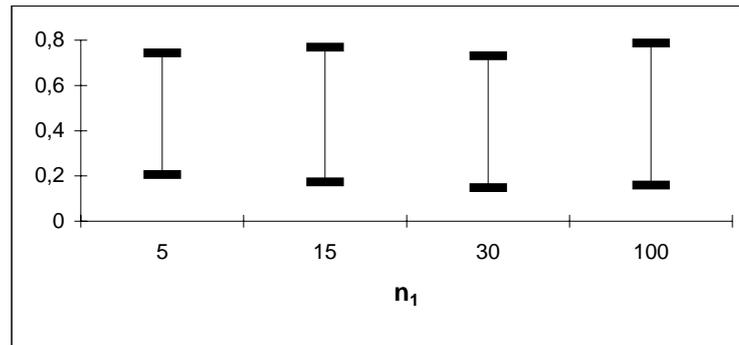
Puede apreciarse en la Tabla LXXVII que la prueba t presentó en promedio el mayor valor plausible para todas las corridas y para todos los tamaños de muestras considerados. El más alto valor plausible de la prueba t para dos muestras se registró con  $n_1=15$  y  $n_2=100$  mientras que la menor se registró con  $n_1=30$  y  $n_2=15$ . Para la Prueba de Mann-Whitney el más alto valor plausible se registró con  $n_1=5$  y  $n_2=100$  mientras que el menor se registró con  $n_1=30$  y  $n_2=5$ . Los Gráficos 4.118 a 4.125 representan los resultados obtenidos.

**Tabla LXXVII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
 Intervalos de confianza para el valor plausible

Prueba t (paramétrica)					Prueba Mann-Whitney (no paramétrica)				
$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ <small><math>H_0: \mu_1 = \mu_2</math> Vs <math>H_1: \mu_1 \neq \mu_2</math></small>					$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$ <small><math>H_0: \mu_1 = \mu_2</math> Vs <math>H_1: \mu_1 \neq \mu_2</math></small>				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,4751 ± 0,2687	0,5083 ± 0,2955	0,5083 ± 0,3087	0,4966 ± 0,3198	5	0,2543 ± 0,1492	0,2571 ± 0,1435	0,2764 ± 0,1540	0,2772 ± 0,1596
15	0,4714 ± 0,2973	0,497 ± 0,2901	0,5076 ± 0,292	0,5090 ± 0,3070	15	0,2461 ± 0,1456	0,271 ± 0,1486	0,2654 ± 0,1411	0,2577 ± 0,1460
30	0,4389 ± 0,2914	0,4457 ± 0,2633	0,4905 ± 0,2991	0,4663 ± 0,3015	30	0,2341 ± 0,1304	0,2482 ± 0,1360	0,2494 ± 0,1425	0,2527 ± 0,1544
100	0,4737 ± 0,3137	0,4787 ± 0,2719	0,5052 ± 0,2809	0,4966 ± 0,2774	100	0,2507 ± 0,1436	0,2515 ± 0,1318	0,2638 ± 0,1388	0,2498 ± 0,1418

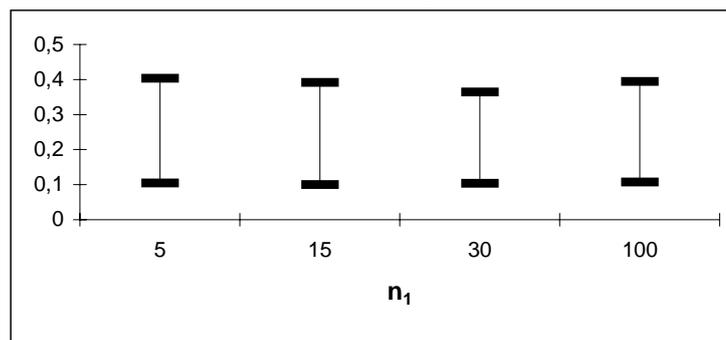
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.118**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$**   
**Prueba t: 100 corridas**



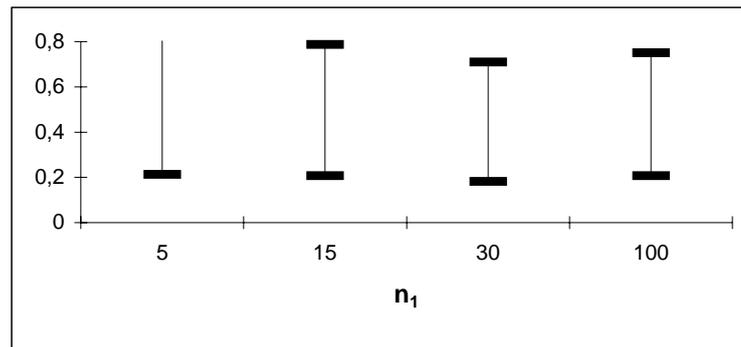
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.119**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$**   
**Prueba Mann-Withney: 100 corridas**



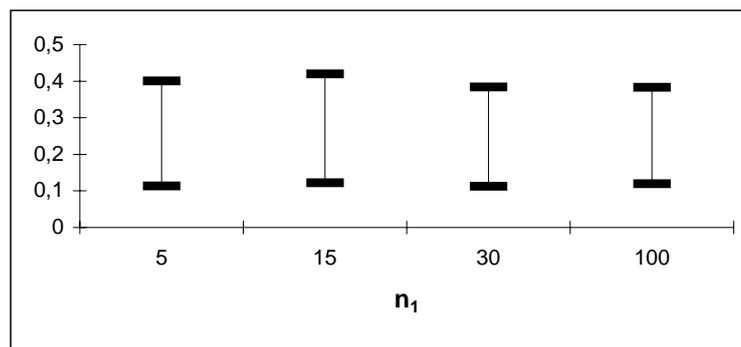
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.120**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$**   
**Prueba t: 100 corridas**



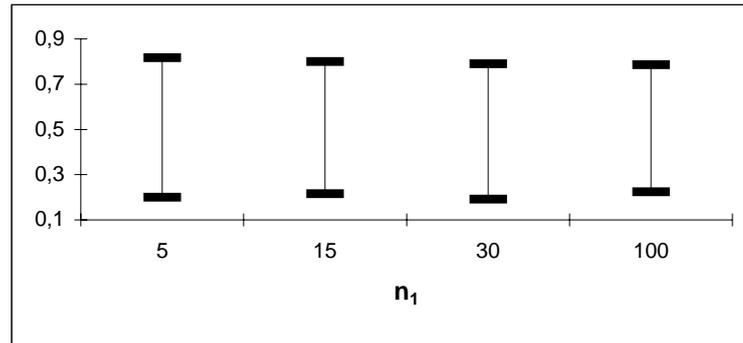
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.121**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$**   
**Prueba Mann-Withney: 100 corridas**



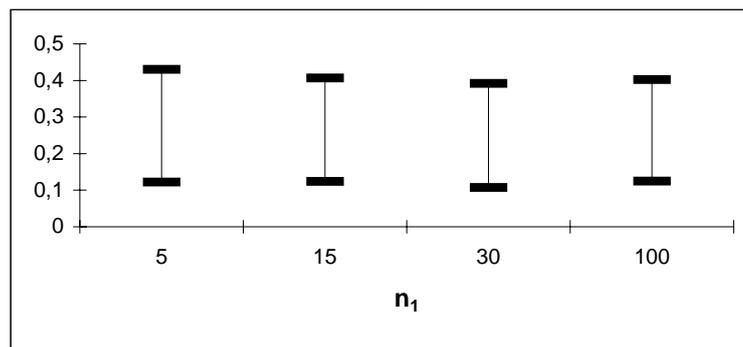
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.122**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba t: 100 corridas**



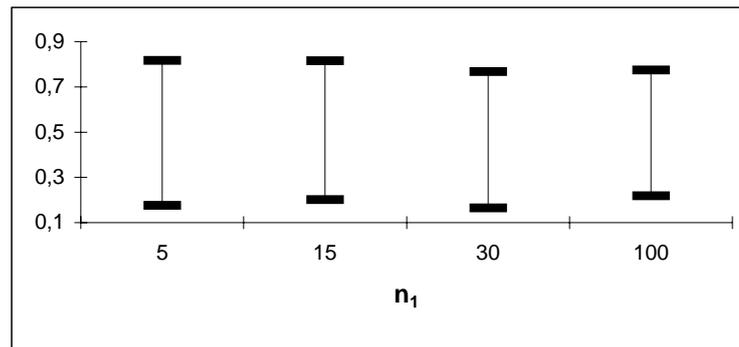
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.123**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
 $V_s$   
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba Mann-Whitney: 100 corridas**



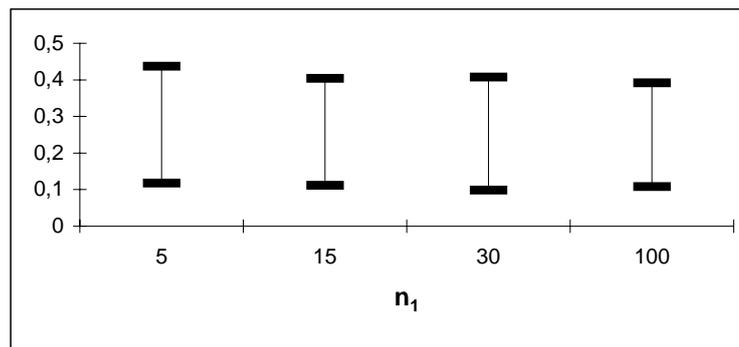
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.124**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba t: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.125**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
 $H_0: \mu_1 = \mu_2$   
Vs  
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba Mann-Withney: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

Pueden apreciarse en las Tablas LXXVIII y LXXIX las longitudes de los intervalos de confianza del valor plausible y de las medias y medianas muestrales. El intervalo más largo para el valor plausible se registró en  $n_1=5$  y  $n_2=100$  y corresponde a la prueba t mientras que la menor se registró con  $n_1=100$  y  $n_2=5$  y corresponde a la prueba de Mann-Withney. Para las medias y medianas muestrales el intervalo de mayor longitud corresponde a la media muestral en  $n_1=5$  y  $n_2=5$  y el de menor longitud corresponde a la media muestral en  $n_1=100$  y  $n_2=100$ .

**Tabla LXXVIII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible estimado**

Prueba t (paramétrica)					Prueba Mann-Withney (no paramétrica)				
$L_p$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$					$L_p$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,5374	0,5910	0,6174	0,6396	5	0,2984	0,2870	0,3080	0,3192
15	0,5946	0,5802	0,5840	0,6140	15	0,2912	0,2972	0,2822	0,2920
30	0,5828	0,5266	0,5982	0,6030	30	0,2608	0,2720	0,2850	0,3088
100	0,6274	0,5438	0,5618	0,5548	100	0,2872	0,2636	0,2776	0,2836

Elaboración: M. Rojas.

**Tabla LXXIX**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Longitudes de los intervalos de confianza para la diferencia de medias y medianas**

$L_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$					$L_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	1,3328	1,0440	0,9664	0,9176	5	1,3100	1,0358	0,9248	0,8784
15	1,1336	0,7306	0,6236	0,5836	15	1,1158	0,6954	0,5932	0,5634
30	1,0340	0,6054	0,5146	0,4402	30	1,0732	0,6156	0,5346	0,4526
100	0,9752	0,5070	0,3822	0,2708	100	1,0242	0,5266	0,4000	0,2940

Elaboración: M. Rojas.

La Tabla LXXX muestra que el valor más cercano a que la diferencia entre medias sea igual a 0 es 0,0092 y corresponde a la diferencia de medianas en  $n_1=30$  y  $n_2=30$  y el más alejado de la diferencia es el correspondiente a la mediana muestral en  $n_1=5$  y  $n_2=30$ .

**Tabla LXXX**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de tendencia central para dos muestras:**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Intervalos de confianza para la diferencia de medias y medianas:**

$\hat{\mu}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$					$\hat{\mu}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,0120 ± 0,6664	0,0383 ± 0,5220	0,0351 ± 0,4832	0,0378 ± 0,4588	5	-0,0321 ± 0,6550	0,0400 ± 0,5179	0,0652 ± 0,4624	0,0863 ± 0,4392
15	-0,0124 ± 0,5668	0,0139 ± 0,3653	0,0108 ± 0,3118	0,0134 ± 0,2918	15	-0,1067 ± 0,5579	-0,0345 ± 0,3477	-0,0093 ± 0,2966	0,0117 ± 0,2817
30	-0,0163 ± 0,5170	0,0100 ± 0,3027	0,0069 ± 0,2573	0,0096 ± 0,2201	30	-0,1065 ± 0,5366	-0,0343 ± 0,3078	-0,0092 ± 0,2673	0,0119 ± 0,2263
100	-0,0367 ± 0,4876	-0,0104 ± 0,2535	-0,0136 ± 0,1911	-0,0109 ± 0,1354	100	-0,1307 ± 0,5121	-0,0585 ± 0,2633	-0,0333 ± 0,2000	-0,0123 ± 0,147

Elaboración: M. Rojas.

#### 4.4 Comparación de pruebas de hipótesis de la igualdad entre medidas de dispersión de dos muestras

Este grupo comprende 2 pruebas: la prueba F (paramétrica) y la prueba de Ansari-Bradley (no paramétrica). Se harán 100 corridas con muestras de tamaño 5,15,30, 50 y 100 provenientes de  $X_1$  y con muestras de tamaño 5,15,30, 50 y 100 provenientes de  $X_2$  para cada caso. La prueba de Ansari-Bradley exige que las medianas de ambas poblaciones sean iguales. De no serlo puede utilizarse una modificación que se indica en Ansari,Bradley(1960) pero el estadístico obtenido ya no es no paramétrico. Por esta razón se consideran poblaciones donde las medianas sean iguales entre sí en nuestra investigación.

##### 4.4.1 Comparación en dos muestras provenientes de una distribución Normal

Para este caso el contraste de hipótesis será:

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

VS

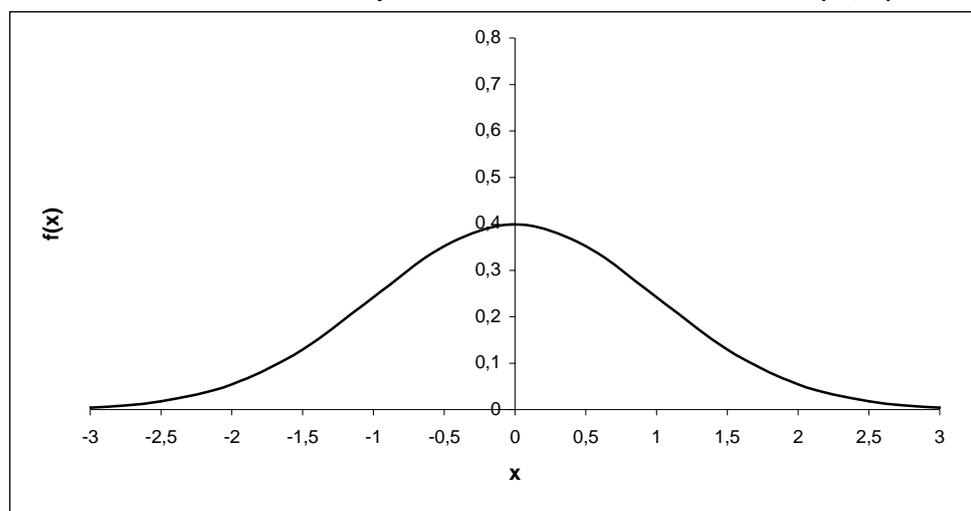
$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Es decir que las varianzas de las poblaciones de las que provienen las muestras son iguales. En esta comparación se respeta el supuesto de

la prueba F que indica que ambas muestras deben provenir de distribuciones normales.

**Caso:  $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$**

**Gráfico 4.126**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal(0, 1)**



Elaboración: M. Rojas.

Los siguientes son los resultados para dos muestras provenientes de dos distribuciones normales con parámetros  $\mu = 1$  y  $\sigma^2 = 1$ .

En la Tabla LXXXI puede apreciarse que el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula de la prueba F para  $\alpha=0,1$  fue de 90 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 94 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 99 de 100 corridas. Para la prueba de Ansari-Bradley(no paramétrica) el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,1$  fue de

92 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 97 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 99 de 100 corridas. La prueba F fue más potente para tamaños de muestra pequeños aunque llega a ser equivalente a la prueba de Ansari-Bradley(no paramétrica) a medida que el tamaño de la muestra aumenta. Los Gráficos 4.127 a 4.130 representan los resultados obtenidos.

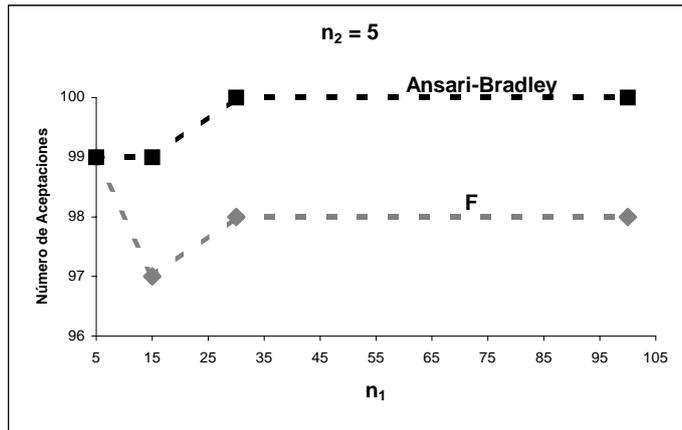
**Tabla LXXXI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

		$\alpha = 0.1$					$\alpha = 0.05$					$\alpha = 0.01$				
		<b>Prueba F (paramétrica)</b>														
		$n_2$					$n_2$					$n_2$				
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	
5		98	95	90	92	5	99	97	94	96	5	100	100	100	99	
15		93	96	94	94	15	97	98	96	96	15	99	100	99	99	
30		95	95	95	92	30	98	98	97	98	30	100	100	99	100	
100		95	97	98	96	100	98	99	98	99	100	100	100	100	100	
		<b>Prueba Ansari-Bradley (no paramétrica)</b>														
		$n_2$					$n_2$					$n_2$				
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	
5		94	94	100	100	5	99	99	100	100	5	100	100	100	100	
15		92	95	100	100	15	99	99	100	100	15	99	100	100	100	
30		100	100	97	95	30	100	100	98	100	30	100	100	100	100	
100		100	100	97	95	100	100	100	97	99	100	100	100	100	100	

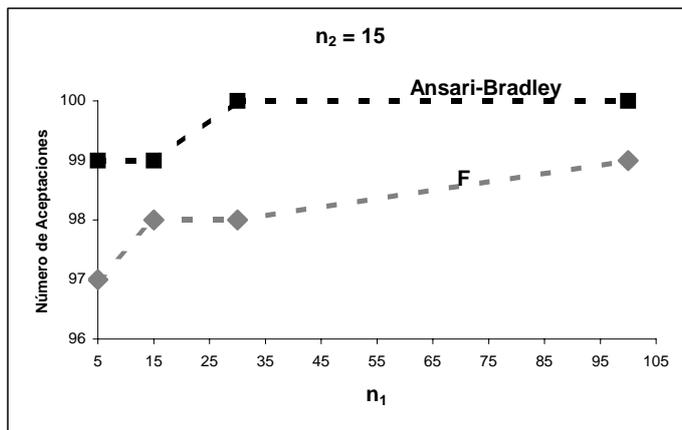
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.127**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$



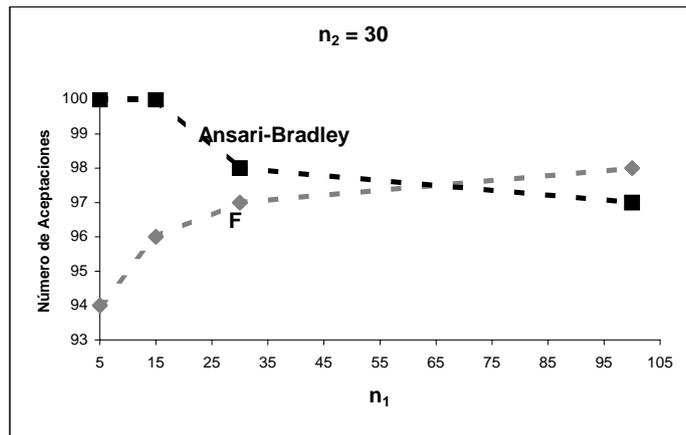
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.128**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$



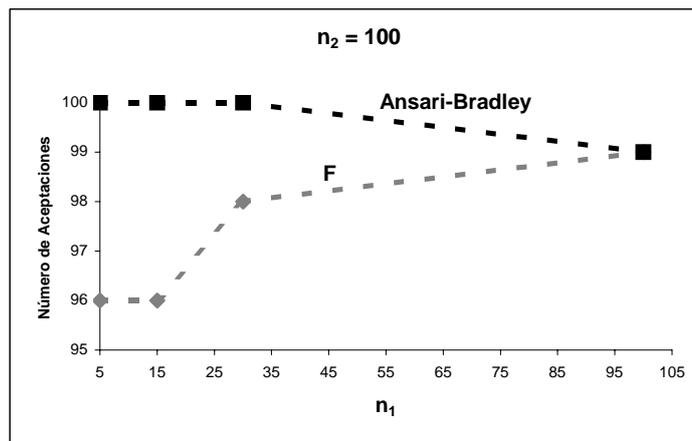
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.129**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.130**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

En las Tablas LXXXII y LXXXIII pueden apreciarse los intervalos de confianza para el valor plausible y la longitud de dichos intervalos. Tenemos que la prueba F supera en valor plausible a la prueba de Ansari-Bradley (no paramétrica) en todas las corridas realizadas. Las longitudes de los intervalos de confianza de la prueba F son menores que los de su equivalente no paramétrico en la mayoría de los casos, aunque puede decirse que no difieren considerablemente. Los Gráficos 4.131 a 4.138 representan los resultados obtenidos.

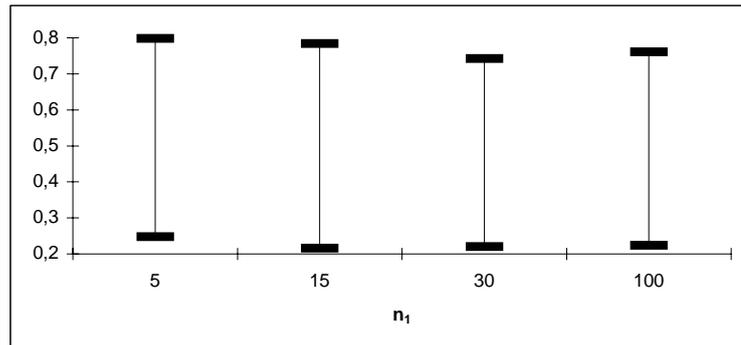
**Tabla LXXXII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

**Intervalos de confianza para el valor plausible**

<b>Prueba F (paramétrica)</b>					<b>Prueba Ansari-Bradley (no paramétrica)</b>				
$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$					$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,5229 ± 0,2751	0,5225 ± 0,2931	0,5362 ± 0,2883	0,5130 ± 0,2763	5	0,4680 ± 0,2754	0,5260 ± 0,2764	0,5100 ± 0,0846	0,5096 ± 0,0775
15	0,5001 ± 0,2838	0,5046 ± 0,2779	0,5292 ± 0,2995	0,4974 ± 0,3006	15	0,4904 ± 0,2914	0,5253 ± 0,2781	0,5035 ± 0,0394	0,5031 ± 0,0322
30	0,4814 ± 0,2611	0,5427 ± 0,3116	0,4918 ± 0,2778	0,4681 ± 0,3045	30	0,4950 ± 0,0948	0,5030 ± 0,0353	0,5335 ± 0,2852	0,5272 ± 0,3274
100	0,4928 ± 0,2685	0,5169 ± 0,2890	0,5301 ± 0,2701	0,4962 ± 0,2918	100	0,4909 ± 0,0872	0,4997 ± 0,0269	0,4996 ± 0,2818	0,4913 ± 0,3037

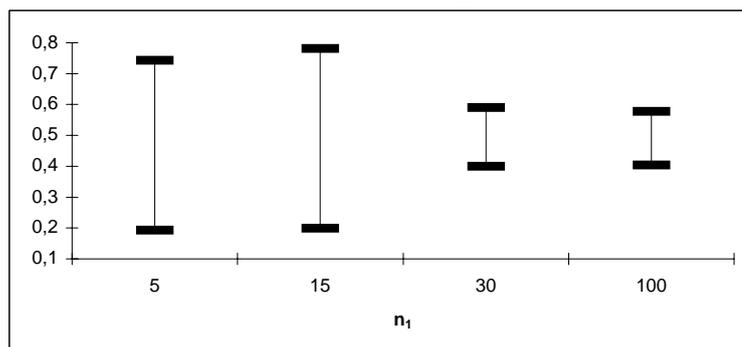
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.131**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$**   
**Prueba F: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.132**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$**   
**Prueba Ansari-Bradley: 100 corridas**

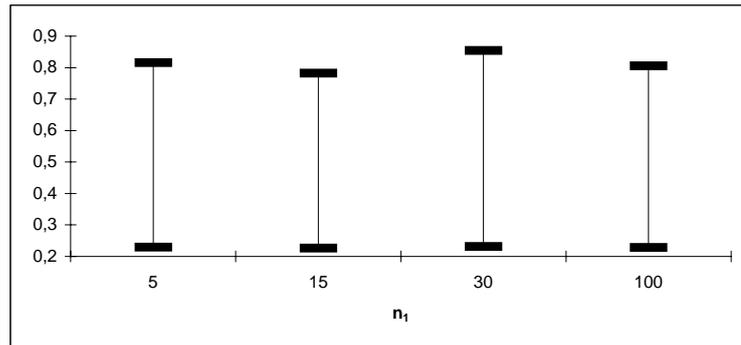


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.133**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$**   
**Prueba F: 100 corridas**

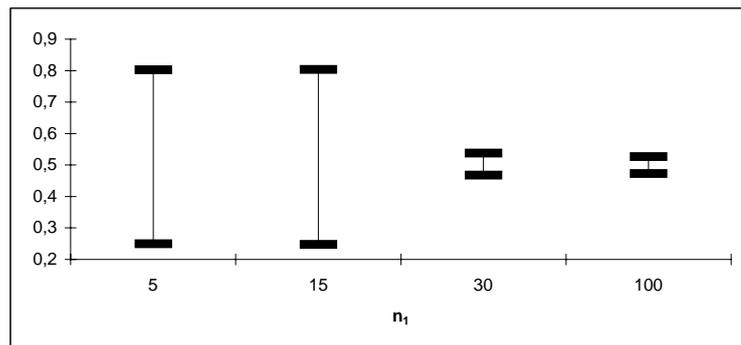


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.134**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$

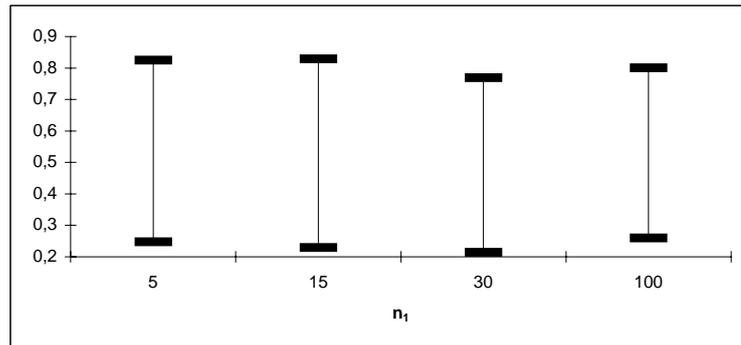
$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$**   
**Prueba Ansari-Bradley: 100 corridas**



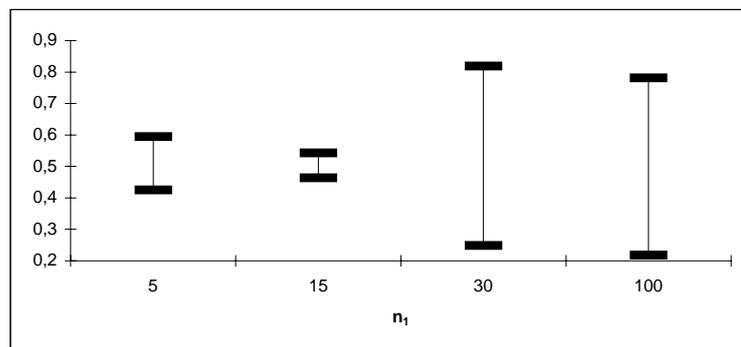
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.135**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba F: 100 corridas**



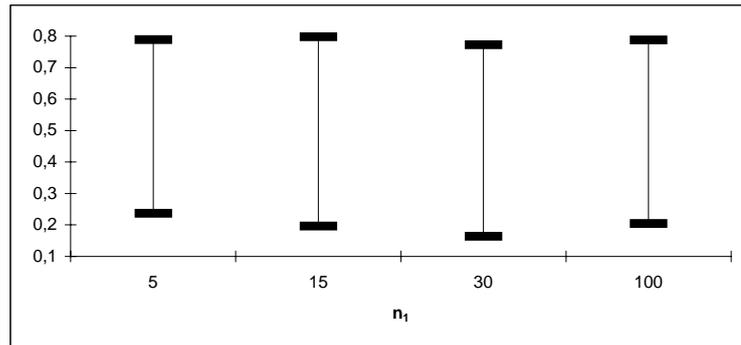
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.136**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba Ansari-Bradley: 100 corridas**



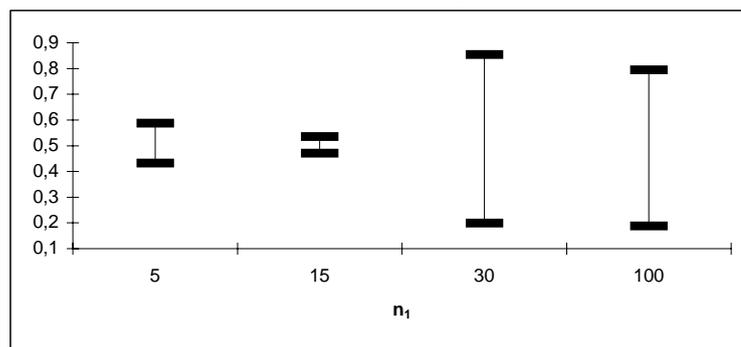
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.137**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba F: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.138**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba Ansari-Bradley: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Tabla LXXXIII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$   
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible**

<b>Prueba F (paramétrica)</b>					<b>Prueba Ansari-Bradley (no paramétrica)</b>				
$L_p$					$L_p$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,5502	0,5862	0,5766	0,5526	5	0,5508	0,5528	0,1692	0,1550
15	0,5676	0,5558	0,5990	0,6012	15	0,5828	0,5562	0,0788	0,0644
30	0,5222	0,6232	0,5556	0,6090	30	0,1896	0,0706	0,5704	0,6548
100	0,5370	0,578	0,5402	0,5836	100	0,1744	0,0538	0,5636	0,6074

Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla LXXXIV pueden apreciarse los intervalos de confianza para el valor de  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ . Tenemos que la prueba de Ansari-Bradley se acerca más en promedio al valor de 1 (que es el valor verdadero de este cociente) y con intervalos de confianza de menor longitud, mientras que la prueba F se mantiene con promedios más alejados de 1 e intervalos de confianza de mayor longitud.

**Tabla LXXXIV**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 1)$

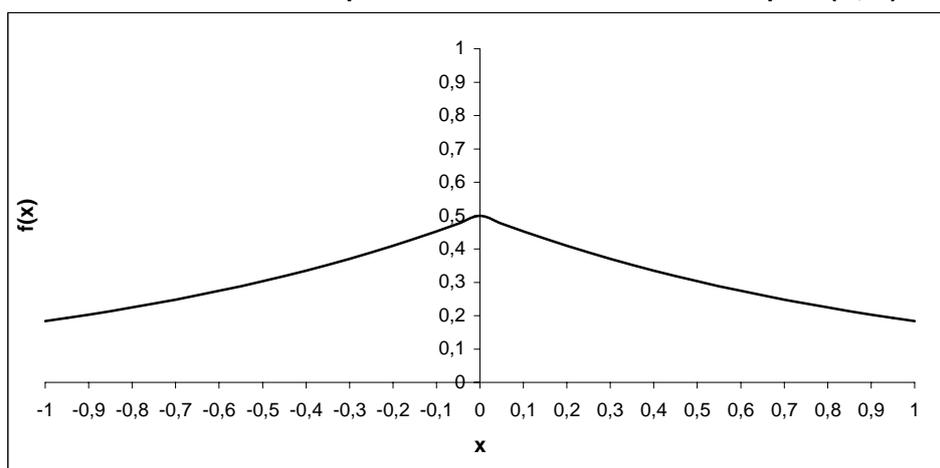
Intervalos de confianza para el estimador de  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  : Caso Normal

$\hat{\mu}_F \pm \hat{\sigma}_F$					$\hat{\mu}_{Rangos} \pm \hat{\sigma}_{Rangos}$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,5164 ± 0,2949	0,4631 ± 0,2955	0,5888 ± 0,2232	0,4403 ± 0,2531	5	0,6626 ± 0,2762	0,6565 ± 0,2680	0,6945 ± 0,2452	0,6707 ± 0,2231
15	0,5770 ± 0,2459	0,5965 ± 0,2646	0,5748 ± 0,2639	0,5281 ± 0,2624	15	0,6181 ± 0,2163	0,6319 ± 0,2254	0,7042 ± 0,1959	0,6986 ± 0,2072
30	0,5779 ± 0,2226	0,6038 ± 0,2670	0,5606 ± 0,2499	0,5595 ± 0,2936	30	0,6308 ± 0,1873	0,7003 ± 0,1858	0,7619 ± 0,1979	0,6906 ± 0,2390
100	0,5829 ± 0,2289	0,5953 ± 0,2505	0,5697 ± 0,2607	0,5618 ± 0,2786	100	0,7350 ± 0,1906	0,6069 ± 0,1913	0,7266 ± 0,1884	0,7114 ± 0,2096

Elaboración: M. Rojas.

#### 4.4.2 Comparación en dos muestras provenientes de una distribución simétrica no normal

**Gráfico 4.139**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución de Laplace(0, 1)**



Elaboración: M. Rojas.

Para este caso el contraste de hipótesis será:

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

VS

$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Es decir que las varianzas de las poblaciones de las que provienen las muestras son iguales. En esta comparación se viola el supuesto de la prueba F que indica que ambas muestras deben provenir de distribuciones normales, pero se respeta el supuesto de simetría de la prueba de Ansari-Bradley.

**Caso:  $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$**

Los siguientes son los resultados después de 100 corridas para dos muestras provenientes de dos distribuciones de Laplace con parámetros  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ .

En la Tabla LXXXV puede apreciarse que el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula de la prueba F para  $\alpha=0,1$  fue de 71 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 80 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 93 de 100 corridas. Para la prueba de Ansari-Bradley el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,1$  fue de 93 de 100 corridas,

$\alpha=0,05$  fue de 96 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 98 de 100 corridas. La prueba de Ansari-Bradley(no paramétrica) superó en potencia a la prueba F en la mayoría de los casos contemplados en la simulación sin importar el tamaño de muestra. Los Gráficos 4.140 a 4.143 representan los resultados obtenidos.

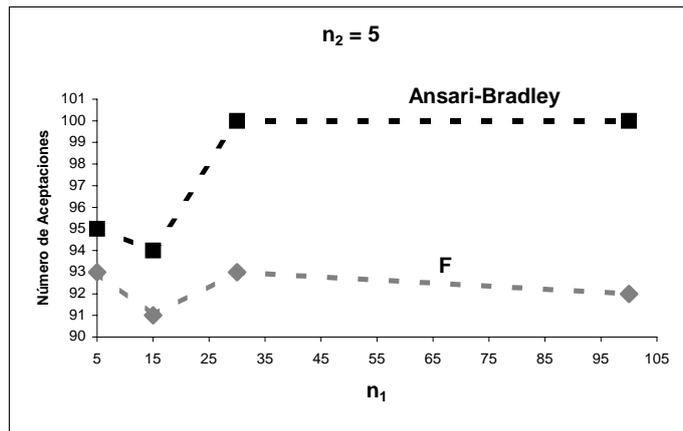
**Tabla LXXXV**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
 Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

		$\alpha = 0.1$				$\alpha = 0.05$				$\alpha = 0.01$					
		Prueba F (paramétrica)													
		$n_2$				$n_2$				$n_2$					
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5		86	89	86	87	5	93	93	94	92	5	98	98	98	96
15		86	86	80	79	15	91	91	89	85	15	97	97	96	94
30		82	88	82	85	30	93	90	89	88	30	99	97	95	94
100		84	87	80	71	100	92	91	87	80	100	98	95	95	93
		Prueba Ansari-Bradley (no paramétrica)													
		$n_2$				$n_2$				$n_2$					
$n_1$		5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5		85	94	100	100	5	95	96	100	100	5	100	99	100	100
15		90	93	100	100	15	94	97	100	100	15	99	98	100	100
30		100	100	93	96	30	100	100	96	98	30	100	100	99	100
100		100	100	93	97	100	100	100	97	98	100	100	100	98	99

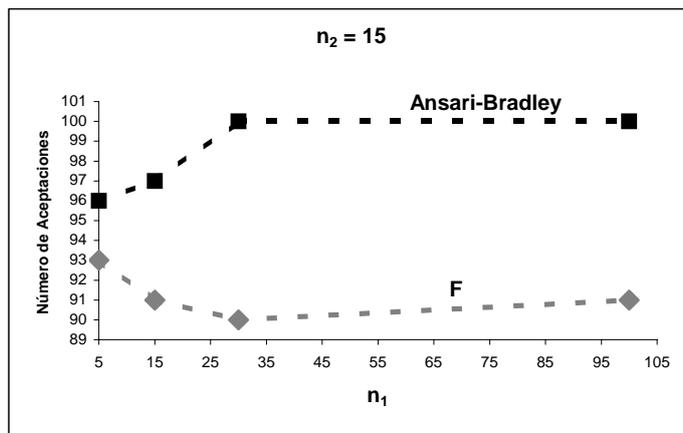
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.140**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$



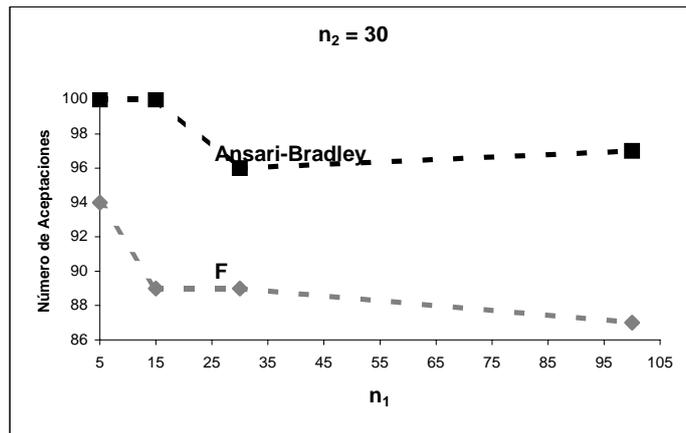
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.141**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$



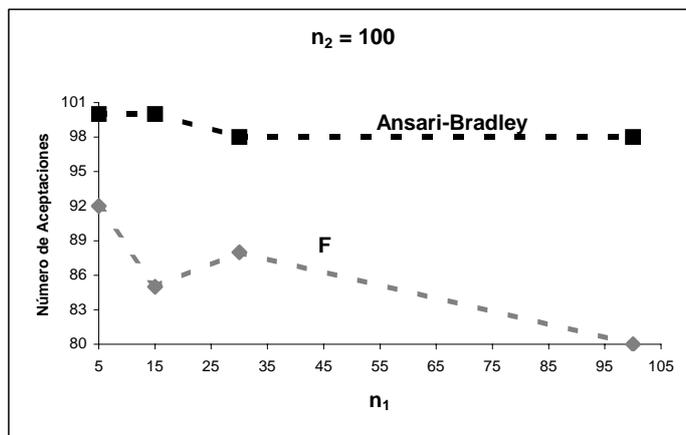
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.142**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.143**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

En las Tablas LXXXVI y LXXXVII pueden apreciarse los intervalos de confianza para el valor plausible y la longitud de dichos intervalos. Tenemos que la prueba de Ansari-Bradley supera en su valor plausible a la prueba F en todas las corridas realizadas. Las longitudes de los intervalos de confianza de la prueba F son menores que los de su equivalente no paramétrico solo cuando los tamaños de muestra no difieren considerablemente, en el resto de casos los intervalos de la prueba de Ansari-Bradley son de menor longitud. Los Gráficos 4.144 a 4.151 representan los resultados obtenidos.

**Tabla LXXXVI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

**Intervalos de confianza para el valor plausible**

		<b>Prueba F (paramétrica)</b>				<b>Prueba Ansari-Bradley (no paramétrica)</b>				
		$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$				$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$				
		<b>n<sub>2</sub></b>				<b>n<sub>2</sub></b>				
<b>n<sub>1</sub></b>		5	15	30	100	<b>n<sub>1</sub></b>	5	15	30	100
5		0,3955 ± 0,2754	0,3760 ± 0,2739	0,3951 ± 0,3188	0,3779 ± 0,2783	5	0,4406 ± 0,3224	0,4741 ± 0,3112	0,4895 ± 0,1009	0,4929 ± 0,0873
15		0,4095 ± 0,3223	0,4186 ± 0,2951	0,3731 ± 0,3242	0,4047 ± 0,336	15	0,4397 ± 0,2901	0,4742 ± 0,3064	0,4973 ± 0,0422	0,4998 ± 0,0303
30		0,4064 ± 0,3142	0,4214 ± 0,2908	0,3724 ± 0,3022	0,4172 ± 0,345	30	0,4779 ± 0,0945	0,4956 ± 0,0421	0,4896 ± 0,2988	0,5176 ± 0,2881
100		0,4363 ± 0,3259	0,4362 ± 0,3161	0,2970 ± 0,2848	0,3426 ± 0,3294	100	0,4867 ± 0,0898	0,4969 ± 0,0317	0,4924 ± 0,3059	0,5223 ± 0,3012

Elaboración: M. Rojas.

Gráfico 4.144

Pruebas Paramétricas y No Paramétricas

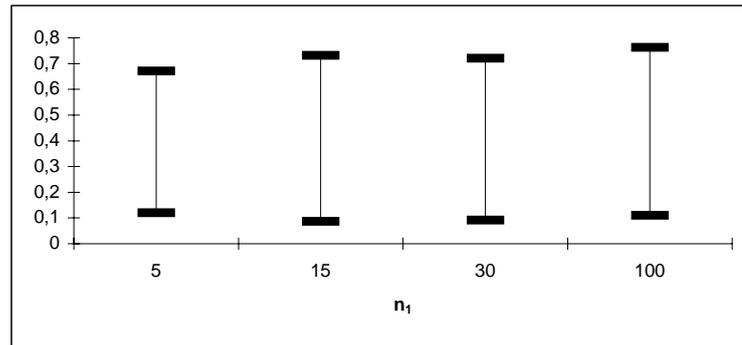
Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras

 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ 

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad \text{VS} \quad H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$ 

Prueba F: 100 corridas



Elaboración: M. Rojas.

Gráfico 4.145

Pruebas Paramétricas y No Paramétricas

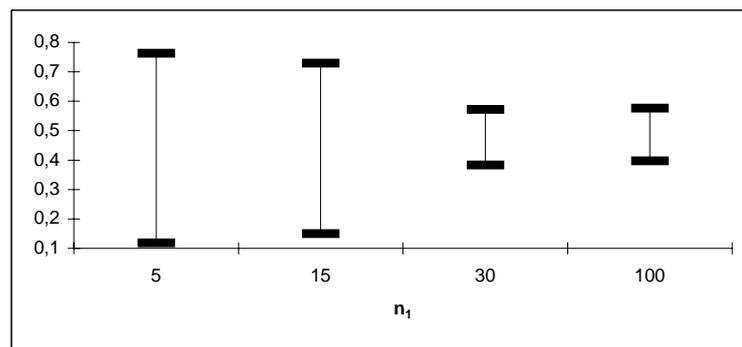
Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras

 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$ 

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad \text{VS} \quad H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$ 

Prueba Ansari-Bradley: 100 corridas

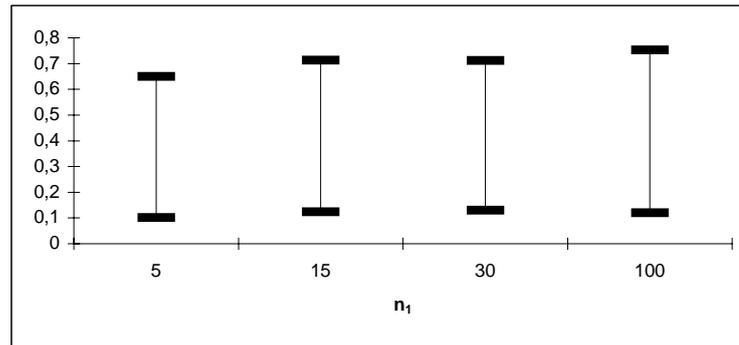


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.146**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad \text{VS} \quad H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$   
 Prueba F: 100 corridas

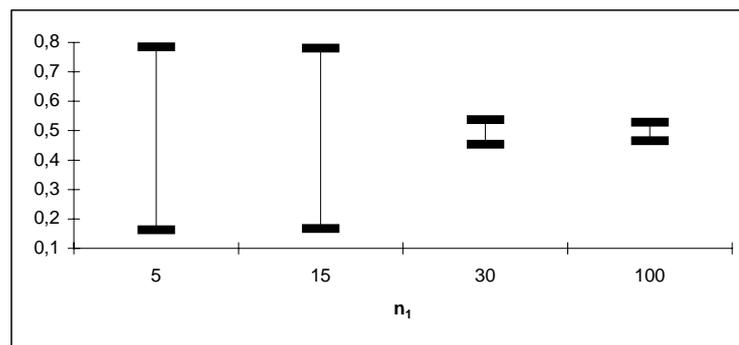


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.147**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad \text{VS} \quad H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$   
 Prueba Ansari-Bradley: 100 corridas

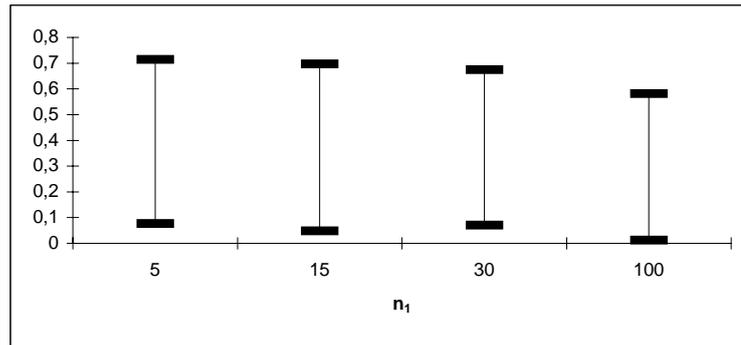


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.148**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba F: 100 corridas**

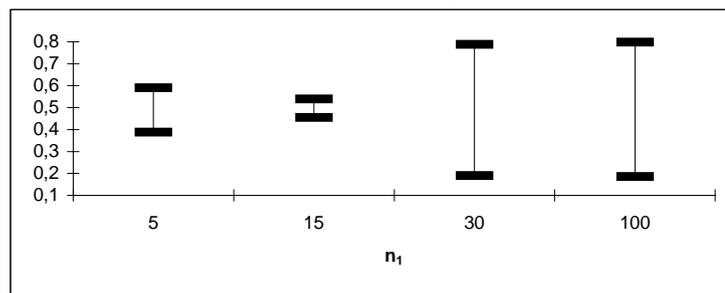


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.149**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$**   
**Prueba Ansari-Bradley: 100 corridas**

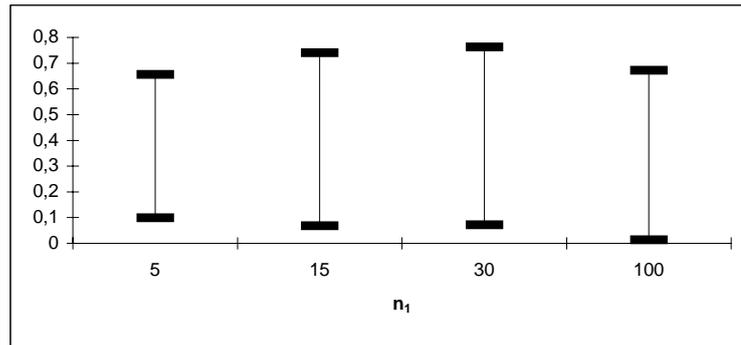


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.150**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba F: 100 corridas**

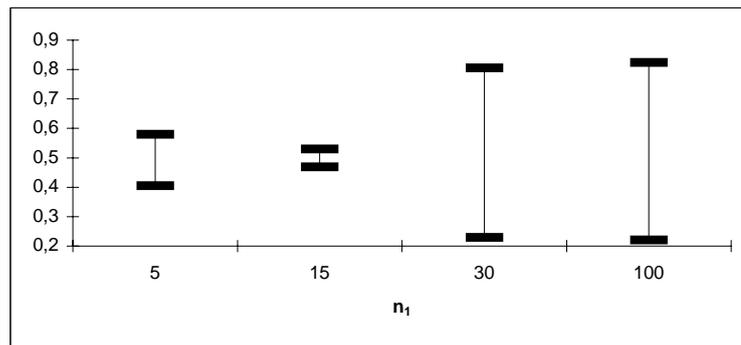


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.151**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$**   
**Prueba Ansari-Bradley: 100 corridas**



Elaboración: M. Rojas.

**Tabla LXXXVII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible**

Prueba F (paramétrica)					Prueba Ansari-Bradley (no paramétrica)				
$L_p$					$L_p$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,5508	0,5478	0,6376	0,5566	5	0,6448	0,6224	0,2018	0,1746
15	0,6446	0,5902	0,6484	0,6720	15	0,5802	0,6128	0,0844	0,0606
30	0,6284	0,5816	0,6044	0,6900	30	0,189	0,0842	0,5976	0,5762
100	0,6518	0,6322	0,5696	0,6588	100	0,1796	0,0634	0,6118	0,6024

Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla LXXXVIII pueden apreciarse los intervalos de confianza para

el valor de  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ . Tenemos que la prueba de Ansari-Bradley se acerca más

en promedio al valor de 1 (que es el valor verdadero) con intervalos de confianza de menor longitud y que la prueba F se ha alejado considerablemente del valor verdadero. Los intervalos de confianza de la prueba de Ansari-Bradley tienen menor longitud en la mayoría de los casos.

**Tabla LXXXVIII**  
**Pruebas Paramétricas y No Paramétricas**  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Laplace}(0, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Laplace}(0, 1)$

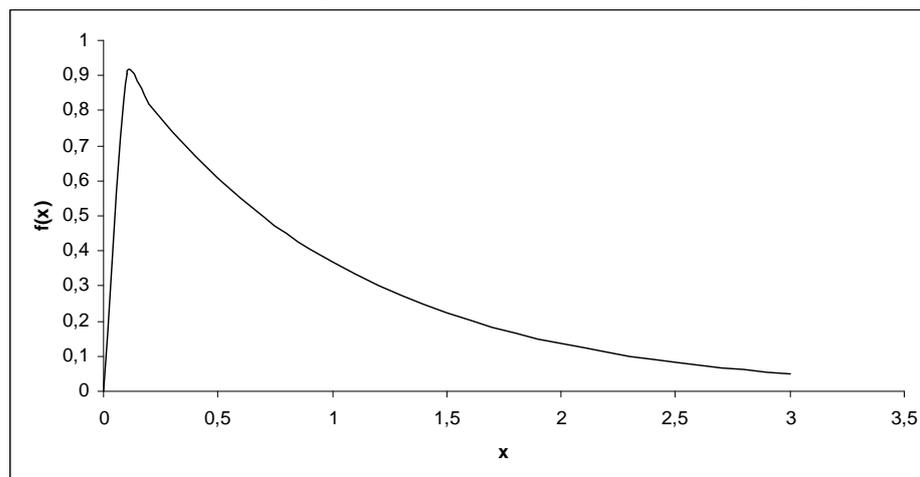
Intervalos de confianza para el estimador de  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

$\hat{\mu}_F \pm \hat{\sigma}_F$					$\hat{\mu}_{\text{Rangos}} \pm \hat{\sigma}_{\text{Rangos}}$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,4231 ± 0,2474	0,3768 ± 0,1964	0,4561 ± 0,2338	0,3587 ± 0,2866	5	0,6991 ± 0,2599	0,6242 ± 0,2391	0,6417 ± 0,2392	0,7501 ± 0,2793
15	0,4655 ± 0,2226	0,4646 ± 0,2501	0,4899 ± 0,2183	0,3868 ± 0,2332	15	0,7128 ± 0,1988	0,6604 ± 0,2279	0,5929 ± 0,2104	0,6434 ± 0,1727
30	0,5183 ± 0,2610	0,4628 ± 0,2783	0,4965 ± 0,2526	0,4222 ± 0,2452	30	0,7078 ± 0,1813	0,6816 ± 0,1903	0,5476 ± 0,2069	0,6077 ± 0,2261
100	0,5437 ± 0,2647	0,477 ± 0,2451	0,5037 ± 0,2198	0,3937 ± 0,2140	100	0,7069 ± 0,1612	0,6157 ± 0,1686	0,6252 ± 0,2348	0,6605 ± 0,2466

Elaboración: M. Rojas.

#### 4.4.3 Comparación en dos muestras provenientes de una distribución asimétrica

**Gráfico 4.152**  
**Pruebas Paramétricas y No Paramétricas**  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución de Weibull(1, 1)**



Elaboración: M. Rojas.

Para este caso el contraste de hipótesis será:

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

VS

$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Es decir que las varianzas de las poblaciones de las que provienen las muestras son iguales. En esta comparación se viola el supuesto de la prueba F que indica que ambas muestras deben provenir de distribuciones normales y el supuesto de simetría de la distribución de la prueba de Ansari-Bradley.

**Caso:  $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$**

Los siguientes son los resultados después de 100 corridas para dos muestras provenientes de dos distribuciones de Weibull con parámetros  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$ .

En la Tabla LXXXIX puede apreciarse que el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula de la prueba F para  $\alpha=0,1$  fue de 66 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 74 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 85

de 100 corridas. Para la prueba de Ansari-Bradley el menor número de aceptaciones de la hipótesis nula para  $\alpha=0,1$  fue de 92 de 100 corridas,  $\alpha=0,05$  fue de 97 de 100 corridas y  $\alpha=0,01$  fue de 99 de 100 corridas. La prueba de Ansari-Bradley (no paramétrica) resultó ser más potente que la prueba F en todos los casos contemplados en las simulaciones. La prueba F pierde considerablemente su potencia como puede apreciarse. Los Gráficos 4.153 a 4.156 representan los resultados obtenidos.

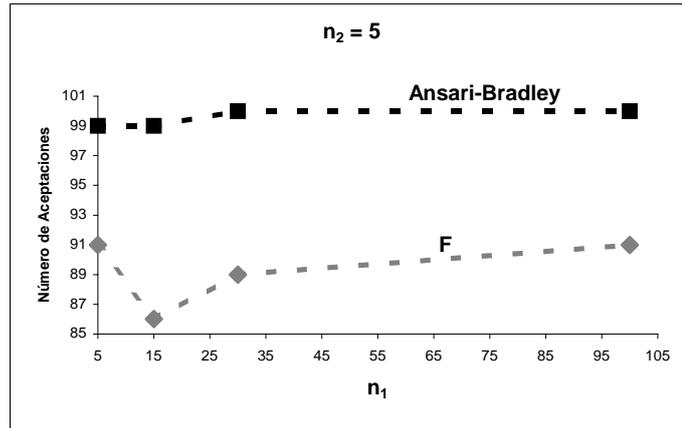
**Tabla LXXXIX**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

$\alpha = 0.1$					$\alpha = 0.05$					$\alpha = 0.01$				
<b>Prueba F (paramétrica)</b>														
$n_2$					$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	88	83	84	86	5	91	89	89	89	5	96	95	93	95
15	79	72	75	71	15	86	84	83	78	15	94	91	90	90
30	82	74	72	66	30	89	84	79	76	30	95	91	86	85
100	83	77	72	67	100	91	84	77	74	100	96	91	90	85
<b>Prueba Ansari-Bradley (no paramétrica)</b>														
$n_2$					$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	94	94	100	100	5	99	99	100	100	5	100	100	100	100
15	92	95	100	100	15	99	99	100	100	15	99	100	100	100
30	100	100	97	95	30	100	100	98	100	30	100	100	100	100
100	100	100	97	95	100	100	100	97	99	100	100	100	100	100

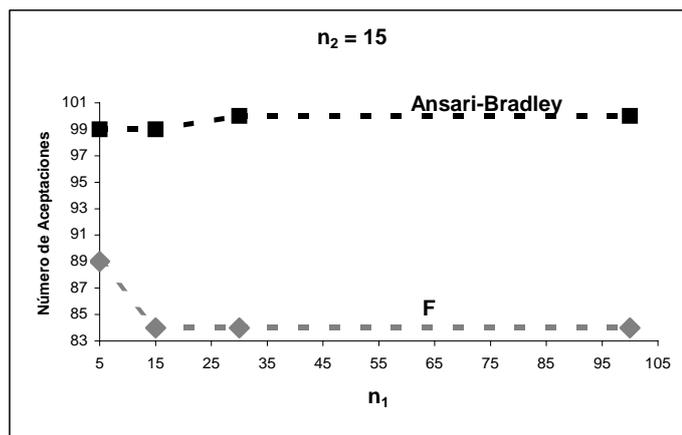
Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.153**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.154**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**  
 $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  VS  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$   
 $\alpha = 0.05$

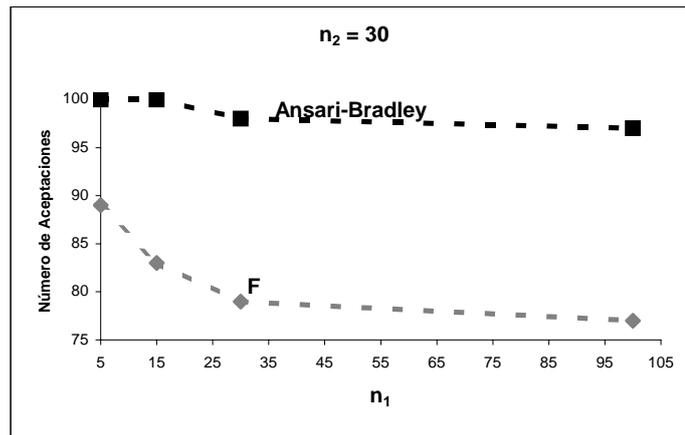


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.155**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

$\alpha = 0.05$

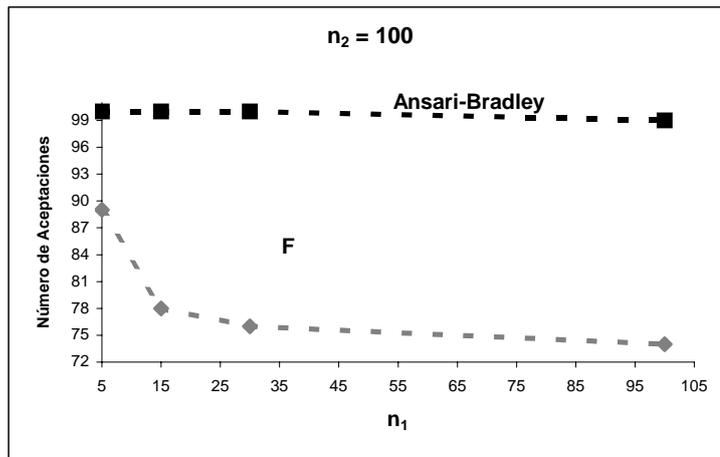


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.156**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$   
**Aceptaciones de la hipótesis nula después de 100 corridas**

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

$\alpha = 0.05$



Elaboración: M. Rojas.

En las Tablas XC y XCI pueden apreciarse los intervalos de confianza para el valor plausible y la longitud de dichos intervalos. Tenemos que la prueba de Ansari-Bradley supera en valor plausible a la prueba F en todas las corridas realizadas. Las longitudes de los intervalos de confianza de la prueba F son considerablemente menores que los de su equivalente no paramétrico, especialmente cuando los tamaños de muestra difieren en gran magnitud. Los Gráficos 4.157 a 4.164 representan los resultados obtenidos.

**Tabla XC**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

**Intervalos de confianza para el valor plausible estimado**

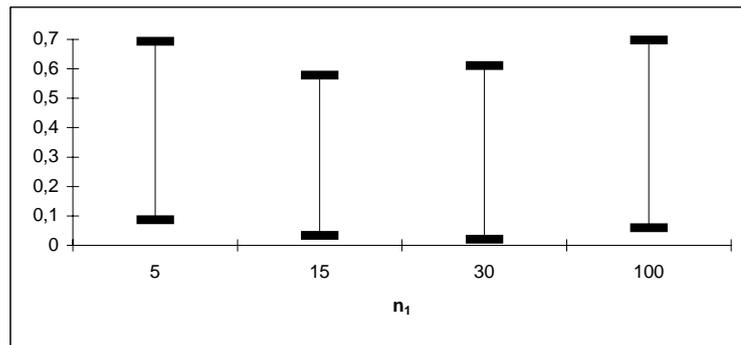
<b>Prueba F (paramétrica)</b>					<b>Prueba Ansari-Bradley (no paramétrica)</b>				
$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$					$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$				
<b>n<sub>2</sub></b>					<b>n<sub>2</sub></b>				
<b>n<sub>1</sub></b>	5	15	30	100	<b>n<sub>1</sub></b>	5	15	30	100
5	0,3901 ± 0,3036	0,3985 ± 0,3146	0,3712 ± 0,3038	0,3686 ± 0,3121	5	0,4680 ± 0,2754	0,5260 ± 0,2764	0,5100 ± 0,0846	0,5096 ± 0,0775
15	0,3063 ± 0,2723	0,3780 ± 0,3384	0,3730 ± 0,3263	0,3482 ± 0,3226	15	0,4904 ± 0,2914	0,5253 ± 0,2781	0,5035 ± 0,0394	0,5031 ± 0,0322
30	0,3158 ± 0,2953	0,3255 ± 0,2880	0,3359 ± 0,3192	0,2923 ± 0,3141	30	0,4950 ± 0,0948	0,5030 ± 0,0353	0,5335 ± 0,2852	0,5272 ± 0,3274
100	0,3784 ± 0,3190	0,3802 ± 0,3194	0,3367 ± 0,3177	0,2617 ± 0,2758	100	0,4909 ± 0,0872	0,4997 ± 0,0269	0,4996 ± 0,2818	0,4913 ± 0,3037

Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.157**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$**   
**Prueba F: 100 corridas**

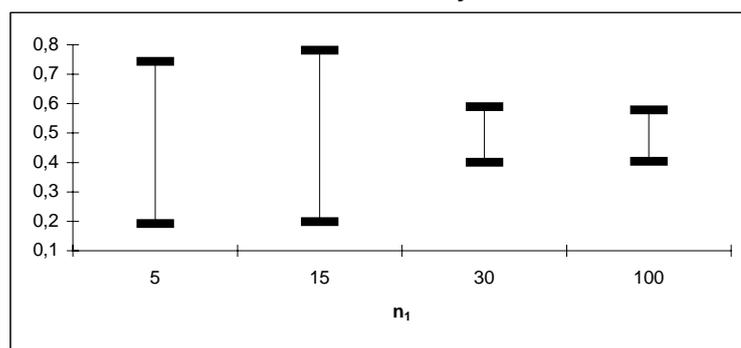


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.158**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

**Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 5$**   
**Prueba Ansari-Bradley: 100 corridas**

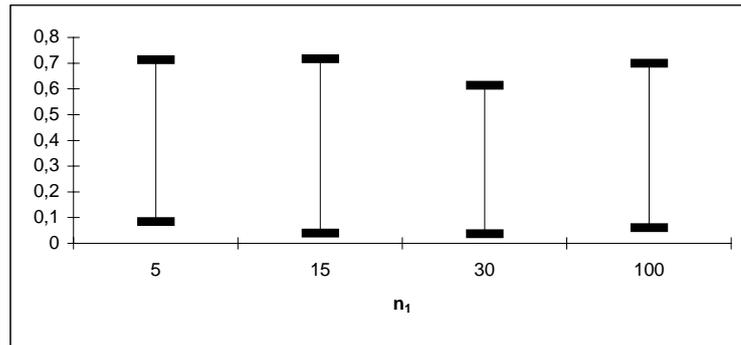


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.159**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$   
 Prueba F: 100 corridas

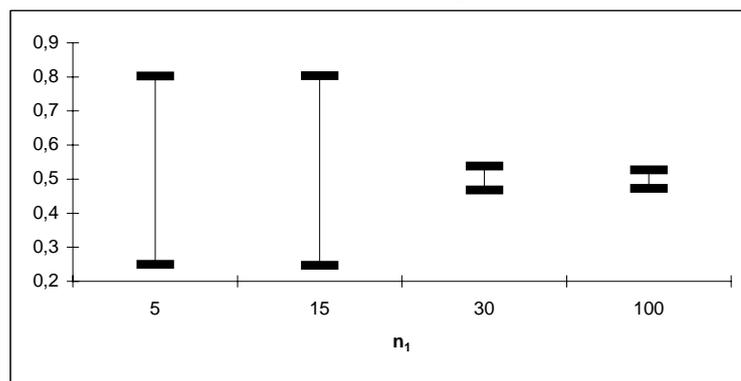


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.160**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 15$   
 Prueba Ansari-Bradley: 100 corridas

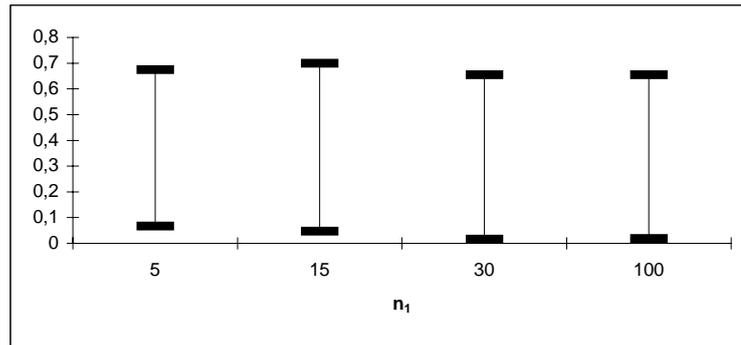


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.161**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$   
 Prueba F: 100 corridas

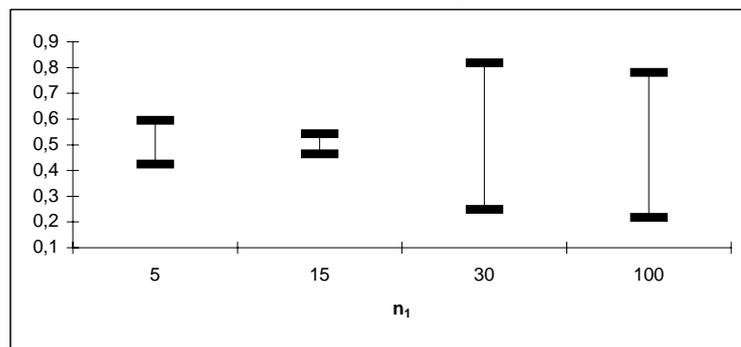


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.162**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 30$   
 Prueba Ansari-Bradley: 100 corridas

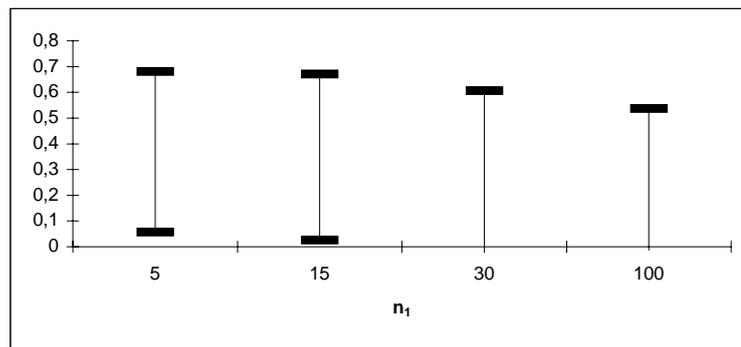


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.163**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$   
 Prueba F: 100 corridas

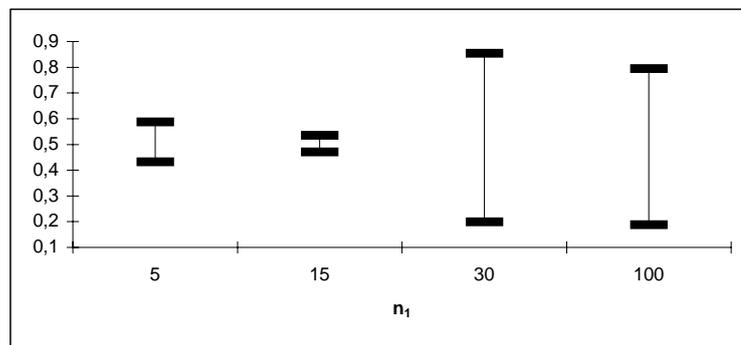


Elaboración: M. Rojas.

**Gráfico 4.164**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Intervalos de confianza para el valor  $p$ ;  $n_2 = 100$   
 Prueba Ansari-Bradley: 100 corridas



Elaboración: M. Rojas.

**Tabla XCI**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

**Longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible**

Prueba F (paramétrica)					Prueba Ansari-Bradley (no paramétrica)				
$L_p$					$L_p$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,6072	0,6292	0,6076	0,6242	5	0,5508	0,5528	0,1692	0,1550
15	0,5446	0,6768	0,6526	0,6452	15	0,5828	0,5562	0,0788	0,0644
30	0,5906	0,5760	0,6384	0,6282	30	0,1896	0,0706	0,5704	0,6548
100	0,6380	0,6388	0,6354	0,5516	100	0,1744	0,0538	0,5636	0,6074

Elaboración: M. Rojas.

.En la Tabla XCII pueden apreciarse los intervalos de confianza para el

valor de  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ . Tenemos que la prueba de Ansari-Bradley se acerca más

en promedio al valor de 1 (que es el valor verdadero) con intervalos de confianza de menor longitud y que la prueba F se ha alejado considerablemente del valor verdadero, aún así los intervalos de confianza de la prueba de Ansari-Bradley tienen menor longitud en la mayoría de los casos.

**Tabla XCII**  
*Pruebas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las pruebas de dispersión para dos muestras**  
 $X_1 \sim \text{Weibull}(1, 1)$  y  $X_2 \sim \text{Weibull}(1, 1)$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ VS } H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Intervalos de confianza para el estimador de  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

$\hat{\mu}_F \pm \hat{\sigma}_F$					$\hat{\mu}_{\text{Rangos}} \pm \hat{\sigma}_{\text{Rangos}}$				
$n_2$					$n_2$				
$n_1$	5	15	30	100	$n_1$	5	15	30	100
5	0,3218 ± 0,2344	0,4332 ± 0,3113	0,4651 ± 0,2800	0,3878 ± 0,2357	5	0,5412 ± 0,2518	0,6941 ± 0,2297	0,6251 ± 0,2596	0,6502 ± 0,2927
15	0,4819 ± 0,2820	0,4378 ± 0,2856	0,5179 ± 0,2399	0,4371 ± 0,2689	15	0,6554 ± 0,2100	0,6301 ± 0,2141	0,6544 ± 0,2403	0,6696 ± 0,1833
30	0,5058 ± 0,2507	0,3785 ± 0,2203	0,5192 ± 0,2870	0,4476 ± 0,2809	30	0,6159 ± 0,1566	0,6774 ± 0,2187	0,6674 ± 0,1405	0,6701 ± 0,1979
100	0,5132 ± 0,2683	0,4115 ± 0,2826	0,5129 ± 0,3055	0,454 ± 0,2413	100	0,7185 ± 0,1528	0,6757 ± 0,1976	0,6502 ± 0,1642	0,6714 ± 0,2232

Elaboración: M. Rojas.

#### 4.5 Comparación de técnicas de obtención de los estimadores de $\beta_0$ y $\beta_1$ en el modelo de regresión lineal simple $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$

Este grupo comprende 2 técnicas de estimación puntual: La técnica de mínimos cuadrados (paramétrica) y la técnica de Theil (no paramétrica). Se determinarán tres casos posibles con respecto a las magnitudes  $\beta_0$  y  $\beta_1$  a saber:  $\beta_0 > \beta_1$  ( $\beta_0$  dominante),  $\beta_0 = \beta_1$  y  $\beta_0 < \beta_1$  ( $\beta_1$  dominante). Se simularán 30 valores observados  $y_i$ :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

donde  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son iguales a 10 y 1 respectivamente ( $\beta_0$  dominante),

donde  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son iguales a 10 y 10 respectivamente ( $\beta_0 = \beta_1$ ), y

Donde  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son iguales a 1 y 10 respectivamente ( $\beta_1$  dominante) y se repetirá este procedimiento 100 veces para cada caso.

Por otra parte se establecerá la hipótesis

$$H_0: \beta = 0$$

VS

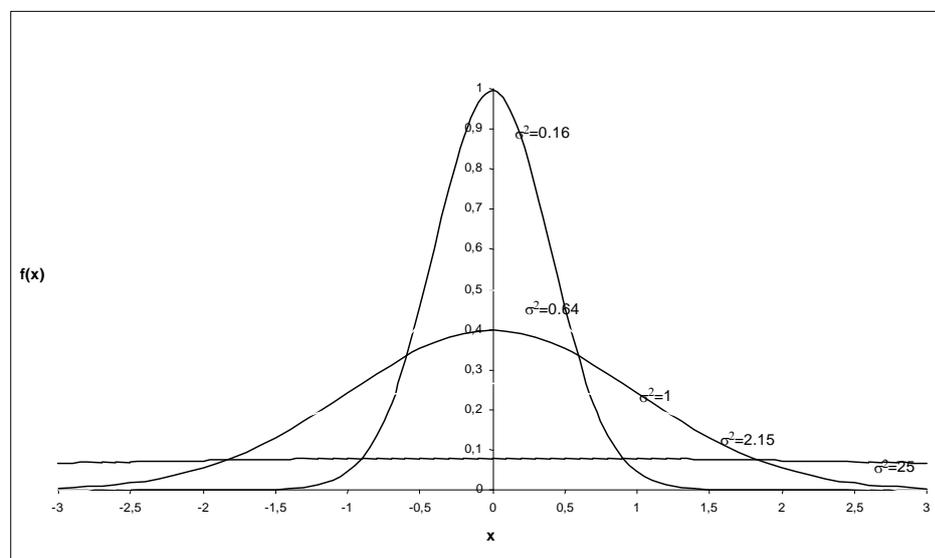
$$H_1: \beta \neq 0$$

Donde tenemos a su vez dos pruebas estadísticas: la prueba F (Mínimos Cuadrados) que se aplica a este contraste y la prueba de Theil, equivalente a la anterior

### Caso 1: El error sigue una distribución Normal

Para este caso tenemos que  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ . Se respeta el supuesto de normalidad del error de la técnica de mínimos cuadrados. Los siguientes son los resultados obtenidos después de 100 corridas.

**Gráfico 4.165**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Función de densidad de probabilidad de la distribución Normal(0,  $\sigma^2$ )**



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla XCIII que las diferencias más cercanas a cero las provee la técnica de Mínimos Cuadrados en la estimación del parámetro  $\beta_1$  en todos los casos, demostrando superioridad sobre la técnica de Theil.

**Tabla XCIII**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las técnicas de regresión:**  
 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

**Intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros:**  
**Estimación puntual de  $\beta_1$**

$\sigma^2$	$\hat{\mu}_{\beta_1-b_1} \pm \hat{\sigma}_{\beta_1-b_1}$			$\hat{\mu}_{\beta_1-b_1} \pm \hat{\sigma}_{\beta_1-b_1}$		
	Mínimos Cuadrados (paramétrica)			Theil (no paramétrica)		
	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$
1	0,0019 ± 0,0180	-0,0027 ± 0,0194	0,0016 ± 0,023	0,0022 ± 0,0195	-0,0043 ± 0,0203	0,0022 ± 0,0241
10	-0,0048 ± 0,0714	0,0068 ± 0,0689	0,0011 ± 0,0585	-0,0061 ± 0,0739	0,0062 ± 0,0721	-0,0006 ± 0,0636
30	0,0018 ± 0,1204	-0,0147 ± 0,1128	0,0134 ± 0,1275	0,0005 ± 0,1213	-0,0095 ± 0,1210	0,0108 ± 0,1277
100	0,0201 ± 0,1943	0,0088 ± 0,2399	-0,0119 ± 0,2241	0,0140 ± 0,2087	0,0116 ± 0,2401	-0,0111 ± 0,2326

Elaboración: M. Rojas.

Como puede apreciarse en la Tabla XCIV las diferencias más cercanas a cero para la estimación  $\beta_0$  de las provee la técnica de Mínimos Cuadrados, superando en la mayoría de los casos a la técnica de Theil.

**Tabla XCIV**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las técnicas de regresión**  
 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

**Intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros:**  
**Estimación puntual de  $\beta_0$**

$\sigma^2$	$\hat{\mu}_{\beta_0-b_0} \pm \hat{\sigma}_{\beta_0-b_0}$			$\hat{\mu}_{\beta_0-b_0} \pm \hat{\sigma}_{\beta_0-b_0}$		
	Mínimos Cuadrados (paramétrica)			Theil (no paramétrica)		
	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$
1	-0,0365 ± 0,3333	0,0757 ± 0,3767	-0,0028 ± 0,4181	-0,0416 ± 0,3485	0,0999 ± 0,3917	-0,0125 ± 0,4313
10	0,0614 ± 1,1945	-0,1204 ± 1,1302	0,0665 ± 1,2138	0,083 ± 1,2354	-0,1115 ± 1,1841	0,0935 ± 1,2615
30	0,0815 ± 2,0437	0,3015 ± 1,9041	-0,3047 ± 2,1884	0,1025 ± 2,0728	0,2200 ± 2,0314	-0,2651 ± 2,1881
100	-0,234 ± 3,4964	-0,1864 ± 4,0462	0,2264 ± 3,9562	-0,1399 ± 3,7388	-0,2310 ± 4,0372	0,2146 ± 4,0558

Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla XCV que la correlación disminuye considerablemente en promedio en el caso de  $\beta_0 > \beta_1$  a medida que la

varianza aumenta y que aunque disminuye también en los demás casos, la magnitud no es tan significativa.

**Tabla XCV**  
Técnicas Paramétricas y No Paramétricas  
Resultados de las técnicas de regresión  
 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$   
Intervalos de confianza para el coeficiente de correlación

$\hat{\rho}_{xy} \pm \hat{\sigma}_{\rho_{xy}}$			
$\sigma^2$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$
1	0,9940 ± 0,0016	0,9999 ± 0,0000	0,9999 ± 0,0000
10	0,9428 ± 0,0164	0,9994 ± 0,0002	0,9994 ± 0,0002
30	0,8483 ± 0,0427	0,9981 ± 0,0006	0,9982 ± 0,0004
100	0,6609 ± 0,0897	0,9937 ± 0,0016	0,9936 ± 0,0017

Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla XCVI tenemos que la mayor longitud del intervalo de confianza para la diferencia entre estimadores y parámetros corresponde a la técnica de Theil cuando  $\sigma^2=100$  y  $\beta_0 = \beta_1$  mientras que la menor longitud corresponde en cambio a la técnica de Mínimos Cuadrados cuando  $\sigma^2=1$  y  $\beta_0 > \beta_1$ .

**Tabla XCVI**  
Técnicas Paramétricas y No Paramétricas  
Resultados de las técnicas de regresión  
 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$   
Longitudes de los intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros:  
Estimación puntual de  $\beta_1$

$\sigma^2$	$L_{\beta_1 - b_1}$			$L_{\beta_1 - b_1}$		
	Mínimos Cuadrados (paramétrica)			Theil (no paramétrica)		
	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$
1	0,0360	0,0388	0,0460	0,0390	0,0406	0,0482
10	0,1428	0,1378	0,1170	0,1478	0,1442	0,1272
30	0,2408	0,2256	0,2550	0,2426	0,2420	0,2554
100	0,3886	0,4798	0,4482	0,4174	0,4802	0,4652

Elaboración: M. Rojas

En la Tabla XCVII tenemos que la mayor longitud del intervalo de confianza para la diferencia entre estimadores y parámetros para  $\beta_0$  corresponde a la técnica de Theil cuando  $\sigma^2=100$  y  $\beta_0 < \beta_1$  mientras que la menor longitud corresponde en cambio a la técnica de Mínimos Cuadrados cuando  $\sigma^2=1$  y  $\beta_0 > \beta_1$ .

**Tabla XCVI**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las técnicas de regresión**  
 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$   
**Longitudes de los intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros**  
**Estimación puntual de  $\beta_0$**

		$L_{\beta_0 - b_0}$			$L_{\beta_0 - b_0}$		
		Mínimos Cuadrados (paramétrica)			Theil (no paramétrica)		
$\sigma^2$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$	
1	0,6666	0,7534	0,8362	0,6970	0,7834	0,8626	
10	2,3890	2,2604	2,4276	2,4708	2,3682	2,5230	
30	4,0874	3,8082	4,3768	4,1456	4,0628	4,3762	
100	6,9928	8,0924	7,9124	7,4776	8,0744	8,1116	

Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla XCVIII se tiene que la mayor longitud del intervalo de confianza para el coeficiente de correlación corresponde a  $\sigma^2=100$  y  $\beta_0 > \beta_1$  mientras que la menor corresponde en cambio a  $\sigma^2=1$  y  $\beta_0 = \beta_1$ .

**Tabla XCVIII**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las técnicas de regresión**  
 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$   
**Longitudes de los intervalos de confianza para el coeficiente de correlación**

$L_{\rho_{xy}}$			
$\sigma^2$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$
1	0,0032	0,0000	0,0000
10	0,0328	0,0004	0,0004
30	0,0854	0,0012	0,0008
100	0,1794	0,0032	0,0034

Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla XCIX pueden apreciarse los intervalos de confianza obtenidos para ambas técnicas al probar la hipótesis de que  $\beta=0$ . Se conoce de antemano que el valor del parámetro es diferente de 0. En las simulaciones la hipótesis nula fue rechazada las 100 veces que fue propuesta para cada caso, por ello analizaremos el desempeño de las pruebas mediante su valor plausible. Los intervalos de confianza correspondientes al método de Theil son de menor longitud a los correspondientes a los Mínimos Cuadrados. El valor plausible de la técnica de Theil es más cercano a 0 que el obtenido al aplicar su correspondiente paramétrico para todos los casos contemplados en la simulación.

**Tabla XCIX**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las técnicas de regresión**  
 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$   
**Intervalos de confianza para el valor plausible**  
 $H_0: \beta=0$   
 VS  
 $H_1: \beta \neq 0$

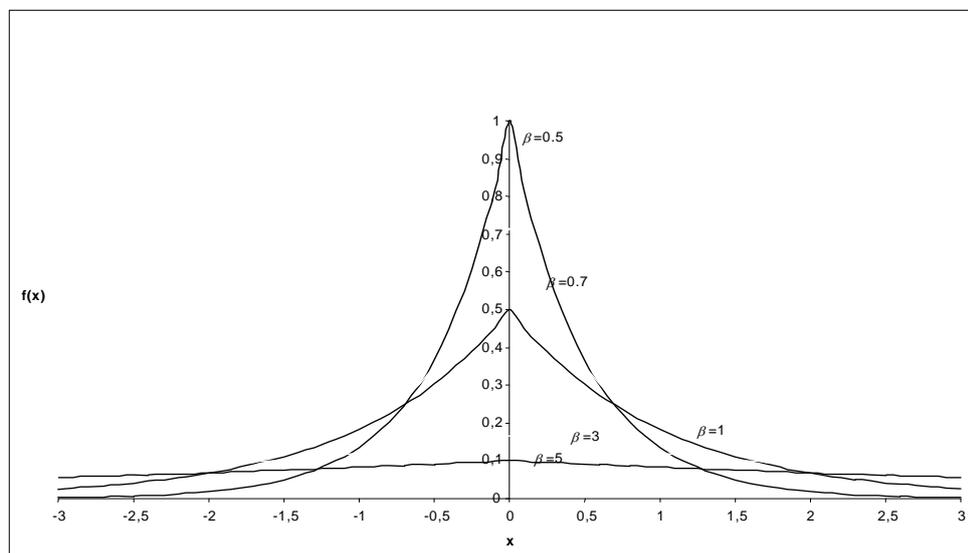
$\sigma^2$	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$			$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$		
	Mínimos Cuadrados (paramétrica)			Theil (no paramétrica)		
	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$
1	6,8E-14 ± 6,7E-14	4,3E-15 ± 0,000	4,2E-15 ± 0,000	3,5E-26 ± 2,1E-25	5,4E-55 ± 1,8E-54	5,6E-55 ± 1,7E-54
10	7,7E-10 ± 3,3E-09	4,7E-15 ± 8,38E-16	4,6E-15 ± 8,9E-16	6,2E-13 ± 4,3E-12	1,4E-40 ± 5,3E-40	3,2E-40 ± 1,7E-39
30	8,7E-07 ± 2,7E-06	1,2E-14 ± 8,26E-15	1,01E-14 ± 4,1E-15	2,1E-07 ± 1,01E-06	3,9E-33 ± 1,8E-32	2,3E-34 ± 7,9 E-34
100	0,001 ± 0,007	1,01E-13 ± 1,03E-13	8,4E-14 ± 8,4E-14	0,002 ± 0,009	1,4E-26 ± 5,1E-26	3,6E-26 ± 1,9E-25

Elaboración: M. Rojas.

### Caso 2: El error sigue una distribución simétrica no normal

Para este caso tenemos que  $\varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$ . Se viola el supuesto de normalidad del error de la técnica de mínimos cuadrados y se respeta el supuesto de simetría del error de la técnica de Theil. Los siguientes son los resultados obtenidos después de 100 corridas.

**Gráfico 4.166**  
Técnicas Paramétricas y No Paramétricas  
Función de densidad de probabilidad de la distribución de Laplace(0,  $\beta$ )



Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla C que las diferencias más cercanas a cero las provee la técnica de Mínimos Cuadrados en la estimación del parámetro  $\beta_1$  en la mayoría de los casos, aún así las diferencias son muy similares a las obtenidas con la técnica de Theil.

**Tabla C**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las técnicas de regresión:**  
 $\varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$   
**Intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros:**  
**Estimación puntual de  $\beta_1$**

$\beta^2$	$\hat{\mu}_{\beta_1-b_1} \pm \hat{\sigma}_{\beta_1-b_1}$			$\hat{\mu}_{\beta_1-b_1} \pm \hat{\sigma}_{\beta_1-b_1}$		
	<b>Mínimos Cuadrados (paramétrica)</b>			<b>Theil (no paramétrica)</b>		
	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$
1	-0,0011 ± 0,0422	0,0069 ± 0,0455	0,0021 ± 0,0425	-0,0007 ± 0,0351	0,0035 ± 0,0401	0,0022 ± 0,0367
10	0,0153 ± 0,1309	-0,0006 ± 0,1310	-0,0068 ± 0,1524	0,0161 ± 0,1159	-0,0008 ± 0,1201	-0,0068 ± 0,1369
30	0,0228 ± 0,2432	0,0137 ± 0,2410	0,0183 ± 0,2127	0,0280 ± 0,2322	0,0130 ± 0,2116	0,0278 ± 0,1717
100	0,0183 ± 0,3956	-0,0342 ± 0,4229	-0,0145 ± 0,4514	0,0135 ± 0,3382	-0,0405 ± 0,3622	0,0329 ± 0,3854

Elaboración: M. Rojas.

Como puede apreciarse en la Tabla CI las diferencias más cercanas a cero en el caso  $\beta_1$  las provee la técnica de Mínimos Cuadrados, aunque sin superar significativamente a la técnica de Theil. Puede observarse además que de ambas pruebas se tienen promedios que se alejan considerablemente de cero.

**Tabla CI**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las técnicas de regresión**  
 $\varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$   
**Intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros:**  
**Estimación puntual de  $\beta_0$**

$\beta^2$	$\hat{\mu}_{\beta_0-b_0} \pm \hat{\sigma}_{\beta_0-b_0}$			$\hat{\mu}_{\beta_0-b_0} \pm \hat{\sigma}_{\beta_0-b_0}$		
	<b>Mínimos Cuadrados (paramétrica)</b>			<b>Theil (no paramétrica)</b>		
	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$
1	0,1174 ± 0,7655	-0,1217 ± 0,7913	-0,0071 ± 0,7617	0,1114 ± 0,6871	-0,0695 ± 0,7155	-0,0091 ± 0,6786
10	-0,3105 ± 2,3849	0,2396 ± 2,2313	0,0850 ± 2,6053	-0,3239 ± 2,3308	0,2427 ± 2,1689	0,0851 ± 2,3203
30	-0,2868 ± 4,1134	-0,2227 ± 4,0832	-0,4128 ± 3,6992	-0,3673 ± 3,9568	-0,2111 ± 3,8673	-0,5600 ± 3,1823
100	-0,3158 ± 7,7521	0,7906 ± 8,0336	0,5284 ± 8,3182	-0,2416 ± 6,9091	0,8888 ± 7,2697	-0,2059 ± 7,5048

Elaboración: M. Rojas.

Puede apreciarse en la Tabla CII que la correlación disminuye considerablemente en promedio en el caso de  $\beta_0 > \beta_1$  a medida que la

varianza aumenta y que aunque disminuye también en los demás casos, la magnitud no es significativa.

**Tabla CII**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las técnicas de regresión**  
 $\varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$   
**Intervalos de confianza para el coeficiente de correlación**

$\hat{\rho}_{xy} \pm \hat{\sigma}_{\rho_{xy}}$			
$\beta^2$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$
1	0,9764 $\pm$ 0,0098	0,9998 $\pm$ 0,0001	0,9998 $\pm$ 0,0001
10	0,8058 $\pm$ 0,0684	0,9976 $\pm$ 0,0008	0,9973 $\pm$ 0,0012
30	0,6284 $\pm$ 0,1173	0,9923 $\pm$ 0,0033	0,9925 $\pm$ 0,0028
100	0,4077 $\pm$ 0,1518	0,9768 $\pm$ 0,0096	0,9767 $\pm$ 0,0081

Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla CIII tenemos que la mayor longitud del intervalo de confianza indicado corresponde a la técnica de Mínimos Cuadrados cuando  $\sigma^2=100$  y  $\beta_0 < \beta_1$  mientras que la menor longitud corresponde en cambio a la técnica de Theil cuando  $\sigma^2=1$  y  $\beta_0 > \beta_1$ .

**Tabla CIII**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las técnicas de regresión**  
 $\varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$   
**Longitudes de los intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros:**  
**Estimación puntual de  $\beta_1$**

$\beta^2$	$L_{\beta_1 - b_1}$			$L_{\beta_1 - b_1}$		
	Mínimos Cuadrados (paramétrica)			Theil (no paramétrica)		
	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$
1	0,0844	0,0910	0,0850	0,0702	0,0802	0,0734
10	0,2618	0,2620	0,3048	0,2318	0,2402	0,2738
30	0,4864	0,4820	0,4254	0,4644	0,4232	0,3434
100	0,7912	0,8458	0,9028	0,6764	0,7244	0,7708

Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla CIV tenemos que la mayor longitud del intervalo de confianza indicado corresponde a la técnica de Mínimos Cuadrados cuando  $\sigma^2=100$  y  $\beta_0 < \beta_1$  mientras que la menor longitud corresponde en cambio a la técnica de Theil cuando  $\sigma^2=1$  y  $\beta_0 > \beta_1$ .

**Tabla CIV**  
Técnicas Paramétricas y No Paramétricas  
Resultados de las técnicas de regresión  
 $\varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$   
Longitudes de los intervalos de confianza para las diferencias entre estimadores y parámetros  
Estimación puntual de  $\beta_0$

$\beta^2$	$L_{\beta_0 - b_0}$			$L_{\beta_0 - b_0}$		
	Mínimos Cuadrados (paramétrica)			Theil (no paramétrica)		
	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$
1	0,7655	0,7913	0,7617	0,6871	0,7155	0,6786
10	2,3849	2,2313	2,6053	2,3308	2,1689	2,3203
30	4,1134	4,0832	3,6992	3,9568	3,8673	3,1823
100	7,7521	8,0336	8,3182	6,9091	7,2697	7,5048

Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla CV tenemos que la mayor longitud del intervalo de confianza indicado corresponde a  $\sigma^2=100$  y  $\beta_0 > \beta_1$  mientras que la menor longitud corresponde en cambio a  $\sigma^2=1$  y  $\beta_0 = \beta_1$ .

**Tabla CV**  
Técnicas Paramétricas y No Paramétricas  
Resultados de las técnicas de regresión  
 $\varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$   
Longitudes de los intervalos de confianza para el coeficiente de correlación

$\beta^2$	$L_{\rho_{xy}}$		
	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$
1	0,0196	0,0002	0,0002
10	0,1368	0,0016	0,0024
30	0,2346	0,0066	0,0056
100	0,3036	0,0192	0,0162

Elaboración: M. Rojas.

En la Tabla CVI pueden apreciarse los intervalos de confianza obtenidos para ambas técnicas al probar la hipótesis de que  $\beta = 0$ . En las simulaciones la hipótesis nula fue rechazada las 100 veces que fue propuesta de forma similar al caso anterior. Los intervalos de confianza correspondientes al método de Theil son de menor longitud que los correspondientes a los Mínimos Cuadrados. El valor plausible de la técnica de Theil es más cercano a 0 que el obtenido al aplicar su correspondiente paramétrico excepto en los casos en los que la varianza del error es grande y  $\beta_0$  es dominante, donde los Mínimos Cuadrados tienen intervalos de menor longitud y valores plausibles más cercanos a 0. En el resto de casos considerados la técnica de Theil superó en las características antes mencionadas a los Mínimos Cuadrados.

**Tabla CVI**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Resultados de las técnicas de regresión**  
 $\varepsilon_i \sim \text{Laplace}(0, \beta)$   
**Intervalos de confianza para el valor plausible**  
 $H_0: \beta = 0$   
 VS  
 $H_1: \beta \neq 0$

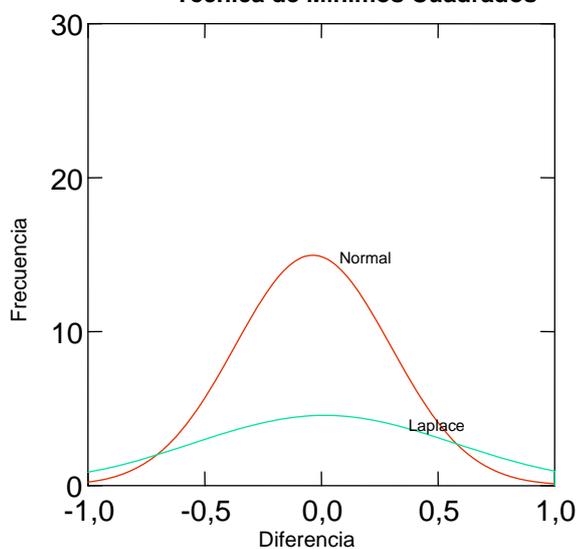
	$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$			$\hat{\mu}_p \pm \hat{\sigma}_p$		
	Mínimos Cuadrados (paramétrica)			Theil (no paramétrica)		
$\beta^2$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$	$\beta_0 > \beta_1$	$\beta_0 = \beta_1$	$\beta_0 < \beta_1$
1	7,29E-12 ± 2,1E-11	4,3E-15 ± 2,8E-16	4,3E-15 ± 3,4E-16	3,9E-17 ± 2,6E-16	3,9E-44 ± 2,5E-43	3,9E-44 ± 3,4E-43
10	4,7E-06 ± 2,1E-05	1,4E-14 ± 6,8E-15	1,7E-14 ± 1,5E-14	5,5E-06 ± 2,4E-05	1,6E-31 ± 1,3E-30	1,4E-29 ± 1,1E-28
30	0,001 ± 0,004	1,2E-13 ± 1,4 E-13	1,03E-13 ± 8,8E-14	0,006 ± 0,02	8,6E-24 ± 4,1E-23	1,2E-24 ± 4,4E-24
100	0,04 ± 0,06	4,7E-12 ± 8,5E-12	5,3E-12 ± 1,02E-11	0,09 ± 0,3	4,6E-17 ± 2,3E-16	4,9E-18 ± 1,7E-17

Elaboración: M. Rojas.

#### 4.5.1 Funciones de densidad de la diferencia entre errores y parámetros

En el Gráfico 4.167 puede apreciarse el efecto que tienen las distintas distribuciones del error en la técnica de mínimos cuadrados al calcular la diferencia entre  $\beta_0$  y  $b_0$ . En el caso normal, la frecuencia absoluta es mayor y la media cercana a cero; mientras que en el caso de que el error siga una distribución de Laplace, la varianza de las diferencias aumenta y la distribución se achata.

**Gráfico 4.167**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Efecto de la distribución del error en la función de densidad estimada de la de diferencia entre  $\beta_0$  y  $b_0$ :**  
**Técnica de Mínimos Cuadrados**

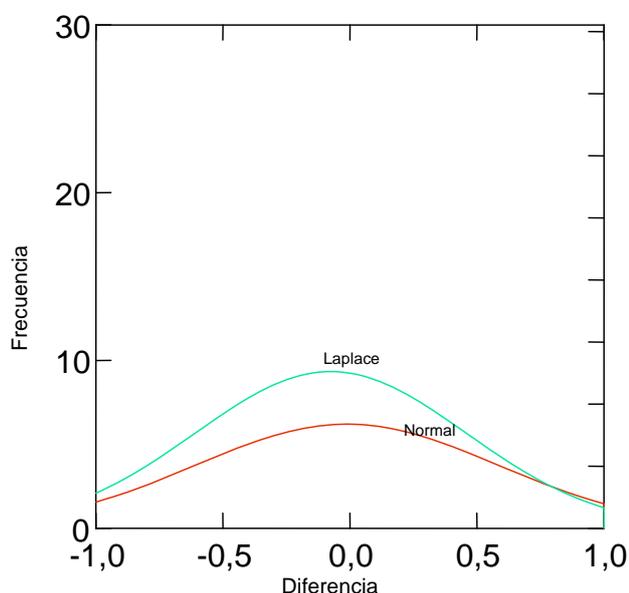


Elaboración: M. Rojas.

En el Gráfico 4.168 puede apreciarse que, al calcular la diferencia entre  $\beta_0$  y  $b_0$ , para un error que siga una distribución de Laplace se tiene un

mayor número de diferencias cercanas a cero que las que se obtienen con un error que siga una distribución normal al aplicar la técnica de Theil. La técnica de Theil parece no afectarse por el cambio en la distribución del error.

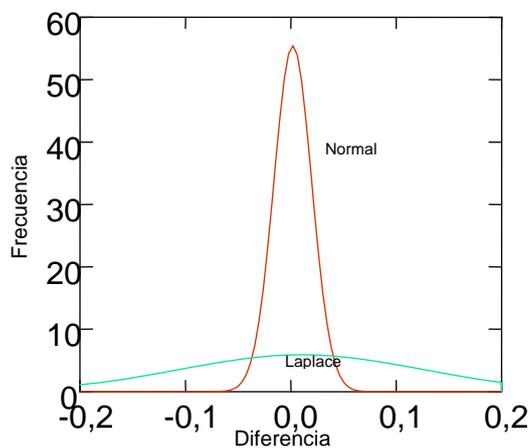
**Gráfico 4.168**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Efecto de la distribución del error en la función de densidad estimada de la de diferencia entre  $\beta_0$  y  $b_0$ :**  
**Técnica de Theil**



Elaboración: M. Rojas.

En el Gráfico 4.169 puede apreciarse el efecto que tienen las distintas distribuciones del error en la técnica de mínimos cuadrados al calcular la diferencia entre  $\beta_1$  y  $b_1$ . En el caso normal, la frecuencia absoluta es mayor y la media cercana a cero; mientras que en el caso de que el error siga una distribución de Laplace, la varianza de las diferencias aumenta y la distribución se achata considerablemente.

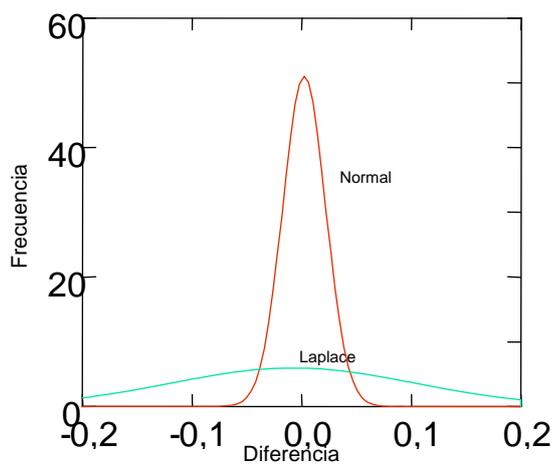
**Gráfico 4.169**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Efecto de la distribución del error en la función de densidad estimada de la de diferencia entre  $\beta_1$  y  $b_1$**   
**Técnica de Mínimos Cuadrados**



Elaboración: M. Rojas.

En el Gráfico 4.170 puede apreciarse que, entre  $\beta_1$  y  $b_1$ , para un error que siga una distribución normal se tiene un mayor número de diferencias cercanas a cero al aplicar la técnica de Theil.

**Gráfico 4.170**  
*Técnicas Paramétricas y No Paramétricas*  
**Efecto de la distribución del error en la función de densidad estimada de la de diferencia entre  $\beta_1$  y  $b_1$**   
**Técnica de Theil**



Elaboración: M. Rojas.

# CAPITULO 5

## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 5.1 Conclusiones sobre las pruebas de medidas de tendencia central de la muestra

1. Cumpliendo el supuesto de normalidad, para tamaños de muestra pequeños, la longitud del intervalo de confianza para el valor plausible correspondiente a la prueba no paramétrica (Prueba de Wilcoxon) es menor que el correspondiente a las paramétricas (Prueba Z y t). A medida que el tamaño de muestra crece tenemos que los intervalos de confianza del valor plausible de ambas pruebas llegan a tener longitudes que no difieren significativamente. El número de aceptaciones de la hipótesis nula entre las pruebas paramétricas y no paramétricas tampoco difiere significativamente. Las pruebas paramétricas fueron más potentes que las no paramétricas. La varianza de la media aritmética para poblaciones normales fue menor que la de la mediana muestral para todos los casos, ya sean estos al

variar el parámetro  $\sigma^2$  o al variar el tamaño de la muestra. A medida que se aumenta el tamaño de muestra y el valor del parámetro  $\sigma^2$ , el valor de la mediana muestral se acerca mucho más al valor real de la media poblacional que el valor correspondiente a la media aritmética en el mismo caso. Recuérdese que se utilizó a la media aritmética en la prueba paramétrica (Prueba Z y t) y a la mediana muestral en la prueba no paramétrica (Prueba de Wilcoxon).

2. Al violar el supuesto de normalidad y respetar la simetría tenemos que, para tamaños de muestra pequeños y baja dispersión, los intervalos de confianza para el valor plausible correspondientes a la prueba no paramétrica son menores en longitud que los correspondientes paramétricos. A medida que se aumenta el tamaño de muestra y el parámetro  $\beta$  en la distribución de Laplace, las pruebas paramétricas (Prueba Z y t) superan en magnitud del valor plausible a la prueba no paramétrica (Prueba de Wilcoxon). El número de aceptaciones de la hipótesis nula entre las pruebas paramétricas y no paramétricas no difiere significativamente. Las pruebas paramétricas se mantuvieron robustas frente al supuesto de normalidad cuando la población es simétrica y fueron más potentes que las no paramétricas en todos los casos. Los intervalos de confianza para la media poblacional son de mayor longitud que los correspondientes la

mediana poblacional para valores de muestra pequeños (lo que da una idea de porque las pruebas no paramétricas “parecen” desempeñarse mejor en tamaños de muestra pequeños). La magnitud de la varianza de la media aritmética es mayor que la de la mediana muestral para todos los casos contemplados.

3. Al violar el supuesto de normalidad y la simetría tenemos que para el caso donde la asimetría es considerable (Weibull: Casos 1 y 2) tuvimos que para tamaños de muestra pequeños los intervalos de confianza del valor plausible correspondientes a la prueba no paramétrica (Prueba de Wilcoxon) son menores en longitud que los correspondientes a las pruebas paramétricas (Pruebas Z y t), pero que esta característica se pierde a medida que el tamaño de la muestra aumenta. En los intervalos de confianza del valor plausible correspondiente a las pruebas paramétricas sucede un efecto inverso: A medida que aumenta el tamaño de muestra aumenta el valor plausible de la prueba paramétrica y disminuye (de manera drástica para el caso 1) el valor plausible de la prueba no paramétrica. Para el caso donde la asimetría es leve (Weibull: Caso 3) el valor plausible de la prueba de Wilcoxon logra mantenerse, pero es inferior al de las pruebas paramétricas. En el número de rechazos tenemos un comportamiento muy similar al observado en el valor plausible. A

medida que aumenta el tamaño de muestra se produce un aumento en el número de aceptaciones por la prueba paramétrica y un aumento en el número de rechazos por la prueba no paramétrica. A medida que disminuye la asimetría el número de aceptaciones entre ambas se hace muy similar. Las pruebas paramétricas no se mantuvieron robustas al supuesto de simetría, mientras que las no paramétricas, se mostraron extremadamente sensibles a este supuesto, lo que va de acuerdo a investigaciones teóricas anteriores (Pitman, 1948). La media y la mediana poblacionales difieren considerablemente en los casos de asimetría total (Weibull: Caso 1 y 2). En estos casos los intervalos de confianza son totalmente distintos ya que son construidos sobre parámetros distintos. Si se viola el supuesto de normalidad y el supuesto de simetría tenemos que la potencia de explicación viene a depender de la asimetría de la función, de forma más sensible en las pruebas no paramétricas.

4. Al violar el supuesto de continuidad el valor plausible correspondiente a la prueba no paramétrica es muy cercano a cero. Parece indicar que la hipótesis nula es rechazada siempre (aún sabiendo que es verdadera). Por otro lado el valor plausible correspondiente a la prueba paramétrica parece no afectarse ya que sus intervalos de confianza se mantienen estables y de longitudes que no difieren

considerablemente en los casos contemplados. Los intervalos de confianza son de longitudes similares para la media y mediana poblacional aún cuando las distribuciones son sesgadas (Binomial: Casos 1 y 3). Una pregunta podría ser ¿por qué no funcionan las técnicas no paramétricas si el intervalo de confianza de la mediana contiene también el parámetro que se desea estimar?. Una explicación para el problema que se presenta en las poblaciones discretas son las llamadas “observaciones 0”, es decir las observaciones que poseen el mismo valor que el parámetro que se contrasta y que en las pruebas que utilizan transformaciones de rangos se desechan. Es evidente que esto no puede suceder en una población continua, pero en una población discreta es posible y si la varianza es pequeña con mayor razón. Pueden utilizarse otros tipos de transformaciones para manejar este problema que pueden consultarse en Pratt (1959).

## **5.2 Conclusiones sobre las pruebas de medidas de tendencia central para dos muestras**

5. Cumpliéndose el supuesto de normalidad si las varianzas de ambas distribuciones son iguales y las muestras difieren mucho en tamaño, se tiene que las conclusiones son muy similares para las pruebas paramétricas y no paramétricas. El valor plausible correspondiente a la

prueba paramétrica (prueba t para dos muestras) es mucho mayor que el de su equivalente no paramétrico (prueba de Mann-Withney) y sus intervalos de confianza son también de mayor longitud, aunque no significativamente. La longitud de los intervalos de confianza para el valor plausible no se ve mayormente afectada por el parámetro  $\sigma^2$  de una u otra población (de hecho lo que realmente afecta a su longitud es el tamaño de la muestra). Se tiene que a mayor tamaño de muestra en la distribución con mayor magnitud del parámetro  $\sigma^2$ , los resultados no difieren considerablemente, pero dos muestras del mismo tamaño pueden en este caso hacer que el resultado de la prueba paramétrica difiera significativamente. La prueba paramétrica (prueba t para dos muestras) tienen mayor potencia de explicación que su equivalente no paramétrico (prueba de Mann-Withney) sin importar el tamaño de muestra o si las varianzas son iguales o no ya que aceptó en mayor número la hipótesis nula.

6. Al violar el supuesto de normalidad y manteniendo la simetría tenemos que si la varianza de ambas distribuciones es igual los intervalos de confianza para el valor plausible correspondiente a la prueba paramétrica (prueba t para dos muestras) son mucho más amplios que los de la prueba no paramétrica (prueba de Mann-Withney). El valor plausible para la prueba t es mucho mayor que el valor plausible para

la prueba no paramétrica en todos los casos y para cualquier tamaño de muestra, siempre que las varianzas de las poblaciones sean iguales. Si las varianzas no son iguales el valor plausible de la prueba  $t$  para dos muestras disminuye en su magnitud pero no significativamente al igual que la prueba de Mann-Whitney. En el caso donde ambos tamaños de muestra difieren mucho y las varianzas son desiguales, la prueba de Mann-Whitney aceptó en un mayor número de veces la hipótesis nula, aunque la diferencia entre el número de aceptaciones no es significativa. La longitud de los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba no paramétrica son de menor longitud que los de su equivalente paramétrico. Con respecto a los intervalos de confianza para la diferencia entre medias y medianas poblacionales tenemos que ambos son muy similares y que la longitud del intervalo de diferencias entre medianas es más pequeño que el de diferencias entre medias. Esto sucede solamente en el caso donde las varianzas son iguales. Si las varianzas son diferentes tenemos que el intervalo de confianza correspondiente a la diferencia entre medianas tiene menor longitud. La prueba  $t$  para dos muestras se mantuvo robusta frente al supuesto de normalidad cuando la población es simétrica y fue más potente que las pruebas no paramétricas en todos los casos; lo que coincide con los resultados teóricos obtenidos por Pratt(1964).

7. Al violar el supuesto de simetría se tiene que las longitudes de los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba paramétrica (prueba t para dos muestras) son mayores que los correspondientes a la prueba no paramétrica (prueba de Mann-Withney). En el momento de rechazar o aceptar la hipótesis nula ambas pruebas se comportan de manera similar. La diferencia entre medias y la diferencia entre medianas poseen intervalos de confianza de longitudes muy similares. Las simulaciones reflejaron que la prueba paramétrica (prueba t para dos muestras) tiene mayor potencia de explicación que su equivalente no paramétrico (prueba de Mann-Withney) sin importar el tamaño de muestra. Aún así es interesante observar que al igual que la prueba paramétrica, la prueba no paramétrica no ha variado considerablemente en su potencia de explicación. Podemos decir entonces que la prueba paramétrica y su equivalente no paramétrica son robustas con respecto a la simetría de la distribución.

### **5.3 Conclusiones sobre las pruebas de medidas de dispersión para dos muestras**

8. Cumpliéndose el supuesto de normalidad tenemos que para este caso los intervalos de confianza del valor plausible para ambas pruebas

generan resultados similares, de hecho en algunos casos la prueba no paramétrica (prueba de Ansari-Bradley) tiene intervalos de confianza de longitud menor que los correspondientes a su equivalente paramétrico (prueba F). El cociente de varianzas estimado es más cercano a 1 (su valor real) en la estimación hecha por los cocientes de los rangos asignados. El número de aceptaciones de la hipótesis nula por parte de la prueba no paramétrica aumenta a medida que el tamaño de muestra aumenta y llega a aceptar un mayor número de veces la hipótesis nula que su equivalente paramétrico para la misma región crítica. En los resultados tenemos que la prueba no paramétrica tiene mejor desempeño que su equivalente paramétrico en este caso.

9. Violando el supuesto de normalidad y manteniendo la simetría los intervalos de confianza del valor plausible para la prueba paramétrica (prueba F) aumentan en longitud y tenemos que el valor plausible se ha reducido y además ha aumentado su varianza estimada. Por otro lado los intervalos de confianza para el valor plausible de la prueba no paramétrica (prueba de Ansari-Bradley) son de menor longitud. El cociente de varianzas estimado es más cercano a 1 en la estimación hecha por los cocientes de los rangos asignados. La prueba no paramétrica supera o iguala en cualquier tamaño de muestra el

desempeño de la prueba paramétrica. El número de aceptaciones de la prueba no paramétrica (prueba Ansari-Bradley) es superior al de la prueba paramétrica (prueba F). La prueba no paramétrica fue más potente que la prueba paramétrica (prueba F) en el caso considerado.

10. Violando el supuesto de normalidad y simetría de manera similar al caso anterior los intervalos de confianza del valor plausible para la prueba paramétrica (Prueba F) se han aumentado en longitud. Mientras que en el caso no paramétrico (Prueba Ansari-Bradley) los intervalos de confianza para el valor plausible se muestran insensibles a la asimetría. El cociente de varianzas estimado es más cercano a 1 en la estimación hecha por los cocientes de los rangos asignados. A medida que aumenta el tamaño de la muestra las aceptaciones de la hipótesis nula de la prueba paramétrica disminuyen; mientras que las de la prueba no paramétrica aumentan y se mantienen constantes. La prueba no paramétrica (prueba de Ansari-Bradley) fue más potente que la prueba paramétrica (prueba F) en el caso considerado. Como ya se dijo la prueba paramétrica es extremadamente sensible al supuesto de normalidad de la distribución poblacional. La prueba no paramétrica resultó robusta frente al supuesto de simetría.

#### 5.4 Conclusiones sobre los estimadores en regresión lineal

11. Si el error sigue una distribución Normal para el estimador  $b_1$  la técnica de Theil y los Mínimos Cuadrados proveen una diferencia estimada entre el valor del parámetro y su estimador de magnitud similar, tanto que podemos concluir que bajo el supuesto de un error que siga una distribución Normal la técnica de Mínimos Cuadrados y la técnica de Theil tienen resultados equivalentes, sin importar que parámetro es el dominante. Para el estimador  $b_0$  la técnica de Theil provee una diferencia más cercana al valor real para valores de varianza del error grandes, mientras que los Mínimos Cuadrados proveen una diferencia entre el estimador y el parámetro más cercano a cero en el caso en que el valor de la varianza del error es pequeño.
  
12. Si el error no sigue una distribución Normal, pero es simétrico para el estimador  $b_1$  la técnica de Theil provee la diferencia entre el estimador y el parámetro más cercano a 0, pero únicamente para varianzas pequeñas del error. Por otra parte aunque se siguen manteniendo los resultados (la prueba paramétrica tiene los menores valores de diferencia) si la varianza del error es grande pueden utilizarse cualquiera de las dos técnicas. Para el estimador  $b_0$  la técnica de Theil provee diferencias más cercanas a 0 para valores de varianza del error pequeños, mientras que los Mínimos Cuadrados proveen una

diferencia más cercana a 0 en el caso en que el valor de la varianza del error es grande, es decir el modo inverso del caso anterior.

### **5.5 Recomendaciones sobre las pruebas de medidas de tendencia central de la muestra**

1. Si tiene la seguridad de que su muestra proviene de una distribución normal, utilice técnicas paramétricas (prueba Z o t) y de no poder aplicarlas escoja la alternativa no paramétrica (prueba de Wilcoxon) sin importar el tamaño de muestra. Si su muestra proviene de una distribución continua y simétrica y además se desconoce que sea normal o no, utilice técnicas paramétricas o no paramétricas sin un orden específico y sin importar el tamaño de muestra. En casos donde se tiene distribuciones discretas, verifique cuantas observaciones pierde por medio de la transformación y según este número decida si aún desea aplicar la prueba no paramétrica (prueba de Wilcoxon). Se recomienda utilizar únicamente la prueba paramétrica en estos casos. Si la varianza es grande o si puede aproximarse a una distribución continua por medio de alguna transformación (logarítmica, exponencial, etc.) entonces puede usarse la prueba no paramétrica sin ningún problema.

## **5.6 Recomendaciones sobre las pruebas de medidas de tendencia central de la muestra**

2. Si tiene la seguridad de que sus muestras provienen de una distribución normal, utilice la prueba  $t$  y de no poder aplicarla escoja la prueba de Mann-Whitney. Si las muestras provienen de una distribución simétrica entonces utilice la prueba paramétrica (prueba  $t$  para dos muestras) o no paramétrica (prueba de Mann-Whitney) sin ningún orden específico. Si las muestras provienen de poblaciones distintas que no difieren en su forma o dispersión entonces utilice la técnica no paramétrica. Recuerde que la prueba no paramétrica solo supone igualdad de forma entre ambas distribuciones. La prueba de Mann-Whitney no es sensible a la asimetría mientras se respete el supuesto de forma de las distribuciones. Si se comparan muestras de poblaciones con distintos coeficientes de asimetría sería aconsejable utilizar la prueba paramétrica. En este caso sin importar el tamaño de muestra, elija cualquiera de las dos pruebas considerando las recomendaciones antes indicadas.

## **5.7 Recomendaciones sobre las pruebas de medidas de dispersión para dos muestras**

3. Si la población de donde se toma la muestra es normal aplique la prueba  $F$ . De no poder suponerse normalidad utilice la prueba de

Ansari-Bradley. Si la población de donde se tomó la muestra no es normal pero es simétrica entonces se recomienda utilizar la prueba de Ansari-Bradley ya que tiene mejor desempeño que la prueba F debido a su robustez con respecto a la distribución. Si la población no es simétrica se recomienda utilizar únicamente la prueba de Ansari-Bradley. Recuerde que la prueba no posee más supuestos que la independencia de sus datos y la igualdad de medianas a cero. Ansari-Bradley exige también que las medianas poblacionales sean iguales, una transformación para cumplir este supuesto puede encontrarse en Ansari,Bradley(1960); pero dicha transformación hace que la prueba deje de ser no paramétrica.

### **5.8 Recomendaciones sobre los estimadores en regresión lineal**

4. Si el error sigue una distribución Normal utilice la técnica de Theil o Mínimos Cuadrados ya que producen resultados similares bajo esa condición. Si el error sigue una distribución que no es Normal, es simétrica y la varianza es grande utilice la técnica de Theil ya que es menos sensible a valores grandes del error. Si el error sigue una distribución que no es Normal, es simétrica y la varianza es pequeña utilice la técnica de Mínimos Cuadrados. De cualquier manera la simulación reflejó que los Mínimos Cuadrados superaron a la técnica de Theil en la mayoría de los casos.

## Referencias Bibliográficas

1. **Microsoft Press** (2001). *“Curso rápido de Microsoft Office 2000”*, Editorial Norma, México
2. **Birnios M.** (2001). *“Manual de Visual Basic 6.0”*, Primera Edición, MP Ediciones, México
3. **Deitel H. M., Deitel P. J.** (1999). *“C++: Como programar”*, Segunda Edición Prentice Hall Iberoamérica, México
4. **Wilkinson, L.** (1998). *“Systat 7.0 for Windows”*. SYSTAT PRODUCTS SPSS INC. Chicago, USA.
5. **Evans M., Hastings N., Peacock B.** (1993). *“Statistical Distributions”*, Segunda edición, John Wiley & Sons. New York.
6. **Freund J., Walpole R.** (1990). *“Estadística Matemática con aplicaciones”*, Cuarta edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, México.
7. **Hogg R., Tanis E.** (1977). *“Probability and Statistical Inference”*, Duodécima edición, John Wiley & Sons. New York.
8. **Hollander M., Wolfe D.** (1973). *“Non-parametric Statistical Methods”*, Segunda edición, John Wiley & Sons, New York..
9. **Pratt J.W.** (1964). *“Robustness of some procedures for the two sample location problem”*. J. Amer. Statist. Ass. 59, 665-80.
10. **Ansari A., Bradley R.** (1960). *“Rank-Sum tests for dispersion”*, Ann. Math. Statist. 31, 1174-89.
11. **Pratt J.W.** (1959). *“Remarks on zeros and ties in the Wilcoxon signed rank procedures”*. J. Amer. Statist. Ass. 54, 655-67.
12. **Pitman E.J.G.** (1948). *“Notes on non-parametric statistical inference”* , Columbia University.

## ANEXO 1

### Prueba de Wilcoxon para una muestra (Código fuente en Lenguaje C)

```
/*
Prueba de rangos con signo de Wilcoxon
(Calculo del estadístico de prueba T)

Problema: Localización de media de una muestra
*/

#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <iostream.h>

#define MAX 40

float TOT[MAX];
int ID[MAX];

//Mínimo entre a y b
float min(float a, float b)
{
    if(a < b)
        return a;
    else
        return b;
}

void ordenar(float aux[MAX], int identi[MAX], int maximo)
{
    float cambio=0;
    int cambio2=0;

    //Ordenar
    for(int i=1; i<=maximo; i++)
        for(int j=1; j<=maximo; j++)
            if(aux[i] < aux[j])
            {
                cambio=aux[i];
                cambio2=identi[i];

                aux[i]=aux[j];
                aux[j]=cambio;

                identi[i]=identi[j];
                identi[j]=cambio2;
            }
}

void main()
{
    float X[MAX];
    float RANGO[MAX];
    float T, T1, T2;
    float u;

    int m;
    clrscr();

    //Media a contrastar
    cout << "\n Ingrese la media poblacional a contrastar:";
    cin >> u;

    //Ingresar límites de datos
    cout << "\n Límites de X (m):";
    cin >> m;

    //Ingresar datos
    for(int t=1; t<=m; t++)
    {
        cout << "\n X(" << t << ")=";
        cin >> X[t];
        //Almacenar el absoluto de las diferencias
        TOT[t]=fabs(X[t]-u);

        if((X[t]-u) > 0)
            ID[t]=1;

        if((X[t]-u) < 0)
            ID[t]=-1;

        if((X[t]-u) == 0)
            ID[t]=1;
    }

    //Ordenar magnitudes
    ordenar(TOT, ID, m);

    //Asignar rangos
    for(t=1; t<=m; t++)
        RANGO[t]=t;

    //Verificar rangos en Xi
    T=0.0;
    T1=0;
    T2=0;

    for(t=1; t<=m; t++)
        if(ID[t]==1)
            T1=T1+RANGO[t]; //Asignar rangos positivos
        if(ID[t]==-1)
            T2=T2+RANGO[t]; //Asignar rangos negativos

    T=min(T1, T2); //Estadístico T
    printf("\n Estadístico de Wilcoxon (> o <): %.2f y %.2f", T1, T2);
    printf("\n Estadístico de Wilcoxon: %.2f ", T);
    getch();
}
```

## ANEXO 2

### Prueba de Ansari-Bradley (Código fuente en Lenguaje C)

```

/
*
Prueba de ANSARI BRADLEY
(Calculo del estadístico de prueba de ANSARI-
BRADLEY)

Problema: Dispersion de dos muestras
-Medias iguales o conocidas
Asumiendo:
* Observaciones independientes
* Variables unobservables con media 0

Para probar la hipotesis de que las varianzas son iguales
*/
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <iostream.h>

#define MAX 40

float TOT[MAX];
int ID[MAX];

//Ordenar un arreglo de elementos
void ordenar(float aux[MAX],int identi[MAX],int maximo)
{
float cambio=0;
int cambio2=0;

//Ordenar
for(int i=1;i<=maximo;i++)
for(int j=1;j<=maximo;j++)
if(aux[i]<aux[j])
{
cambio=aux[i];
cambio2=identi[i];

aux[i]=aux[j];
aux[j]=cambio;

identi[i]=identi[j];
identi[j]=cambio2;
}
}

void main()
{
float X[MAX]; //Valores observados de x
float Y[MAX]; //Valores observados de y

float RANGO[MAX];
float W;
int m;
int n;
int total;
int rango_limitea;
int rango_limiteb;

clrscr();
FILE *p;
//Ingresar limites de datos
cout<<"\nLimites de X (m):";
cin>>m;
cout<<"\nLimites de Y (n):";
cin>>n;

//Ingresar datos
for(int t=1;t<=m;t++)
{
cout<<"\n X("<<t<<")=";
cin>>X[t];
TOT[t]=X[t];
ID[t]=1;
}

for(t=1;t<=n;t++)
{
cout<<"\n Y("<<t<<")=";
cin>>Y[t];
TOT[m+t]=Y[t];
ID[m+t]=0;
}

clrscr();
//Ordenar las magnitudes combinadas X y Y
ordenar(TOT,ID,m+n);

total=m+n;
rango_limitea=0;
rango_limiteb=0;

if(total%2==0) //Pares asignar limites de rangos (1 a N/2)
{
rango_limitea=total/2;
rango_limiteb=total/2;
}
else //Impares asignar limites de rangos
{
rango_limitea=(total-1)/2;
rango_limiteb=(total+1)/2;
}

//Asignar rangos
for(t=1;t<=rango_limitea;t++)
RANGO[t]=t;

for(t=1;t<=rango_limiteb;t++)
RANGO[t+rango_limitea]=rango_limiteb-t+1;

//Verificar rangos en Xi
printf("\n----VALORES DE Xi y RANGOS ASIGNADOS---
-");
W=0.0;
for(t=1;t<=m+n;t++)
if(ID[t]==1)
{
cout<<"\n X: "<<TOT[t]<<" RANGO:"<<RANGO[t];
W=W+RANGO[t];
}
printf("\n Estadístico de Ansari-Bradley:%f ",W);
getch();
}

```

## ANEXO 3

### Técnica de Theil (Código en Lenguaje C)

```
/*
Método de Theil
(Metodo de obtencion de b1)
Problema: Regresión lineal simple
Obtener el estimador de b1
*/

#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <iostream.h>

#define MAX 40

float X[MAX];
float Y[MAX];

//Ordenar magnitudes
void ordenar(float aux[MAX],int maximo)
{
float cambio=0;

//Ordenar
for(int i=1;i<=maximo;i++)
for(int j=1;j<=maximo;j++)
if(aux[i]<aux[j])
{
cambio=aux[i];
aux[i]=aux[j];
aux[j]=cambio;
}
}

void main()
{
int n;
float B0estimado;
float numera,denom;
float S[MAX];
int indice=1;
clrscr();

//Ingresar limites de datos
cout<<"\nLimites de X y Y(n):";
cin>>n;

//Ingresar datos
for(int t=1;t<=n;t++)
{
cout<<"\n X("<<t<<")="; //X
cin>>X[t];
cout<<"\n Y("<<t<<")="; //Y
cin>>Y[t];
}

//Verificar todas la combinaciones posibles de tamaño 2
for(int i=1;i<=n;i++)
for(int j=1;j<=n;j++)
if(i<j)
{
numera=Y[j]-Y[i];
denom=X[j]-X[i];
if (denom!=0)
S[indice]=numera/denom;
indice++;
}
indice--;

//Ordenar los S
ordenar(S,indice);

int pos=0;
//Obtener estimador (mediana)
if(indice%2==0) //Par
{
pos=(indice/2);
B0estimado=(S[pos-1]+S[pos+1])/2.0;
}
else //Impar
{
pos=(indice+1)/2;
B0estimado=S[pos];
}
printf("\n Estimador de Theil para B0:%.4f ",B0estimado);
getch();
}
```