ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

"ESTUDIO COMPARATIVO DE DIFERENTES METODOS DE DISEÑO DE ESTIMADORES DE ESTADO, APLICADO A UN SISTEMA DE 2do. ORDEN"

TESIS DE GRADO

Previa a la Obtención del Título de:

INGENIERO EN ELECTRICIDAD

Especialización: ELECTRONICA

Presentada por:

JOSE L. GONZALEZ DECKER

Guayaquil - Ecuador

1.988

A G R A D E C I M I E N T O

Al ING. CARLOS VILLAFUERTE PEÑA
Director de Tesis, por su ayuda y colaboración para la realización de este trabajo.

Al ING. JAVIER URQUIZO CALDERON
Miembro del Tribunal de Tesis, por su ayuda y colaboración para la realización de este trabajo.

D E D I C A T O R I A

A MIS PADRES

ING. HERNAN GUTIERREZ V.
PRESIDENTE DEL TRIBUNAL
DECANO DE LA FACULTAD DE
INGENIERIA ELECTRICA

ING. CARLOS VILLAFUERTE P.
DIRECTOR DE TESIS
SUB-DECANO DE LA FACULTAD
DE INGENIERIA ELECTRICA

ING. EDGAR IZQUIERDO O.
MIEMBRO PRINCIPAL DEL TRI-
BUNAL

Javier Urquizo C.

ING. JAVIER URQUIZO C.
MIEMBRO PRINCIPAL DEL TRI-
BUNAL

DECLARACION EXPRESA

"La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta tesis, me corresponden exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la ESPOL).

José L. González Decker

José Luis González Decker

RESUMEN

Se estableceràn los conceptos necesarios que faciliten la exposiciòn de la naturaleza del problema en tiempo discreto, se harà un estudio de lo que es un estimador y también se estudiarà sistemas usando estimadores. Se estableceràn conceptos fundamentales y condiciones importantes de un estimador y del sistema a ser estudiado (un servomecanismo lineal DC de 2° orden), tales como la estabilidad, controlabilidad, observabilidad, etc. Se analizarà el Control de Lazo Cerrado del sistema con Observador incluyendo diagramas y se estableceràn las ecuaciones que definen al Controlador.

Se introducirà el concepto de lo que es un Filtro de Kalman como un estimador de estados fijando definiciones importantes y ecuaciones que lo definan. Se obtendràn ecuaciones de los paràmetros que nos serviràn para comparar estimadores.

También se harà una introducciòn al observador tipo Luenberger y se estableceràn conceptos, ecuaciones del Observador y de los paràmetros para la comparaciòn de los Estimadores.

Siguiendo los lineamientos de los Estimadores anteriores se discutiràn conceptos, métodos y resultados del observador Estocàstico.

Finalmente, se harà una recapitulaciòn de los Observadores estudiados, se definirà el sistema al cual se le estimarà los estados y se harà la discusiòn de las ventajas y desventajas entre los observadores. En los apéndices se incluiràn programas para la simulaciòn digital del modelo de la planta y de los observadores, ademàs los gràficos y tablas resultantes de dicha simulaciòn, que ayuden a la comparaciòn de los Observadores.

INDICE GENERAL

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE TABLAS

INDICE DE SIMBOLOS

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO III

CAPITULO IV

Simbolo	Descripciòn	Pàg.
S1,S2	sistema	100
z	transformada z	105
G	vector de entrada del observador	105
I	identidad	108
L	ganancia de realimentaciòn	109
Ann	submatrices de la matriz A	109
$\varkappa$	funcional lineal del estado	114
ν	coeficiente de observabilidad	114
n	rango del sistema	114
m	nùmero de salidas	114
r	nùmero de entradas	125

CAPITULO V

CAPITULO VI

INTRODUCCION

La soluciòn al problema de diseño de un regulador òptimo usando realimentaciòn de variables de estado depende de la disponibilidad de todos los estados del sistema lineal, ya sea por mediciòn directa o por algùn esquema de reconstrucciòn de estados.

El propòsito de este trabajo es analizar diferentes métodos alternativos de reconstrucciòn de estados, como son: el Observador de Luenberger, el Filtro de Kalman y el estimador Estocàstico; para sistemas en los que existe una combinaciòn de mediciones de las variables de entrada y salida libres de y contaminadas con ruido. El anàlisis se aplicarà a un sistema SISE (Simple Ingreso Simple Egreso) discreto, lineal e invariante en el tiempo, de 2º orden, un servomecanismo DC.

Se estableceràn los conceptos teòricos que faciliten el estudio de los sistemas estimadores de estado, definiremos los observadores y los analizaremos para fijar las condiciones que debe cumplir el sistema al cual estimaremos los estados, se definirà el sistema (planta) al cual se le estimarà los estados, y finalmente estudiaremos el sistema en conjunto, se harà la discusiòn respectiva de cada observador y obtendremos las conclusiones necesarias.

En apéndices se incluiràn tablas y gràficas adicionales, además de, programas que puedan ayudar a la comparaciòn de los observadores de estado.

CAPITULO I

"GENERALIDADES SOBRE SISTEMAS LINEALES"

1.1. Introducciòn: Sistemas Discretos en el tiempo.

En un sistema lineal continuo en el tiempo se considera que las variables de entrada, salida, estado, etc, pueden ser observadas en todo instante.

En el caso de computadoras digitales, estas muestrean el valor de las variables en instantes discretos de tiempo, que si son tomados lo suficientemente cercanos, proporcionan una aproximaciòn satisfactoria a las respuestas del sistema continuo bajo estudio. Aùn si el sistema no es digital las observaciones sòlo pueden ser hechas periòdicamente.

Los sistemas discretos pueden ser clasificados en:

1. Sistemas inherentemente discretos, tales como

computadoras digitales, donde tiene sentido considerar al sistema en instantes discretos de tiempo, puesto que es irrelevante lo que suceda entre dichos instantes discretos de tiempo.

2. Sistemas discretos, que resultan de considerar sistemas continuos en el tiempo, solamente en instantes discretos de tiempo. Cuando se analiza sistemas continuos en el tiempo en una computadora digital o cuando el sistema continuo en el tiempo es interconectado a sistemas inherentemente discretos en el tiempo tales como los controladores digitales, entonces se obtiene como conjunto un sistema discreto.

La teorìa de sistemas lineales discretos en el tiempo es muy similar a la de sistemas lineales continuos en el tiempo y aùn sus resultados. La teorìa de control òptimo lineal y discreto en el tiempo es de interés por su aplicaciòn en control por computadora.

El estudio se dirigirà a sistemas lineales porque muchos sistemas son lineales o aproximadamente lineales, y porque las herramientas matemàticas disponibles para el estudio de sistemas discretos en el tiempo està restringida a sistemas lineales.

Se mostrarà que para sistemas lineales en que una computadora digital es un elemento, las ecuaciones lineales en diferencias resultan naturales, lo que motiva al estudio de ecuaciones lineales en diferencias

1.2. Descripciòn en forma de variables de estado de Sistemas lineales discretos.

Para esta descripciòn, debemos definir que: las variables de estado de un sistema, son el conjunto mìnimo de variables $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, tales que el conocimiento de estas variables $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, ..., $x_n(t_0)$, en cualquier instante inicial $t_0 \geq 0$ mas la informaciòn sobre las entradas (excitaciòn) aplicadas posteriormente ($t > 0$) al sistema son suficientes para determinar el estado futuro del sistema.

A continuaciòn revisaremos la teorìa de sistemas lineales discretos en el tiempo, debido a que hay sistemas en los que no es importante observar sus propiedades en todos los instantes de tiempo, sino en una secuencia de instantes t_i, $i = 0, 1, 2, ..,$ donde suele ser posible caracterizar las propiedades del sistema por cantidades definidas solamente en esos instantes. Para estos sistemas el equivalente de la ecuaciòn diferencial de estado es la ecuaciòn de estado en diferencias

$$x(i + 1) = f[x(i), u(i), i], \tag{1}$$

donde $x(i)$ es el estado y $u(i)$ es la entrada en el tiempo t_i. Asumimos que la salida al tiempo t_i es dada por la ecuaciòn de salida

$$y(i) = g[x(i), u(i), i]. \tag{2}$$

Los sistemas lineales discretos en el tiempo son descritos por ecuaciones de estado en diferencias de la forma

$$x(i + 1) = A(i)x(i) + B(i)u(i), \tag{3}$$

donde $A(i)$ y $B(i)$ son matrices dependientes de i. Con la correspondiente ecuaciòn de salida

$$y(i) = C(i)x(i) + D(i)u(i). \tag{4}$$

Si las matrices A, B, C, y D son independientes de i, el sistema es invariante en el tiempo.

1.3. Descripciòn de Sistemas lineales de tiempo discreto.

Cuando una computadora digital es usada para controlar una planta continua en el tiempo, se tiene un sistema que es la interconeciòn de uno discreto y otro continuo. Esto motiva la necesidad de tener un sistema que sirva de interface entre los dos sistemas: el discreto y el continuo. Tales interfases entre sistemas son los convertidores de continuo a discreto y viceversa.

Un convertidor de continuo a discreto, es un muestreador, figura 1.1, un dispositivo con una funciòn continua $f(t)$, $t \geq t_0$, como entrada, y una secuencia de nùmeros reales $f^*(i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, en tiempos t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, como salida; donde la siguiente relaciòn se cumple:

$$f^*(i) = f(t_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

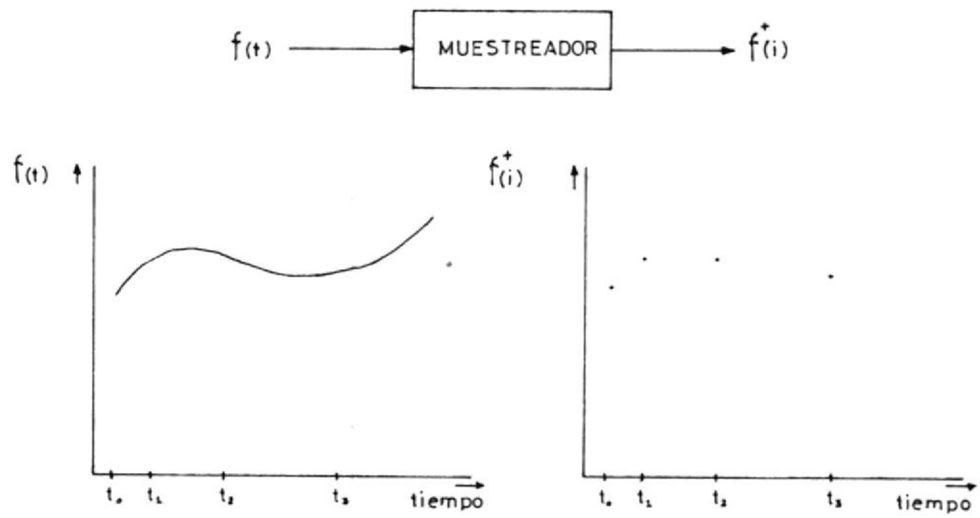


Figura 1.1 Conversiòn: contìnua a discreta

La secuencia de instantes de tiempo t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, con $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$, es dada. El super ìndice + se usa para distinguir secuencias de las correspondientes funciones continuas en el tiempo.

Un convertidor de discreto a continuo, es un dispositivo que acepta una secuencia de nùmeros $f^+(i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, en instantes t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, con $t_i < t_1 < t_2 < \ldots$, y que produce una funciòn continua $f(t)$, $t \geq t_0$; un convertidor de este tipo es el retenedor de orden cero, figura 1.2, que es descrito por la relaciòn

$$f(t) = f^+(i), \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

(6)

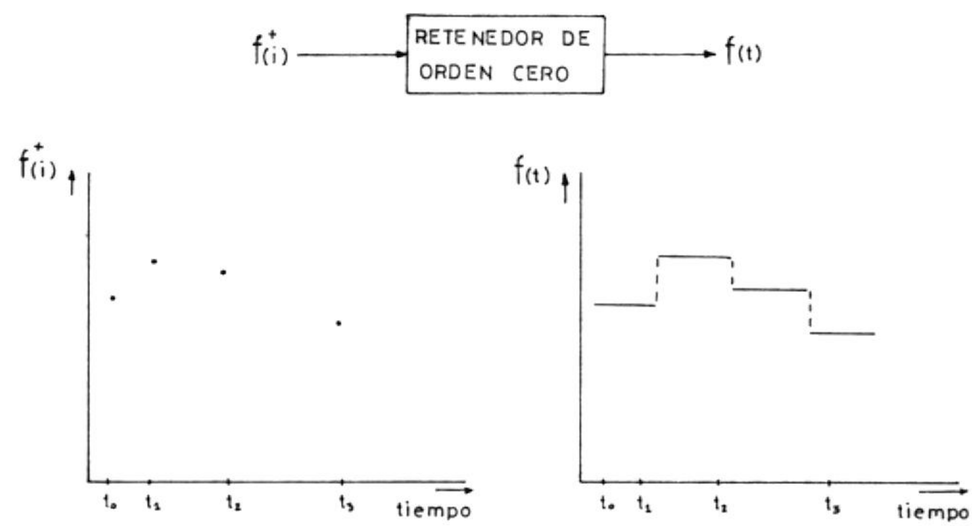


Figura 1.2 Conversiòn: discreta a contìnua

La figura 1.3 muestra una interconecciòn de sistemas discretos y contìnuos

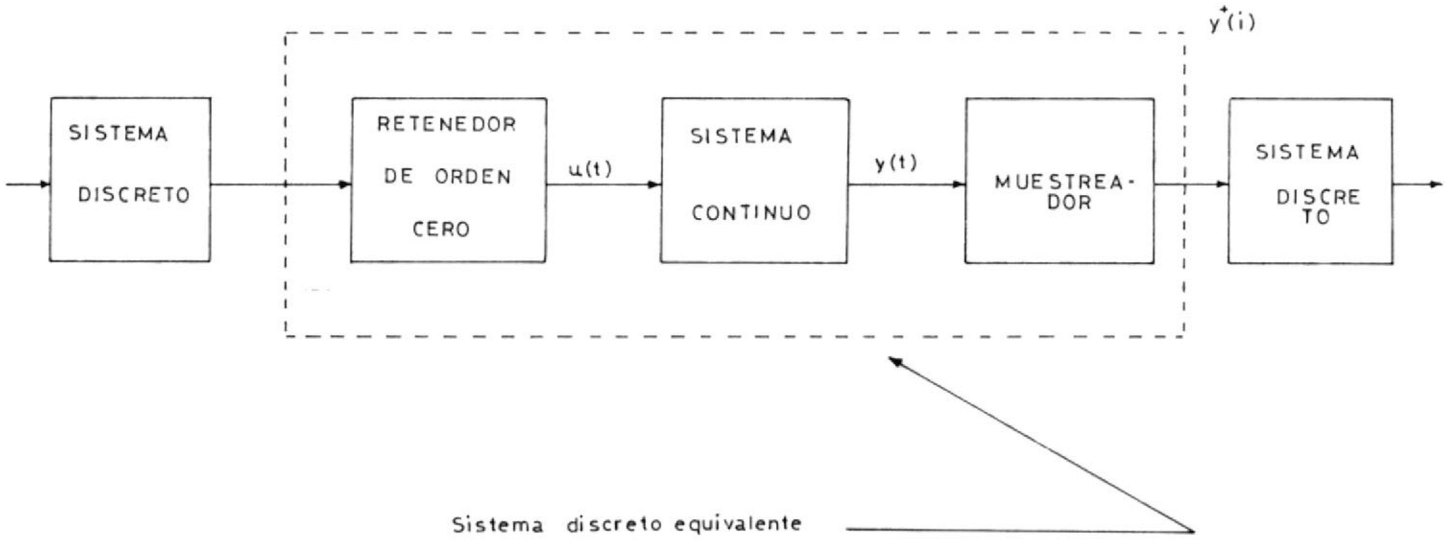


Figura 1.3 Interconección de sistemas discretas y continuos

Para analizar este sistema, figura 1.3, se puede representar el sistema continuo, junto con los convertidores de discreto a continuo y viceversa, por medio de un sistema equivalente discreto. Para esto, suponemos que el convertidor discreto a continuo puede ser encontrado en un caso especìfico, y que este sistema es el retenedor de orden cero y que el convertidor de continuo a discreto es un muestreador.

Asumimos que el sistema continuo de la figura 1.3 es lineal con ecuaciòn diferencial de estado

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad (7)$$

y ecuaciòn de salida

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \qquad (8)$$

Debido al retenedor de orden cero

$$u(t) = u(t_i), \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (9)$$

La soluciòn de la ecuaciòn diferencial de estado (7), evaluada en el instante t_{i+1} y con estado inicial $x(t_i)$ està dada por

$$x(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1}, t_i)x(t_i) +$$

$$+ [\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau)B(\tau)d\tau]u(t_i), \tag{10}$$

donde $\Phi(t, t_o)$ es la matriz de transiciòn del sistema (7); esta ecuaciòn de estado en diferencias es del tipo (3).

En la derivaciòn de la ecuaciòn de salida correspondiente, permitiremos la posibilidad de que los instantes en los que es muestreada la salida no coincidan con los instantes en los que la entrada es ajustada. Asì, la salida asociada con el i-ésimo intervalo de muestreo, es

$$y(t_i'), \quad t_i \leq t_i' < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

$$y(t_i') = C(t_i')\Phi(t_i', t_i)x(t_i) + [C(t_i') \cdot \int_{t_i}^{t_i'} \Phi(t_i', \tau)B(\tau)d\tau]u(t_i) + D(t_i')u(t_i). \tag{12}$$

Reemplazando $x(t_i)$ por $x^*(i)$, $u(t_i)$ por $u^*(i)$, y $y(t_i')$ por $y^*(i)$, obtenemos

$$x^*(i + 1) = A_d(i)x^*(i) + B_d(i)u^*(i)$$

$$y^*(i) = C_d(i)x^*(i) + D_d(i)u^*(i)$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ , \qquad (13)$$

donde

$$A_d(i) = \Phi(t_{i+1},\ t_i),$$

$$B_d(i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1},\ \tau)B(\tau)d\tau,$$

$$C_d(i) = C(t_i')\Phi(t_i',\ t_i),$$

$$D_d(i) = C(t_i') \int_{t_i}^{t_i'} \Phi(t_i',\ \tau)B(\tau)d\tau + D(t_i') \qquad (14)$$

El sistema discreto definido por (13) tiene un camino directo aunque el sistema continuo no lo tiene porque $D_d(i)$ puede ser diferente de cero aùn si $D(t_i') = 0$. El camino directo està ausente, si $D(t) \equiv 0$ y los instantes t_i' coinciden con los instantes t_i, es decir, $t_i' = t_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Esta situaciòn se ilustra en la figura 1.4

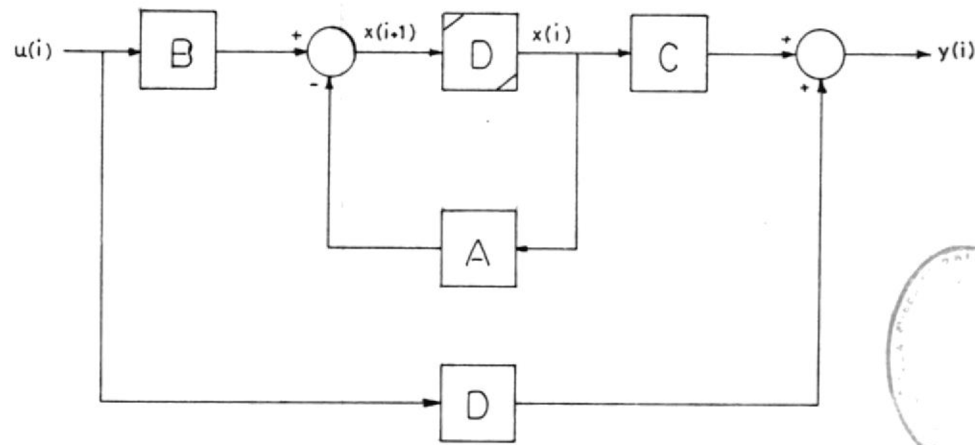


Figura 1.4 Diagrama de bloques de un sistema discreto

En el caso de instantes de muestreos igualmente espaciados

$$t_{i+1} - t_i = \Delta, \qquad (15)$$

$$t_i' - t_i = \Delta', \qquad (16)$$

el sistema (7), (8), y (13) es invariante en el tiempo. Reemplazando (15) y (16) en (14) se obtiene finalmente

$$A_d = e^{A\Delta}, \qquad B_d = \left[\int_0^{\Delta} e^{At}dt\right]B,$$
$$C_d = Ce^{A\Delta'}, \qquad D_d = C\left[\int_0^{\Delta'} e^{At}dt\right]B + D, \tag{17}$$

donde Δ es el periodo de muestreo y $1/\Delta$ es la razòn de muestreo.

1.4. Soluciòn de ecuaciones de estado en diferencias.

Para obtener la soluciòn de las ecuaciones de estado en diferencias, procedemos de la siguiente forma:

Consideramos la ecuaciòn de estado en diferencias

$$x(i + 1) = A(i)x(i) + B(i)u(i). \tag{18}$$

cuya soluciòn puede ser expresada como

$$x(i) = \Phi(i, i_o)x(i_o) + \sum_{j=i_o}^{i-1}\Phi(i, j + 1)B(j)u(j), \qquad i \geq i_o + 1 \tag{19}$$

donde $\Phi(i, i_o)$, $i \geq i_o$, es la matriz

$$\Phi(i, i_o) = \begin{cases} A(i - 1)A(i - 2) \ldots A(i_o) & \text{para } i \geq i_o+1, \\ I & \text{para } i = i_o. \end{cases}$$

$$(20)$$

La matriz de transiciòn $\Phi(i, i_o)$ es la solución de la ecuaciòn en diferencias homogénea

$$\Phi(i + 1, i_o) = A(i)\Phi(i, i_o), \qquad i \geq i_o$$
$$\Phi(i_o, i_o) = I. \tag{21}$$

Si $A(i)$ no depende de i:

$$\Phi(i, i_o) = A^{i-i_o}, \tag{22}$$

la salida del sistema es

$$y(i) = C(i)x(i). \tag{23}$$

Ademàs, si el estado inicial es cero, es decir, $x(i_o) = 0$, en base a (19) se puede escribir:

$$y(i) = K(i, j)u(j), \qquad i \geq i_o, \tag{24}$$

donde

$$K(i, j) = \begin{cases} C(i)\Phi(i, j + 1)B(j) & \text{para } j \leq i - 1, \\ 0 & \text{para } j = i, \end{cases}$$

$$(25)$$

es la matriz respuesta de pulso del sistema. Para sistemas invariantes en el tiempo K sòlo depende de i - j. Si el sistema tiene un camino directo, la salida es dada por

$$y(i) = C(i)x(i) + D(i)u(i), \tag{26}$$

donde la salida es de la forma

$$y(i) = \sum_{j=i_0}^{i} K(i, j)u(j), \qquad i \geq i_0, \tag{27}$$

donde

$$K(i, j) = \begin{cases} C(i)\Phi(i, j + 1)B(j) & \text{para } j \leq i - 1, \\ D(i) & \text{para } j = i. \end{cases} \tag{28}$$

Para sistemas lineales discretos e invariantes en el tiempo, resulta ùtil la diagonalizaciòn de la matriz A, por **esto** consideremos la ecuaciòn de estado en diferencias

$$x(i + 1) = Ax(i), \tag{29}$$

si la matriz A tiene n valores característicos distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ con los correspondientes vectores característicos $e_1, e_2, \ldots, e_n$, entonces existe una matriz T n x n, no singular, que transforma a la matriz A n x n en la matriz Λ n x n, donde:

$$T = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$
$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \qquad (30)$$

De donde la matriz transiciòn de la ecuaciòn de estado en diferencias (18) puede ser expresada como

$$\Phi(i, i_o) = A^{i-io} = T\Lambda^{i-io}T^{-1}, \qquad (31)$$

suponiendo que la matriz inversa T^{-1} es representada como:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{bmatrix} \qquad (32)$$

donde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son vectores fila. De aquì que la soluciòn de la ecuaciòn de estado en diferencias (29) puede ser expresada como

$$x(i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{i-i_0} e_j f_j x_0, \qquad (33)$$

donde $x_0 = x(i_0)$.

La expresiòn (33) nos muestra que las propiedades del sistema pueden ser descritas como una composiciòn de movimientos crecientes (para $|\lambda_j| > 1$), sostenidos (para $|\lambda_j| = 1$) o decrecientes (para $|\lambda_j| < 1$), a lo largo de los vectores caracterìsticos e_1, e_2, ..., e_n de la matriz A.

1.5. <u>Estabilidad de Sistemas discretos.</u>

Revisaremos los conceptos de estabilidad en el sentido de Lyapunov; estabilidad asintòtica en general y estabilidad exponencial (tiende a su punto de equilibrio).

El sistema lineal homogéneo discreto e invariante en el tiempo descrito por

$$x(i + 1) = Ax(i) \qquad (34)$$

es estable en el sentido de Lyapunov si y sòlo si:

i) Todos los valores caracterìsticos de A tienen mòdulo menor o igual que 1.

ii) Para algùn valor caracterìstico con mòdulo igual a 1 y multiplicidad m hay m vectores caracterìsticos de la matriz A que le corresponden exactamente.

El sistema considerado en (34) es asintòticamente estable, y por ende exponencialmente estable, si y sòlo si, todos los valores caracterìsticos de A tienen mòdulo estrictamente menor que 1.

1.6. Controlabilidad de Sistemas Lineales Discretos.

Estableceremos el concepto de controlabilidad de un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo con matrices A n x n, B n x r, C m x n y D m x r. Definiendo controlable al estado $x(i)$ a $i = i_o$ si existe una funciòn $u(i)$ seccionalmente continua que conduce el sistema a cualquier estado final deseado $x(i_f)$ en un tiempo finito $(i_f - i_o) \geq 0$. Si para cualquier estado inicial $x(i_o)$ el sistema es controlable en un intervalo de tiempo finito, entonces se dice que el sistema es completamente controlable.

O en forma alterna, definiendo completamente controlable la salida si existe una funciòn seccionalmente continua $u(i)$ que conduce la salida $y(i_o)$ a $i = i_o$ a cualquier salida final $y(i_f)$ para un intervalo finito $(i_f - i_o) \geq 0$.

La condiciòn necesaria y suficiente para que un sistema lineal de orden n, discreto e invariante en el tiempo, descrito por las ecuaciones dinàmicas:

$$x(i + 1) = Ax(i) + Bu(i)$$
$$y(i) = Cx(i) + Du(i) \qquad (35)$$

sea completamente controlable es que la matriz de controlabilidad P n x nr definida por:

$$P = \{B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\}, \qquad (36)$$

tenga rango n.

Ademàs, se desprende de esta definiciòn que: un sistema puede ser descompuesto en una parte controlable y en otra no controlable. El subespacio controlable de un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo es el subespacio lineal consistente de los estados que pueden ser alcanzados desde el estado cero dentro de un nùmero finito de pasos.

El sistema (35) es estabilizable si su subespacio inestable està contenido en su subespacio controlable.

1.7. Observabilidad de Sistemas lineales discretos.

Estableceremos el concepto de observabilidad (reconstructibilidad) de las variables de estado, a través de mediciones en la salida, para un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo descrito por (35). Definiendo observable al estado $x(i_0)$, si existe un tiempo finito ($i_f \geq i_0$), tal que el conocimiento de $u(i)$ para $i_0 \leq i < i_f$ y $y(i)$ para $i_0 \leq i < i_f$ son suficientes para determinar $x(i_0)$. Si cada estado $x(i_0)$ es observable para un tiempo finito ($i_f \geq i_0$), entonces se dice que el sistema es completamente observable.

La condiciòn necesaria y suficiente para que un sistema lineal de orden n, discreto e invariante en el tiempo; descrito por las ecuaciones dinàmicas:

$$\begin{aligned} x(i + 1) &= Ax(i) + Bu(i) \\ y(i) &= Cx(i) + Du(i), \end{aligned} \tag{37}$$

sea completamente observable es que la matriz de observabilidad Q m x nm, definida por:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{38}$$

tenga rango n.

Si cada estado x(i) es observable para un tiempo finito, se dice que el sistema es completamente observable, o también, que el par (A, C) es completamente observable. Al afirmar que el par (A, C) es completamente reconstruible (observable), se quiere decir que el sistema descrito por las ecuaciones dinàmicas (37) es completamente observable.

De la definiciòn de controlabilidad y observabilidad, se desprende que

i. Controlabilidad del par (A, B) implica observabilidad del par (A', B').

ii. Observabilidad del par (A, B) implica controlabilidad del par (A', B').

Ademàs, un sistema puede ser descompuesto en una parte observable y en otra no observable. Donde el subespacio no observable es el espacio nulo de la matriz Q.

1.8. Vectores estocàsticos de tiempo discreto.

El vector de la secuencia infinita de vectores de variables estocàsticas de la forma $v(i)$, $i = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$, es caracterizado por todas las distribuciones de probabilidad conjuntas

$$P\{v(i_1) \leq v_1, v(i_2) \leq v_2, \ldots, v(i_m) \leq v_m\}, \tag{39}$$

para toda $v_1, v_2, \ldots, v_m$ real, para todo entero $i_1, i_2, \ldots, i_m$, y para todo entero m.

El proceso estocàstico vectorial de tiempo discreto es estacionario si:

$$P\{v(i_1) \leq v_1, v(i_2) \leq v_2, \ldots, v(i_m) \leq v_m\}$$
$$= P\{v(i_1 + k) \leq v_1, v(i_2 + k) \leq v_2,$$
$$\ldots, v(i_m + k) \leq v_m\} \qquad (40)$$

para toda $v_1, v_2, \ldots, v_m$ real, para todo entero $i_1, i_2, \ldots, i_m$, y para todo entero m y k.

Si las distribuciones conjuntas (39) son distribuciones Gaussianas multidimensionales el proceso es Gaussiano. Luego, considerando al proceso vectorial estocàstico de tiempo discreto $v(i)$, podemos definir a la media del proceso como

$$m = E\{v(i)\}, \qquad (41)$$

a la matriz del momento de segundo orden de las distribuciones conjuntas como

$$C_v(i, j) = E\{v(i)v'(j)\}, \qquad (42)$$

a la matriz de covarianza del proceso como

$$R_v(i, j) = E\{[v(i) - m][v(j) - m]'\} \tag{43}$$

y a la matriz de varianza del proceso como

$$Q = E\{[v(i) - m][v(i) - m]'\} = R_v(i,i) \tag{44}$$

donde $C_v(i, i)$ es la matriz del momento de segundo orden del proceso.

Si el proceso v es estacionario, la matriz de media y de varianza son independientes de i, y la matriz $C_v(i, j)$ del momento del conjunto de distribuciones y la matriz de covarianza $R_v(i, j)$ dependen sòlo de i - j.

Un proceso no estacionario de media constante, con matriz del momento de segundo orden finito para todo i; con matrices del momento de segundo orden del conjunto de distribuciones y de covarianza dependientes solamente de i - j, es llamado estacionario en un sentido amplio.

CAPITULO II

"RELACIONES ENTRE CONTROLABILIDAD, OBSERVABILIDAD Y RECONSTRUCCION DE ESTADO."

2.1. Revisiòn de conceptos relacionados con Controlabilidad, Observabilidad y Reconstrucciòn de estado.

Si la funciòn de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo tiene alguna "cancelaciòn" de polos y ceros, el sistema serà o no completamente controlable o no completamente observable, dependiendo de como se definan las variables de estado; y, por otro lado, si la funciòn de transferencia no tiene factores comunes (no hay cancelaciòn de polo - cero), siempre serà posible encontrar una representaciòn del sistema que sea completamente controlable u observable. Discutiremos la importancia de los conceptos de controlabilidad y observabilidad en la teoria de sistemas lineales porque nos permiten resolver el problema de regulaciòn de lazo cerrado de sistemas lineales, discretos e invariantes en el tiempo. Luego precisaremos las relaciones que existen entre las entradas y salidas de los sistemas y las descripciones de estado de los sistemas.

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad son importantes en el diseño de controladores lineales realimentados y de filtros lineales para sistemas lineales estacionarios en presencia de perturbaciones blancas Gaussianas.

Si el sistema es controlable, el sistema lineal realimentado, obtenido usando la teorìa de control òptimo con ìndice de costo cuadràtico, es asintòticamente estable (tiende asintòticamente a su punto de equilibrio o a uno escogido previamente). Y si ademàs el sistema es observable, el filtro lineal obtenido usando la teorìa de filtrado de Kalman es asintòticamente estable.

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad también son importantes en la construcciòn de modelos matemàticos. Aùn para resolver un problema de diseño analìtico usando un modelo de variables de estado es frecuente partir de un modelo de entrada y salida.

Se busca una realización mìnima del modelo de variables de estado que produzca la relaciòn deseada de entrada y salida, es decir, una representaciòn exacta que no introduzca fenòmenos que no fueron tomados en cuenta, por lo menos implicitamente, en la descripciòn de la relaciòn de entrada y salida. Esta bùsqueda està relacionada a los conceptos de controlabilidad y observabilidad.

Cuando consideremos el problema del regulador para sistemas estacionarios lineales probaremos que es posible localizar los polos de lazo cerrado usando realimentaciòn de estado si y sòlo si el sistema es controlable. También mostraremos que es posible construir un reconstructor de estado, usando las mediciones de entrada y salida, con error dinàmico arbitrario a condiciòn de que el sistema sea observable. Combinando estos dos resultados se puede demostrar que un compensador realimentado puede ser diseñado tal que el sistema de lazo cerrado tenga polos previamente asignados, a condiciòn de que el sistema sea controlable y observable.

La estructura del compensador realimentado resultante es la misma que la obtenida por el Teorema de Separaciòn de control òptimo estocàstico en presencia de perturbaciones Gaussianas.

Finalmente, demostraremos la equivalencia de la estabilidad interna de Lyapunov y la estabilidad de entrada y salida para sistemas lineales uniformemente controlables y uniformente observables.

2.1.1. Propiedades de los modelos de variables de estado.

Revisaremos conceptos bàsicos relacionados con controlabilidad, observabilidad, y estabilidad de Lyapunov. Las propiedades de controlabilidad y observabilidad de un sistema se refieren a la influencia de la entrada sobre el estado y del estado sobre la salida , respectivamente, mientras que la estabilidad de Lyapunov se refiere a la propiedad asintòtica de sistemas no excitados.

El concepto de controlabilidad se refiere al paso de un estado inicial arbitrario a un estado deseado, el cual es a menudo el punto de equilibrio y asumiremos que este es el caso tomando el elemento cero para representar el equilibrio.

Observabilidad se refiere a la posibilidad de reconstruir el estado a partir de mediciones en la salida; sin embargo hay dos problemas de reconstrucciòn de estado. El uno, se refiere a la deducciòn del estado presente de observaciones pasadas de la salida; y el otro, de observaciones futuras de la salida.

Para aplicaciones posteriores se utilizaràn las propiedades de controlabilidad y observabilidad definidas de manera màs consistente en secciones previas.

2.2. Problema de la regulaciòn de lazo cerrado.

Trataremos un punto importante en la teoria matemàtica del control de sistemas: el diseño de una ley de realimentaciòn de estado que regule la respuesta de lazo cerrado para un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo definido por las ecuaciones dinàmicas:

$$x(i + 1) = Ax(i) + Bu(i),$$
$$y(i) = Cx(i). \tag{1}$$

Los problemas de regulaciòn y reconstrucciòn de estado seràn aplicados a la misma clase de sistemas dinàmicos lineales y estacionarios.

Consideremos primero la regulaciòn con estado realimentado y asumamos que la realimentaciòn $-Kx(i)$ està siendo aplicada al sistema. La respuesta de lazo cerrado es luego gobernada por la ecuaciòn dinàmica:

$$x(i + 1) = (A - BK)x(i) + Bu(i),$$
$$y(i) = Cx(i). \tag{2}$$

Una caracteristica de la respuesta de este sistema de lazo cerrado es dada por la localizaciòn de sus polos, es decir, por los ceros del $\det(Iz - A + BK)$.

Las condiciones bajo las cuales es posible asignar arbitrariamente los polos de sistemas dinàmicos escogiendo la ganancia K de la matriz de realimentaciòn, con coeficientes reales en el caso de una entrada, para las matrices dadas A y B, son que exista al menos una matriz K (m x n), figura 2.1, tal que el det(Iz - A + BK) = r(z), donde r(z) es un polinomio de la forma

$$r(z) = z^n + r_{n-1}z^{n-1} + \ldots + r_0. \tag{3}$$

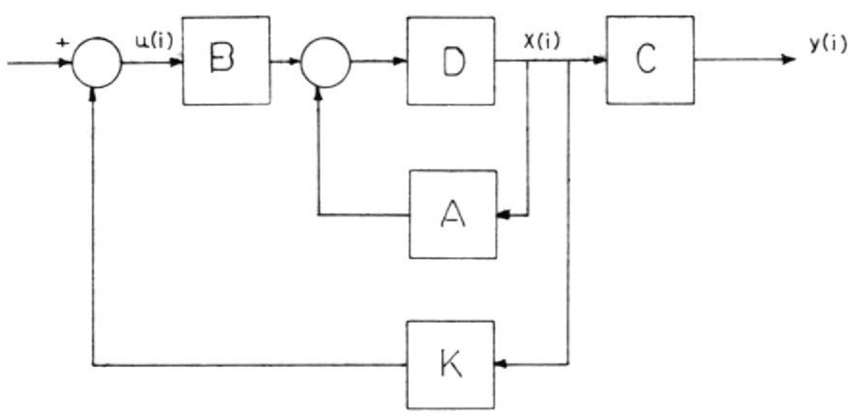


Figura 2.1 Regulador de estado realimentado

Estas condiciones son equivalentes a controlabilidad.

Para el caso de tener varias entradas los coeficientes del polinomio arbitrario r(z) son reales o complejos, y hay una matriz K posiblemente compleja tal que el $\det(Iz - A + BK) = r(z)$ si y sòlo si el sistema es controlable. Si los coeficientes del polinomio $r(z)$ son reales la matriz K puede ser escogida real.

En resumen, existe una matriz real K $m \times n$ tal que el $\det(Iz - A - BK) = z^n + r_{n-1}z^{n-1} + \ldots + r_0$ para coeficientes reales arbitrarios $[r_0, r_1, \ldots , r_{n-1}]$ si y sòlo si el sistema (1) es controlable, es decir, si la matriz (nm x n) $[B: AB: \ldots: A^{n-1}B]$ es de rango n.

Para el caso de que B sea un vector columna b (n x 1) , siendo A una matriz n x n, si el sistema es controlable, existe una matriz k' (1 x n) tal que el polinomio caracterìstico de $A - bk'$ es un polinomio arbitrario previamente asignado de grado n.

Si el sistema es controlable, la matriz de controlabilidad $P = [b, Ab, \ldots, A^{n-1}b]$ tiene rango n, y asì las n columnas de P generan R^n.

Poniendo el sistema en la forma estàndar el asignamiento de polos es sencillo; combinando àmbos pasos tenemos

$$p(z) = z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \dots + p_0$$
$$= \det(Iz - A) \qquad (4)$$

y

$$r(z) = z^n + r_{n-1}z^{n-1} + \dots + r_0$$
$$= \det(Iz - A + bk') \qquad (5)$$

que son los polinomios caracteristicos de lazo abierto y lazo cerrado, respectivamente. Siendo la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_{n-1} & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ p_1 & & & 1 \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

el vector k es dado por

$$k = \begin{bmatrix} b' \\ b'A' \\ . \\ . \\ . \\ b'(A')^{n-1} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} r_{n-1} - p_{n-1} \\ r_{n-2} - p_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ r_0 - p_0 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Para la colocaciòn de polos se ha establecido que el polinomio caracterìstico de la matriz del sistema de lazo cerrado puede ser escogido por el uso de realimentaciòn de estado.

2.3. Naturaleza del problema de estimaciòn de estado.

Antes de que un sistema pueda ser analizado, debe ser obtenida una representaciòn o modelo del sistema, tal que caracterize adecuadamente las propiedades del sistema, pero deberìa ser lo suficientemente simple para que el anàlisis resultante sea tratable.

La soluciòn al problema de diseño del regulador òptimo con variables de estado realimentadas, depende de la disponibilidad de todos los estados del sistema lineal, ya sea por directa mediciòn o por algùn tipo de esquema de reconstruciòn de estados. Para ello consideremos un sistema completamente observable, donde el vector de estado puede ser construido a partir de una combinaciòn de observaciones de la salida y entrada del sistema. Consideremos por simplicidad un sistema de una entrada y una salida:

$$x(i + 1) = Ax(i) + Bu(i) \tag{8}$$

$$y(i) = Cx(i) + Du(i). \tag{9}$$

Diferenciando (9) y sustituyendo en $x(i + 1)$ de (8), se obtiene un juego de ecuaciones de la forma $æ(i) = Qx(i)$, dada por:

$$æ(i) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(i) \tag{10}$$

El par {A,C} es completamente observable si y sòlo si la matriz de observabilidad Q tiene rango n. En el caso de salida escalar, la matriz Q es cuadrada; y entonces tiene rango n si y sòlo si es no singular.

Que el par {A, C} sea completamente observable implica que las entradas del vector de estado $x(i)$ son expresables como una combinaciòn de las observaciones de las salidas y entradas del sistema.

En la pràctica la presencia de ruido en $u(i)$ e $y(i)$

conducirà a grandes errores en la computaciòn de x(i), debido a la diferenciaciòn de u(i) e y(i).

Son necesarias dos propiedades para la estimaciòn de estado:

i. Deberìa ser de la forma de la figura 2.2, y que

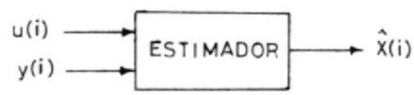


Figura 2.2 Estructura de un estimador

permita la ley òptima de control $u = K'x_{e}$, acorde con el esquema de la figura 2.3.

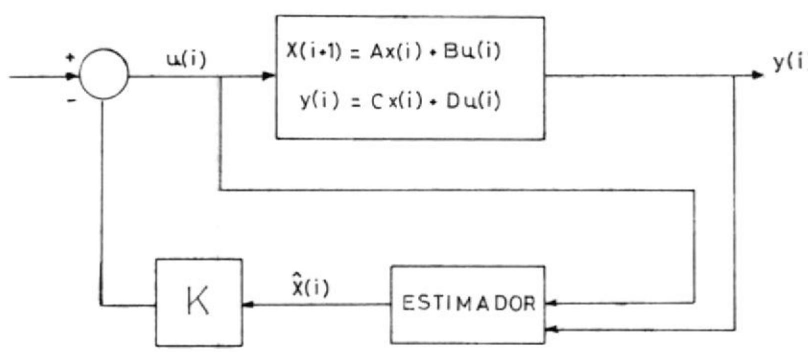


Figura 2.3 Sistema con estimador

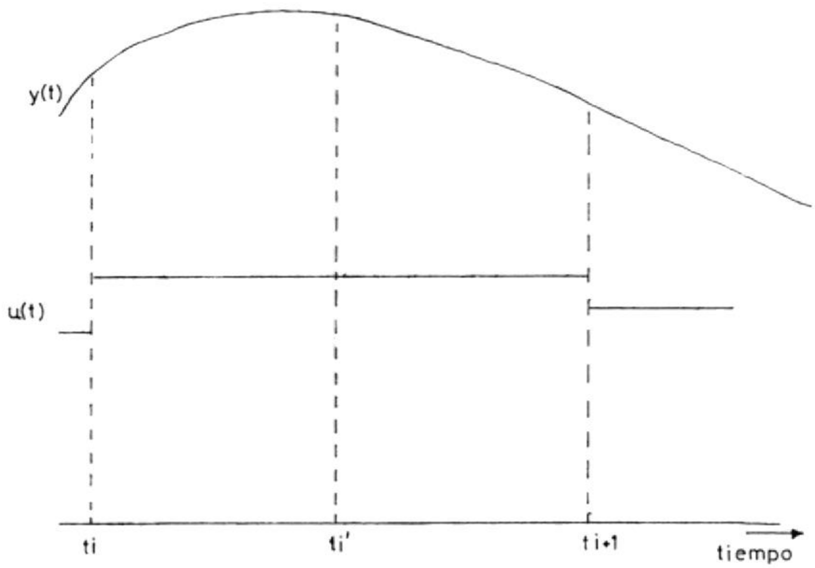


Figura 2.4 Relaciòn entre el instante de actuaciòn t_i y el instante de observaciòn t_i'

Los instantes en que la entrada cambia de valor son dados por t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ (instantes de control); los instantes de observaciòn t_i', $i = 0, 1, 2, \ldots$, son los instantes en los cuales es muestreada la variable observada y(t) del sistema continuo. Se asume que el instante de observaciòn t_i' precede siempre al instante de control t_{i+1}.

El retardo de procesamiento $t_{i+1} - t_i'$ es el tiempo

ii. Deberìa funcionar en presencia de ruido con una acciòn òptima del estimador en un ambiente ruidoso, tal que el ruido tenga el menor efecto posible cuando el estimador es usado en conecciòn con el control del sistema.

Si el sistema y el observador son de igual dimensiòn y son lineales, y si el sistema es invariante en el tiempo y el ruido asociado es estacionario, el estimador es invariante en el tiempo.

Ademàs, el diseño del observador es independiente de la ley de realimentaciòn òptima asociada K′ que es a su vez independiente de la presencia de ruido.

2.4. Diseño matemàtico del Reconstructor de estados.

EL sistema lineal discreto en el tiempo es obtenido de un sistema lineal continuo en el tiempo con entrada seccionalmente continua como se indica en la figura 2.4.

para procesar la observaciòn $y(t_i')$ con el fin de determinar la entrada $u(t_{i+1})$.

Si el sistema continuo en el tiempo es descrito por:

$$x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w_1(t),$$
$$t > t_0, \qquad (11)$$

donde w_1 es ruido blanco con intensidad variable en el tiempo $V_1(t)$. Asumiendo que la variable observada es:

$$y(t_i') = C(t_i')x(t_i') + w_2(t_i'),$$
$$i = 0,\ 1,\ 2,\ldots, \qquad (12)$$

donde $w_2(t_i')$, $i = 0,\ 1,\ 2,\ldots$, forma una secuencia de vectores estocàsticos no correlacionados. Para obtener la descripciòn discreta en el tiempo del sistema se escribe

$$x(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1},t_i)x(t_i) + [\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1},\tau)B(\tau)d\tau]u(t_i) +$$
$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1},\tau)w_1(\tau)d\tau\ , \qquad (13)$$

$$y(t_i') = C(t_i')\Phi(t_i',\ t_i)x(t_i) +$$

$$[C(t_i')\int_{t_i}^{t_i'} \Phi(t_i',\tau)B(\tau)d\tau]u(t_i) +$$

$$C(t_i')\int_{t_i}^{t_i''} \Phi(t_i',\tau)w_1(\tau)d\tau + w_2(t_i'),$$

(14)

en àmbos casos $i = 0, 1, 2, ...,$ y donde $\Phi(t,t_o)$ es la matriz transiciòn del sistema (11); las dos ùltimas ecuaciones son de la forma:

$$x^*(i + 1) = A_d(i)x^*(i) + B_d(i)u^*(i) + w^*_1(i),$$

$$y^*(i) = C_d(i)x^*(i) + E_d(i)u^*(i) + w^*_2(i).$$

(15)

Este método tiene las siguientes caracteristicas:

i. Se asume que $y^*(i)$ es la ùltima observaciòn que puede ser procesada para obtener un valor reconstruido para $x^*(i+1)$.

ii. La ecuaciòn de salida contiene generalmente un camino directo. Como en (13), el camino directo està ausente, $Ed(i) = 0$ cuando el retardo de procesamiento toma todo el intervalo (t_i, t_{i+1}).

iii. Aùn si en el problema contìnuo en el tiempo el ruido de exitaciòn de estado w_1 y el ruido de la observaciòn w_2 no son correlacionados, el ruido de exitaciòn de estado w^*_1 y el ruido de la observaciòn w^*_2 de la versiòn discreta en el tiempo del problema seràn correlacionados, debido a que $w^*_1(i)$ y $w^*_2(i)$ dependen de $w_1(t)$ para $t_i \leq t \leq t_i^*$; pero no seràn correlacionados sòlo si $t_i^* = t_i$, que es cuando el retardo del proceso toma todo el intervalo (t_i, t_{i+1}).

2.5. Diseño del compensador de salida realimentada que regule la respuesta de lazo cerrado: colocaciòn de polos.

Consideremos primero el diseño de un reconstructor de estado: un sistema que deduce el estado actual de observaciones pasadas de la salida. Luego, consideraremos el compensador de salida realimentada: regulador de la respuesta de lazo cerrado.

Se desea obtener un sistema dinàmico cuyo estado serà un estimado del estado a ser reconstruido en base a la entrada y salida del sistema dinàmico para el cual estamos diseñando el reconstructor de estado. Para el cual escribimos:

$$\hat{x}(i + 1) = F\hat{x}(i) + Lu(i) + Hy(i) \qquad (16)$$

donde u e y son la entrada y la salida del sistema lineal, dinàmico y de dimensiòn finita (1); donde $\hat{x}(i)$ es el estado estimado.

Para que el sistema dinàmico original sea compatible con el reconstructor de estado se escoge L = B y F = A - HC tal que el estimador dinàmico sea:

$$\begin{aligned} \hat{x}(i + 1) &= A\hat{x}(i) + Bu(i) - H(\hat{y} - y) \\ \hat{y}(i) &= C\hat{x}(i). \end{aligned} \qquad (17)$$

El estimador es excitado por el error del estimado de la salida y la salida observada a través de la ganancia de realimentaciòn H. El error $e(i) = \hat{x}(i) - x(i)$ es gobernado por la ecuaciòn diferencia:

$$e(i + 1) = (A - HC)e(i) \qquad (18)$$

Un criterio para determinar la calidad del reconstructor de estado son los valores caracterìsticos de la matriz que gobierna la ecuaciòn del error, los ceros del det(Iz − A + HC).

Las condiciones para A y C, que hacen arbitrarios los ceros del det(Iz − A + HC) por medio de una adecuada selecciòn de H, son el dual de la colocaciòn de polos

Asì tenemos que hay una matriz H (n x p) tal que el error dinàmico de reconstrucciòn de estado es gobernado por $e(i + 1) = (A - HC)e(i)$ donde $e = \hat{x} - x$ con $\det(Iz - A + HC) = z^n + r_{n-1}z^{n-1} + \ldots + r_0$ para coeficientes reales $[r_0, r_1, \ldots ,r_{n-1}]$, si y sòlo si el sistema (1) es reconstruible (observable); es decir, si la matriz Q' (np x n) $= [C' \mid A'C' \mid \ldots \mid (A')^{n-1}C']$ es de rango n.

En la reconstrucciòn del estado a partir de la mediciòn de salida y(i) omitimos el hecho que conocemos $y(i) = Cx(i)$ exactamente; por lo que es mejor escoger x(i) tal que $y(i) = Cx(i)$. Es decir, en lugar de estimar a todo el vector de estado x(i), es suficiente estimar los componentes de x(i) que satisfagan dicha relaciòn. Este problema ha sido estudiado por Luenberger quien mostrò que existe un reconstructor de estado, algunas veces llamado observador, de orden (n

- p) cuyo estado en combinaciòn con la salida observada resulta en un vector de error que tiene p componentes idénticamente iguales a cero y cuyos componentes restantes (n - p) son gobernados por un sistema dinàmico estacionario lineal de orden (n - p) con valores caracteristicos, previamente asignados, de su matriz del sistema.

El diseño del regulador a través de la colocaciòn de polos se basa en el conocimiento de todos los estados. Pero a menudo resulta dificultoso e ineficiente medir el vector de estado completo, y sòlo se tiene acceso a la salida por mediciones.

Se pueden usar las ideas que hemos establecido para diseñar un compensador que tenga como entrada la salida del sistema a ser controlado.

Se separa el problema de reconstrucciòn y el de regulaciòn realimentada diseñando primero un reconstructor de estado y luego usando el valor estimado del estado en el controlador realimentado. Esto es un preludio al teorema de separaciòn para el control estocàstico òptimo. Una primera aproximaciòn razonable para el diseño de un controlador de salida realimentada se expresa asì:

$$x(i + 1) = Ax(i) + Bu(i)$$

$$y(i) = Cx(i)$$

$$x(i + 1) = Ax(i) + Bu(i) - H(y(i) - y(i))$$

$$y(i) = Cx(i)$$

$$u(i) = -Kx(i). \tag{19}$$

El sistema dinàmico de lazo cerrado (19) puede ser escrito en términos de $x(i)$ y $e(i) = \hat{x}(i) - x(i)$:

$$x(i + 1) = (A - BK)x(i) - BKe(i)$$

$$e(i + 1) = (A - HC)e(i) \tag{20}$$

Donde los polos del sistema de lazo cerrado son los ceros del $\det(Iz - A + BK) = \det(Iz - A + HC)$ y pueden ser colocados escogiendo K y H, si y sòlo si el sistema (1) es controlable y reconstruible (observable); es decir, si las matrices P $(nm \times n) = [B \mid AB \mid \ldots \mid A^{n-1}B]$ y Q' $(np \times n) = [C' \mid A'C' \mid \ldots \mid (A')^{n-1}C']$ tienen rango n.

Se puede reemplazar el reconstructor de estado en este compensador por un observador Luenberger, especializando el caso de realimentaciòn de estado.

Un reconstructor de estado y un regulador de salida realimentada son mostrados en la figura 2.5 donde la estructura del compensador realimentado es la misma que la obtenida por el teorema de separaciòn del control estocàstico y diseñando el compensador para sistemas lineales con perturbaciones Gaussianas sobre la base de la teorìa de control òptimo deterministico con indice de costo cuadràtico y teorìa de filtrado de Kalman.

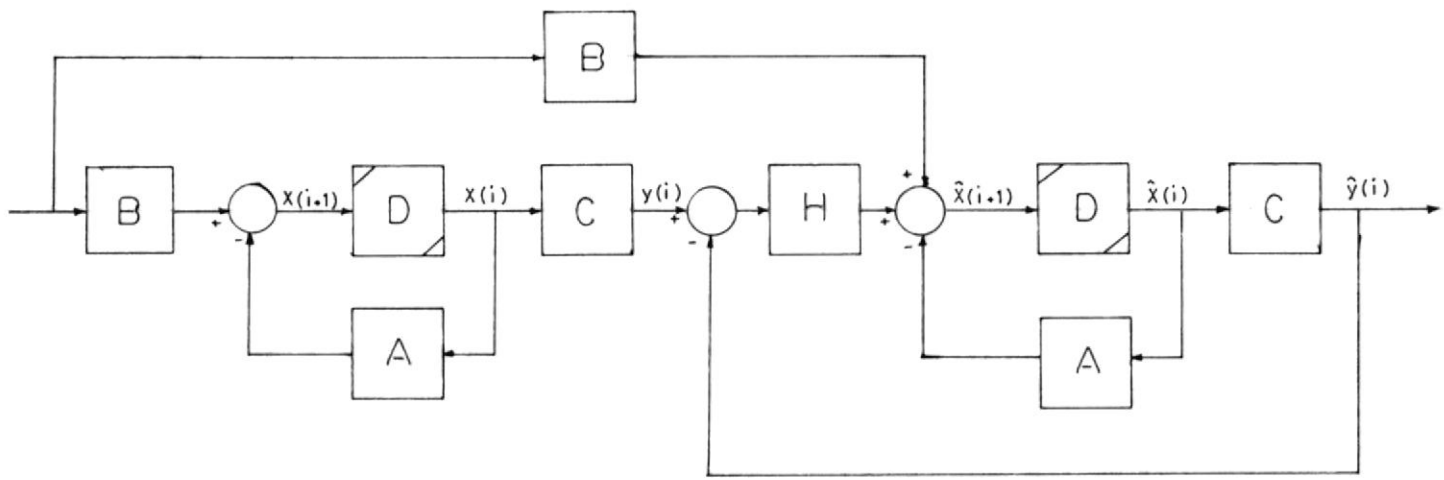


Figura 2.5a Diagrama de bloques del reconstructor de estados

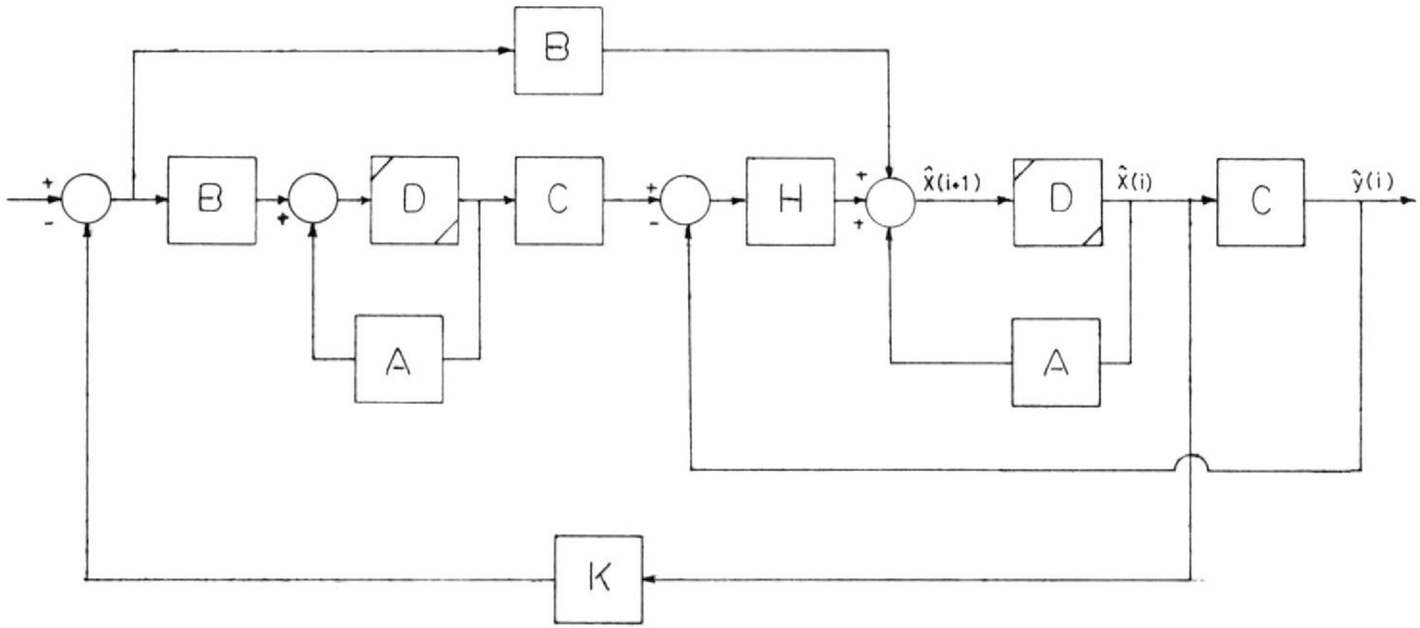


Figura 2.5b Regulador de salida realimentada.

CAPITULO III

"OBSERVADORES TIPO FILTRO KALMAN"

3.1. Introducciòn al Filtrado de Kalman.

Dentro de la teorìa de filtrado, se harà una consideraciòn cuantitativa del ruido asociado con mediciones en un sistema cuando se diseña un observador (estimador) estadistico, es decir, que depende de datos probabilisticos concernientes al ruido. Se tratarà de optimizar el filtro, minimizando el error en la salida en presencia de ruido. Para lograrlo se mantendràn las siguientes consideraciones:

i. Se omitiràn excesivas comprobaciones, discernimientos o reparos, con el interés de confinar la discusiòn en una razonable longitud y claridad.

ii. La discusiòn también omitirà algunos detalles de rigor matemàtico. Las operaciones de sumatoria se desarrollaràn con sumandos que involucran variables aleatorias, y las operaciones, aunque vàlidas para variables deterministicas, necesitan ser probadas para ser vàlidas con variables aleatorias, pero se omitiràn tales comprobaciones; y ademàs, se intercambiaràn sumatorios y expectancias sin verificar que los intercambios son permitidos.

Se describirà al sistema considerado, el ruido estadistico asociado y el problema especifico de la observaciòn.

Luego, por la introducciòn de nuevas variables, se convertirà al problema de filtrado en un problema deterministico del regulador òptimo (estimador), como el de la figura 3.1, donde el sistema es de la forma

$$x(i + 1) = Ax(i) + Bu(i),$$
$$y(i) = Cx(i), \qquad (1)$$

con términos adicionales que representan el ruido, y que seràn indicados después.

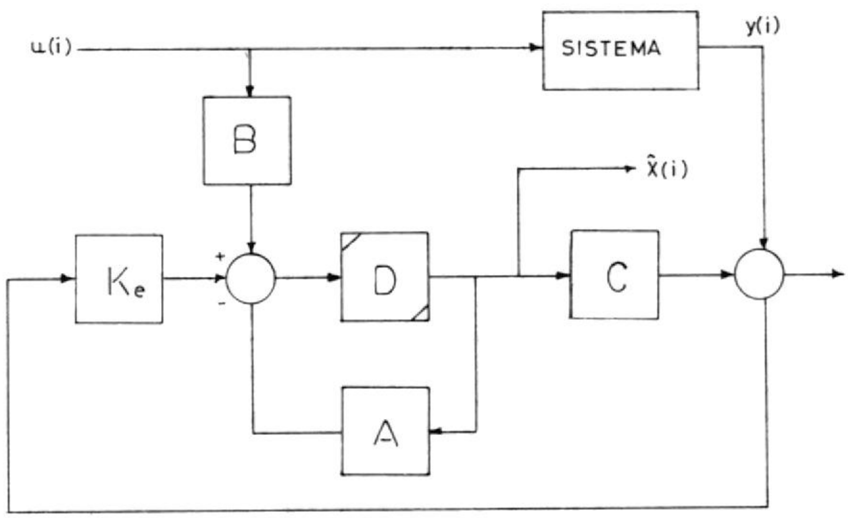


Figura 3.1 Diagrama de bloques de un estimador òptimo

3.1.1. <u>Descripciòn de sistemas y ruido estadìstico.</u>

El sistema ha ser considerado es de la forma

$$x(i + 1) = Ax(i) + Bu(i) + v(i)$$
$$y(i) = Cx(i) + w(i) \qquad (2)$$

Los tèrminos del ruido son v(i) y w(i), el caso invariante en el tiempo se aplica para intervalos de tiempo relativamente grandes.

El modelo de la ecuaciones (2) asume sòlo ruido aditivo y solamente en dos puntos. Algùn ruido entrando con u(i) es equivalente a algùn otro ruido entrando al mismo punto como v(i), cómo se aprecia en la figura 3.2.

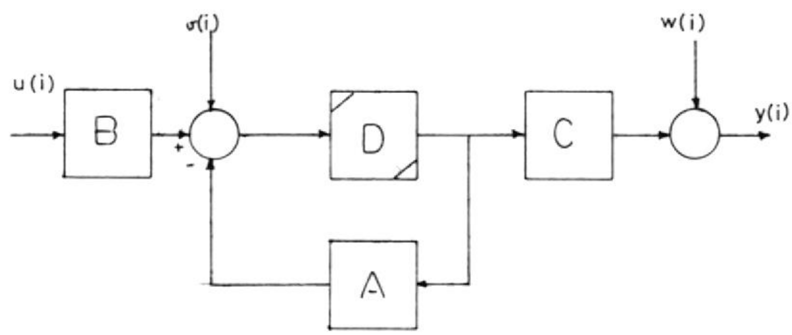


Figura 3.2 Diagrama de bloques de un sistema con ruido aditivo

En el caso de v(i) y w(i), es asumido ruido blanco, gaussiano, y de media cero. La primera propiedad implica que no es correlacionado de instante a instante; si fuera también estacionario, tendrìa un espectro de potencia constante. La segunda propiedad implica que toda la informaciòn probabilìstica acerca del ruido es resumida en la covarianza del ruido

$$E\{v(i)v'(j)\} = Q\delta_{ij} \qquad E\{v(i)\} \equiv 0 \tag{3}$$

$$E\{w(i)w'(j)\} = R\delta_{ij} \qquad E\{w(i)\} \equiv 0 \tag{4}$$

$$E\{v(i)w'(j)\} = 0 \qquad \forall\ i,j \tag{5}$$

Para la estimaciòn de procesos usando el filtro de Kalman, buscamos un estimado $\hat{g}(i)$, como una funciòn lineal de observaciones

$$z(i) = y(i) + v(i) \qquad i_o \leq i \leq i_f, \tag{6}$$

que consisten de una señal y(i) observada en presencia de ruido blanco v(i), donde el vector v(i) es un proceso independiente con matriz de covarianza

$$E\{v(i)v'(i)\} = V_v(i)\delta_{ij},$$

el diagrama de bloques del modelo del mensaje es mostrado en la figura 3.3.

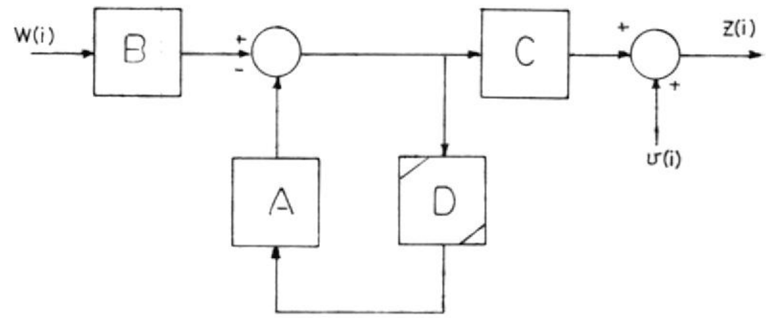


Figura 3.3 Modelo del mensaje

Si convertimos las observaciones z(i) en un proceso independiente v(i),donde los procesos z(i), y(i) y v(i) son vectores m x 1 y v(i) tiene covarianza m x n, tal que el estimado $\hat{g}(i)$ puede ser escrito como

$$g(i) = \sum_{i=i_0}^{i_f} H(i,j)\nu(j). \qquad (7)$$

De acuerdo a la descomposiciòn de Wold, z(i) puede ser descompuesto en dos componentes: una que puede ser determinada a partir de valores previos de $z(i)$ y otra, un proceso blanco $\nu(i)$ (innovatorio conteniendo la nueva informaciòn de $z(i)$).

Finalmente se asume que el estado inicial $x(i_o)$ del sistema (1) es una variable aleatoria gaussiana, de media m y covarianza Q_o conocidas

$$E\{[x(i_o) - m][x(i_o) - m]'\} = Q_o \quad E\{x(i_o)\} = m \tag{8}$$

Siendo $x(i_o)$ independiente de $v(i)$ y de $w(i)$

$$E\{x(i_o)v'(i)\} = E\{x(i_o)w'(i)\} = 0 \quad \text{para todo } i \tag{9}$$

Si $x(i_o)$ es conocido: $Q_o = 0$ y $x(i_o) = m$, en lugar de solamente $E\{x(i_o)\} = m$.

Los pesos de $H(i, j)$ son, a partir del principio de ortogonalidad

$$E\{g(i)\nu'(l)\} = \sum_{j=i_o}^{i_f} H(i, j)E\{\nu(j)\nu'(l)\}$$

$$i_o \leq l \leq i_f \qquad (10)$$

Siendo $\nu(i)$ ruido blanco, la covarianza es:

$$E\{\nu(i)\nu'(l)\} = V_\nu d_{il} \qquad (11)$$

Reemplazando (11) en (10) y resolviendo para H, se obtiene

$$H(i,l) = E\{g(i)\nu'(l)\}V_\nu^{-1}(l) \qquad (12)$$

y

$$\hat{g}(i) = \sum_{j=i_o}^{j_f} E\{g(i)\nu'(j)\}V_\nu^{-1}\nu(j) \qquad (13)$$

Ahora hay que encontrar la transformada que conduzca a las innovaciones $\nu(i)$ y sus covarianzas. Se debe obtener la soluciòn de (13) e implementarla. El estimado que serà obtenido en lugar de tèrminos analìticos debe satisfacer la ecuaciòn en diferencias.

A menudo se describe perturbaciones y otros fenòmenos variando estocàsticamente como las salidas de sistemas lineales discretos en el tiempo de la forma

$$x(i+1) = Ax(i) + Bw(i),$$
$$y(i) = Cx(i). \tag{14}$$

La variable de estado es $x(i)$, la variable de salida es $y(i)$, y la secuencia de vectores estocàsticos no correlacionados mutuamente $w(i)$ (ruido blanco), $i = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$; de media cero y matriz de varianza

$$E\{w(i)w'(i)\} = V \tag{15}$$

Si todos los valores caracteristicos de A en (14) tienen mòdulo estrictamente menor que uno, e $i_o \to -\infty$, la matriz de covarianza del sistema tiende asintòticamente a $\bar{R}_*(i,j)$ que solamente depende de $i - j$; la matriz de varianza $\bar{Q}$ asintòtica es la ùnica soluciòn de la ecuaciòn matricial

$$\bar{Q} = A\bar{Q}A' + BVB'. \tag{16}$$

Si A y R son constantes, donde R es una secuencia de matrices simétricas no negativas a igual que P(i), y nuevamente los valores caracteristicos de A tienen mòdulo estrictamente menor que uno, P(i) se aproxima a un valor constante P conforme $i_1 \to \infty$, donde $\bar{P}$ es la ùnica soluciòn de la ecuaciòn matricial

$$\bar{P} = A'\bar{P}A + R \tag{17}$$

3.2. <u>Problema del filtro lineal òptimo y discreto.</u>

Asumiremos que la señal y(i) es la salida de un sistema lineal discreto e invariante en el tiempo, excitado por ruido blanco, descrito por

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + Bw(i) \\ y(i) &= Cx(i), \end{aligned} \tag{18}$$

donde la entrada w(i) es el ruido blanco, de media cero, con covarianza

$$\mathrm{Cov}\{w(i)\} = E\{w(i)w'(j)\} = V_w(i)\delta_{ij}. \tag{19}$$

La ecuaciòn de observaciòn es

$$z(i) = y(i) + v(i) \qquad i_o \leq i \leq i_f, \qquad (20)$$

donde v(i) es la intensidad del ruido blanco con media cero, y matriz de covarianza

$$\mathrm{Cov}\{v(i)\} = E\{v(i)v'(j)\} = V_v(i)\delta_{ij}, \qquad (21)$$

que no està correlacionada con w(i).

También, asumiremos que $x(i_o)$ es una variable aleatoria, de media conocida y covarianza no correlacionada , con w(i) y v(i), para todo i, i = 1,2, ...

Si z(j) es el conjunto de observaciones $(z(i_o)$, $z(i_1)$, ..., z(j)), entonces el estimado de la variable aleatoria x(i) es:

$$\hat{x}(i) \triangleq \hat{x}(i/i_f) = E\{x(i)/z(i_f)\} \qquad (22)$$

y el estimado de la señal de salida y(i) es:

$$\hat{y}(i) \triangleq \hat{y}(i/i_f) = E\{y(i)/z(i_f)\} = CE\{x(i)/z(i_f)\}$$

$$\hat{y}(i) = C\hat{x}(i/i_f) \qquad (23)$$

Si usamos (13), obtenemos el estimado de la variable x(i) en términos de la secuencia de innovaciòn $\nu(i)$:

$$\hat{x}(i/i_f) = \sum_{j=i_0}^{i_f} E\{x(i)\nu'(j)\}V_\nu^{-1}(j)\nu(j) \tag{24}$$

Si i = i_f se tiene un problema de filtrado, y si i > i_f se tiene un problema de predicciòn.

De la teorìa del filtro de Wiener para ruido blanco, obtenemos:

$$H(z) = 1 - \frac{\sqrt{N_o/2}}{S^+(z)}, \tag{25}$$

donde H representa la funciòn de transferencia del sistema en términos de la variable z. Si asumimos $N_o/2 = 1$ por simplicidad, obtenemos:

$$y(z) = H(z)z(z) - \frac{z(z)}{S^+(z)}, \tag{26}$$

donde el segundo término, de (26), corresponde a una observaciòn con ruido blanco. Para nuestro caso discreto, la secuencia de innovaciòn es:

$$\nu(i) = z(i) - \hat{y}(i/i-1) = z(i) - \{y(i) - \tilde{y}(i/i-1)\}$$

$$\nu(i) = v(i) + \tilde{y}(i/i-1) \tag{27}$$

donde $\tilde{y}(i/i-1)$ es el error de la estimaciòn.

Ahora mostraremos que $\nu(i)$ es una secuencia de ruido blanco de media cero:

Si $i > l$, obtenemos que

$$E\{\nu(i)\nu'(l)\} = E\{[\tilde{y}(i/i-1) + v(i)]\nu'(l)\},$$

debido a que el error $\tilde{y}(i/i-1)$ es ortogonal a $\nu(l)$ para $l \leq i-1$:

$$E\{\nu(i)\nu'(l)\} = E\{v(i)\nu'(l)\}, \tag{28}$$

debido a que $v(.)$ es una secuencia de ruido blanco con media cero e $i > l$.

$$E\{\nu(i)\nu'(l)\} = E\{v(i)[\tilde{y}(l/l-1) + v(l)]'\} = 0 \tag{29}$$

Para i $<$ 1 se obtiene un resultado parecido al obtenido para i $>$ 1.

Para i = 1, obtenemos:

$$E\{\nu(i)\nu'(i)\} = E\{[\tilde{y}(i/i-1) + v(i)][\tilde{y}(i/i-1) + v(i)]'\}$$

$$E\{\nu(i)\nu'(i)\} = V_{\tilde{y}}(i/i-1) + V_{v}(i) \tag{30}$$

y

$$V_{\tilde{y}}(i/i-1) = CV_{\tilde{x}}(i/i-1)C'. \tag{31}$$

debido a que se tiene que

$$\tilde{y}(i/i-1) = C\tilde{x}(i/i-1)$$

O sea que $\nu(i)$ es una secuencia de ruido blanco con media cero y covarianza de Kernel:

$$V_{\nu}(i) = CV_{\tilde{x}}(i/i-1)C' + V_{v}(i) \tag{32}$$

3.3. Predicciòn de una etapa del Filtro de Kalman.

Estableceremos un algoritmo secuencial para obtener el estimado $\hat{x}(i+1/i)$ basado en el estimado $\hat{x}(i/i-1)$ y la nueva observaciòn $z(i)$. Primero escribamos:

$$\hat{x}(i/i-1) = \sum_{j=i_0}^{i-1} E\{x(i)\nu'(j)\}V_\nu^{-1}(j)\nu(j) \tag{33}$$

y

$$\hat{x}(i+1/i) = \sum_{j=i_0}^{i} E\{x(i+1)\nu'(j)\}V_\nu^{-1}(j)\nu(j)$$

$$\hat{x}(i+1/i) = \sum_{j=i_0}^{i} E\{[Ax(i) + Bw(i)]\nu'(j)\}V_\nu^{-1}(j)\nu(j)$$

$$\hat{x}(i+1/i) = A\sum_{j=i_0}^{i} E\{x(i)\nu'(j)\}V_\nu^{-1}(j)\nu(j)$$

$$\hat{x}(i+1/i) = AE\{x(i)\nu'(i)\}V_\nu^{-1}(i)v(i) + A\hat{x}(i/i-1) \tag{34}$$

La ganancia de Kalman se define como:

$$K(i+1,\ i) \triangleq AE\{x(i)\nu'(i)\}V_\nu^{-1}(i) \tag{35}$$

luego

$$\hat{x}(i+1/i) = A\hat{x}(i/i-1) + K(i+1,\ i)\nu(i) \tag{36}$$

o

$$\hat{x}(i+1/i) = A\hat{x}(i/i-1) + K(i+1,\ i)[z(i) - C\hat{x}(i/i-1)], \tag{37}$$

ver figura 3.4.

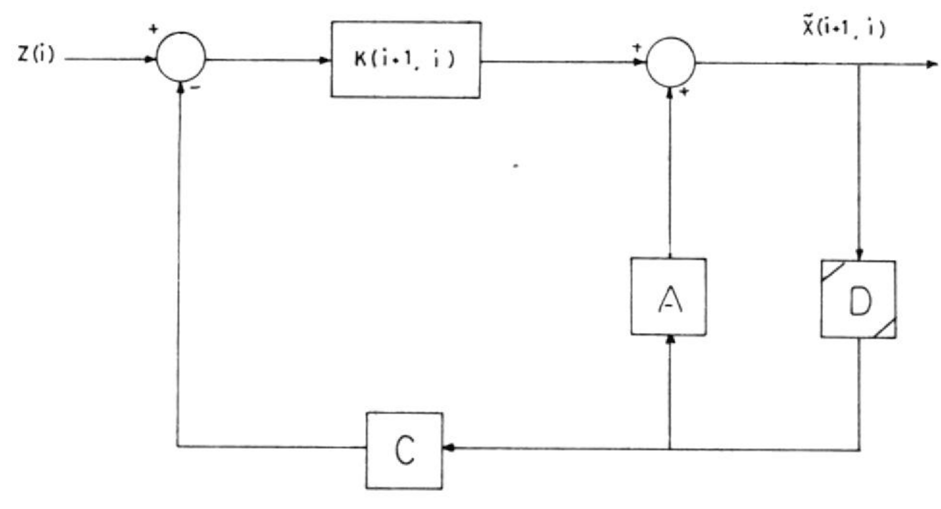


Figura 3.4 Predictor de una etapa

De (35), obtenemos:

$$K(i+1, i) = AE\{\tilde{x}(i)[Cx(i/i-1) + v(i)]'\}V_{\nu}^{-1}(i). \tag{38}$$

Además, debido a que $x(i)$ y $v(i)$ no son correlacionados, tenemos que:

$$K(i+1, i) = AE\{x(i)\tilde{x}(i/i-1)\}C'V_{\nu}^{-1}(i) \tag{39}$$

También,

$$x(i) = \hat{x}(i/i-1) + \tilde{x}(i/i-1) \tag{40}$$

debido a que $\tilde{x}(i/i-1)$ es ortogonal a $\nu(j)$ para $j \leq i-1$ y $\hat{x}(i/i-1)$ es una combinación lineal de $\nu(j)$ para $j \leq i-1$, se tiene que $\tilde{x}(i/i-1)$ es ortogonal a $\hat{x}(i/i-1)$.

Reescribiendo (39), obtenemos:

$$K(i+1, i) = AV_{\tilde{x}}(i/i-1)C'V_{\nu}^{-1}(i) \tag{41}$$

Restando (37) de (18), obtenemos:

$$\tilde{x}(i+1/i) = A\tilde{x}(i/i-1) + Bw(i) - $$
$$- K(i+1,\ i)[C\tilde{x}(i/i-1) + v(i)]$$

$$\tilde{x}(i+1/i) = [A - K(i+1,\ i)C]\tilde{x}(i/i-1) + $$
$$+ Bw(i) - K(i+1,\ i)v(i)$$

(42)

Debido a que w(.) y v(.) son ruido blanco y no son correlacionados:

$$V_{\tilde{x}}(i+1/i) = [A - K(i+1,\ i)C]V_{\tilde{x}}(i/i-1)[A - $$
$$- K(i+1,\ i)C]' + BV_{w}(i)B' + $$
$$+ K(i+1,\ i)V_{v}(i)K'(i+1,\ i)$$

(43)

Sustituyendo (41) en (43), obtenemos:

$$V_{\tilde{x}}(i+1/i) = AV_{\tilde{x}}(i/i-1)A' + BV_{w}(i)B' - AV_{\tilde{x}}(i/i-1)C'.$$
$$.[CV_{\tilde{x}}(i/i-1)C' + V_{v}(i)]^{-1}CV_{\tilde{x}}(i/i-1)A'$$

(44)

De (42), tenemos:

$$E\{\tilde{x}(i+1/i)\} = [A - K(i+1,\ i)C]E\{\tilde{x}(i/i-1)\} \tag{45}$$

Para un estimado insesgado, debemos obtener:

$$E\{x(i) - \hat{x}(i/i-1)\} = E\{\tilde{x}(i/i-1)\} = 0 \tag{46}$$

Si seleccionamos $E\{\tilde{x}(i_o)\} = 0$, obtendremos que $E\{\tilde{x}(i+1/i)\} = 0$ para todo $i \geq i_o$.

De esta forma obtenemos:

$$\hat{x}(i_o) = E\{x(i_o)\} = \mu_x(i_o) \tag{47}$$

para nuestro caso:

$$V_{\tilde{x}}(i_o) = E\{[x(i_o) - \hat{x}(i_o)][x(i_o) - \hat{x}(i_o)]'\} = V_x(i_o) \tag{48}$$

3.4. Filtrado de Kalman discreto.

Si establecemos $i_f = i$ en (24), obtenemos:

$$\hat{x}(i/i) = \sum_{j=i_o}^{i} E\{x(i)\nu'(j)\}\ V_\nu^{-1}(j)\nu(j)$$

$$\hat{x}(i/i) = \sum_{j=i_o}^{i-1} E\{x(i)\nu'(j)\}V_\nu^{-1}(j)\nu(j) +$$

$$+ E\{x(i)\nu'(i)\}V_{\nu}^{-1}(j)\nu(i) \tag{49}$$

De (33), obtenemos:

$$\hat{x}(i/i) = \hat{x}(i/i-1) + K(i)\nu(i) \tag{50}$$

donde

$$K(i) \triangleq E\{x(i)\nu'(i)\}V_{\nu}^{-1}(i) \tag{51}$$

Comparando (51) con (35), obtenemos:

$$K(i+1,\ i) = AK(i) \tag{52}$$

También obtenemos:

$$\hat{x}(i/i-1) = E\{x(i)/z(i-1)\}$$

$$\hat{x}(i/i-1) = E\{Ax(i-1) + Bw(i-1)/z(i-1)\}$$

$$\hat{x}(i/i-1) = AE\{x(i-1)/z(i-1)\}$$

$$\hat{x}(i/i-1) = A\hat{x}(i-1/i-1) \tag{53}$$

Sustituyendo (53) en (50), obtenemos:

$$\hat{x}(i/i) = A\hat{x}(i-1/i-1) + K(i)\nu(i) \tag{54}$$

donde

$$\nu(i) = z(i) - C\hat{x}(i/i-1)$$

$$\nu(i) = z(i) - CA\hat{x}(i-1/i-1) \tag{55}$$

La varianza del error del estimado del filtrado, se obtiene escribiendo primero:

$$\tilde{x}(i/i) = x(i) - \hat{x}(i/i)$$

$$\tilde{x}(i/i) = x(i) - \hat{x}(i/i-1) - K(i)v(i)$$

$$\tilde{x}(i/i) = \tilde{x}(i/i-1) - K(i)[C\tilde{x}(i/i-1) + v(i)]$$

$$\tilde{x}(i/i) = [I - K(i)C]\tilde{x}(i/i-1) - K(i)v(i) \tag{56}$$

De donde obtenemos la varianza del error:

$$V_{\tilde{x}}(i/i) = [I - K(i)C]V_{\tilde{x}}(i/i-1)[I - K(i)C]' +$$

$$+ K(i)V_v(i)K'(i) \tag{57}$$

De (37) y (51), obtenemos:

$$K(i) = E\{[\hat{x}(i/i-1) + \tilde{x}(i/i-1)][\tilde{x}'(i/i-1)C' +$$
$$+ v'(i)]\}V_y^{-1}(i)$$

En base a que $\hat{x}(i/i-1)$ es ortogonal a $\tilde{x}(i/i-1)$ y debido a que $x(i)$ y $v(i)$ no son correlacionados:

$$K(i) = V_{\tilde{x}}(i/i-1)C'V_y^{-1}(i) \tag{58}$$

donde

$$V_{\tilde{x}}(i/i) = [I - K(i)C]V_{\tilde{x}}(i/i-1) \tag{59}$$

Reescribiendo (57) obtenemos:

$$V_{\tilde{x}}(i/i) = [I - KC]V_{\tilde{x}} - [I - KC]V_{\tilde{x}}C'K' + KV_vK'$$

haciendo

$$a = - [I - KC]V_{\tilde{x}}C'K' + KV_vK'$$

de (58)

$$a = -[I - KC]KV_vK' + KV_vK'$$

de (32)

$$a = -[I - KC]K[CV_{\tilde{x}}C' + V_v]K' + V_vK'$$

$$a = -KCV_{\tilde{x}}C'K' - KV_vK' + KCK[CV_{\tilde{x}}C' +$$

$$+ V_v]K' + KV_vK'$$

$$a = KC[K(CV_{\tilde{x}}C' + V_v) - V_{\tilde{x}}C']K'$$

de (32)

$$V_y = CV_{\tilde{x}}C' + V_v$$

de (58)

$$V_{\tilde{x}}C' = V_v$$

por consiguiente $a = 0$.

Finalmente, podemos simplificar la ecuaciòn para la predicciòn de la varianza del error usando (59): sustituyendo (58) y (59) en (44) obtenemos

$$V_{\tilde{x}}(i+1/i) = AV_{\tilde{x}}(i/i)A' + BV_{w}(i)B' \qquad (60)$$

BIBLIOTECA

CAPITULO IV

"OBSERVADORES TIPO LUENBERGER"

Son presentados de manera introductoria observadores que reconstruyen aproximadamente la informaciòn necesaria faltante de la variable de estado del sistema. Son discutidos los tòpicos especiales de identificaciòn de un observador, observador de orden reducido, observadores funcionales lineales, propiedades de estabilidad, observadores duales y con entradas desconocidas; también son presentadas técnicas mejoradas para la obtenciòn del observador tipo Luenberger.

4.1. Introducciòn al Observador tipo Luenberger.

Cuando se diseña sistemas de control realimentado es a menudo conveniente, asumir inicialmente que el vector de estado del sistema a ser controlado està disponible a través de mediciones. Bajo esta asunciòn para el sistema lineal e invariante en el tiempo gobernado por:

$$x(i + 1) = Ax(i) + Bu(i), \tag{1}$$

donde x es el vector n x 1 de estado, u es un vector r x 1 de entrada, A es la matriz n x n del sistema, y B es una matriz n x r de distribuciòn. Se podrìa diseñar una ley de realimentaciòn de la forma u(i) = U(x(i), i) que podrìa ser implementada si el vector de estado x(i) pudiese ser medido.

Una aproximaciòn conveniente debe ser determinada para el vector de estado tal que pueda ser sustituida en la ley de control, un vector de estado aproximado serà sustituido por el estado no disponible, que resulta en la descomposiciòn del problema de diseño de la ley de control en dos fases:

i. El diseño de la ley de control asumiendo que el vector de estado està disponible, basada en la optimizaciòn u otra técnica de diseño.

ii. El diseño de un sistema que produzca una aproximaciòn al vector de estado; este sistema deterministico, es llamado un observador Luenberger.

Este observador tiene como entradas las entradas y salidas disponibles del sistema cuyo estado està siendo aproximado y tiene un vector de estado que està linealmente relacionado a la aproximaciòn deseada. El observador es un sistema dinàmico cuyas caracteristicas son algo libres para ser determinadas por el diseñador.

Inicialmente, consideremos el problema de observar un sistema libre S_1 (entrada cero), si las salidas disponibles de este sistema son usadas como entradas para excitar a otro sistema S_2, entonces el segundo sistema servirà como observador del primer sistema y su estado tenderà a seguir una transformaciòn lineal del estado del primer sistema.

Figura 4.1 Observador

<u>Teorema 1:</u> Sea S_1 el sistema libre, $x(i + 1) = Ax(i)$ que excita a S_2, $z(i + 1) = Fz(i) + Hx(i)$. Suponga que hay una transformaciòn T que satisface $TA - FT = H$. Si $z(i_0) = Tx(i_0)$, luego $z(i) = Tx(i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Generalizando se obtiene:

$$z(i) = Tx(i) + e^{Fi}[z(i_0) - Tx(i_0)], \tag{2}$$

que es la soluciòn de:

$$z(i + 1) - Tx(i) = Fz(i) + Hx(i) - TAx(i).$$

Los dos sistemas S_1 y S_2 no necesitan tener la misma dimensiòn. Ademàs, existe una ùnica soluciòn T para la ecuaciòn $TA - FI = H$ si A y F no tienen valores caracteristicos comunes. Es decir, un sistema S_2 que tenga valores caracteristicos diferentes de los de A es un observador para S_1 (Teorema 1).

El resultado del Teorema 1 para sistemas libres puede ser extendido a sistemas forzados incluyendo la entrada tanto en el observador como en el sistema original, por lo tanto si S_1 es gobernado por:

$$x(i + 1) = Ax(i) + Bu(i), \tag{3}$$

el sistema S_2 es gobernado por:

$$z(i + 1) = Fz(i) + Hx(i) + TBu(i), \tag{4}$$

que satisface (2). El observador para un sistema puede ser diseñado asumiendo primero que el sistema es libre y luego incorporando las entradas como se hizo en (4).

En un <u>observador Identidad</u> la transformaciòn que relaciona el estado del observador con el estado del sistema original es la transformaciòn identidad. Esto requiere que el observador S_2 sea del mismo orden dinàmico que el sistema original S_1 $(T = I)$ y que $F = A - H$, la matriz H es determinada parcialmente por la estructura fijada por la salida del sistema original y parcialmente por la estructura de entrada del observador. Si S_1, con vector de salida y m-dimensional, es gobernado por:

$$\begin{aligned} x(i + 1) &= Ax(i), \\ y(i) &= Cx(i), \end{aligned} \tag{5}$$

y el observador S_2, es gobernado por:

$$z(i + 1) = Fz(i) + Gy(i), \tag{6}$$

luego $H = GC$.

En el diseño de observadores la matriz C m x n es fija y la matriz G es arbitraria; un observador identidad es determinado ùnicamente por la seleciòn de G.

$$z(i + 1) = (A - GC)z(i) + Gy(i) \tag{7}$$

Cualquier G conduce a un observador identidad pero la respuesta dinàmica de la observaciòn del proceso es determinada por la matriz A - GC (Teorema 1).

Un observador identidad puede ser diseñado para tener dinàmica arbitraria si el sistema original (5) es completamente observable, es decir, si la matriz:

$$[C' \mid A'C' \mid (A')^2C' \mid \dots \mid (A')^{n-1}C'],$$

tiene rango n. Si una matriz A n x n y una matriz C m x n satisfacen esta condiciòn, luego (C, A) es com-

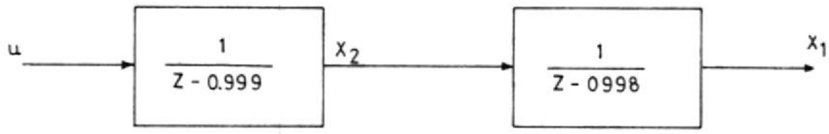


Figura 4.2 Sistema de 2º orden

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .998 & .001 \\ .000 & .999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} .000 \\ .001 \end{bmatrix} u,$$

$$y(i) = [\ .001 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

El observador identidad es determinado especificando el vector de entrada del observador:

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}.$$

pletamente observable.

Lema 1: Para matrices reales C y A, el juego de valores caracteristicos de A - GC puede hacerse corresponder al juego de valores caracteristicos de alguna matriz real n x n seleccionando la matriz C si y sòlo si (C, A) es completamente observable.

Teorema 2: Puede ser diseñado un observador identidad con dinàmica arbitraria para sistemas lineales invariantes en el tiempo, si y sòlo si el sistema es completamente observable.

Los valores caracteristicos del observador son negativos para que el estado del observador converja al estado del sistema observado, y son escogidos màs negativos que los valores caracteristicos del sistema observado para que converjan màs ràpido que otros efectos del sistema. Esto hace que el observador actùe como un diferenciador y llegue a ser màs sensitivo al ruido, e introduzca otras dificultades.

EJEMPLO 1:

La matriz resultante del sistema observador es:

$$A - GC = \begin{bmatrix} .998 & -g_1 & .001 \\ 0 & -g_2 & .999 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

que tiene la ecuaciòn caracterìstica correspondiente:

$$\lambda^2 + (1.997 - g_1)\lambda + (.997 - g_1 - .001g_2) = 0. \tag{10}$$

Si el observador tiene dos valores caracterìsticos iguales a -3 y -1, la ecuaciòn caracterìstica es:

$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, que conduce a $g_1 = -1.993$, $g_2 = .004$, por consiguiente el observador es gobernado por:

$$\begin{bmatrix} z(i+1) \\ z(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .99 & .001 \\ -.004 & .999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(i) \\ z_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} .003 \\ .004 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} .000 \\ .001 \end{bmatrix} u$$

El observador identidad posee un cierto grado de redundancia; mientras el observador construye un estimado del vector de estado, parte del estado es dado por salidas del sistema y està disponible para mediciòn directa. Esta redundancia es eliminada con un observador de menor dimensiòn y todavia con dinàmica arbitraria.

Si y(i) es de dimensiòn m, puede ser contruido un observador de orden n - m con estado z(i) que se aproxima a Tx(i) para alguna matriz T m x n, (Teorema 1).

Luego, un estimado $\hat{x}(i)$ de x(i) puede ser determinado a través de:

$$\hat{x}(i) = \begin{bmatrix} T \\ - \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(i) \\ y(i) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

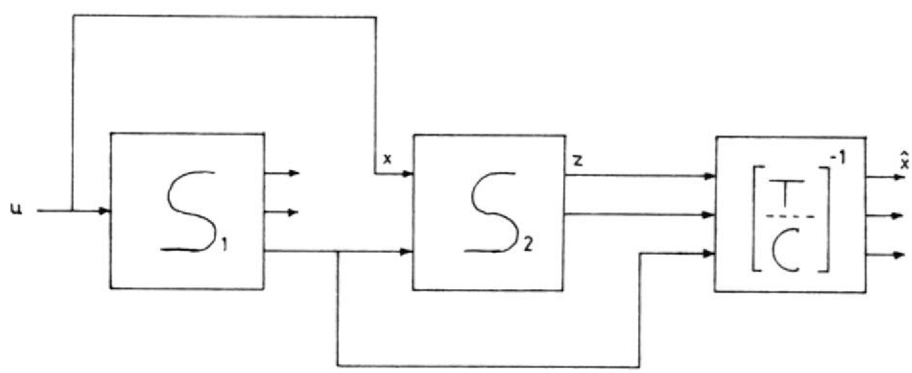


Figura 4.3 Observador de orden reducido

donde la matriz T asociada con el observador debe tener n - m filas linealmente independientes de las filas de C.

Consideremos nuevamente el sistema:

$$
\begin{aligned}
x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i), \\
y(i) &= Cx(i),
\end{aligned} \tag{12}
$$

y asumamos que las m salidas del sistema son linealmente independientes, es decir, que la matriz C de distribuciòn de salida tiene rango m. Ademàs, introduzcamos un cambio de coordenadas, tal que la matriz C toma la forma $C = [I \mid 0]$, particionando C en una matriz identidad m x m y una matriz cero m x (n - m), donde el cambio de coordenadas es obtenido seleccionando una matriz D (n - m) x n tal que:

$$M = \begin{bmatrix} C \\ - \\ D \end{bmatrix}, \text{ con } |M| \neq 0$$

y usando las variables $x(i) = Mx(i)$.

Particionando el vector de estado como:

$$x(i) = \begin{bmatrix} y(i) \\ w(i) \end{bmatrix},$$

podemos escribir las ecuaciones del sistema en la forma

$$y(i + 1) = A_{11}y(i) + A_{12}w(i) + B_1u(i) \tag{13a}$$

$$w(i + 1) = A_{21}y(i) + A_{22}w(i) + B_2u(i) \tag{13b}$$

En resumen, el vector $y(i)$ es medible y debido a que $u(i)$ también es medible, (13a) da la mediciòn de $A_{12}w(i)$ para el sistema (13b) que tiene el vector de estado $w(i)$ y entrada $A_{21}y(i) + B_2u(i)$.

Lema 2: Si (C, A) es completamente observable, luego (A_{12}, A_{22}) también serà completamente observable.

Para construir el observador inicialmente lo definimos en la forma:

$$\hat{w}(i + 1) = (A_{22} - LA_{12})\hat{w}(i) + A_{21}y(i) + B_2u(i) + \\ + L(y(i + 1) - A_{11}y(i)) - LB_1u(i). \tag{14}$$

En base a los lemas 1 y 2, L puede ser seleccionado tal que $A_{22} - EA_{21}$ tenga valores caracteristicos arbitrarios.

La diferenciaciòn de y puede ser evitada modificando el diagrama de bloque de la figura 4.4 al de la figura 4.5 que es equivalente en el punto w.

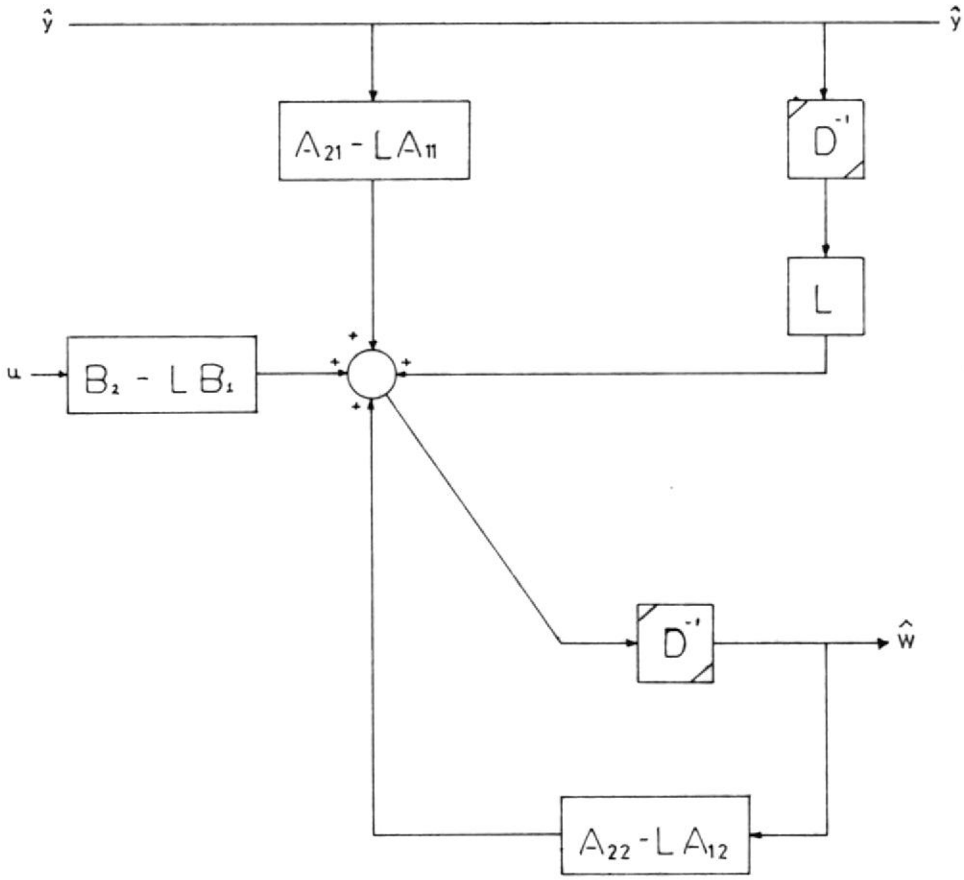


Figura 4.4 Observador de orden reducido usando una unidad de retardo

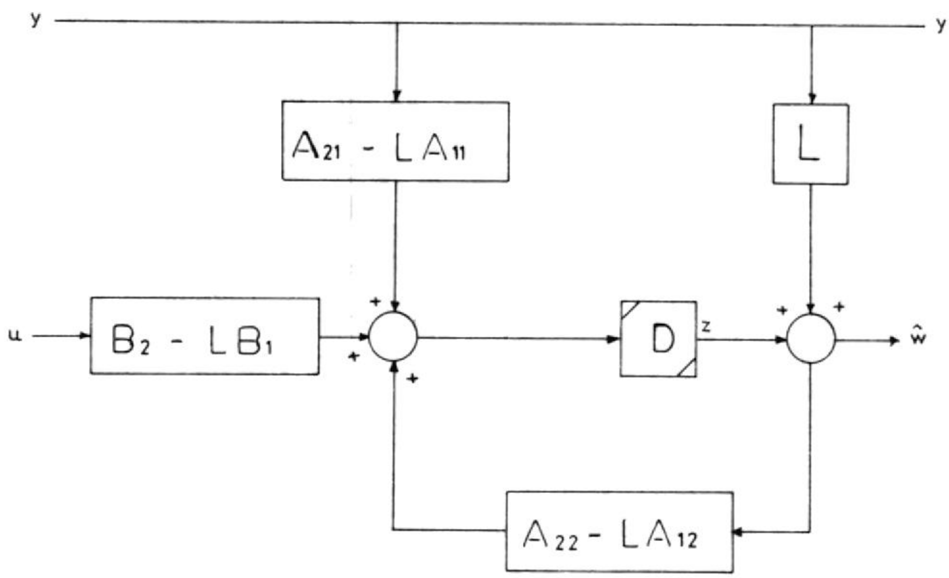


Figura 4.5 Observador de orden reducido sin usar unidad de retardo

La forma final del observador de orden reducido es:

$$z(i + 1) = (A_{22} - LA_{12})z(i) + (A_{22} - LA_{12})Ly(i) + \\ + (A_{21} - LA_{11})y(i) + (B_2 - LB_1)u(i), \tag{15}$$

con

$$\hat{z}(i) = \hat{w}(i) - Ly(i). \quad (16)$$

Para este observador $T = [-L \mid I]$; esta construcciòn permite establecer el siguiente teorema.

Teorema 3: Puede ser construido un observador de orden n - m con valores caracterìsticos arbitrarios para un sistema lineal e invariante en el tiempo, completamente controlable de orden n con salidas linealmente independientes.

La forma explìcita del observador dada aquì, obtenida por particionamiento del sistema, es una manera de construir un observador; hay otras, tales como la transformaciòn a la forma canònica o simplemente hipotetizando la estructura general y resolviendo para los paràmetros desconocidos. El teorema 3 garantiza que tales métodos conduzcan a un resultado apropiado.

EJEMPLO 2: El sistema de la figura 4.2 y tratado en el ejemplo 1, es un sistema de segundo orden con una salida tal que puede ser construido un observador de primer orden con valor caracterìstico arbitrario, tal como se muestra en la figura 4.6

La matriz C tiene la forma requerida, $C = [.001 \quad 0]$, en este caso $A_{22} - GA_{12} = -1 - G$, que da el valor caracteristico del observador. Si se escoge $G = 2$, el valor caracteristico del observador serà .95.

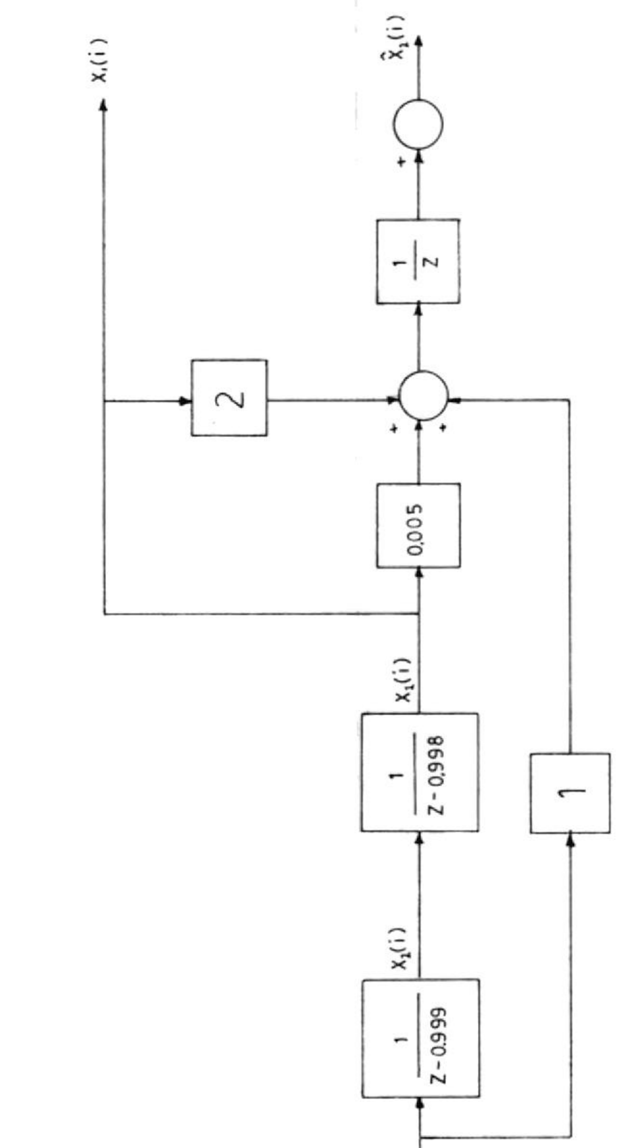


Figura 4.6 Observador de 1º orden para un sistema de 2º orden

4.2. Observaciòn de una Funcional Lineal particular.

Para algunas aplicaciones todo lo que se necesita es una funcional lineal del estado, $æ = a'x$. Por ejemplo , una ley de control lineal e invariante en el tiempo para un sistema de una entrada es determinada por la funcional lineal del estado del sistema.

Una funcional lineal del estado, $æ = a'x$, puede ser estimada con un observador de $v - 1$ valores caracteristicos arbitrarios, siendo v el ìndice de observabilidad definido como el menor entero positivo para el cual la matriz:

$$[C' \mid A'C' \mid \ldots \mid (A')^{v-1}C']$$

tiene rango n.

Para un sistema completamente observable $v - 1 \leq n - m$ y como en muchos sistemas $v - 1 \ll n - m$, observar una funcional lineal particular del estado puede ser màs simple que observar el vector de estado completo.

La forma del observador es la del observador con vector de estado completo, y el estimado de $\ae = a'x$ es definido por:

$$\hat{\ae}(i) = b'y(i) + c'z(i),$$

$$z(i + 1) = Fz(i) + Hx(i) + TBu(i), \tag{17}$$

donde F, H, T y B ya han sido definidos anteriormente, donde b y c son vectores que satisfacen $b'kC + c'T = a'$, y el observador sòlo necesita ser de orden $v - 1$.

EJEMPLO 3: En el sistema de cuarto orden, mostrado en la figura 4.7, las mediciones disponibles x_1 y x_3 tienen un ìndice de observabilidad 2.

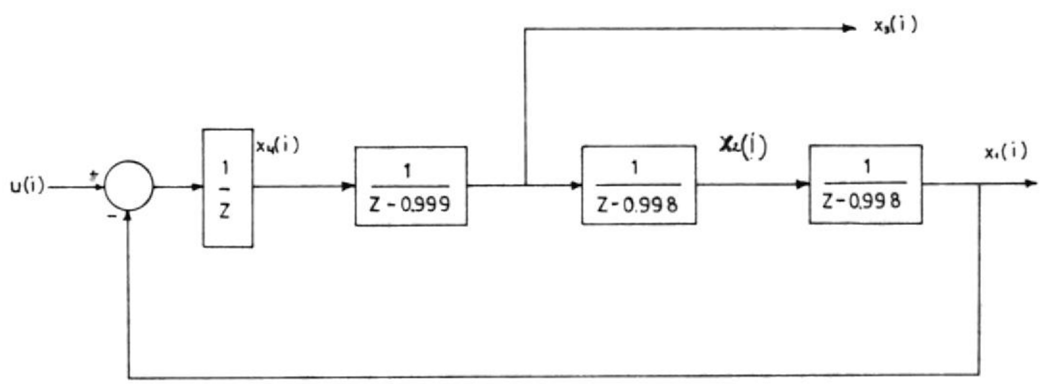


Figura 4.7 Sistema de cuarto orden

Hagamos que el observador de la funcional $x_2 + x_4$ tenga un valor caracteristico igual .95. Omitiendo inicialmente la entrada u, el observador seria de la forma:

$$z(i + 1) = .95z(i) + g_1x_1 + g_3x_3,$$

como se muestra en la figura 4.8.

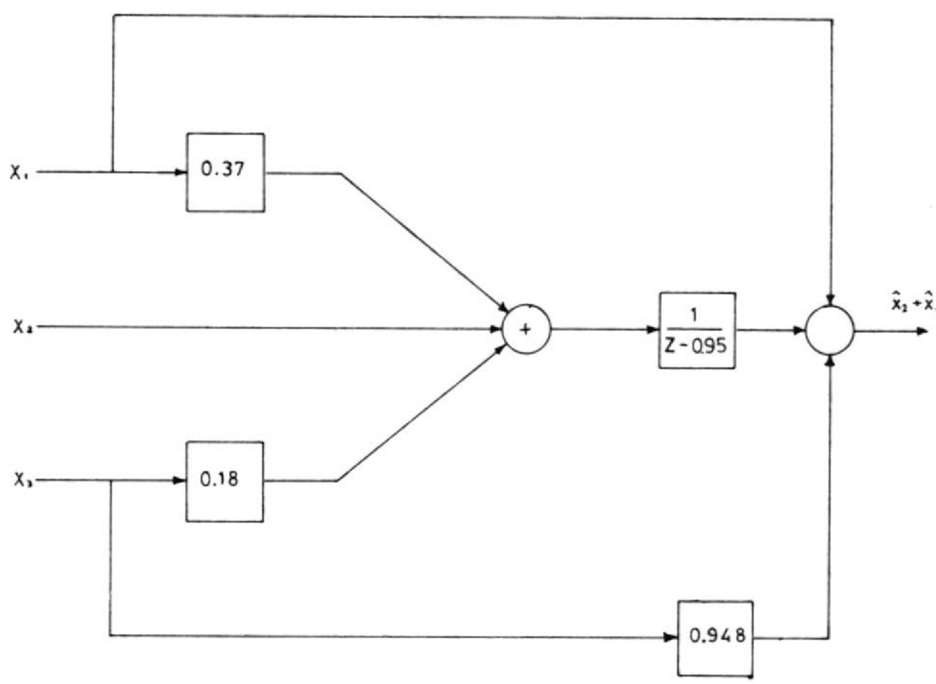


Figura 4.8 Observador de una funcional lineal

Del teorema 1, el observador tiene asociada una matriz T que satisface:

$$T\begin{bmatrix} .367 & .184 & .054 & .011 \\ -.011 & .367 & .239 & .077 \\ -.077 & -.011 & .605 & .393 \\ -.316 & -.066 & -.011 & -.078 \end{bmatrix} - .95T = [g_1 \quad 0 \quad g_3 \quad 0] \qquad (18)$$

Si $T = [t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4]$, haciendo $t_2 = .1$ y $t_4 = .1$ y reemplazàndolos en (18) obtenemos:

$$[t_1 \quad .1 \quad t_3 \quad .1]\begin{bmatrix} 1.0E+00 & 1.0E-02 & 5.1E-05 & 1.7E-07 \\ -1.7E-07 & 1.0E+00 & 1.0E-02 & 5.1E-05 \\ -5.1E-05 & -1.7E-07 & 1.0E+00 & 1.0E-02 \\ -1.0E-02 & -5.1E-05 & -1.7E-07 & 1.0E+00 \end{bmatrix}$$

$$= [g_1 \quad 0 \quad g_3 \quad 0],$$

que puede ser resuelta para cuatro incògnitas t_1, g_1, t_3, g_3

Los <u>observadores no alteran las propiedades</u> de estabilidad del sistema en el que son incluidos, no cambian los valores caracterìsticos de lazo cerrado del sistema, sòlo agregan los suyos como se demuestra a continuaciòn.

Consideremos el sistema descrito por las ecuaciones dinàmicas:

$$x(i + 1) = Ax(i) + Bu(i),$$
$$y(i) = Cx(i) \tag{19}$$

y sea la ley de control:

$$u(i) = Kx(i). \tag{20}$$

Para que fuese posible realizar esta ley de control por medio de las mediciones disponibles, debe cumplirse $K = RC$ para alguna matriz R, de esta manera el sistema de lazo cerrado serìa gobernado por:

$$x(i + 1) = (A + BK)x(i), \tag{21}$$

y de aquì que sus valores caracteristicos deberian ser los valores caracteristicos de $A + BK$.

Si la ley de control no puede ser realizada directamente, debe ser construido un observador de la forma:

$$z(i+1) = Fz(i) + Gy(i) + TBu(i),$$

$$u(i) = Kx(i) = Ez(i) + Dy(i), \tag{22}$$

donde

$$TA - FT = GC,$$

$$K = ET + DC. \tag{23}$$

Para que el par (C, A) sea completamente observable es suficiente que G, E, D, F y T satisfagan (23), con F de valores característicos arbitrarios.

Haciendo $u(i) = Kx(i)$ se obtiene el sistema compuesto

$$\begin{bmatrix} x(i+1) \\ z(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & BE \\ GC + TBDC & F + TBE \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i) \\ z(i) \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Si introducimos $\zeta(i) = z(i) - Tx(i)$ y usamos x y ζ como coordenadas, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x(i+1) \\ \zeta(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & BE \\ \zeta\ \ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i) \\ \zeta(i) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

donde los valores caracteristicos del sistema compuesto son los de $A + BK$ y de F.

Del lema 1, se sigue que si el sistema (19) es completamente observable es posible seleccionar K para colocar arbitrariamente los valores caracteristicos de lazo cerrado.

Si la ley de control no es realizable pero el sistema (19) es completamente observable, puede ser construido un observador de orden no mayor que $n - m$ tal que la ley de control pueda ser estimada; debido a que los valores caracteristicos del observador también son arbitrarios los valores del sistema compuesto (25) pueden ser seleccionados arbitrariamente.

Teorema 4: Para un sistema (19) de orden n, completamente controlable y observable, que tiene m salidas linealmente independientes, puede ser construido un sistema, de realimentaciòn dinàmica, de orden $n - m$ tal que $2n - m$ valores caracteristicos del sistema compuesto (25) tomen valores previamente asignados.

EJEMPLO 4: Se diseña un sistema de control realimentado para el sistema de la figura 4.2, del ejemplo 1, tal que su salida rastree la entrada de una perturbación d.

Para el sistema de la figura 4.2 se diseña la ley de control $u = .97x_1 + x_2$ que coloca los valores característicos en .47; se implementa esta ley con el observador de primer orden construido antes con valor caracteristico en .95, como se muestra en la figura 4.9.

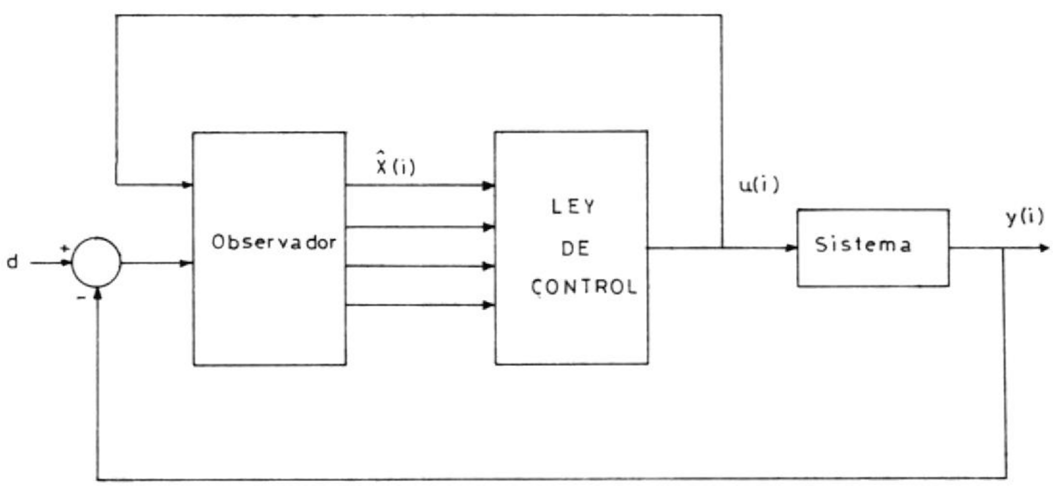


Figura 4.9 Un servomecanismo

La propiedad de un sistema de observar a otro puede ser aplicada en direcciòn contraria para obtener una clase especial de controlador, llamado observador dual. Si en la figura 4.1 el sistema S_2 es controlado por S_1, el sistema S_2 tiende a seguir a S_1 al cual se lo considera como que gobierna las propiedades de S_2.

Supongamos que el sistema definido por las ecuaciones dinàmicas:

$$
\begin{aligned}
x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i), \\
y(i) &= Cx(i), \qquad (26)
\end{aligned}
$$

es excitado por un sistema libre descrito por las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
z(i+1) &= Fz(i), \\
u(i) &= Jz(i), \qquad (27)
\end{aligned}
$$

donde $AP - PF = BJ$ para alguna P.

Del teorema 1, se obtiene que el vector $n = x + Pz$ es gobernado por:

$$n(i + 1) = An(i),$$

y por consiguiente la planta sigue al sistema libre, esta propiedad de seguimiento puede ser usada para definir un sistema de lazo cerrado para la planta.

En lugar de fijar la atenciòn en el hecho de que sòlo ciertas salidas de la planta estàn disponibles, nos concentramos en el hecho de que sòlo ciertas entradas , como son definidas por B, estàn disponibles.

Si la salida $y(i) = Cx(i)$ pudiera ser alimentada al sistema en la forma:

$$x(i + 1) = Ax(i) + Ly(i), \tag{28}$$

los valores caracterìsticos del sistema deberian ser los valores caracterìsticos de $A + LC$.

Por el lema 1, si el sistema es observable, L puede ser selecionada para colocar arbitrariamente los valores caracterìsticos. El observador dual puede ser pensado como suministrando una aproximaciòn para las entradas deseadas.

Construimos el observador dual en la forma:

$$z(i + 1) = Fz(i) + Mw(i),$$

$$w(i) = y(i) + CPz(i),$$

$$u(i) = Jz(i) + Nw(i), \tag{29}$$

donde:

$$AP - PF = BJ,$$

$$L = PM + BN. \tag{30}$$

Las ecuaciones (30) son duales a (23) y tendràn la soluciòn J, M, N y F con F teniendo valores caracterìsticos arbitrarios, si el sistema dado por las ecuaciones dinàmicas (26) es completamente controlable.

El sistema compuesto es:

$$\begin{bmatrix} x(i + 1) \\ z(i + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BNC & BJ + BNCP \\ MC & F + MCP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i) \\ z(i) \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Introduciendo $n = x + Pz$ y usando z y n como coordenadas, conduce al sistema compuesto:

$$\begin{bmatrix} n(i+1) \\ z(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + LC & 0 \\ MC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n(i) \\ z(i) \end{bmatrix}, \tag{32}$$

que es el dual de (25).

Los valores caracterìsticos del sistema compuesto son los valores caracterìsticos de $A + LC$ y de F; de donde establecemos el teorema dual al teorema 4.

Teorema 5: Para el sistema (26) de orden n, completamente controlable y observable, con r entradas linealmente independientes, un sistema realimentado dinàmico de orden $n - r$ puede ser construido tal que los $2n - r$ valores caracterìsticos del sistema compuesto descrito por (32) toman valores previamente asignados.

4.3. Observador para sistemas con disturbios no medibles.

Para estimar el estado de un sistema lineal invariante en el tiempo y de mùltiples variables, usando el observador de Luenberger, se asume que todas las entradas del sistema son medibles.

El procedimiento que se sigue sirve para la construcciòn del estimador de estado de orden mìnimo de sistemas con perturbaciones no medibles; con algunas entradas no medibles, se asume que satisfacen una ecuaciòn en diferencias de coeficientes constantes. Luego , se construye el observador de Luenberger para el sistema aumentado por la ecuaciòn en diferencias que genera las perturbaciones no medibles.

Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del observador de un sistema con perturbaciones no medibles, son derivadas usando una aproximaciòn geométrica que detallaremos a continuaciòn, para la cual consideramos un sistema especificado por

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i),$$
$$y(i) = Cx(i), \tag{33}$$

donde A, B, y C son matrices constantes, el par (A, C) es completamente observable y la matriz C es de rango completo de filas. Bajo una conveniente transformaciòn de coordenadas de estado, las ecuaciones dinàmicas (33) pueden ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} y(i+1) \\ \varsigma(i+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} K_1 & K_2 \\ \hline K_3 & K_4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} y(i) \\ \varsigma(i) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} K_5 \\ \hline K_6 \end{array}\right] u(i),$$

$$y(i) = [I \mid O] \begin{bmatrix} y(i) \\ \varsigma(i) \end{bmatrix},$$

donde $\begin{bmatrix} y \\ \varsigma \end{bmatrix}$ es la nueva variable de estado relacionada a la variable de estado original x mediante la transformaciòn:

$$x(i) = [E \mid F] \begin{bmatrix} y(i) \\ \varsigma(i) \end{bmatrix}.$$

Es posible encontrar observadores de dimensiones menores que las del sistema a ser observado, llamados observadores de orden reducido.

Asumamos que el sistema invariante en el tiempo, a ser observado es el gobernado por las ecuaciones dinàmicas (33), donde la dimensiòn del estado x(i) es n y la dimensiòn de la variable y(i) es dada por l. Como la ecuaciòn observada y(i) = Cx(i) nos proporciona l ecuaciones lineales en el estado desconocido $x(i)$, es necesario reconstruir $n - l$ combinaciones lineales de los componentes del estado.

Asumiendo que C es de rango completo, el vector $p(i)$ de dimensiòn $(n - l)$ es:

$$p(i) = C'x(i), \tag{34}$$

tal que

$$\begin{vmatrix} C \\ C' \end{vmatrix} \neq 0. \tag{35}$$

De

$$y(i) = Cx(i),$$

$$p(i) = C'x(i), \tag{36}$$

se obtiene

$$x(i) = \begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(i) \\ p(i) \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Escribiendo

$$\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}^{-1} = (L_1, L_2), \tag{38}$$

se obtiene

$$x(i) = L_1 y(i) + L_2 p(i). \tag{39}$$

Si reconstruimos p(i) y denotamos el valor reconstruido por $\hat{p}(i)$, el estado reconstruido serà:

$$\hat{x}(i) = L_1 y(i) + L_2 \hat{p}(i) \tag{40}$$

El observador para p(i) se encuentra notando que p(i) obedece a la siguiente ecuaciòn en diferencias.

$$p(i+1) = C'Ax(i) + C'Bu(i), \tag{41}$$

o

$$p(i+1) = C'AL_2 p(i) + C'AL_1 y(i) + C'Bu(i). \tag{42}$$

Diferenciando y(i):

$$y(i+1) = CAx(i) + CBu(i)$$

$$y(i+1) = CAL_2 p(i) + CAL_1 y(i) + CBu(i). \tag{43}$$

De (42) y (43) obtenemos el observador:

$$\begin{aligned}\hat{p}(i+1) = {} & C'AL_2\hat{p}(i) + CAL_1 y(i) + C'Bu(i) + \\ & + K[y(i) - CAL_1 y(i) - CBu(i) - \\ & - CAL_2\hat{p}(i)]\end{aligned} \tag{44}$$

Si el par (A, B) es completamente reconstruible, también el par (CAL_1, CAL_2) es completamente reconstruible tal que seleccionando K todos los polos de (44) pueden ser colocados arbitrariamente.

No se requiere tomar la diferencia de y(i), porque si

$$q(i) = \hat{p}(i) - Ky(i), \tag{45}$$

se observa que:

$$\begin{aligned}q(i+1) = {} & [C'AL_2 - KCAL_2]q(i) + [C'AL_2K + \\ & + C'AL_1 - KCAL_1 - KCAL_2K]y(i) +\end{aligned}$$

$$+ [C'B - KCB]u(i), \tag{46}$$

siendo el estado reconstruido de la forma:

$$\hat{x}(i) = L_2q(i) + (L_1 + L_2K)y(i). \tag{47}$$

Las dos ùltimas ecuaciones constituyen un observador de la forma:

$$q(i + 1) = Fq(i) + Gy(i) + Hu(i),$$

$$\hat{z}(i) = Kq(i) + Ly(i) + Mu(i). \tag{48}$$

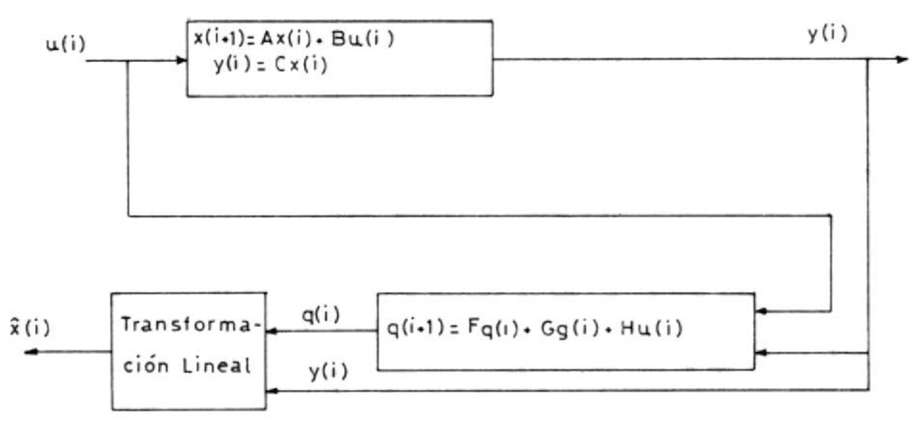


Figura 4.10 Observador de Luenberger

El camino directo de la variable observada y(i) al estado reconstruido x(i), hace que el estimado $\hat{x}(i)$ sea màs sensible a la mediciòn de errores en y(i) que el estimado generado por un observador de orden completo.

Reescribiendo las ecuaciones (46) y (47), obtenemos:

$$q(i+1) = (K_4 - KK_2)q(i) + (K_4K + K_3 - KK_1 - KK_2K)y(i) + (K_6 - KK_5)u(i)$$

$$\hat{x}(i) = Fq(i) + (E + FK)y(i) \tag{49}$$

Para que el error entre el estado x(i) del sistema y el estimado $\hat{x}(i)$ tienda asintòticamente a cero, tenemos que escoger K tal que la matriz $(K_4 - KK_2)$ en (49) sea estable, es decir, que los valores caracteristicos, del determinante igualado a cero, sean estrictamente menores que uno.

Suponemos que la entrada u_1 no es medible, luego tratamos de encontrar una matriz K que también haga que la primera columna de la matriz $(K_6 - KK_5)$ sea cero. Si tal matriz K existe, podemos construir un observador tipo Luenberger con una entrada no medible u_1.

EJEMPLO 5: Consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo, especificado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \\ x_3(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .52 & .38 & .00 \\ -.38 & .90 & .00 \\ .09 & -.38 & .61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -.38 \\ .10 \\ -.02 \end{bmatrix} u(i)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(i) \\ y_2(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .001 & .00 & .00 \\ .00 & .00 & .001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix}.$$

El problema consiste en estimar el estado $x(i)$ del sistema sin mediciòn de la entrada $u(i)$, donde el observador se construye como sigue:

$$q(i+1) = k_2 q(i) + [-1,\ k_2 + k_2^2] \begin{bmatrix} y_1(i) \\ y_2(i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .001 & .000 \\ .000 & k_2 \\ .000 & .001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(i) \\ y_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} .000 \\ .001 \\ .000 \end{bmatrix} q(i)$$

En la construcciòn anterior, hemos establecido $K = [0, k_2]$, esta selecciòn de K hace al observador independiente de u(i), el observador puede asumir cualquier polo estable escogiendo un apropiado k_2.

CAPITULO V

"OBSERVADORES DEL TIPO ESTIMADOR ESTOCASTICO."

Este capitulo es dedicado bàsicamente a sistemas con entradas estocàsticas y/o mediciones contaminadas con ruido. Las entradas estocàsticas sòlo pueden ser definidas estadìsticamente; si es conocido su pasado o presente, la futura señal sòlo puede ser discutida probabilìsticamente.

5.1. Introducciòn a la Estimaciòn Estocàstica.

Cuando el sistema es lineal con perturbaciones gaussianas aditivas y se emplea una funcional cuadràtica objetiva, el control realimentado estocàstico òptimo puede ser calculado exactamente.

El sistema de ecuaciones de estado es dado por:

$$x(i + 1) = Fx(i) + Eu(i) + Dw(i), \tag{1}$$

donde x tiene n componentes, u tiene m componentes y el vector gaussiano puramente aleatorio w tiene q componentes, donde la matriz de covarianza (q x q) es

$$Q(i) = E\{w(i)w(i)'\}. \tag{2}$$

La notaciòn para un valor esperado condicional, sea y dado z es escrito E(y/z). La informaciòn sobre el sistema es obtenida por medio de mediciones con ruido

$$y(i) = Hx(i) + v(i), \tag{3}$$

donde v(i) es un vector gaussiano puramente aleatorio de l componentes, con matriz de covarianza

$$R(i) = E\{v(i)v(i)'\}, \tag{4}$$

y H es una matriz (l x n) de rango l.

El valor esperado de x(j), dadas las mediciones y(0), y(1), ..., y(j), es denotado por:

$$x(j) = E\{x(j)/y(0),\ y(1),\ \ldots,\ y(j)\},$$

que se puede escribir como:

$$\hat{x}(j) = E(x(j)/y^j). \tag{5}$$

En el caso de entradas gaussianas y mediciòn con ruido, el mejor estimador de varianza mìnima para un sistema lineal, también es lineal. El Filtro de Kalman conduce al estimado $\hat{x}(i)$ de varianza mìnima igual a la esperanza condicional dada en (5).

Dadas las mediciones y^i deseamos formular una polìtica para generar $u(i)$ tal que el valor esperado de:

$$\frac{1}{2}x(N)'G(N)x(N) + \frac{1}{2}\sum_{i=j}^{n}[x(i)'Ax(i) + u(i)'Bu(i)] \tag{6}$$

sea minimizado. Empleando variables de estado extras y usando transformaciones se reduce el criterio cuadràtico a la forma (6), donde G, A y B son positivas semidefinidas y al menos una es positiva definida.

Aunque $x(i)$ es afectado por entradas estocàsticas en (1), tomando el valor esperado de la funciòn de costo (6) reducimos el problema a uno de minimizaciòn de una funciòn determinìstica.

Cuando los paràmetros del proceso tienen fluctuaciones es deseable actualizarlos en linea. Si los paràmetros varian aleatoriamente se los puede representar por

$$a_i(i + 1) = a_i(i) + w_i(i)$$

o

$$a_i(i + 1) = ba_i(i) + w_i(i), \qquad |b| < 1$$

donde $w_i(i)$ es una secuencia de nùmeros aleatorios con media de valor cero.

Los procesos aleatorios corresponden a paràmetros que cambian aleatoriamente hacia arriba y hacia abajo cada instante discreto de tiempo, $a_i(i)$ no tiene valor medio pero fluctùa. Los procesos aleatorios corresponden a procesos con coeficiente de correlaciòn b entre $a(i)$ y $a(i + 1)$, siendo la media de valor cero.

Aplicando programaciòn lineal al problema lineal de control cuadràtico, asumimos que la funciòn de costo òptimo es dada por:

$$V(x(i)) = E[\frac{1}{2}x(i)'G(i)x(i)/y^i] + \frac{1}{2}a(i), \tag{7}$$

sustituyendo (7) en la relaciòn de recurrencia de programaciòn lineal:

$$2V(x(i)) = \min_{u(i)} E\{x(i)'Ax(i) + u(i)'Bu(i) + E[x(i + 1)'G(i + 1)x(i + 1)/y^{i+1}] + a(i + 1)/y^i\}, \tag{8}$$

de la definiciòn de media condicional se sigue que:

$$E\{E[x(i + 1)'G(i + 1)x(i + 1)/y^{i+1}]y^i\} = E[x(i + 1)'G(i + 1)x(i + 1)/y^i], \tag{9}$$

sustituyendo (9) en (8) y eliminando x(i + 1) por medio de (4) se llega finalmente a:

$$2V(x(i)) = \min_{u(i)} E\{x(i)'Ax(i) + u(i)'Bu(i) + a(i + 1). [Fx(i) + Eu(i) + Dw(i)]'G(i + 1)[Fx(i) + Eu(i) + Dw(i)]/y^i\}, \tag{10}$$

debido a que $x(i)$ y $u(i)$ son independientes de $w(i)$, al tomar el valor esperado, términos como $w(i)'(.).$ $.x(i)$ y $w(i)'(.)u(i)$ se hacen cero.

Sustituyendo (7) en el lado izquierdo de (10)

$$E[x(i)'G(i)x(i)/y^i] + a(i) = \min_{u(i)} E\{x(i)'Ax(i) + u(i)'Bu(i) + [Fx(i) + Eu(i)]'G(i + 1)[Fx(i) + Eu(i)]y^i + E[w(i)'D'G(i + 1)Dw(i)] + a(i + 1)\}. \tag{11}$$

El problema de minimizaciòn en la ecuaciòn (11) es del mismo tipo que el correspondiente al problema de control deterministico. En consecuencia puede obtenerse el vector minimizante $u(i)$ inmediatamente como sigue

$$u(i) = -K(i)'FE[x(i)/y^i] = - K(i)'Fx(i), \tag{12}$$

donde

$$K(i) = G(i + 1)E[B + E'G(i + 1)E]^{-1}.$$

Sustituyendo (12) en (11), y reordenando:

$$E\{x(i)'[A - G(i) + F'G(i + 1)F]x(i)/y^i\} + a(i + 1) - a(i) + E\{w(i)'C'G(i + 1)Dw(i)\} - x(i)'F'K(i)E'G(i + 1)Fx(i) = 0. \quad (13)$$

Poniendo

$$x(i) = \hat{x}(i) + e(i),$$

donde e(i) es el error en derivar el estimado (5) del Filtro de Kalman; debido a que es un estimador insesgado $E(e(i)/y^i) = 0$. Si T(i) es una matriz (n x n), se obtiene

$$E[x(i)'T(i)x(i)/y^i] = \hat{x}(i)'T(i)x(i) + E[e(i)'T(i).e(i)/y^i]. \quad (14)$$

El ùltimo término puede ser escrito $E\{e(i)'T(i)e(i)\}$, porque es una combinaciòn lineal de términos de la matriz de covarianza del error del estimador de Kalman, que igual que G, puede ser calculada independientemente de las mediciones y de la variable de control u(i).

Por medio de (14) la ecuaciòn (12) puede ser escrita como

$$x(i)'[A - G(i) + F'\Phi(i)F]x(i) + a(i + 1) - a(i) +$$
$$+ E\{w(i)'D'G(i + 1)Dw(i)\} + E\{e(i)'T(i)e(i)\} = 0, \tag{15}$$

donde

$$\Phi(i) = G(i + 1) - K(i)E'G(i + 1),$$

siendo

$$T(i) = A - G(i) + F'G(i + 1)F.$$

La funciòn de costo òptimo (7) es correcta si la matriz covarianza de los errores del nuevo estimado $x(i)$ es

$$G(i) = F'\Phi(i)F + A,$$

y

$$a(i + 1) = a(i) + E\{w(i)'D'Dw(i)\} + E\{e(i)'T(i)e(i)\},$$

de donde se obtiene:

El <u>teorema de separaciòn</u>, el control òptimo estocàstico es dado como un algoritmo de realimentaciòn, los coeficientes de realimentaciòn son calculados en la misma manera que para el problema de control deterministico pero actùan sobre espectaciones condicionales de los estados derivados del estimador de Kalman. Para sistemas lineales, con costo funcional cuadràtico y entradas gaussianas aditivas permite la simplificaciòn de los problemas de estimaciòn y control.

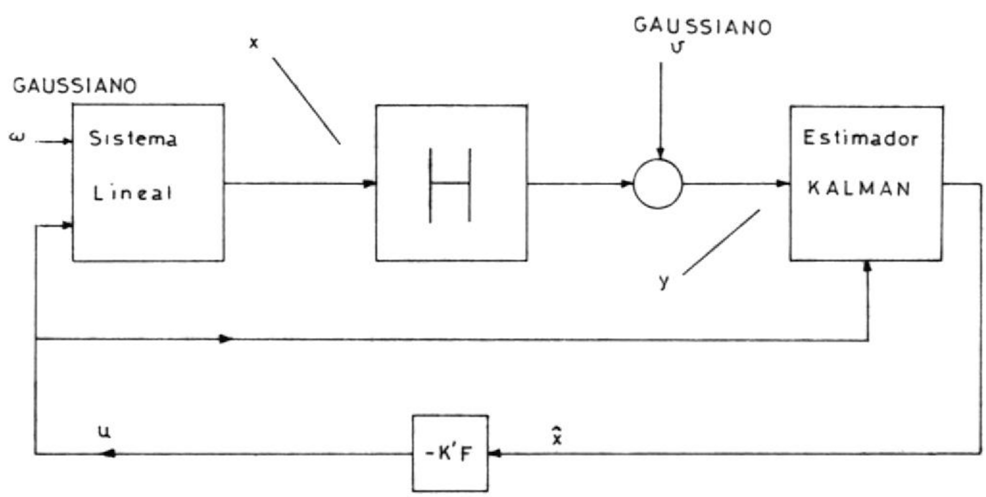


Figura 5.1 Control estocàstico realimentado

5.2. Ganancias òptimas del Observador Estocàstico.

El diseño de un observador estocàstico òptimo de orden reducido ha sido basado en la soluciòn de una ecuaciòn de covarianza de orden completo que restringe los beneficios del estimador de orden reducido. Es mostrado que la ganancia del observador de orden reducido puede ser obtenida resolviendo una ecuaciòn de covarianza de orden reducido.

El diseño del observador ha sido basado en la selecciòn de ganancias que minimicen la traza de la ecuaciòn de covarianza de estimaciòn del error, que tiene el mismo orden del sistema, se hace uso de la técnica de particiòn de matrices para derivar una ecuaciòn de orden reducido.

La selecciòn de las ganancias del observador es basada en la minimizaciòn de la traza de la ecuaciòn de covarianza de orden reducido que hace a este resultado computacionalmente superior a la formulaciòn existente.

5.2.1. Sistemas y observadores dinàmicos.

Consideremos el sistema de segundo orden descrito por

$$x(i + 1) = Fx(i) + Gw(i) \qquad w \sim N(0, Q). \tag{16}$$

Las mediciones (z), son asumidas parcialmente estocàsticas (z_1) y parcialmente deterministicas (z_2),

$$z(i) = \begin{bmatrix} z_1 \\ -- \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ -- \\ H_2 \end{bmatrix} x(i) + \begin{bmatrix} v_1 \\ -- \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 \sim N(0, R_1) \tag{17}$$

z_1: vector m_1, z_2: vector m_2;

$m_2 = n - m_1$.

La ecuaciòn en diferencias que describe al observador de estado $\hat{e}$ de orden $(n - m_2)$ es

$$\hat{e}(i + 1) = TFA\hat{e}(i) + TFB_2 z_2(i) + TGw(i), \tag{18}$$

donde

$$e(i) = Tx(i), \tag{19}$$

y T es escogida tal que:

$$\begin{bmatrix} T \\ -- \\ H_2 \end{bmatrix}^{-1} = [A \mid B_2], \tag{20}$$

el observador estocàstico toma la forma:

$$\hat{e}(i+1) = TFA\hat{e}(i) + TFB_2 z_2(i) + TB_1 .$$
$$.(z_1(i) - H_1 x_1(i)) \tag{21}$$

$$x(i) = A\hat{e}(i) + B_2 z_2(i) \tag{22}$$

La ganancia TB_1 es incorporada procesando las mediciones de ruido z_1. En ausencia de mediciones de ruido z_1, la ecuaciòn del observador estocàstico (21) se reduce a la ecuaciòn del observador deterministico de orden $(n - m_2)$, y en ausencia de mediciones libres de ruido z_2 la estructura es idéntica a la del filtro de Kalman de orden n.

5.2.2. Ecuaciones de covarianza del error.

Definamos el error de la estimaciòn del observador $\tilde{e}$ como $(\hat{e} - e)$, luego:

$$\tilde{e}(i + 1) = (TFA - TB_1H_1A)\tilde{e}(i) + TB_1v_1(i) - TGw(i). \qquad (23)$$

Definamos a la matriz covarianza del error del observador Ω como $E[ee']$, luego:

$$\Omega(i + 1) = (TFA - TB_1H_1A)\ (i) + (TFA - TB_1H_1A)' + TB_1R_1B_1T' + TGQG'T', \qquad (24)$$

donde las ganancias B_1, A y T son escogidas tal que $tr(\Omega(i + 1))$ sea minimizada y minimice las ganancias.

5.2.3. Ganancias òptimas.

Las ganancias fueron calculadas minimizando la traza de $P(i + 1)$ donde $P(i)$ es la matriz covarianza del error $(n \times n)$ del vector $x(i)$

Usamos particiòn de matrices para la minimización de la ecuaciòn de covarianza del error $(n - m_2) \times (n - m_2)$.

$$G_2 = [H_{21} \mid H_{22}] \tag{25}$$

La $tr(\Omega(i + 1))$ puede ser minimizada con respecto a (TB_1), en base a que B_1 està ya determinada, conduciendo a:

$$(TB_1)^{opt} = \Omega(i) A' H'_1 R_1^{-1}, \tag{26}$$

donde H_{22} es una matriz de rango completo $m_2 \times m_2$; luego, una posible selecciòn de A, T y B_2 es:

$$A = \begin{bmatrix} I_{(n - m2)} \\ \hline H_{22}^{-1} H_{21} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ \hline H_{22}^{-1}(I - H_{21} B_{21}) \end{bmatrix}$$

$$T = [I - B_{21} H_{21} \mid -B_{21} H_{22}] \tag{27}$$

Resolviendo para B_{21}, las ganancias A, B_2 y T pueden ser fàcilmente obtenidas minimizando la traza $tr(\Omega(i + 1))$ con respecto a B_{21} y sustituyendo (26) y (27) en (24), lo cual conduce a

$$(B_{21})^{opt}. = \{\Omega(i)A'F'H'_2 + \Omega(i)A'H'_2(i + 1) + \\ + [I \mid 0]GQG'H'_2\}[H_2GQG'H'_2]^{-1}. \tag{28}$$

Estas ganancias $(TB_1)^{opt}$ y $(B_{21})^{opt}$ especifican al observador estocàstico òptimo.

Las ganancias del observador estocàstico fueron obtenidas usando una ecuaciòn de covarianza n x n. Se obtienen ganancias equivalentes usando una ecuaciòn de covarianza de orden reducido; se obtienen mayores beneficios de un estimador de orden reducido por que calculan matrices de orden reducido.

CAPITULO VI

"DISEÑO DE UN SERVOMECANISMO DC (2º ORDEN)."

Sòlo una minoria de los estados son usualmente medidos y tenemos que reconstruir los estados no medidos para aplicar la teoria de control òptimo. Hay dos casos:

i. Alguna mediciòn o mediciones de los estados pueden ser asumidas libres de errores y todas las entradas del sistema a ser medido aùn cuando pueden ser entradas con perturbaciones aleatorias.

ii. Todas las mediciones son miradas como sujetas a errores aleatorios y hay al menos una (medida o no) entrada estocàstica al sistema.

Las variables de control son tratadas en àmbos casos como entradas perfectamente medibles.

El caso (i) es bastante comùn y serà considerado después, basado en los resultados de Luenberger para sistemas continuos.

El caso (ii) es apropiado para el filtro de Kalman que serà tratado primero, en àmbos casos con respecto al control y estimaciòn de paràmetros. Finalmente, consideraremos al observador tipo estimador estocàstico.

6.1. Introducciòn.

La soluciòn al problema de diseño del regulador òptimo con variables de estado realimentadas, depende claramente de la disponibilidad de todos los estados del sistema lineal ya sea por directa mediciòn o de algùn tipo de esquema de reconstrucciòn de estado.

Kalman y Bucy han mostrado que con mediciones de las entradas y salidas en presencia de ruido, es posible la reconstrucciòn de los estados con tal de que el ruido entre las mediciones de la entrada y la salida no esté correlacionado.

Luenberger ha mostrado que es posible la reconstrucciòn de estado cuando tenemos mediciones libres de ruido (no estàtico) de las entradas y salidas del sistema.

El desempeño de cualquiera de estos estimadores se degrada cuando hay una combinaciòn de mediciones de entradas y salidas con y sin ruidos. Por consiguiente , el propòsito es examinar métodos recientes para resolver este problema con el ahora denominado Observador Estocàstico.

Son hechas comparaciones entre el funcionamiento del Estimador Estocàstico, el Filtro de Kalman y el Observador de Luenberger cuando hay una combinaciòn de mediciones de las entradas y salidas con y sin ruido.

Se considera un ejemplo realistico de un sistema lineal, discreto e invariante en el tiempo con resultados gràficos y numéricos.

6.2. Descripciòn del sistema.

Consideremos el sistema lineal discreto, e invariante en el tiempo de la forma:

$$x(i + 1) = Fx(i) + Eu(i) + Dw(i), \qquad (1)$$

con mediciones:

$$z(i) = Hx(i) + v(i), \qquad (2)$$

donde:

$x(i)$ es un vector de estado $(n \times 1)$.

$u(i)$ es un vector de entrada $(m \times 1)$.

$w(i)$ es un vector $(m \times 1)$ del ruido del proceso.

$z(i)$ es un vector de mediciòn $(r \times 1)$.

$v(i)$ es un vector $(r \times 1)$ de ruido de mediciòn.

F es una matriz $(n \times n)$.

E es una matriz $(n \times m)$.

D es una matriz $(m \times m)$.

H es una matriz de observaciòn $(r \times n)$.

Si el ruido del proceso $w(i)$ y el ruido de mediciòn $v(i)$ son vectores aleatorios no correlacionados con el vector de entrada $u(i)$ y con el vector de estado $x(i)$, se tiene que las covarianzas son dadas por:

$$\begin{aligned} cov[w(j)w(i)] &= Q(i) \text{ para todo } j = i. \\ &= 0 \quad \text{ para } j <> i \end{aligned}$$

$$cov[v(j)v(i)] = R(i) \text{ para todo } j = i.$$

$$= 0 \quad \text{para } j <> i.$$

$$\mathrm{cov}[w(j)v(i)] = 0 \quad \text{para todo } j,i.$$

$$\mathrm{cov}[x(j)w(i)] = 0 \quad \text{para todo } j,i. \tag{3}$$

El problema que deseamos considerar es: dadas las mediciones de la entrada y salida, $u(i)$ y $z(i)$ respectivamente, encontrar estimados de los estados cuando hay una combinaciòn de señales de entrada y salida con y sin ruido.

El método del Filtro de Kalman, para el sistema descrito por (1) y (2), resulta en un estimador de estados que tiene la siguiente forma:

$$\hat{x}(i+1) = F\hat{x}(i) + Eu(i) + K(i+1)[z(i) - H(F\hat{x}(i) + Eu(i))], \tag{4}$$

donde la matriz de ganancia del filtro de Kalman es:

$$K(i) = P(i)H'R^{-1}(i). \tag{5}$$

Esta ùltima ecuaciòn muestra que en el caso de ausencia de ruido de mediciones ($R = 0$) no seriamos capaces de invertir la matriz de covarianza de la mediciòn. De aquì que una soluciòn para la ecuaciòn del estimador de estados (4) no es obtenible (no existe). Por esto debemos exponer, que para usar el convencional filtro de Kalman como nuestro método reconstrucciòn de estado debemos asegurar siempre que R sea definida positiva (inversible).

Para el caso especial de ruido teñido es obtenida una mediciòn y(i + 1), en base a la diferenciaciòn indeseable de las mediciones y(i), para obtener una matriz R no singular para un problema equivalente, cuando también hemos introducido un vector de estado aumentado.

Aunque hay caminos para evitar la diferenciaciòn de las mediciones, tendremos el problema de no ser capaces de determinar las condiciones iniciales en el filtro de Kalman debido a que son directamente dependientes de la mediciòn inicial, del vector de estado y de la matriz de covarianza.

En la presente implementaciòn del filtro de Kalman deben ser hechas consideraciones con el fin de prevenir el problema de divergencia (debido al error de la modelaciòn). Por ello una soluciòn interesante para este problema es la adiciòn de un proceso de ruido ficticio al modelo del sistema. LLevando esta soluciòn en mente, se podrìa postular que si realmente buscamos implementar el filtro de Kalman cuando las mediciones incluyen algunas señales libres de ruido, luego todo lo que hemos tenido que hacer es introducir algunas mediciones de ruido ficticias, para las mediciones libres de ruido. El ùnico problema con este método (del cual està consciente el autor) es la selecciòn del nivel apropiado de ruido ficticio requerido para asegurar que R no sea singular.

El método del Observador de Luenberger, supone que tenemos un sistema descrito por las ecuaciones (1) y (2) con la diferencia de que nuestras mediciones ahora son relativamente libres de ruido. La forma del estimador (de orden completo) podrìa ser:

$$\hat{x}(i + 1) = (F + MH)\hat{x}(i) + Gu(i) + Mz(i).$$

Por supuesto un ahorro inmediato de camino al método detérministico es aquel que podrìamos ahorrar nosotros mismos, el costo de un transductor barato, usando un observador de Luenberger de orden reducido. Hemos determinado que la ecuaciòn en diferencias que describe al vector de estado de orden reducido $\zeta(i)$ es:

$$\zeta(i + 1) = TFA\,\zeta(i) + TFBz(i) + TEu(i), \tag{6}$$

donde

$$\zeta(i) = Tx(i), \tag{7}$$

y T son escogidos tal que:

$$\begin{bmatrix} T \\ - \\ H \end{bmatrix}^{-1} \triangleq [A \mid B] \tag{8}$$

Luego, el observador toma la forma:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(i + 1) &= TFA\,\hat{\zeta}(i) + TFBz(i) + TGu(i), \\ \hat{x}(i) &= A\,\hat{\zeta}(i) + Bz(i), \end{aligned} \tag{9}$$

cuando el error del observador es dado por:

$$\tilde{x}(i + 1) = (F - BHI)\tilde{x}(i). \tag{10}$$

Si consideramos un sistema descrito por (1) y (2) cuando hemos omitido convenientemente los vectores de ruido, tenemos:

$$x(i + 1) = Fx(i) + Eu(i), \tag{11}$$

con mediciones:

$$z(i) = Hx(i). \tag{12}$$

Podemos especificar arbitrariamente los valores caracteristicos de este observador de primer orden tal que $\hat{x}(i)$ se aproxime ràpidamente a $x(i)$. Si consideramos ruido en la mediciòn podemos verificar que la selecciòn del valor propio no es solo dependiente de la razòn a la cual deseamos que $\hat{x}(i)$ se aproxime a $x(i)$, sino también del nivel de ruido presente en las mediciones. Pero el observador de orden reducido es aùn màs susceptible al problema de ruido que un observador de orden completo, lo cual indica que no es un observador òptimo en presencia de ruido.

El método del Observador Estocàstico, trata de incorporar las ventajas de los dos estimadores vistos anteriormente, en un estimador que esperanzadamente podria ser mejor que cualquiera de ellos.

Es posible usar un observador de Luenberger para estimar el estado de un sistema estocàstico, como ya hemos considerado, descrito y derivado antes tal estructura como un estimador; los detalles de tal estimador ya están bien presentados tal que no son repetidos aquì. Los resultados obtenidos nos muestran que para un sistema descrito por:

$$x(i+1) = Fx(i) + Eu(i) + Dw(i), \tag{13}$$

y una combinaciòn de mediciones deterministicas y estocàsticas:

$$z(i) = \begin{bmatrix} z_1(i) \\ z_2(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ \hline H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(i) \\ \hline 0 \end{bmatrix},$$

$$v_1 \sim N(0, r_{11}). \tag{14}$$

El observador de estado de orden reducido es:

$$\hat{\zeta}(i+1) = (TFA)\hat{\zeta}(i) + (TFB_2)z_2(i) + (TD)w(i) \tag{15}$$

donde

$$\zeta(i) = Tx(i) \tag{16}$$

y T es escogida tal que $\begin{bmatrix} T \\ -- \\ H_2 \end{bmatrix}$ sea una matriz no singu-gular, y definimos:

$$\begin{bmatrix} T \\ -- \\ H_2 \end{bmatrix}^{-1} = [A \mid B_2]$$

luego el observador tiene la forma:

$$\hat{\zeta}(i + 1) = TFA\hat{\zeta}(i) + TB_2z_2(i) + TB_1(z_1(i) - \\ - H_1x(i)), \tag{17}$$

$$\hat{x}(i) = A\hat{\zeta}(i) + Bz_2(i), \tag{18}$$

donde el error del observador es dado por:

$$\tilde{x}(i + 1) = (F - B_2H_2F - B_1H_1)\tilde{x}(i) + B_1v(i) - \\ - (I - B_2H_2)Dw(i). \tag{19}$$

Las ganancias òptimas $(B_1)^{opt}$ y $(B_2)^{opt}$ son obtenidas por minimizaciòn de la media cuadràtica del error de la estimaciòn. En otras palabras, escogemos B_1, B_2, T y A tal que $tr(P(i+1))$ sea minimizada, donde la matriz P de covarianza del error satisface la ecuaciòn en diferencias:

$$P(i+1) = (F - B_2H_2F - B_1H_1)P(i) + P(i)(F - B_2H_2F - B_1H_1)' + B_1R_1(i)B_2 + (I - B_2H_2)Q(i)(I - B_2H_2)'. \tag{20}$$

Luego las ganancias òptimas son:

$$(B_1)^{opt} = P(i)H'_1R^{-1}_1(i)$$
$$(B_2)^{opt} = [P(i)F'H'_2 + Q(i)H'_2][H_2Q(i)H'_2]^{-1} \tag{21}$$

Claramente, se nota ya el ahorro de usar el estimador estocàstico sobre el observador de Luenberger o aùn sobre el filtro de Kalman. Aùn tenemos que agregar la covarianza n x n del error del observador, que es del mismo orden que el de la covarianza del error del filtro de Kalman. Sin embargo conseguimos un estimador estocàstico de orden reducido.

Las ganancias òptimas $(B_1)^{opt}$ y $(B_2)^{opt}$ pueden ser obtenidas por la minimizaciòn de la traza de la ecuaciòn de la covarianza del error de orden reducido, las ganancias òptimas llegan a ser:

$$(TB_1)^{opt} = P(i)A'H'_1R_1^{-1}(i)$$

$$(B_2)^{opt} = [P(i)A'F'H'_2 + [I \mid 0]Q(i)H'_2][H_2Q(i)H'_2]^{-1}. \tag{22}$$

Las ecuaciones (22) representan los resultados de usar un estimador de orden reducido obtenido de la soluciòn de la ecuaciòn de covarianza del error, de orden reducido; asì tenemos verdaderos indicadores de las ventajas, sobre todo en la implementaciòn del observador Estocàstico. Asì tenemos un observador que supuestamente cuida de una combinaciòn de mediciones libres de ruido y de ruido correlacionado.

Notamos que cuando no hay proceso de ruido, el tèrmino $H_2Q(i)H'_2$ de (20) y (21) no es inversible, tuvimos este problema antes con la matriz $R(i)$ para el filtro de Kalman. En este caso, podrìamos escoger sòlo la ganancia B_{21} tal que obtengamos la propiedad deseada de convergencia del error. Es claro que con el propòsito de implementar este observador tenemos el mismo problema que tuvimos antes con el filtro de Kalman, es decir, los estimados iniciales dependen de la mediciòn inicial de z_2 y no puede ser determinada a priori.

Finalmente, notamos que la estructura del estimador Estocàstico es arreglada como tal, en ausencia de algùn ruido relativo el estimador tendrà la estructura de un observador de Luenberger y en la presencia de ruido, v.gr.: todas las mediciones contaminadas, el estimador estocàstico tendrà la estructura de un filtro de Kalman convencional.

6.3. Diseño, anàlisis y simulaciòn digital.

Consideremos un motor de cd controlado por la armadura que utiliza una corriente de campo constante, mostrado en la figura 6.1:

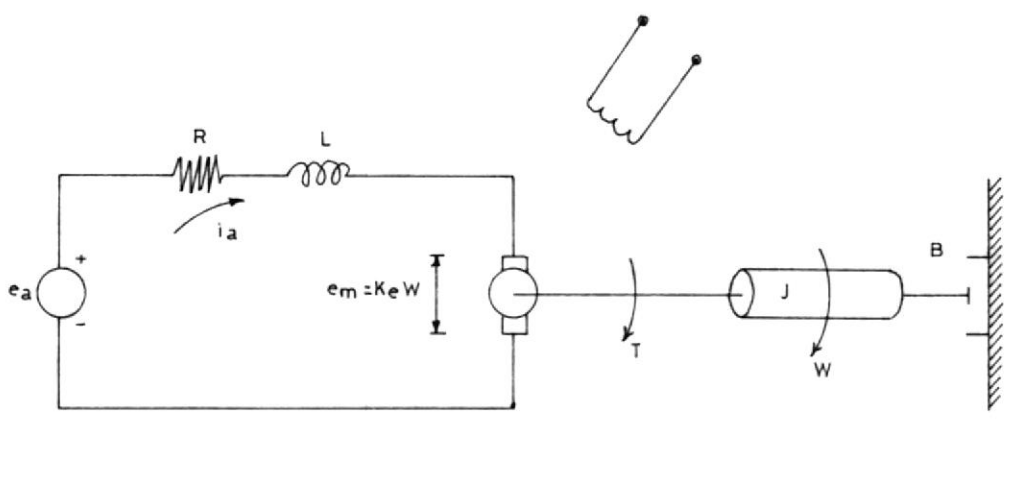


Figura 6.1 Servomecanismo dc controlado por armadura

donde:

$e_a = 1$ volt, $t \geq 0$.

$K_b = .199$ volt/rad/seg.

$K_T = 26.9$ oz-in/amp.

$L = 2.1$ mhenrys.

$R = .43$ ohmios.

$f = .07$ in-oz/rad/seg.

$J = .1$ oz-in-seg ^{2}.

De la figura 6.1 obtenemos las ecuaciones del motor:

$$T(t) = K_T i_a(t), \quad e_b(t) = K_b w(t)$$

y las ecuaciones diferenciales:

$$e_a = i_a R + L\mathring{i}_a(t) + K_b w(t),$$

$$J\mathring{w}(t) = T(t) - fw(t) = K_T i_a(t) - fw(t),$$

(23)

y el diagrama de bloques mostrado en la figura (6.2):

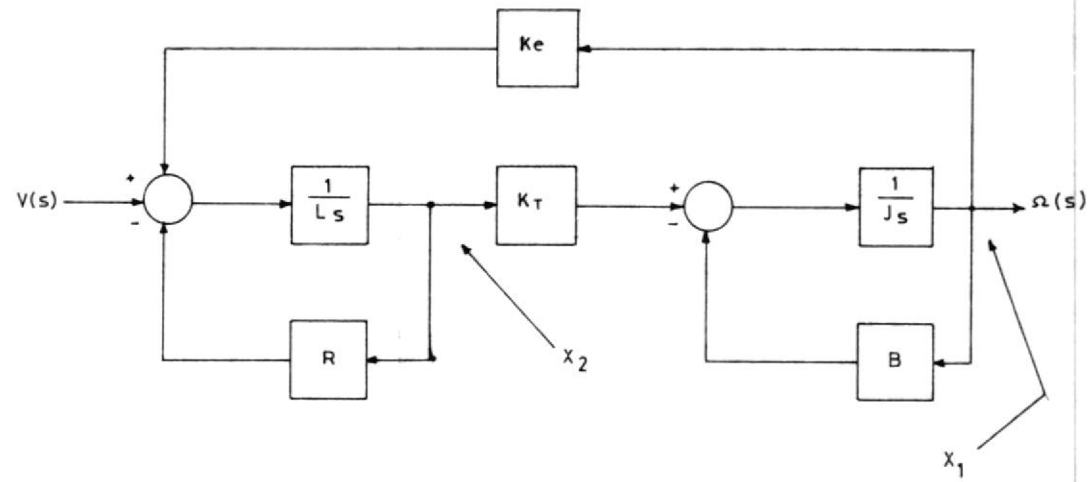


Figura 6.2 Diagrama de bloques del servomecanismo dc de segundo orden

Ordenando las ecuaciones (23) obtenemos:

$$L\mathring{i}_a(t) + Ri_a(t) + K_e w(t) = e_a,$$

$$J\mathring{w}(t) + fw(t) = K_T i_a(t).$$

(24)

Reordenando las ecuaciones (24) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathring{w}(t) \\ \mathring{i}_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -fJ^{-1} & K_T J^{-1} \\ -K_e L^{-1} & -RL^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L^{-1} \end{bmatrix} e_a \tag{25}$$

De las ecuaciones (24) se obtiene:

$$\left[\frac{LJ}{K_T}\right]\overset{\circ\circ}{w}(t) + \left[\frac{Lf + RJ}{K_T}\right]\mathring{w}(t) + \left[\frac{Rf}{K_T} + K_e\right]w(t) = e_a, \tag{26}$$

Reemplazando valores en (26) obtenemos:

$$.00021\overset{\circ\circ}{w}(t) + .04315\mathring{w}(t) + 5.3832w(t) = 26.9, \tag{27}$$

donde

$\zeta = .642$, $w_d = 122.8$, $w_n = 160.1$, $d = 26.9$ y $t = .0097$.

Finalmente, resolviendo (27) obtenemos:

$$w(t) = 5[1.3038EXP(-0.1027t)SIN(0.1228t + 4.016) + 1] \quad [rad/mseg], \tag{28}$$

donde

$w_{ss} = 5$, $t_p = .0255$, $w_p = 107.9$, $t_d = .0091$

$t_r|_{100\%} = .0185$, $t_s|_{5\%} = .0292$ y $t_s|_{2\%} = .0362$.

Reemplazando (28) en (23) obtenemos:

$$i_a(t) = 13.011[1.3038EXP(-.1027t)SIN(.1228t + 4.016) + 1] + 18.587\{EXP(-.1027t)[.1228COS(.1228t + 4.016) - .1339SIN(.1228t + 4.016)] + 1\} \quad [mA/mseg]. \tag{29}$$

Con el objeto de escribir (25) en términos de las variables de estado, definamos un conjunto de variables de estado como (x_1, x_2) donde $x_1(t) = w(t)$ y $x_2(t) = i_a(t)$. Asi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -fJ^{-1} & K_TJ^{-1} \\ -K_bL^{-1} & -RL^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L^{-1} \end{bmatrix} e_a. \tag{30}$$

Reemplazando valores en (30) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .7 & 269 \\ -94.76 & -204.76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 476.19 \end{bmatrix} u(t), \tag{31}$$

con ecuaciòn de salida:

$$y(t) = [0 \ \ 1]\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

con valores propios complejos conjugados $-102.381 \pm j\, 121.925$.

Ahora debemos escoger un intervalo de tiempo suficientemente pequeño T para el muestreo de tal forma que sea razonablemente exacta la aproximaciòn de la discretizaciòn de (31). Debe escogerse un intervalo adecuado T de tal forma que sea estable la soluciòn, el valor de T deberia ser igual a un décimo de la constante de tiempo màs pequeña del sistema. Cuando obtuvimos (27) determinamos que la constante de tiempo màs pequeña del sistema es τ = .0097 seg de donde T $\cong$ .001 seg, tal que cualquier elemento de (31) sea menor o igual que T^{-1}.

Si discretizamos (31) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .98817 & .23709 \\ -.08533 & .80317 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} .05977 \\ .42863 \end{bmatrix} u(i),$$

(32)

con ecuaciòn de salida:

$$y(i) = [0 \ 1]\begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix}$$

Como (32) y su salida son de la forma dada en (11) y (12), reemplazamos los valores correspondientes de F, E y H en A, B y C de las matrices de controlabilidad y observabilidad; obteniendo que los ìndices de controlabilidad y observabilidad son de orden dos, del mismo orden que el sistema que hemos definido y por tanto, este es completamente controlable y observable.

6.4. Discusiones.

Quizàs la mejor manera de resumir la discusiòn acerca de los estimadores es en la forma de una tabla, por lo tanto, tenemos la siguiente tabla de las mayores ventajas y desventajas de cada uno de los estimadores de estado.

TABLA I: Mayores ventajas y desventajas del filtro de

Kalman, del obervador de Luenberger y del observador Estocàstico.

Filtro de Kalman

- Estimador de orden completo (no es obtenible reducciòn de orden).

- No puede ser implementado con mediciones de salida libre de ruido (sin recurrir a alguna clase de aumento del vector de estado o diferenciaciòn de las mediciones para introducir ruido en el sistema).

- Optimo (a condiciòn de que todas las mediciones de salida contengan ruido gaussiano).

- Requiere de la resoluciòn de la ecuaciòn de orden completo de la covarianza del error.

- Requiere de una apropiada selecciòn de matrices de covarianza Q(i) y R(i).

- Susceptible a modelar disparejo (requiere un conocimiento exacto de la dinàmica del planteamiento).

Observador de Luenberger

- Capaz de estimaciòn de orden completo o reducido.

- Asume que las mediciones son hechas relativamente libres de ruido.

- El estimador de orden completo es menos susceptible al ruido que el estimador de orden reducido.

- La selecciòn de los valores caracteristicos que determinan las propiedades asintòticas de los estimadores de estado.

- El error es limitado por el nivel de ruido presente en las mediciones.

Observador Estocàstico

- Estructurado para caer dentro de un filtro de Kalman de orden reducido o en el observador de Luenberger de orden reducido.

- Diseñado para tener realmente en cuenta la combinaciòn de problemas de mediciones de salidas con y sin ruido.

- También puede sufrir de disparejamiento (especialmente cuando el filtro cae en el filtro de Kalman convencional de orden reducido).

- Requiere que un juego de ganancias sea seleccionado usando un método alternativo cuando no hay ruido del proceso.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

1 Las mayores ventajas y desventajas del observador Estocàstico, comparado con el observador Luenberger y el Filtro de Kalman han sido presentadas.

2 En el gràfico # 5, figura (B.3-1), se muestrò el estimado de la velocidad angular, notàndose que la reducciòn de orden del observador de Luenberger incrementa el error de la estimaciòn, haciéndose màs notorio en el intervalo de tiempo anterior al tiempo de pico (tiempo en que la señal alcanza su valor pico).

3 En los gràficos # 9 y # 10, figuras (B.5-1) y (B.5-2), se observa que el estimado obtenido por el observador Estocàstico, de la velocidad angular y de la corriente en su orden, presenta valores aceptables con una combinaciòn de mediciones de las entradas y salidas con y sin ruido.

4 El caso de estimaciòn de los estados cuando son una combinaciòn de mediciones con y sin ruido fue considerado con el resultado final de que posiblemente el observador Estocàstico representa el mejor compromiso para la re-

construcciòn del estado cuando es comparado con el Filtro de Kalman y el observador de Luenberger.

5 Se recomienda el uso de la teoria presentada para aplicarla a sistemas de rastreo de señales en sistemas de navegaciòn.

A P E N D I C E S

APENDICE A

PROGRAMAS

A.1: FILTRO DE KALMAN

```
<<KALMAN>> Es una rutina de filtrado de Kalman para un  sis
tema SISE observable con la siguiente formulacion:
Modelo del MENSAJE:
x(i+1) = A * x(i) + B * u(i) + w(i)
El RUIDO de ENTRADA es un proceso de RUIDO BLANCO de MEDIA
CERO con:
cov(w(j),w(i)) = Q(i)   PARA j=i
               = 0      PARA j<>i
Modelo de la MEDICION:
y(i) = C * x(i) + v(i)
El RUIDO de la MEDICION es un proceso de RUIDO BLANCO de ME
DIA CERO con:
cov(v(j),v(i)) = R(i)   PARA j=i
               = 0      PARA j<>i
Otras ASUNCIONES son:
cov(w(j),v(i)) = 0      PARA todo j,i
cov(x(j),w(i)) = 0      para todo j,i

Orden del Sistema =  2
Numero de Entradas =  1
Numero de Salidas =  1

Numero de Mediciones =  60

Debe entrar los valores iniciales de C,A,B,Q,R,X,XE,P,Y
Poniendo el valor inicial i=1
```

Matriz C

```
 0.000   0.100E+01
```

Matriz R

```
 0.100E+01
```

Matriz A

```
 0.700   0.269E+03
 -.948E+02   -.205E+03
```

Matriz B

```
 0.000
 0.476E+03
```

Matriz P

```
 0.100E+01   0.000
 0.000   0.100E+01
```

Matriz Q

```
 0.100E+01   0.000
 0.000   0.100E+01
```

Matriz x

```
 0.000
 0.000
```

Matriz xe

```
 0.000
 0.000
```

Matriz y

```
 0.264
 0.450
 0.589
 0.692
 0.766
 0.816
 0.846
```

0.860
0.860
0.847
0.825
0.794
0.756
0.712
0.665
0.614
0.562
0.509
0.456
0.404
0.354
0.307
0.262
0.221
0.183
0.149
0.118
0.092
0.068
0.048
0.032
0.018
0.007
-.001
-.007
-.011
-.013
-.014
-.014
-.013
-.011
-.008
-.005
-.002
0.002
0.005
0.009
0.012
0.015
0.018
0.021
0.023
0.026
0.027
0.029
0.031

0.032
0.033
0.033
0.034

ESTIMADOS DEL FILTRO DE KALMAN

t=iT	x1(t)	x2(t)	y(i)	xe1(i)	xe2(i)
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.06	0.43	0.26	0.49	0.35
3	0.22	0.77	0.45	0.98	0.61
4	0.47	1.03	0.59	1.49	0.81
5	0.77	1.21	0.69	1.91	0.95
6	1.12	1.34	0.77	2.33	1.05
7	1.49	1.41	0.82	2.70	1.11
8	1.87	1.44	0.85	3.03	1.14
9	2.26	1.42	0.86	3.33	1.14
10	2.64	1.38	0.86	3.59	1.12
11	3.00	1.31	0.85	3.80	1.08
12	3.35	1.23	0.82	3.98	1.03
13	3.67	1.13	0.79	4.14	0.96
14	3.96	1.02	0.76	4.25	0.89
15	4.22	0.91	0.71	4.36	0.81
16	4.46	0.80	0.66	4.44	0.73
17	4.66	0.69	0.61	4.50	0.65
18	4.84	0.59	0.56	4.56	0.58
19	4.98	0.49	0.51	4.61	0.50
20	5.11	0.40	0.46	4.64	0.43
21	5.20	0.31	0.40	4.66	0.36
22	5.28	0.23	0.35	4.68	0.29
23	5.34	0.17	0.31	4.69	0.24
24	5.37	0.11	0.26	4.70	0.18
25	5.41	0.06	0.22	4.71	0.14
26	5.42	0.01	0.18	4.72	0.10
27	5.42	-0.02	0.15	4.72	0.06
28	5.41	-0.05	0.12	4.72	0.03
29	5.40	-0.08	0.09	4.72	0.01
30	5.38	-0.09	0.07	4.72	-0.01
31	5.36	-0.11	0.05	4.72	-0.03
32	5.33	-0.11	0.03	4.72	-0.04
33	5.30	-0.12	0.02	4.72	-0.05
34	5.28	-0.12	0.01	4.72	-0.06
35	5.25	-0.12	-0.00	4.72	-0.06
36	5.22	-0.11	-0.01	4.72	-0.06
37	5.20	-0.11	-0.01	4.72	-0.06
38	5.17	-0.10	-0.01	4.72	-0.06
39	5.15	-0.09	-0.01	4.72	-0.05
40	5.13	-0.09	-0.01	4.72	-0.05

41	5.11	-0.08	-0.01	4.72	-0.05
42	5.09	-0.07	-0.01	4.72	-0.04
43	5.08	-0.06	-0.01	4.72	-0.04
44	5.07	-0.05	-0.01	4.71	-0.03
45	5.06	-0.05	-0.00	4.71	-0.02
46	5.05	-0.04	0.00	4.71	-0.02
47	5.04	-0.04	0.01	4.71	-0.01
48	5.04	-0.03	0.01	4.71	-0.01
49	5.03	-0.02	0.01	4.71	-0.01
50	5.03	-0.02	0.02	4.71	-0.00
51	5.03	-0.02	0.02	4.71	0.00
52	5.03	-0.01	0.02	4.71	0.00
53	5.03	-0.01	0.02	4.71	0.01
54	5.03	-0.01	0.03	4.71	0.01
55	5.03	-0.01	0.03	4.71	0.01
56	5.03	-0.01	0.03	4.71	0.01
57	5.03	-0.02	0.03	4.71	0.01
58	5.03	-0.01	0.03	4.71	0.01
59	5.04	-0.01	0.03	4.71	0.01
60	5.04	-0.01	0.03	4.71	0.01
61	5.04	-0.01	0.03	4.71	0.01

```
1 CLEAR:DEFINT L-N,I-K,R:MENUFLAG=0:OPTION BASE 1:POKE 82,0
:GRAPHICS (0):POKE 710,0
20 CLS:PRINT "<<KALMAN>> Es una rutina de filtrado de Kalma
n para un sistema SISE observable"
30 PRINT"con la siguiente formulacion:":PRINT"Modelo del ME
NSAJE:":PRINT"x(i + 1) = A * x(i) + B * u(i) + w(i)"
40 PRINT "El RUIDO de ENTRADA es un proceso de RUIDO BLANCO
 DE MEDIA CERO con:"
50 PRINT "cov(w(j),w(i)) = Q(i)   PARA j=i":PRINT "
      = 0       PARA j<>i":PRINT "Modelo de la Medicion:"
60 PRINT "y(i) = C * x(i) + v(i)":PRINT "El RUIDO de la MED
ICION es un proceso de RUIDO BLANCO de MEDIA CERO con:"
70 PRINT"cov(v(j),v(i)) = R(i)   PARA j=i":PRINT"
    = 0       PARA j<>i":PRINT "Otras ASUNCIONES son:"
80 PRINT "cov(w(j),v(i)) = 0      PARA todo j,i":PRINT "cov(
x(j),w(i)) = 0      PARA todo j,i":PRINT
90 INPUT"Medio de salida para los resultados:  impresora (1
) o pantalla (0) ";IPR:CLS:IF IPR<>0 AND IPR<>1 THEN 90
```

```
100 IF IPR=0 THEN 210 ELSE OPEN #7,"P:" OUTPUT
110 PRINT #7,"<<KALMAN>> Es una rutina de filtrado de Kalma
n para un  sis";
120 PRINT #7,"tema SISE observable con la siguiente formula
cion:"
130 PRINT #7,"Modelo del MENSAJE:":PRINT #7,"x(i+1) = A * x
(i) + B * u(i) + w(i)"
140 PRINT #7,"El RUIDO de ENTRADA es un proceso de RUIDO BL
ANCO de MEDIA CERO con:"
150 PRINT #7,"cov(w(j),w(i)) = Q(i)   PARA j=i"
160 PRINT #7,"                 = 0       PARA j<>i":PRINT #7,"M
odelo de la MEDICION:":PRINT #7,"y(i) = C * x(i) + v(i)"
170 PRINT #7,"El RUIDO de la MEDICION es un proceso de RUID
O BLANCO de MEDIA CERO con:"
180 PRINT #7,"cov(v(j),v(i)) = R(i)   PARA j=i":PRINT #7,"
                = 0       PARA j<>i"
190 PRINT #7,"Otras ASUNCIONES son:":PRINT #7,"cov(w(j),v(i
)) = 0      PARA todo j,i"
200 PRINT #7,"cov(x(j),w(i)) = 0       para todo j,i":PRINT #
7,
210 INPUT"Entre el ORDEN del Sistema Dinamico ";N:IF N<>INT
(N) OR N<0 THEN 210
220 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"Orden del Sistema = ";N:NE
XT IR
230 INPUT"Entre NUMERO de Entradas al Sistema ";R:IF R<>INT
(R) OR R<0 THEN 230
240 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"Numero de Entradas = ";R:N
EXT IR
250 INPUT"Entre NUMERO de Salidas ";M:IF M<>INT(M) OR M<0 T
HEN 250
260 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"Numero de Salidas = ";M:NE
XT IR
270 PRINT #IPR+6,:INPUT"Entre NUMERO de Mediciones ";IK:IF
IK<>INT(IK) OR IK<0 THEN 270
280 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"Numero de Mediciones = ";I
K:PRINT #IR,:NEXT IR
290 DIM X(IK+1,N,R),XE(IK+1,N,R),P(IK+1,N,N),TK(IK+1,N,M),Y
(IK+2,M,R),YE(IK+1,M,R),YT(IK+1,M,R),XT(IK+2,N,R)
300 DIM PT(IK+1,N,N),HAT(IK+1,N),DD$(52)
310 IF M=1 AND R=1 THEN 330 ELSE FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #I
R,"NOTA: El sistema debe ser SISE":PRINT #IR,
320 PRINT #IR,"Numero de Entradas = ";M:PRINT #IR,:PRINT #I
R,"Numero de Salidas = ";R:PRINT #IR,:NEXT IR:GOTO 1090
330 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"Debe entrar los valores in
iciales de C,A,B,Q,R,X,XE,P,Y"
340 PRINT "Usando un campo constante B*U: x(i+1) = A * x(i)
 + B * u(i) + w(i)"
350 PRINT "USANDO la matriz B en lugar de la matriz B*U ":P
RINT #IR,"Poniendo el valor inicial i=1":PRINT #IR,:NEXT IR
```

```
360 NN=M:MM=N:DD$="C":GOSUB 1190
370 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO N:C(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J1
,I1
380 NN=M:MM=M:DD$="R":GOSUB 1190
390 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO M:RM(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J
1,I1
400 NN=N:MM=N:DD$="A":GOSUB 1190
410 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:A(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J1
,I1
420 NN=N:MM=M:DD$="B":GOSUB 1190
430 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:B(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J1
,I1
440 NN=N:MM=N:DD$="P":GOSUB 1190
450 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:P(1,I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT
J1,I1
460 NN=N:MM=N:DD$="Q":GOSUB 1190
470 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:QM(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J
1,I1
480 NN=N:MM=R:DD$="x":GOSUB 1190
490 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO 1:X(1,I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT:
NEXT
500 NN=N:MM=R:DD$="xe":GOSUB 1190
510 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO 1:XE(1,I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT
 J1,I1
520 ' ENTRADA DE LAS MEDICIONES DE SALIDA
530 PRINT "Entre las Mediciones de Salida y(i), i = 2, ...,
";IK+1:PRINT
540 NN=IK:MM=1:DD$="y":GOSUB 1190
550 FOR I1=1 TO IK:Y(I1+1,1,1)=HAT(I1,1):NEXT I1
560 FOR IU=2 TO IK+1
570 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=P(IU-1,I1,J1):NE
XT J1,I1
580 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=A(J1,I1):NEXT J1
,I1
590 NPR=N:MPR=N:KPR=N:GOSUB 1160 ' mat aa=p*(a)'
600 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=A(I1,J1):NEXT J1
,I1
610 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
J1,I1
620 NPR=N:MPR=N:KPR=N:GOSUB 1160 ' mat pt=a*p*(a)'
630 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:PT(IU,I1,J1)=CPR(I1,J1)+QM(
I1,J1):NEXT J1,I1
640 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=PT(IU,I1,J1):NEX
T J1,I1
650 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=C(J1,I1):NEXT J1
,I1
660 NPR=N:MPR=N:KPR=R:GOSUB 1160 ' mat cc=pt*(c)'
670 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=C(I1,J1):NEXT J1
,I1
```

```
680 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:BPR(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
J1,I1
690 NPR=M:MPR=N:KPR=M:GOSUB 1160 ' mat cc1=c*cc
700 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO M:APR(I1,J1)=CPR(I1,J1)+RM(I1
,J1):NEXT J1,I1
710 NV=M:GOSUB 1850 ' matriz inversa de c*pt*(c)'+r
720 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:APR(I1,J1)=C(J1,I1):NEXT J1
,I1
730 NPR=N:MPR=M:KPR=M:GOSUB 1160 ' mat cc3=(c)'*inv(c*pt*(c
)'+r)
740 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=PT(IU,I1,J1):NEX
T J1,I1
750 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:BPR(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
J1,I1
760 NPR=N:MPR=N:KPR=M:GOSUB 1160 ' mat kt=pt*(c)'*inv(c*pt*
(c)'+r)
770 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:TK(IU,I1,J1)=CPR(I1,J1):NEX
T J1,I1
780 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=A(I1,J1):NEXT J1
,I1
790 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=XE(IU-1,I1,J1):N
EXT J1,I1
800 NPR=N:MPR=N:KPR=R:GOSUB 1160 ' mat a*xe
810 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:XT(IU,I1,J1)=CPR(I1,J1)+B(I
1,J1):NEXT J1,I1
820 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=C(I1,J1):NEXT J1
,I1
830 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=XT(IU,I1,J1):NEX
T J1,I1
840 NPR=M:MPR=N:KPR=R:GOSUB 1160 ' mat c*xt
850 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO R:YT(IU,I1,J1)=Y(IU,I1,J1)-CP
R(I1,J1):NEXT J1,I1
860 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:APR(I1,J1)=TK(IU,I1,J1):NEX
T J1,I1
870 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=YT(IU,I1,J1):NEX
T J1,I1
880 NPR=N:MPR=M:KPR=R:GOSUB 1160 ' mat kt*(y-c*xt)
890 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:XE(IU,I1,J1)=XT(IU,I1,J1)+C
PR(I1,J1):NEXT J1,I1
900 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=C(I1,J1):NEXT J1
,I1
910 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=PT(IU,I1,J1):NEX
T J1,I1
920 NPR=M:MPR=N:KPR=N:GOSUB 1160 ' mat pt1=c*pt
930 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:APR(I1,J1)=TK(IU,I1,J1):NEX
T J1,I1
940 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
J1,I1
```

```
950 NPR=N:MPR=M:KPR=N:GOSUB 1160 ' mat tk*c*pt
960 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:P(IU,I1,J1)=PT(IU,I1,J1)-CP
R(I1,J1):NEXT J1,I1
970 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=A(I1,J1):NEXT J1
,I1
980 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=X(IU-1,I1,J1):NE
XT J1,I1
990 NPR=N:MPR=N:KPR=R:GOSUB 1160 ' mat x=a*x+b
1000 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:X(IU,I1,J1)=CPR(I1,J1)+B(I
1,J1):NEXT J1,I1,IU
1010 A$=STRING$(38,"-"):IF N>2 THEN GOSUB 1990
1020 IF N>2 THEN 1050 ELSE FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,:PRI
NT #IR,"ESTIMADOS DEL FILTRO DE KALMAN":PRINT #IR,
1030 PRINT #IR,"t=iT   x1(t) x2(t) y(i)  xe1(i) xe2(i)":PRI
NT #IR,A$:FOR I=1 TO IK+1
1040 PRINT #IR,USING"####";I;:PRINT #IR,USING"###.##";X(I,1
,1);X(I,2,1);Y(I,1,1);XE(I,1,1);XE(I,2,1):NEXT I,IR
1050 PRINT :INPUT"Desea SALVAR en disco los valores Estimad
os RESULTANTES ? (S/N) ";Q$:PRINT
1060 IF (Q$="S") OR (Q$="s") THEN 1080
1070 IF (Q$="N") OR (Q$="n") THEN 1090 ELSE 1050
1080 GOSUB 2100
1090 IF MENUFLAG=0 THEN 1130 ' SIN MENU
1100 PRINT:INPUT"Desea regresar al Menu de ESTIMACION Menu
? (S/N) ";Q$:PRINT
1110 IF (Q$<>"S") AND (Q$<>"s") AND (Q$<>"N") AND (Q$<>"n")
 THEN 1100
1120 IF (Q$="S" OR Q$="s") AND (MENUFLAG=1) THEN RUN"D1:MEN
U.bas",4990
1130 INPUT"Desea volver a correr <<KALMAN>> ? (S/N) ";Q$:PR
INT
1140 IF (Q$<>"S") AND (Q$<>"s") AND (Q$<>"N") AND (Q$<>"n")
 THEN 1130
1150 IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 20 ELSE END:'PROGRAMA <<KALMA
N>>
1160 ' SUB PRODUCTO DE DOS MATRICES
1170 FOR I5=1 TO NPR:FOR K5=1 TO KPR:CPR(I5,K5)=0:J5=0
1180 J5=J5+1:CPR(I5,K5)=CPR(I5,K5)+APR(I5,J5)*BPR(J5,K5):IF
 J5<MPR THEN 1180 ELSE NEXT K5,I5:RETURN
1190 ' SUB mat
1200 ON ERROR GOTO 1670:CHANG=0:PRINT:PRINT "Defina la MATR
IZ ";DD$;"(";NN;"x";MM;") :"
1210 PRINT:PRINT "Tiene la opcion de RECUPERAR una matriz p
reviamente almacenada en disco":PRINT SPC(19);"O"
1220 PRINT"ENTRAR una nueva matriz desde el teclado":INPUT"
ENTRE su seleccion (R/E) ";Q$
1230 IF Q$="E" OR Q$="e" THEN QN$="ENTRAR"
1240 IF Q$="R" OR Q$="r" THEN QN$="RECUPERAR"
```

```
1250 IF QN$<>"ENTRAR" AND QN$<>"RECUPERAR" THEN 1210
1260 PRINT:PRINT"Confirme el Modo ";QN$;"para la Entrada de
 Datos (S/N) ";:INPUT Q$:IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 1210
1270 IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 1280 ELSE 1260
1280 IF QN$="ENTRAR" THEN 1380
1290 PRINT:INPUT"ENTRE el Identificador de la Manejadora de
 DISCO (D1, D2) ";DDI$:GOSUB 1690
1300 PRINT "El DISCO DE DATOS DEBERIA ESTAR EN ";DDI$:INPUT
"CORRECTO (S/N) ? ";Q$:IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 1320
1310 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 1290 ELSE 1300
1320 CLS:PRINT"ENTRE el nombre del archivo de la matriz en
la forma ";DDI$;":NNNNNNNN.SSS";SPC(23);:INPUT DFN$
1330 IF LEN(DFN$)<4 OR LEN(DFN$)>15 THEN 1320
1340 IF (DFN$,1,2)<>DDI$ AND LEFT$(DFN$,3)<>":" THEN 1320 E
LSE OPEN #1,DFN$ INPUT:INPUT #1,NND,MMD
1350 IF NND=NN AND MMD=MM THEN 1370 ELSE PRINT "La matriz d
el archivo es";NND;"x";MMD;". Deberia ser ";NN;"x";MM;
1360 PRINT "Trate otra vez":CLOSE #1:GOTO 1210
1370 FOR IQX=1 TO NN:FOR JQX=1 TO MM:INPUT #1,HAT(IQX,JQX):
NEXT JQX,IQX:CLOSE #1:GOTO 1400
1380 PRINT:PRINT "Matriz ";DD$;"(";NN;"x";MM;")":PRINT
1390 FOR I=1 TO NN:FOR J=1 TO MM:PRINT DD$;"(";I;",";J;")";
:INPUT HAT(I,J):NEXT J,I
1400 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,:PRINT #IR,"Matriz ";DD$:P
RINT #IR,
1410 FOR I=1 TO NN:FOR J=1 TO MM:PRINT #IR,USING " #.###^^^
^ ";HAT(I,J);:NEXT J:PRINT #IR,:NEXT I
1420 PRINT:INPUT"CAMBIOS (S/N)? ";Q$:IF (Q$="S") OR (Q$="s"
) THEN CHANG=1:GOTO 1440
1430 IF (Q$="N") OR (Q$="n") THEN 1460 ELSE 1420
1440 PRINT:PRINT"COORDENADAS DE ";DD$;"(*),°fil,colé ";:INP
UT I,J:IF (I<=0) OR (I>NN) OR (J<0) OR (J>MM) THEN 1440
1450 PRINT DD$;"(";I;",";J;")";:INPUT HAT(I,J):GOTO 1400
1460 IF PM=1 OR IPR=1 THEN NEXT IR ELSE 1470
1470 IF CHANG=0 AND QN$="RECUPERAR" THEN GOSUB 1630
1480 PRINT:INPUT"Desea salvar esta matriz en disco (S/N)? "
;Q$:CLS:IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 1660
1490 IF Q$<>"S" AND Q$<>"s" AND Q$<>"N" AND Q$<>"n" THEN 14
80
1500 PRINT:INPUT"ENTRE Identificador de la Manejadora de DI
SCO (D1, D2) ";DDI$:GOSUB 1540
1510 PRINT "EL DISCO DE DATOS DEBE EN LA MANEJADORA DE DISC
O ";DDI$:INPUT"CORRECTO (S/N) ?";Q$
1520 IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 1580
1530 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 1500 ELSE 1510
1540 IF RIGHT$(DDI$,1)<>"1" AND RIGHT$(DDI$,1)<>"2" THEN 15
00
1550 IF LEFT$(DDI$,1)="D" THEN RETURN
1560 IF LEFT$(DDI$,1)="d" THEN DDI$="D"+RIGHT$(DDI$,1) ELSE
 1500
```

```
1570 RETURN
1580 CLS:PRINT"ENTRE el nombre del archivo de la matriz en
la forma ";DDI$;":NNNNNNNN.SSS";SPC(23);:INPUT NDFN$
1590 IF MID$(NDFN$,1,2)<>DDI$ AND LEFT$(NDFN$,3)<>":" THEN
1580
1600 OPEN #3,NDFN$ INPUT:PRINT "ARCHIVO YA EXISTE -";
1610 INPUT"Desea Actualizarlo ?";QQQQ#:IF QQQQ$="S" OR QQQQ
$="s" THEN CLOSE #3:GOTO 1630
1620 CLOSE #1:GOTO 1500
1630 OPEN #2,NDFN$ OUTPUT:PRINT #2,NN,MM
1640 FOR IQX=1 TO NN:FOR JQX=1 TO MM:PRINT #2,HAT(IQX,JQX):
NEXT JQX,IQX:CLOSE #2
1650 PRINT "Matriz ";DD$;" Salvada en disco de archivos ";N
DFN$:ON ERROR GOTO 1:CLOSE #2:CLS:RETURN
1660 ON ERROR GOTO 1:CLOSE #2:RETURN
1670 IF ERR=170 AND ERL=1330 THEN PRINT "ARCHIVO ";DFN$;" N
o Existe. Trate Otra Vez";PRINT:CLOSE #1
1680 RESUME 1210:IF ERR=170 AND (ERL=1580 OR ERL=1320) THEN
 RESUME NEXT:ON ERROR GOTO 1
1690 IF RIGHT$(DDI$,1)<>"1" AND RIGHT$(DDI$,1)<>"2" THEN 12
90
1700 IF LEFT$(DDI$,1)="D" THEN RETURN
1710 IF LEFT$(DDI$,1)="d" THEN DDI$="D"+RIGHT$(DDI$,1):RETU
RN
1720 IF LEFT$(DDI$,1)="d" THEN DDI$="D"+RIGHT$(DDI$,1) ELSE
 1290
1730 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N:INPUT HAT(I,J):PRINT:NEXT J,
I
1740 FOR I=1 TO NN:FOR J=1 TO MM:PRINT USING"##.###^^^^ "HA
T(I,J);:NEXT J1:PRINT:NEXT I1
1750 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"Matriz ";DD$;" is":PRINT
#IR,
1760 FOR I=1 TO NN:FOR J=1 TO MM:PRINT #IR,USING "##.###^^^
^ ";HAT(I,J);:NEXT J:PRINT #IR,:NEXT I1:PRINT #IR,:NEXT IR
1770 PRINT:INPUT"CAMBIOS (S/N)?";Q$:IF (Q$="S") OR (Q$="s")
 THEN 1790
1780 IF (Q$="N") OR (Q$="n") THEN 1840ELSE 1770
1790 PRINT "COORDINADAS DE ";DD$;"(*),°fil, colé";:PRINT :I
NPUT I,J
1800 IF(I<=0) OR (I>NN) OR (J<0) OR (J>MM) THEN 1790
1810 PRINT DD$;"(";I;",";J;")";:INPUT HAT(I,J)
1820 PRINT #7,"La Nueva Matriz ";DD$;" es":PRINT:FOR I=1 TO
 NN:FOR J=1 TO MM:PRINT #7,USING"##.###^^^^ ";HAT(I,J);
1830 NEXT J1:PRINT #IR,:NEXT I1
1840 PRINT #IR,:IF IPR=0 THEN 1770 ELSE NEXT IR
1850 ' SUB INVERSION DE MATRIZ
1860 FOR I=1 TO NV:FOR J=1 TO NV:IF I<>J THEN BPR(I,J)=0 EL
SE BPR(I,J)=1
```

```
1870 NEXT J,I:FOR K=1 TO NV:IF K>=NV THEN 1920 ELSE IMAX=K:
AMAX=ABS(APR(K,K)):KP1=K+1
1880 FOR I=KP1 TO NV:IF BMAX<ABS(BPR(I,K)) THEN IMAX=I:AMAX
=ABS(APR(I,K))
1890 NEXT I:IF IMAX=K THEN 1920
1900 FOR J=1 TO NV:ATMP=BPR(IMAX,J):APR(IMAX,J)=APR(K,J):AP
R(K,J)=ATMP
1910 ATMP=APR(IMAX,J):APR(IMAX,J)=APR(K,J):APR(K,J)=ATMP:NE
XT J
1920 IF ABS(APR(K,K))<=1.0E-07 THEN 1980
1930 DIV=APR(K,K):FOR J=1 TO NV:APR(K,J)=APR(K,J)/DIV:BPR(K
,J)=BPR(K,J)/DIV:NEXT J
1940 FOR I=1 TO NV:AMULT=APR(I,K):IF I-K=0 THEN 1960
1950 FOR J=1 TO NV:APR(I,J)=APR(I,J)-AMULT*APR(K,J):BPR(I,J
)=BPR(I,J)-AMULT*BPR(K,J):NEXT J
1960 NEXT I,K
1970 RETURN
1980 PRINT  "MATRIZ SINGULAR PARA K = ";K:GOTO 1090
1990 ' Sub imprimir para n>=3
2000 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,:PRINT#IR,"ESTIMADOS DEL F
ILTRO DE KALMAN"
2010 PRINT #IR,:PRINT #IR,"  t=iT    x1(t),  x2(t), ..., x"
;N;"(t)":PRINT #IR,A$
2020 FOR I=1 TO IK+1:PRINT #IR,USING"###.## ";I;:FOR J=1 TO
 N:PRINT #IR,USING"##.###^^^^ ";X(I,J,1);:NEXT :PRINT #IR,
2030 NEXT:PRINT #IR,:PRINT #IR,"  t=iT   xe1(i), xe2(i), ..
., xe";N;"(i)":PRINT #IR,A$
2040 FOR I=1 TO IK+1:PRINT #IR,USING"###.## ";I;:FOR J=1 TO
 N:PRINT #IR,USING"##.###^^^^ ";XE(I,J,1);:NEXT:PRINT #IR,
2050 NEXT I:PRINT #IR,:PRINT #IR,"  t=iT   y1(i), y2(i), ..
., y";IK+1;"(i)":PRINT #IR,A$
2060 FOR I=1 TO IK+1:PRINT #IR,USING"###.## ";I;:PRINT #IR,
USING"##.###^^^^ ";Y(I,1,1);:PRINT #IR,:NEXT I:PRINT #IR,
2070 PRINT #IR,"  t=iT   P11(i), P22(i), ..., P";N;N;"(i)":
PRINT #IR,A$:FOR I=1 TO IK+1:PRINT #IR,USING"###.## ";I;
2080 FOR J=1 TO N:PRINT #IR,USING"##.###^^^^ ";P(I,J,J);:NE
XT J:PRINT #IR,:NEXT I:PRINT #IR,:NEXT IR
2090 RETURN
2100 'SALVANDO MATRICES
2110 PRINT "... SALVANDO Trayectorias de los ESTADOS filtra
dos x(t), t=iT ..."
2120 FOR I=1 TO IK+1:FOR J=1 TO N:HAT(I,J)=X(I,J,1):NEXT J,
I
2130 NN=IK+1:MM=N:DD$="Trayectoria de los Estados Filtrados
 x(t) vs t, t=iT":GOSUB 2210
2140 PRINT "... SALVANDO Trayectorias de los ESTADOS Estima
dos xe(t), i=1,.. ";IK+1;"..."
2150 FOR I=1 TO IK+1:FOR J=1 TO N:HAT(I,J)=XE(I,J,1):NEXT J
,I
```

```
2160 NN=IK+1:MM=N:DD$="Trayectoria del Estado Estimado xe(i
) vs i, i=1,...":GOSUB 2210
2170 PRINT "... SALVANDO Trayectorias de las SALIDAS y(i),
i = 1,..."
2180 FOR I=1 TO IK+1:HAT(I,1)=Y(I,1,1):NEXT I
2190 NN=K+1:MM=1:DD$="Trayectoria de la Salida y(i) vs i, i
 = 1,...":GOSUB 2210
2200 RETURN ' FIN DE SALVAR MATRICES
2210 ON ERROR GOTO 2330:CHANG=0 ' SUB ALMACENAR
2220 PRINT:INPUT"ENTRE el Identificador de la Manejadora de
 DISCO (D1, D2) ";DDI$:GOSUB 2370
2230 PRINT "El DISCO DE DATOS DEBE ESTAR EN ";DDI$:INPUT"CO
RRECTO (S/N) ?";Q$:IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 2250
2240 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 2220 ELSE 2230
2250 CLS:INPUT"ENTRE el nombre del archivo en la forma";DDI
$;:INPUT":NNNNNNNN.SSS";NDFN$
2260 OPEN #3,NDFN$ INPUT:PRINT "ARCHIVO YA EXISTE -";:INPUT
"Desea Actualizarlo ?";Q$
2270 IF Q$="Y" OR Q$="y" THEN CLOSE #3:GOTO 2290
2280 CLOSE:GOTO 2220
2290 OPEN #2,NDFN$ OUTPUT:PRINT #2,NN,MM
2300 FOR IQX=1 TO NN:FOR JQX=1 TO MM:PRINT #2,HAT(IQX,JQX):
NEXT JQX,IQX:CLOSE #2
2310 PRINT DDI$;" Resultante Salvada en disco ";NDFN$
2320 ON ERROR GOTO 1:CLOSE #2:RETURN
2330 IF ERR=170 AND ERL=2290 THEN PRINT "ARCHIVO ";DFN$;" N
o Existe. Trate Otra Vez":PRINT:CLOSE #2:CLOSE #3
2340 RESUME 2250:IF ERR=170 AND ERL=2260 THEN CLOSE #3:CLOS
E #2:RESUME 2290
2350 IF ERR=170 AND (ERL=2260 OR ERL=2290) THEN RESUME NEXT
2360 ON ERROR GOTO 1
2370 IF RIGHT$(DDI$,1)<>"1" AND RIGHT$(DDI$,1)<>"2" THEN 22
20
2380 IF LEFT$(DDI$,1)="D" THEN RETURN
2390 IF LEFT$(DDI$,1)="d" THEN DDI$="D"+RIGHT$(DDI$,1) ELSE
 2220:RETURN
```

A.2: OBSEVADOR DE LUENBERGER

<<LUENB2>> Determina un Observador de orden dos para un Sistema SISE Completamente Observable (A,B,C,D) en la forma :

d(xe(t))/dt = (A - MC)xe(t) + Bu(t) + My(t),   t >= 0

donde xe(t) es el Vector de los Estados Estimados
       u(t) es el Vector de Entrada
       y(t) es el Vecotr de Salida

Orden del Sistema n = 2
Numero de Entradas m = 1
Numero de Salidas r = 1

Matriz A

0.700 0.269E+03
-.948E+02 -.205E+03

Matriz B

0.000
0.476E+03

Matriz C

0.000 0.100E+01

Valores Propios deseados del Observador

Re(Lambda(1)=-200   Im(Lambda(1)= 121.925

Re(Lambda(2)=-200   Im(Lambda(2)=-121.925

Coeficientes del Polinomio Caracteristico de A en Orden Ascendente:

2.5349E+04
2.0406E+02
1.0000

Coeficientes del Polinomio Caracteristico de A-MC en Orden Ascendente:

```
 5.4866E+04
 4.0000E+02
 1.0000

OBSERVADOR DEL SISTEMA :

d(xe(t))/dt = (A - MC)xe(t) + Bu(t) + My(t)

MATRIZ (A-MC) DEL OBSERVADOR :

 7.0000E-01  5.8193E+02
-9.4762E+01 -4.0070E+02

MATRIZ B DEL OBSERVADOR :

 0.0000
 4.7619E+02

MATRIZ M DEL OBSERVADOR :

-3.1293E+02
 1.9594E+02
```



```
1 CLEAR:DEFINT L-N,I-K,R:MENUFLAG=0:OPTION BASE 1:GRAPHICS(
0):POKE 82,0:POKE 710,0
20 CLS:PRINT "<<LUENB2>> Determina un Observador de Orden d
os para un Sistema SISE Completamen";
30 PRINT "te observable (A,B,C,D) en la forma :":PRINT
40 PRINT "d(xe(t))/dt = (A - MC)xe(t) + Bu(t) +
     My(t),       t >= 0":PRINT
50 PRINT "donde  xe(t) es el Vector de los Estados
    Estimados"
60 PRINT "         u(t)  es el Vector de Entrada"
70 PRINT "         y(t)  es el Vector de Salida":PRINT
80 INPUT "Medio de Salida para los Resultados:  Impresora (
1) o Pantalla (0) ";IPR
90 PRINT:IF IPR<>0 AND IPR<>1 THEN 80
100 IF IPR=0 THEN 170 ELSE OPEN #7,"P:" OUTPUT
110 PRINT #7,"<<LUENB2>> Determina un Observador de orden d
os para un Sistema SISE Completamente Observable";
120 PRINT #7," (A,B,C,D) en la forma :":PRINT #7,
```

```
130 PRINT #7,"d(xe(t))/dt = (A - MC)xe(t) + Bu(t) + My(t),
   t >= 0":PRINT #7,
140 PRINT #7,"donde  xe(t) es el Vector de los Estados Esti
mados"
150 PRINT #7,"         u(t)  es el Vector de Entrada"
160 PRINT #7,"         y(t)  es el Vecotr de Salida":PRINT  #
7,
170 N=2:M=1:R=1:FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"Orden del Sist
ema n = ";N:PRINT #IR,"Numero de Entradas m = ";M
180 PRINT #IR,"Numero de Salidas r = ";R:PRINT  #IR,:NEXT I
R
190 INPUT"Es el Sistema Completamente Observable  (S/N) ";Q
$:IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 230
200 IF Q$<>"N" AND Q$<>"n" THEN 190
210 CLS:PRINT "Puede Chequear la Observabilidad del Sistema
 Usando <<INDCOB>> Regresando al Menu":PRINT
220 GOTO 840
230 NN=N:MM=N:NRX=N:NRCX=N:DD$="A":GOSUB 1430
240 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:A(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J1
,I1
250 NN=N:MM=M:NRX=N:NRCX=M:DD$="B":GOSUB 1430
260 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:B(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J1
,I1
270 NN=R:MM=N:NRX=R:NRCX=N:DD$="C":GOSUB 1430
280 FOR I1=1 TO R:FOR J1=1 TO N:C(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J1
,I1
290 CLS:PRINT "Entre los Valores Propios deseados de la Mat
riz del Observador ( A - MC )"
300 GOSUB 1180 'GO SUB Lamb
310 HAX=-100:FOR I=1 TO N:IF RAMBDA(I)>HAX AND RAMBDA(I)<>.
000001 THEN HAX=RAMBDA(I):NEXT I
320 FOR I=1 TO N:IF RAMBDA(I)=.000001 THEN RAMBDA(I)=HAX-1:
NEXT I
330 ' Calculo del Polinomio Caracteristico de la Matriz A
340 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,:PRINT #IR,"Valores Propios
 deseados del Observador":PRINT #IR,
350 FOR I=1 TO N:PRINT #IR,:PRINT #IR,"Re(Lambda(";I;")=";R
AMBDA(I);"   Im(Lambda(";I;")=";CLAMBDA(I):NEXT I,IR
360 GOSUB 910 'RESTmat (n,a(*),ca(*),q(*))
370 CA(N+1)=1:LA=(-1)^N:FOR I1=1 TO N+1:CA(I1)=LA*CA(I1):NE
XT I1
380 FOR IR=6 TO IPR+6
390 PRINT #IR,:PRINT #IR,"Coeficientes del Polinomio  Carac
teristico de A en Orden Ascendente:":PRINT #IR,
400 FOR I1=1 TO N+1:PRINT #IR, USING "##.####^^^^  ";CA(I1)
:NEXT I1
410 PRINT #IR,:PRINT #IR,"Coeficientes del Polinomio  Carac
teristico de A-MC en Orden Ascendente:":PRINT #IR,
420 FOR I1=1 TO N+1:PRINT #IR, USING "##.####^^^^  ";CD(I1)
:NEXT I1,IR
430 FOR I=1 TO N:CK(1,I)=CA(I)-CD(I):NEXT I
```

```
440 ' Calculo de la matriz P1inv
450 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=A(J1,I1):NEXT J1
,I1
460 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=C(J1,I1):NEXT J1
,I1
470 GOSUB 1130 ' GO SUB CONT a formar la matriz de controla
bilidad
480 PRINT:PRINT "Matriz de Controlabilidad :":PRINT
490 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N*M:PRINT USING "##.####^^^^
";QC(I1,J1);:NEXT J1:PRINT:NEXT I1
500 IND=N:FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N
510 IF I=J THEN P(I,J)=1
520 IF I<J THEN P(I,J)=0
530 IF I<=J THEN 540 ELSE P(I,J)=CA(IND+J)
540 NEXT J:IND=IND-1:NEXT I:PRINT:PRINT "MATRIX P":PRINT
550 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:PRINT USING "##.####^^^^ ";
P(I1,J1);:NEXT J1:PRINT:NEXT I1:PRINT
560 ' Matriz QC Inversa
570 II=N*M+1:FOR J=1 TO (N*M)/2:FOR I=1 TO N:TMP(1)=QC(I,J)
:QC(I,J)=QC(I,II-J):QC(I,II-J)=TMP(1):NEXT I,J
580 PRINT:PRINT "Matriz QC Inversa :":PRINT
590 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N*M:PRINT USING "##.####^^^^
";QC(I1,J1);:NEXT J1:PRINT:NEXT I1:PRINT
600 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=QC(I1,J1):NEXT J
1,I1
610 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=P(I1,J1):NEXT J1
,I1
620 NPR=N:MPR=N:KPR=N:GOSUB 1090 ' matriz producto
630 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
J1,I1
640 NV=N:GOSUB 2020 ' matriz inversa
650 FOR I1=1 TO 1:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=CK(I1,J1):APR(I1
+1,J1)=0:NEXT J1,I1
660 NPR=1:MPR=N:KPR=N:GOSUB 1090 ' matriz producto
670 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO 1:HHAT(I1,J1)=-CPR(J1,I1):NEX
T J1,I1
680 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO 1:APR(I1,J1)=HHAT(I1,J1):APR(
I1,J1+1)=0:NEXT J1,I1
690 FOR I1=1 TO 1:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=C(I1,J1):BPR(I1+
1,J1)=0:NEXT J1,I1
700 NPR=N:MPR=1:KPR=N:GOSUB 1090 ' matriz producto
710 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:AHAT(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
 J1,I1
720 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:AHAT(I1,J1)=A(I1,J1)-AHAT(I
1,J1):NEXT J1,I1
730 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,:PRINT #IR,"OBSERVADOR DEL
SISTEMA :":PRINT #IR,
```

```
740 PRINT #IR,"d(xe(t))/dt = (A - MC)xe(t) + Bu(t) + My(t)"
:PRINT #IR,
750 PRINT #IR,"MATRIZ (A-MC) DEL OBSERVADOR :":PRINT #IR,
760 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:PRINT #IR,USING"##.####^^^^
 ";AHAT(I1,J1);:NEXT J1:PRINT #IR,:NEXT I1
770 PRINT #IR,:PRINT #IR,"MATRIZ B DEL OBSERVADOR :":PRINT
#IR,
780 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:PRINT #IR,USING"##.####^^^^
 ";B(I1,J1);:NEXT J1:PRINT #IR,:NEXT I1
790 PRINT #IR,:PRINT #IR,"MATRIZ M DEL OBSERVADOR :":PRINT
#IR,
800 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO 1:PRINT #IR,USING"##.####^^^^
 ";HHAT(I1,J1);:NEXT J1:PRINT #IR,:NEXT I1,IR
810 PRINT:INPUT"Desea salvar en disco las matrices RESULTAN
TES (S/N)? ";Q$:IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 830
820 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 840 ELSE 810
830 GOSUB 2160
840 IF MENUFLAG=0 THEN 880 ' SIN MENU
850 PRINT:INPUT"Desea regresar al Menu ? (S/N) ";Q$:PRINT
860 IF (Q$<>"S") AND (Q$<>"s") AND (Q$<>"N") AND (Q$<>"n")
THEN 850
870 IF (Q$="S" OR Q$="s") AND (MENUFLAG=1) THEN RUN"D1:MENU
,4990
880 PRINT:INPUT"Desea volver a correr <<LUENB2>> ? (S/N) ";
Q$:PRINT
890 IF (Q$<>"S") AND (Q$<>"s") AND (Q$<>"N") AND (Q$<>"n")
THEN 880
900 IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 1 ELSE END ' PROGRAMA <<OBSERV
>>
910 ' SUB RESMAT(N,A(*),CA(*),Q(*))
920 ' "Resmat" CALCULA LA MATRIZ RESLOVENTE (INVERSA DE SI-
A)
930 ' mat hidn=hidn
940 FOR I1= 1 TO N:FOR J1=1 TO N:IDN(I1,J1)=0:NEXT J1,I1
950 FOR I1=1 TO N:IDN(I1,I1)=1:NEXT I1
960 FOR I=1 TO N:FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N
970 IDQ(I,I1,J1)=0:IF I1=J1 THEN IDQ(I,I1,J1)=1
980 NEXT J1,I1,I:FOR I1=N TO 1 STEP -1:FOR J1=1 TO N: FOR K
1=1 TO N:BPR(J1,K1)=IDQ(I1,J1,K1):NEXT K1,J1
990 NPR=N:MPR=N:KPR=N ' mat m2=a*m1
1000 FOR IP=1 TO N:FOR JP=1 TO N:APR(IP,JP)=A(IP,JP):NEXT J
P,IP
1010 GOSUB 1090 ' matriZ producto
1020 CA(I1)=0:FOR J1=1 TO N:CA(I1)=CA(I1)+CPR(J1,J1):NEXT J
1:CA(I1)=-CA(I1)/(N-I1+1):IF I1=1 THEN 1080
1030 ' mat em1=(ca(i))*hidn
```

```
1040 FOR IP=1 TO N:FOR JP=1 TO N:BPR(IP,JP)=(CA(I1))*IDN(IP
,JP):NEXT JP,IP
1050 ' mat em2=em2+em1
1060 FOR IP=1 TO N:FOR JP=1 TO N:CPR(IP,JP)=CPR(IP,JP)+BPR(
IP,JP):NEXT JP,IP
1070 FOR J1=1 TO N:FOR K1=1 TO N:IDQ(I1-1,J1,K1)=CPR(J1,K1)
:NEXT K1,J1,I1
1080 RETURN
1090 ' SUB MATRIZ PRODUCTO
1100 FOR I5=1 TO NPR:FOR K5=1 TO KPR:CPR(I5,K5)=0:J5=0
1110 J5=J5+1:CPR(I5,K5)=CPR(I5,K5)+APR(I5,J5)*BPR(J5,K5):IF
 J5<MPR THEN 1110
1120 NEXT K5,I5:RETURN
1130 ' SUB Cont .. Construccion de la Matriz de Controlabil
idad
1140 NPR=N:MPR=N:KPR=M:GOSUB 1090 ' Matriz Producto
1150 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO M:QC(I,J)=BPR(I,J):NEXT J,I:KV
AL=1
1160 FOR I=1 TO N-1:FOR J=1 TO N:FOR LZ=1 TO M
1170 QC(J,KVAL*M+LZ)=CPR(J,LZ):NEXT LZ,J,I:RETURN
1180 ' SUB Lamb Encuentra coeficientes de la expresion (z-L
a(i))^n donde La(i) = Lar(i) * j Lai(i)
1190 ' es el i-esimo valor propio de la raiz
1200 FOR I=1 TO N:RAMBDA(I)=0:CLAMBDA(I)=0:NEXT I
1210 PRINT:PRINT "Entre los Polos SEPARADAMENTE -COMPLEJOS
CONJUGADOS son Considerados como dos Polos:":PRINT
1220 FOR I=1 TO N:PRINT:PRINT "Entre Lambda(";I;") - Real ,
 Imag":PRINT:INPUT"Re,Im ";REAL,CMG:PRINT
1230 IF REAL<=.000001 THEN 1250 ELSE PRINT "CUIDADO : Los P
OLOS deben ser Colodados en el Semiplano Negativo."
1240 PRINT:PRINT "Lambda";I;"REAL = -";REAL:REAL=-REAL
1250 RAMBDA(I)=REAL:CLAMBDA(I)=CMG:NEXT I
1260 PRINT:INPUT"Cambios (S/N) ";Q$:PRINT:IF Q$="S" OR Q$="
s" THEN 1200
1270 GOSUB 1290 ' Going to SUB SEMBL
1280 RETURN
1290 ' SUB Sembl - calcula el polinomiocaracteristico de ra
ices reales o complejas
1300 NNL=N+1:CD(NNL)=1:FOR MMK=1 TO N:SUMR=0:SUMI=0:LOVE=1:
COF(1)=1:GOTO 1320
1310 COF(LOVE)=COF(LOVE)+1
1320 IF LOVE>MMK THEN 1410
1330 IF LOVE=MMK THEN 1350
1340 MMM=MMK-1:FOR I=LOVE TO MMM:II=I+1:COF(II)=COF(I)+1:NE
XT I
1350 PR=1:PI=0:FOR I=1 TO MMK:CK=COF(I):PRT=PR*RAMBDA(CK)-P
I*CLAMBDA(CK):PIT=PI*RAMBDA(CK)+PR*CLAMBDA(CK)
1360 PR=-PRT:PI=-PIT:NEXT I
```

```
1370 PRINT"PR=";PR;"PI=";PI;"LAM(1)=";RAMBDA(1);"LAM(2)=";R
AMBDA(2):SUMR=SUMR+PR:SUMI=SUMI+PI
1380 FOR I=1 TO MMK:LOVE=MMK-I+1:C1=COF(LOVE)-N+MMK-LOVE:IF
 C1<0 THEN 1310
1390 IF C1>0 THEN 1410
1400 NEXT I:MPP=N-MMK+1:CD(MPP)=SUMR:NEXT MMK:GOTO 1420
1410 PRINT "ERROR en SUB Sembl !"
1420 RETURN
1430 CLS:ON ERROR GOTO 1880:CHANG=0 ' SUB mat
1440 PRINT:PRINT "Defina la Matriz ";DD$;"(";NN;"x";MM;") :
"
1450 PRINT:PRINT"Tiene la opcion de RECUPERAR una matriz pr
eviamente almacenada en disco":PRINT SPC(19);"O"
1460 PRINT "ENTRAR una nueva matriz desde el teclado";:INPU
T" ENTRE su seleccion (R/E) ";Q$:PRINT
1470 IF Q$="r" OR Q$="R" THEN QQN$="RECUPERAR"
1480 IF Q$="e" OR Q$="E" THEN QQN$="ENTRAR"
1490 IF (QQN$<>"RECUPERAR" AND QQN$<>"ENTRAR") THEN 1450
1500 PRINT:PRINT"Confirme Modo ";QQN$;"para la Entrada de D
atos (S/N) ";:INPUT Q$:IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 1450
1510 IF Q$<>"S" AND Q$<>"s" THEN 1520
1520 IF QQN$="ENTRAR" THEN 1620
1530 PRINT:INPUT"ENTRE Identificadora de la Manejadora de D
ISCO (D1, D2) ";DDI$:GOSUB 1920
1540 PRINT "DISCO DE DATOS DEBE ESTAR EN ";DDI$:INPUT"CORRE
CTO (S/N) ?";Q$
1550 IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 1570
1560 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 1530 ELSE 1540
1570 CLS:PRINT"ENTRE el nombre del archico de la matriz en
la forma ";DDI$;
1580 INPUT":NNNNNNNN.SSS                           ";DFN$:GOS
UB 1960
1590 OPEN #1,DFN$ INPUT:INPUT #1,NND,MMD:IF NND=NN AND MMD=
MM GOTO 1610 ELSE PRINT "El archico es";NND;"x";MMD;
1600 PRINT ". Debe ser ";NN;"x";MM;"Trate otra vez":CLOSE #
1:GOTO 1460
1610 FOR IQX=1 TO NN:FOR JQX=1 TO MM:INPUT #1,HAT(IXQ,JQX):
NEXT JQX,IQX:CLOSE #1:GOTO 1640
1620 PRINT :PRINT "Matriz ";DD$;"(";NN;"x";MM;")"
1630 PRINT:FOR I=1 TO NN:FOR J=1 TO MM:PRINT DD$;"(";I;",";
J;")";:INPUT HAT(I,J):NEXT J,I
1640 PRINT :PRINT "Matriz ";DD$:PRINT
1650 FOR I=1 TO NN:FOR J=1 TO MM:PRINT USING" #.###^^^^";HA
T(I,J);:NEXT J:PRINT:NEXT I
1660 PRINT:INPUT"CAMBIOS (S/N) ? ";Q$:PRINT:IF (Q$="S") OR
(Q$="s") THEN 1680
1670 IF (Q$="N") OR (Q$="n") THEN 1710 ELSE 1660
1680 CHANG%=1
```

```
1690 PRINT "COORDENADAS DE ";DD$;"(*),(FIL, COL) ";:INPUT I
,J:IF (I<=0) OR (I>NN) OR (J<0) OR (J>MM) THEN 1690
1700 PRINT DD$;"(";I;",";J;")";:INPUT HAT(I,J):GOTO 1640
1710 IF PM=1 OR IPR=1 THEN 1720 ELSE 1740
1720 PRINT #7,"Matriz ";DD$:PRINT #7,
1730 FOR I=1 TO NN:FOR J=1 TO MM:PRINT #7,USING" #.###^^^^"
;HAT(I,J);:NEXT J:PRINT #7,:NEXT I:PRINT #7,
1740 IF CHANG%=0 AND QQN$="RECUPERAR" THEN 1870
1750 INPUT"Desea salvar esta matriz en disco (S/N)? ";Q$:IF
 Q$="N" OR Q$="n" THEN 1870
1760 IF Q$<>"S" AND Q$<>"s" AND Q$<>"N" AND Q$<>"n" THEN 17
50
1770 INPUT"ENTRE el identificador de DISCO (D1, D2) ";DDI$:
GOSUB 1920
1780 PRINT "El DISCO de DATOS debe estar en ";DDI$:INPUT"CO
RRECTO (S/N) ?";Q$:IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 1800
1790 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 1770 ELSE 1780
1800 CLS:PRINT"ENTRE el nombre del archivo de la matriz de
disco en la forma ";DDI$;
1810 INPUT":NNNNNNNN.SSS                          ";NDFN$:GO
SUB 1980
1820 OPEN #3,NDFN$ INPUT:PRINT "El ARCHIVO YA EXISTE -";:IN
PUT"Desea actualizarlo ?";Q$
1830 IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 1840 ELSE CLOSE #3:GOTO 1770
1840 CLOSE #3:OPEN #2,NDFN$ OUTPUT:PRINT #2,NN,MM
1850 FOR IQX=1 TO NN:FOR JQX=1 TO MM:PRINT #2,HAT(IQX,JQX):
NEXT JQX,IQX:CLOSE #2
1860 PRINT "Matriz ";DD$;" Salvada en disco ";NDFN$
1870 ON ERROR GOTO 1:CLOSE #2:RETURN
1880 IF ERR%=170 AND ERL%=12678 THEN 1890 ELSE 1900
1890 PRINT "ARCHIVO ";DFN$;" No Existe.. Trate otra Vez":PR
INT
1900 CLOSE #1:RESUME 1460:IF ERR%=170 AND ERL%=12715 THEN C
LOSE #3:RESUME 1840
1910 IF ERR%=170 AND (ERL%=12713 OR ERL%=12676) THEN RESUME
 NEXT:ON ERROR GOTO 1
1920 IF RIGHT$(DDI$,1)<>"1" AND RIGHT$(DDI$,1)<>"2" THEN 15
30
1930 IF LEFT$(DDI$,1)="D" THEN RETURN
1940 IF LEFT$(DDI$,1)="d" THEN DDI$="D"+RIGHT$(DDI$,1) ELSE
 1530
1950 RETURN
1960 IF MID$(DFN$,1,2)<>DDI$ AND LEFT$(DFN$,3)<>":" THEN 15
70
1970 IF LEN(DFN$)<4 OR LEN(DFN$)>15 THEN 1570:RETURN
1980 IF MID$(NDFN$,1,2)<>DDI$ AND LEFT$(NDFN$,3)<>":" THEN
1800
1990 IF LEN(NDFN$)<4 OR LEN(NDFN$)>15 THEN 1810:RETURN
```

```
2000 IF MID$(NDFN$,1,2)<>DDI$ AND LEFT$(NDFN$,3)<>":" THEN
2300
2010 IF LEN(NDFN$)<4 OR LEN(NDFN$)>15 THEN 2300:RETURN
2020 ' SUB INVERSION DE MATRIZ
2030 FOR I=1 TO NV:FOR J=1 TO NV:IF I<>J THEN BPR(I,J)=0 EL
SE BPR(I,J)=1
2040 NEXT J,I:FOR K=1 TO NV:IF K>=NV THEN 2090 ELSE IMAX=K:
AMAX=ABS(APR(K,K)):KP1=K+1
2050 FOR I=KP1 TO NV:IF BMAX<ABS(BPR(I,K)) THEN IMAX=I:AMAX
=ABS(APR(I,K))
2060 NEXT I:IF IMAX=K THEN 2090
2070 FOR J=1 TO NV:ATMP=BPR(IMAX,J):APR(IMAX,J)=APR(K,J):AP
R(K,J)=ATMP
2080 ATMP=APR(IMAX,J):APR(IMAX,J)=APR(K,J):APR(K,J)=ATMP:NE
XT J
2090 IF ABS(APR(K,K))<=1.0E-07 THEN 2150
2100 DIV=APR(K,K):FOR J=1 TO NV:APR(K,J)=APR(K,J)/DIV:BPR(K
,J)=BPR(K,J)/DIV:NEXT J
2110 FOR I=1 TO NV:AMULT=APR(I,K):IF I-K=0 THEN 2130
2120 FOR J=1 TO NV:APR(I,J)=APR(I,J)-AMULT*APR(K,J):BPR(I,J
)=BPR(I,J)-AMULT*BPR(K,J):NEXT J
2130 NEXT I,K
2140 RETURN
2150 PRINT  "MATRIZ SINGULAR PARA K = ";K:GOTO 850
2160 ' SALVADO DE MATRICES
2170 PRINT:PRINT "... SALVANDO matrix A-MC del OBSERVADOR..
.":PRINT
2180 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N:HAT(I,J)=AHAT(I,J):NEXT J,I
2190 NN=N:MM=N:DD$="A-MC":GOSUB 2260:PRINT "... SALVANDO ma
triz de Entrada B del OBSERVADOR..."
2200 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO M:HAT(I,J)=B(I,J):NEXT J,I
2210 NN=N:MM=M:DD$="B":GOSUB 2260:PRINT "... SALVANDO matri
z de Salida M del OBSERVADOR..."
2220 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO R:HAT(I,J)=HHAT(I,J):NEXT J,I
2230 NN=N:MM=R:DD$="M":GOSUB 2260
2240 RETURN
2250 ' FIN SALVAR MATRICES
2260 ON ERROR GOTO 2380:CHANG=0 ' SUB almacenar
2270 PRINT:INPUT"ENTRE el Identificador de DISCO (D1,D2) ";
DDI$:GOSUB 2420
2280 PRINT:PRINT "DISCO de DATOS DEBE ESTAR EN ";DDI$:INPUT
"CORRECTO (S/N) ?";Q$:IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 2300
2290 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 2270 ELSE 2280
2300 CLS:PRINT"ENTRE el nombre del archivo de la matriz en
la forma ";DDI$;
2310 INPUT":NNNNNNNN.SSS                              ";NDFN$:GO
SUB 2000
2320 OPEN #3,NDFN$ INPUT:PRINT "El ARCIVO YA EXISTE -";:INP
UT"Desea Actualizarlo ?";Q$
2330 IF Q$="S" OR Q$="s" THEN CLOSE #3:GOTO 2350
```

```
2340 CLOSE #3:GOTO 2270
2350 OPEN #2,NDFN$ OUTPUT:PRINT #2,NN,MM
2360 FOR IQX=1 TO NN:FOR JQX=1 TO MM:PRINT #2,HAT(IQX,JQX):
NEXT JQX,IQX:CLOSE #2
2370 PRINT "Matriz ";DD$;" Salvada en disco ";NDFN$:ON ERRO
R GOTO 1:CLOSE #3:RETURN
2380 IF ERR=170 AND ERL=2320 THEN 2390 ELSE 2400
2390 PRINT "ARCHIVO ";NDNF$;" No Existe. Trate Otra Vez ":P
RINT:CLOSE #3:RESUME 2270
2400 IF ERR=170 AND ERL=2320 THEN CLOSE #3:RESUME 2310
2410 IF ERR=170 AND ERL=2350 THEN RESUME NEXT:ON ERROR GOTO
 0
2420 IF RIGHT$(DDI$,1)<>"1" AND RIGHT$(DDI$,1)<>"2" THEN 22
70
2430 IF LEFT$(DDI$,1)="D" THEN RETURN
2440 IF LEFT$(DDI$,1)="d" THEN DDI$="D"+RIGHT$(DDI$,1) ELSE
 2270
2450 RETURN
```

A.3: OBSERVADOR REDUCIDO DE LUENBERGER

.
<<LUENB1>> Determina un Observador de Orden Reducido para u
n Sistema SISE (A,B,C,D) Completamente Observable en la
forma:
Dada la MATRIZ W(t) = X1e(t) - M * Y(t)
d(W(t))/dt = (A11 - M * A21) * W(t) + (B1 - M * B2) * U(t)
+(A12 - M * A22 + A11 * M - M * A21 * M) * Y(t)
= W1 * W(t) + U1 * U(t) + Y1 * Y(t)
donde X1e(t) es el Vector de los Estados Estimados
U(t) es el Vector de Entrada
Y(t) es el Vector de Salida
A11,A12,A21,A22 son las submatrices de A
B1,B2 son las submatrices de B

Orden del Sistema n = 2
Numero de Entradas m = 1
Numero de Salidas r = 1

Matriz A

0.7	269
-94.7619	-204.7619

Matriz B

0
476.19

Matriz C

0	1

Valores propios Deseados del Observador:

Re(Lambda(1)=-200   Im(Lambda(1)=0

Dada la MATRIZ W(t) = X1e(t) - M * Y(t)

d(W(t))/dt = (A11 - M * A21) * W(t) + (B1 - M * B2) * U(t)
+ (A12 - M * A22 + A11 * M - M * A21 * M) * Y(t)
= W1 * W(t) + U1 * U(t) + Y1 * Y(t)

MATRIZ (A11 - M*A21) = W1 DEL OBSERVADOR DE ORDEN REDUCIDO
:

-200

MATRIZ U1 DEL OBSERVADOR DE ORDEN REDUCIDO :

-1008.54

MATRIZ Y1 DEL OBSERVADOR DE ORDEN REDUCIDO :

256.9146

.

.

```
1 CLR :MENUFLAG=0:GRAPHICS 0:POKE 82,0:POKE 710,0
20 PRINT "è<<LUENB1>> Determina un Observador de Orden Redu
cido para un Sistema SISE (A,B,C";
30 PRINT ",D) Completamente Observable en la forma:"
40 PRINT "Dada la MATRIZ W(t) = X1e(t) - M * Y(t)  "
50 PRINT "d(W(t))/dt = (A11 - M * A21) * W(t) +
    (B1 - M * B2) * U(t) +"
60 PRINT "                (A12 - M * A22 + A11 * M -
    M * A21 * M) * Y(t)"
70 PRINT "                = W1 * W(t) + U1 * U(t) +
    Y1 * Y(t)"
80 PRINT "donde X1e(t) es el Vector de los Estados
    Estimados"
90 PRINT "      U(t)   es el Vector de Entrada"
100 PRINT "      Y(t)   es el Vector de Salida"
110 PRINT "      A11,A12,A21,A22 son submatrices
     de A"
120 PRINT "      B1,B2  son submatrices de B":PRINT
130 PRINT "Medio de Salida para los Resultados:  Impresora
(1) o Pantalla (0) ";:TRAP 10160:INPUT IPR:PRINT
140 IF IPR<>0 AND IPR<>1 THEN 130
150 IF IPR=0 THEN 270
160 OPEN #7,8,0,"P:":PRINT #7;"<<LUENB1>> Determina un Obse
rvador de Orden Reducido para un Sistema SISE (A,B,C,D)";.
170 PRINT #7;" Completamente Observable en la":PRINT #7;"fo
rma:"
180 PRINT #7;"Dada la MATRIZ W(t) = X1e(t) - M * Y(t)"
190 PRINT #7;"d(W(t))/dt = (A11 - M * A21) * W(t) + (B1 - M
 * B2) * U(t)"
200 PRINT #7;"                +(A12 - M * A22 + A11 * M - M * A
21 * M) * Y(t)"
210 PRINT #7;"                = W1 * W(t) + U1 * U(t) + Y1 * Y(t
)"
220 PRINT #7;"donde X1e(t) es el Vector de los Estados Esti
mados"
230 PRINT #7;"      U(t)   es el Vector de Entrada"
240 PRINT #7;"      Y(t)   es el Vector de Salida"
```

```
250 PRINT #7;"       A11,A12,A21,A22 son las submatrices de
A"
260 PRINT #7;"       B1,B2 son las submatrices de B":PRINT #
7
270 PRINT "Orden del Sistema n = ";:TRAP 10290:INPUT N:IF N
<0 OR N<>INT(N) THEN 270
280 PRINT "Numero de Entradas m = ";:TRAP 10300:INPUT M:IF
M<0 OR M<>INT(M) THEN 280
290 PRINT "Numero de Salidas r = ";:TRAP 10310:INPUT R:PRIN
T :IF R<0 OR R<>INT(R) THEN 290
300 L=N-R:DIM A(N,N),B(N,M),PAMBDA(N),AHAT(N,N),CA(N+1),CD(
N+1),QA(N,N),HHAT(N,1),CLAMBDA(N),HAT(N,N),C(R,N),A1(N,M)
310 DIM APR(N,N),BPR(N,N),CPR(N,N),BR(N,N),QC(N,N*M),P(N,N)
,CK(1,N),T(N,N),DFN$(15),NDFN$(15),TC(N),COF(N+1),AB(N,N)
320 DIM AA(N,N),AA11(L,L),AA12(L,R),AA21(R,L),AA22(R,R),T1(
N,N),W1(L,L),U1(L,M),Y1(L,R),EM1(L,L),EM2(L,M),EM3(L,R)
330 DIM EM4(L,R),EM5(L,R),BB(N,M),BB1(L,M),BB2(R,M),CC(R,N)
,Q$(1),DD$(1),QN$(9),DDI$(2),H1(N,N),H2(N,N),IDN(N,N)
340 TRAP 40000:IF IPR=0 THEN 370
350 PRINT #7:PRINT #7;"Orden del Sistema n = ";N:PRINT #7;"
Numero de Entradas m = ";M
360 PRINT #7;"Numero de Salidas r = ";R:PRINT #7
370 IF M=1 AND R=1 THEN 400
380 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR;"NOTA: El Sistema debe ser
SISE":PRINT #IR
390 PRINT #IR;"Numero de Entradas = ";M:PRINT #IR;"Numero d
e Salidas = ";R:PRINT #IR;:NEXT IR:GOTO 1670
400 PRINT "Es el Sistema Completamente Observable  (S/N) ";
:INPUT Q$:IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 430
410 IF Q$<>"N" AND Q$<>"n" THEN 400
420 PRINT "Desea Chequear la Observabilidad del Sistema usa
ndo <<INDCOB>>":GOTO 1670
430 NN=N:MM=N:DD$="A":GOSUB 2420
440 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:A(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J1
:NEXT I1
450 NN=N:MM=M:DD$="B":GOSUB 2420
460 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:B(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J1
:NEXT I1
470 NN=R:MM=N:DD$="C":GOSUB 2420
480 FOR I1=1 TO R:FOR J1=1 TO N:C(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J1
:NEXT I1
490 REM Define la matriz transformacion T
500 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:T(I1,J1)=1:IF I1>J1 THEN T(
I1,J1)=0
510 NEXT J1:NEXT I1
520 FOR I=1 TO R:FOR J=1 TO N:T(I+L,J)=C(I,J):NEXT J:NEXT I
:PRINT :PRINT "Matriz Transformacion T(";R+L;",";N;"):"
530 PRINT :FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N:PRINT T(I,J),:NEXT J:P
RINT :NEXT I:PRINT :REM mat t
```

```
540 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=T(I1,J1):NEXT J1
:NEXT I1
550 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=A(I1,J1):NEXT J1
:NEXT I1
560 NPR=N:MPR=N:KPR=N:GOSUB 1940:REM mat t*a
570 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=T(I1,J1):NEXT J1
:NEXT I1
580 NV=N:GOSUB 2980:REM encuentra la matriz t inversa
590 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
J1:NEXT I1
600 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=BR(I1,J1):NEXT J
1:NEXT I1
610 NPR=N:MPR=N:KPR=N:GOSUB 1940:REM mat aa=t*a*tinv
620 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:AA(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT J
1:NEXT I1
630 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=T(I1,J1):NEXT J1
:NEXT I1
640 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:BPR(I1,J1)=B(I1,J1):NEXT J1
:NEXT I1
650 NPR=N:MPR=N:KPR=M:GOSUB 1940:REM mat bb=t*b
660 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:BB(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT J
1:NEXT I1
670 FOR I1=1 TO R:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=C(I1,J1):NEXT J1
:NEXT I1
680 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=BR(I1,J1):NEXT J
1:NEXT I1
690 NPR=R:MPR=N:KPR=N:GOSUB 1940:REM mat cc=c*tinv
700 FOR I1=1 TO R:FOR J1=1 TO N:CC(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT J
1:NEXT I1
710 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO L:AA11(I1,J1)=AA(I1,J1):NEXT
J1:NEXT I1
720 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO R:AA12(I1,J1)=AA(I1,J1+L):NEX
T J1:NEXT I1
730 FOR I1=1 TO R:FOR J1=1 TO L:AA21(I1,J1)=AA(I1+L,J1):NEX
T J1:NEXT I1
740 FOR I1=1 TO R:FOR J1=1 TO R:AA22(I1,J1)=AA(I1+L,J1+L):N
EXT J1:NEXT I1
750 FOR I=1 TO L:FOR J=1 TO M:BB1(I,J)=BB(I,J):NEXT J:NEXT
I
760 FOR I=1 TO R:FOR J=1 TO M:BB2(I,J)=BB(I+L,J):NEXT J:NEX
T I:N=L:PRINT
770 PRINT "Matriz Reducida A(";N;"x";N;") :":PRINT :FOR I=1
 TO N:FOR J=1 TO N:A(I,J)=AA11(I,J):NEXT J:NEXT I:PRINT
780 FOR I=1 TO R:FOR J=1 TO N:C(I,J)=AA21(I,J):NEXT J:NEXT
I
790 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N:PRINT A(I,J),:NEXT J:PRINT :N
EXT I:PRINT
```

```
800 PRINT "Matriz Reducida C(";R;"x";N;") :":PRINT :FOR I=1
 TO R:FOR J=1 TO N:PRINT C(I,J),:NEXT J:PRINT :NEXT I
810 TRAP 11090:GOSUB 2130:REM GO SUB Lamb
820 HAX=-100:FOR I=1 TO N:IF PAMBDA(I)>HAX AND PAMBDA(I)<>1
E-06 THEN 840
830 GOTO 850
840 HAX=PAMBDA(I):NEXT I
850 TRAP 40000:AUX=IPR:FOR I=1 TO N:IF PAMBDA(I)=1E-06 THEN
 870
860 GOTO 880
870 PAMBDA(I)=HAX-1:NEXT I
880 PRINT #IR:PRINT #IR;"Valores propios Deseados del Obser
vador: ":PRINT #IR
890 FOR I=1 TO N:PRINT #IR;"Re(Lambda(";I;")=";PAMBDA(I);"
  Im(Lambda(";I;")=";CLAMBDA(I):NEXT I:IF IPR=0 THEN 910
900 IR=7:IPR=0:GOTO 880
910 IR=6:IPR=AUX:REM Calculo del Polinomio Caracteristico d
e la Matriz A
920 GOSUB 1780
930 CA(N+1)=1:LA=(-1)^N
940 FOR I1=1 TO N+1:CA(I1)=LA*CA(I1):NEXT I1
950 TRAP 11250:FOR I=1 TO N:CK(1,I)=CA(I)-CD(I):NEXT I
960 TRAP 40000:FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=A(J1,
I1):NEXT J1:NEXT I1
970 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=C(J1,I1):NEXT J1
:NEXT I1
980 GOSUB 2010:REM GO SUB CONT a formar la matriz de contro
labilidad
990 IND=N:FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N:IF I=J THEN P(I,J)=1
1000 IF I<J THEN P(I,J)=0
1010 IF I<=J THEN 1030
1020 P(I,J)=CA(IND+J)
1030 NEXT J:IND=IND-1:NEXT I
1040 PRINT :PRINT "Dada la MATRIZ W(t) = X1e(t) - M * Y(t)"
:PRINT
1050 PRINT "d(W(t))/dt = (A11 - M * A21) * W(t)
      + (B1 - M * B2) * U(t) "
1060 PRINT "                  + (A12 - M * A22 + A11 * M
      - M * A21 * M) * Y(t)"
1070 PRINT "                  = W1 * W(t) + U1 * U(t)
      + Y1 * Y(t)":PRINT
1080 IF IPR=0 THEN 1130
1090 PRINT #7:PRINT #7;"Dada la MATRIZ W(t) = X1e(t) - M *
Y(t)":PRINT #7
1100 PRINT #7;"d(W(t))/dt = (A11 - M * A21) * W(t) + (B1 -
M * B2) * U(t) "
1110 PRINT #7;"              + (A12 - M * A22 + A11 * M - M *
A21 * M) * Y(t)"
```

```
1120 PRINT #7;"              = W1 * W(t) + U1 * U(t) + Y1 * Y(
t)":PRINT #7
1130 II=N*M+1:FOR J=1 TO (N*M)/2:FOR I=1 TO N:TMP=QC(I,J):Q
C(I,J)=QC(I,II-J)
1140 QC(I,II-J)=TMP:NEXT I:NEXT J:REM Matriz QC Inversa:PRI
NT
1150 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=QC(I1,J1):NEXT
J1:NEXT I1
1160 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=P(I1,J1):NEXT J
1:NEXT I1
1170 NPR=N:MPR=N:KPR=N:GOSUB 1940
1180 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
 J1:NEXT I1
1190 NV=N:GOSUB 2980:REM matriz inversa
1200 FOR I1=1 TO 1:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=CK(I1,J1):NEXT
J1:NEXT I1
1210 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=BR(I1,J1):NEXT
J1:NEXT I1
1220 NPR=1:MPR=N:KPR=N:GOSUB 1940
1230 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO 1:HHAT(I1,J1)=-CPR(J1,I1):NE
XT J1:NEXT I1
1240 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO 1:APR(I1,J1)=HHAT(I1,J1):NEX
T J1:NEXT I1
1250 FOR I1=1 TO 1:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=C(I1,J1):NEXT J
1:NEXT I1
1260 NPR=N:MPR=1:KPR=N:GOSUB 1940
1270 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:AHAT(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEX
T J1:NEXT I1
1280 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:AHAT(I1,J1)=A(I1,J1)-AHAT(
I1,J1):NEXT J1:NEXT I1:IR=6:AUX=IPR
1290 PRINT #IR;"MATRIZ (A11 - M*A21) = W1 DEL OBSERVADOR DE
 ORDEN REDUCIDO : ":PRINT #IR
1300 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:PRINT #IR;AHAT(I1,J1),:NEX
T J1:PRINT #IR:NEXT I1:IF IPR=0 THEN 1320
1310 IPR=0:IR=7:GOTO 1290
1320 PRINT "MATRIZ M DEL OBSERVADOR DE ORDEN REDUCIDO :":PR
INT :IPR=AUX:IR=6
1330 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO 1:PRINT HHAT(I1,J1);
1340 NEXT J1:PRINT :NEXT I1
1350 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO R:APR(I1,J1)=HHAT(I1,J1):NEX
T J1:NEXT I1
1360 FOR I1=1 TO R:FOR J1=1 TO L:BPR(I1,J1)=AA21(I1,J1):NEX
T J1:NEXT I1
1370 NPR=L:MPR=R:KPR=R:GOSUB 1940:REM mat m*aa21
1380 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO L:EM1(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
 J1:NEXT I1
1390 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO L:W1(I1,J1)=AA11(I1,J1)-H1(I
1,J1):NEXT J1:NEXT I1
```

```
1400 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO R:APR(I1,J1)=HHAT(I1,J1):NEX
T J1:NEXT I1
1410 FOR I1=1 TO R:FOR J1=1 TO M:BPR(I1,J1)=BB2(I1,J1):NEXT
 J1:NEXT I1
1420 NPR=L:MPR=R:KPR=M:GOSUB 1940:REM mat m*bb2
1430 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO M:EM2(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
 J1:NEXT I1
1440 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO M:U1(I1,J1)=BB1(I1,J1)-EM2(I
1,J1):NEXT J1:NEXT I1
1450 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO R:APR(I1,J1)=HHAT(I1,J1):NEX
T J1:NEXT I1
1460 FOR I1=1 TO R:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=AA22(I1,J1):NEX
T J1:NEXT I1
1470 NPR=L:MPR=R:KPR=R:GOSUB 1940:REM m*aa22
1480 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO R:EM3(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
 J1:NEXT I1
1490 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO L:APR(I1,J1)=AA11(I1,J1):NEX
T J1:NEXT I1
1500 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=HHAT(I1,J1):NEX
T J1:NEXT I1
1510 NPR=L:MPR=L:KPR=R:GOSUB 1940:REM mat aa11*m
1520 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO R:EM4(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
 J1:NEXT I1
1530 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO L:APR(I1,J1)=EM1(I1,J1):NEXT
 J1:NEXT I1
1540 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=HHAT(I1,J1):NEX
T J1:NEXT I1
1550 NPR=L:MPR=L:KPR=R:GOSUB 1940:REM mat m*aa21*m
1560 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO R:EM5(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
 J1:NEXT I1
1570 FOR I=1 TO L:FOR J=1 TO R:Y1(I,J)=AA12(I,J)-EM3(I,J)+E
M4(I,J)-EM5(I,J):NEXT J:NEXT I:IR=6:AUX=IPR
1580 PRINT #IR:PRINT #IR;"MATRIZ U1 DEL OBSERVADOR DE ORDEN
 REDUCIDO :":PRINT #IR
1590 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO M:PRINT #IR;U1(I1,J1),:NEXT
J1:PRINT #IR:NEXT I1
1600 PRINT #IR:PRINT #IR;"MATRIZ Y1 DEL OBSERVADOR DE ORDEN
 REDUCIDO :":PRINT #IR
1610 FOR I1=1 TO L:FOR J1=1 TO R:PRINT #IR;Y1(I1,J1),:NEXT
J1:PRINT #IR:NEXT I1:IF IPR=0 THEN 1630
1620 IR=7:IPR=0:GOTO 1580
1630 IPR=AUX:IR=6:PRINT :PRINT "Desea SALVAR en disco las m
atrices RESULTANTES (S/N) ";:INPUT Q$
1640 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 1670
1650 IF Q$<>"S" AND Q$<>"s" THEN 1630
1660 GOSUB 3360
1670 IF MENUFLAG=0 THEN 1710:REM SIN MENU
1680 PRINT :PRINT "Desea regresar al MENU ? (S/N) ";:INPUT
Q$:PRINT
```

```
1690 IF Q$<>"S" AND Q$<>"s" AND Q$<>"N" AND Q$<>"n" THEN 16
80
1700 IF (Q$="S" OR Q$="s") AND (MENUFLAG=1) THEN RUN "D:MEN
U.bas":REM ,4990
1710 PRINT :PRINT "Desea volver a correr <<LUENB1>> (S/N) "
;:INPUT Q$:PRINT
1720 IF (Q$<>"S") AND (Q$<>"s") AND (Q$<>"N") AND (Q$<>"n")
 THEN 1710
1730 IF Q$="S" OR Q$="s" THEN RUN :REM PROGRAMA <<LUENB1>>
1740 END
1750 REM SUB RESmat(N,A(*),CA(*),Q(*))
1760 REM "Resmat" CALCULA LA MATRIZ RESOLVENTE (INVERSA DE
sI-A)
1770 REM mat idn=idn
1780 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N:IDN(I,J)=0:IF I=J THEN IDN(I
,J)=1
1790 NEXT J:NEXT I:FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N:QA(I,J)=0:IF I
=J THEN QA(I,J)=1
1800 NEXT J:NEXT I:I1=N+1
1810 I1=I1-1:FOR J1=1 TO N:FOR K1=1 TO N:H1(J1,K1)=QA(J1,K1
):NEXT K1:NEXT J1
1820 NPR=N:MPR=N:KPR=N:REM mat m2=a*m1
1830 FOR IP=1 TO N:FOR JP=1 TO N:APR(IP,JP)=A(IP,JP):NEXT J
P:NEXT IP
1840 FOR IP=1 TO N:FOR JP=1 TO N:BPR(IP,JP)=H1(IP,JP):NEXT
JP:NEXT IP
1850 GOSUB 1940
1860 FOR IP=1 TO N:FOR JP=1 TO N:H2(IP,JP)=CPR(IP,JP):NEXT
JP:NEXT IP
1870 CA(I1)=0:FOR J1=1 TO N:CA(I1)=CA(I1)+H2(J1,J1):NEXT J1
:CA(I1)=CA(I1)/(N-I1+1):IF I1=1 THEN 1930
1880 REM mat m1=(ca(i))*idn
1890 FOR IP=1 TO N:FOR JP=1 TO N:H1(IP,JP)=(CA(I1))*IDN(IP,
JP):NEXT JP:NEXT IP
1900 REM mat m2=m2+m1
1910 FOR IP=1 TO N:FOR JP=1 TO N:H2(IP,JP)=H2(IP,JP)+H1(IP,
JP):NEXT JP:NEXT IP
1920 FOR J1=1 TO N:FOR K1=1 TO N:QA(J1,K1)=H2(J1,K1):NEXT K
1:NEXT J1:IF I1<>1 THEN 1810
1930 RETURN
1940 I5=0:REM SUB MATRIZ PRODUCTO
1950 I5=I5+1:K5=0
1960 K5=K5+1:CPR(I5,K5)=0:J5=0
1970 J5=J5+1:CPR(I5,K5)=CPR(I5,K5)+APR(I5,J5)*BPR(J5,K5):IF
 J5<MPR THEN 1970
1980 IF K5<KPR THEN 1960
1990 IF I5<NPR THEN 1950
```

```
2000 RETURN :REM SUB Cont .. Construccion de la Matriz de C
ontrolabilidad
2010 NPR=N:MPR=N:KPR=M:GOSUB 1940:REM Matriz Producto
2020 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:AB(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
J1:NEXT I1
2030 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO M:QC(I,J)=C(J,I):NEXT J:NEXT I
:KVAL=1:I=0
2040 I=I+1:FOR J=1 TO N:FOR LZ=1 TO M:QC(J,KVAL*M+LZ)=AB(J,
LZ):NEXT LZ:NEXT J
2050 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=A(J1,I1):NEXT J
1:NEXT I1
2060 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:BPR(I1,J1)=AB(I1,J1):NEXT
J1:NEXT I1
2070 NPR=N:MPR=N:KPR=M:GOSUB 1940:REM Matrix Product
2080 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:A1(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
J1:NEXT I1
2090 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:AB(I1,J1)=A1(I1,J1):NEXT J
1:NEXT I1:KVAL=KVAL+1:IF I<N-1 THEN 2040
2100 RETURN
2110 REM SUB Lamb Encuentra coeficientes de la expresion (z
-La(i))^n donde
2120 REM La(i) = Lar(i) + j Lai(i) es el i-esimo valor prop
io o raiz
2130 FOR I=1 TO N:PAMBDA(I)=0:CLAMBDA(I)=0:NEXT I:PRINT
2140 PRINT "Entre todos los Polos del Observador SEPARADAME
NTE - Polos COMPLEJOS son Considerados como dos Polos :"
2150 PRINT :FOR I=1 TO N:TC(I)=0:PRINT "Enter Lambda(";I;")
 - Real , Imag":PRINT "Re & Im ";:INPUT PEAL,CMG
2160 IF PEAL<=1E-06 THEN 2190
2170 PRINT :PRINT "CUIDADO : Los Polos deben ser colocados
en el Semiplano Izquierdo.":PRINT
2180 PRINT "Lambda(";I;") REAL = -";PEAL:PEAL=-PEAL
2190 PAMBDA(I)=PEAL:CLAMBDA(I)=CMG:NEXT I:PRINT
2200 PRINT :PRINT "Cambios (S/N) ";:INPUT Q$:IF Q$="S" OR Q
$="s" THEN 2130
2210 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 2240
2220 GOTO 2200
2230 REM SUB Sembl - Calcula el polinomio caracteristico de
 raices reales o complejas
2240 NNL=N+1
2250 CD(NNL)=1
2260 MMK=0
2270 MMK=MMK+1:SUMR=0:SUMI=0:LV=1:COF(1)=1:GOTO 2290
2280 COF(LV)=COF(LV)+1
2290 IF LV<MMK THEN 2320
2300 IF LV=MMK THEN 2330
2310 GOTO 2400
2320 MMM=MMK-1:FOR I=LV TO MMM:II=I+1:COF(II)=COF(I)+1:NEXT
 I
2330 PR=1:PI=0:FOR I=1 TO MMK:ICK=COF(I):PRT=PR*PAMBDA(ICK)
-PI*CLAMBDA(ICK)
2340 PIT=PI*PAMBDA(ICK)+PR*CLAMBDA(ICK):PR=-PRT:PI=-PIT:NEX
T I
```

```
2350 PRINT :PRINT "PR=";PR,"PI=";PI,"LAM(1)=";PAMBDA(1),,,"
LAM(2)=";PAMBDA(2):PRINT
2360 SUMR=SUMR+PR:SUMI=SUMI+PI:FOR I=1 TO MMK:LV=MMK-I+1:JC
1=COF(LV)-N+MMK-LV:IF JC1<0 THEN 2280
2370 IF JC1>0 THEN 2400
2380 NEXT I:MPP=N-MMK+1:CD(MPP)=SUMR:IF MMK<N THEN 2270
2390 GOTO 2410
2400 PRINT "ERROR en SUB Sembl !"
2410 RETURN
2420 TRAP 14020:CHANG=0:REM SUB mat
2430 PRINT "èDefina la MATRIZ ";DD$;"(";NN;"x";MM;") :":PRI
NT
2440 PRINT :PRINT "Tiene la opcion de RECUPERAR una matriz
previamente almacenada en disco":PRINT ,,"O"
2450 PRINT "ENTRAR una nueva matriz desde el teclado,";:PRI
NT "ENTRE su seleccion (R/E) ";:INPUT Q$
2460 IF Q$="E" OR Q$="e" THEN QN$="ENTRAR"
2470 IF Q$="R" OR Q$="r" THEN QN$="RECUPERAR"
2480 IF (QN$<>"ENTRAR" AND QN$<>"RECUPERAR") THEN 2440
2490 PRINT :PRINT "Confirme el Modo ";QN$;" para la Entrada
 de datos (S/N) ";:INPUT Q$:PRINT
2500 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 2440
2510 IF Q$<>"S" AND Q$<>"s" THEN 2490
2520 IF QN$="ENTRAR" THEN 2630
2530 PRINT :PRINT "ENTRE el Identificador de DISCO (D1, D2)
 ";:INPUT DDI$:GOSUB 2950:PRINT
2540 PRINT "El DISCO DE DATOS DEBE ESTAR EN ";DDI$:PRINT "C
ORRECTO (S/N) ";:INPUT Q$
2550 IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 2580
2560 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 2530
2570 GOTO 2540
2580 PRINT "èENTRE el nombre del archivo de la matriz en la
 forma ";DDI$;":NNNNNNNN.SSS",,:INPUT DFN$
2590 GOSUB 3270:OPEN #1,4,0,DFN$
2600 INPUT #1;NND,MMD:IF NND=NN AND MMD=MM THEN 2620:PRINT
"El Archivo es";NND;"x";MMD;". Debe ser ";
2610 PRINT NN;"x";MM;"Trate Otra Vez":CLOSE #1:GOTO 2440
2620 FOR IQX=1 TO NN:FOR JQX=1 TO MM:INPUT #1,HAT:HAT=HAT(I
QX,JQX):NEXT JQX:NEXT IQX:CLOSE #1:GOTO 2650
2630 PRINT :PRINT "Matriz ";DD$;"(";NN;"x";MM;")":PRINT
2640 FOR I=1 TO NN:FOR J=1 TO MM:PRINT DD$;"(";I;",";J;")";
:INPUT HAT:HAT(I,J)=HAT:NEXT J:NEXT I
2650 PRINT :PRINT "Matriz ";DD$:PRINT :FOR I=1 TO NN:FOR J=
1 TO MM
2660 PRINT HAT(I,J),:NEXT J:PRINT :NEXT I
2670 PRINT :PRINT "CAMBIOS (S/N)";:INPUT Q$:PRINT :IF Q$<>"
S" AND Q$<>"s" THEN 2690
2680 CHANG=1:GOTO 2710
```

```
2690 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 2730
2700 GOTO 2670
2710 PRINT "COORDENADAS DE ";DD$;"(*), (fil & col) ";:INPUT
 I,J:IF I<=0 OR I>NN OR J<0 OR J>MM THEN 2710
2720 PRINT :PRINT DD$;"(";I;",";J;")";:INPUT HAT:HAT(I,J)=H
AT:GOTO 2650
2730 IF PM<>1 AND IPR<>1 THEN 2760
2740 PRINT #7;"Matriz ";DD$:PRINT #7:FOR I=1 TO NN:FOR J=1
TO MM
2750 PRINT #7;HAT(I,J),:NEXT J:PRINT #7:NEXT I:PRINT #7
2760 IF CHANG=0 AND QN$="RECUPERAR" THEN 2910
2770 PRINT "Desea SALVAR esta matriz en disco (S/N) ";:INPU
T Q$:IF Q$="N" OR Q$="n" THEN RETURN
2780 IF Q$<>"N" AND Q$<>"n" AND Q$<>"S" AND Q$<>"s" THEN 27
70
2790 PRINT :PRINT "ENTRE el Identificador de DISCO (D1, D2)
 ";:INPUT DDI$:GOSUB 2950
2800 PRINT :PRINT "EL DISCO DE DATOS DEBE ESTAR EN ";DDI$:P
RINT "CORRECTO (S/N) ";
2810 INPUT Q$:IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 2840
2820 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 2790
2830 GOTO 2800
2840 PRINT "èENTRE el nombre del archivo de la matriz en la
 forma ";DDI$;":NNNNNNNN.SSS",,:INPUT NDFN$
2850 TRAP 13940
2860 GOSUB 3290:OPEN #3,4,0,NDFN$:PRINT "ARCHIVO YA EXISTE
-";:PRINT "Desea Actualizarlo ";:INPUT Q$
2870 IF Q$<>"S" AND Q$<>"s" THEN CLOSE #3:GOTO 2790
2880 OPEN #2,8,0,NDFN$:PRINT #2,NN,MM
2890 FOR IQX=1 TO NN:FOR JQX=1 TO MM:PRINT #2,HAT(IQX,JQX):
NEXT JQX:NEXT IQX:CLOSE #2
2900 PRINT :PRINT "Matriz ";DD$;" Salvada en disco ";NDFN$:
PRINT
2910 TRAP 1:CLOSE #2:RETURN
2920 PRINT "ARCHIVO ";DFN$;" No Existe. Trate Otra Vez":PRI
NT :CLOSE #1:GOTO 2440
2930 CLOSE #3:GOTO 2880
2940 GOTO 2580:TRAP 1:GOTO 2970
2950 IF DDI$<>"D1" AND DDI$<>"D2" THEN POP :GOTO 2790
2960 RETURN
2970 REM INVERSION DE MATRIZ
2980 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N
2990 IF I<>J THEN 3010
3000 BR(I,J)=1:GOTO 3020
3010 BR(I,J)=0
3020 NEXT J:NEXT I
3030 FOR K=1 TO N
3040 IF K>=N THEN 3140
```

```
3050 IMAX=K:BMAX=ABS(APR(K,K)):KP1=K+1
3060 FOR I=KP1 TO N
3070 IF AMAX>=ABS(BR(I,K)) THEN 3090
3080 IMAX=I:BMAX=ABS(APR(I,K))
3090 NEXT I
3100 IF IMAX=K THEN 3140
3110 FOR J=1 TO N
3120 BTMP=BR(IMAX,J):APR(IMAX,J)=APR(K,J):APR(K,J)=BTMP
3130 BTMP=APR(IMAX,J):APR(IMAX,J)=APR(K,J):APR(K,J)=BTMP:NE
XT J
3140 IF ABS(APR(K,K))<=1.0E-07 THEN 3260
3150 DIV=APR(K,K)
3160 FOR J=1 TO N
3170 APR(K,J)=APR(K,J)/DIV:BR(K,J)=BR(K,J)/DIV:NEXT J
3180 FOR I=1 TO N
3190 BMULT=APR(I,K):IF I-K=0 THEN 3230
3200 FOR J=1 TO N
3210 APR(I,J)=APR(I,J)-BMULT*APR(K,J):BR(I,J)=BR(I,J)-BMULT
*BR(K,J)
3220 NEXT J
3230 NEXT I
3240 NEXT K
3250 RETURN
3260 PRINT "MATRIZ SINGULAR PARA K = ";K:GOTO 1670
3270 IF LEN(DFN$)<4 OR LEN(DFN$)>15 THEN POP :GOTO 2580
3280 RETURN
3290 IF LEN(NDFN$)<4 OR LEN(NDFN$)>15 THEN POP :GOTO 2840
3300 RETURN
3310 IF LEN(NDFN$)<4 OR LEN(NDFN$)>15 THEN POP :GOTO 3510
3320 RETURN
3330 IF DDI$<>"D1" AND DDI$<>"D2" THEN POP :GOTO 3460
3340 RETURN
3350 REM SALVAR MATRICES
3360 PRINT :PRINT "... SALVANDO matrix REDUCIDA ((A11 - M*A
21) = W1) del OBSERVADOR...":PRINT
3370 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N:HAT(I,J)=AHAT(I,J):NEXT J:NE
XT I:NN=N:MM=N:DD$="(A11-M*A21)":GOSUB 3450
3380 PRINT "... SALVANDO matriz REDUCIDA U1 del OBSERVADOR.
.."
3390 FOR I=1 TO L:FOR J=1 TO M:HAT(I,J)=U1(I,J):NEXT J:NEXT
 I:NN=N:MM=R:DD$="M":GOSUB 3450
3400 PRINT "... SALVANDO matriz REDUCIDA U1 del OBSERVADOR.
.."
3410 FOR I=1 TO L:FOR J=1 TO M:HAT(I,J)=U1(I,J):NEXT J:NEXT
 I:NN=L:MM=M:DD$="U1":GOSUB 3450
3420 PRINT :PRINT "... SALVANDO matriz REDUCIDA Y1 del OBSE
RVADOR...":PRINT
```

```
3430 FOR I=1 TO L:FOR J=1 TO R:HAT(I,J)=Y1(I,J):NEXT J:NEXT
 I:NN=L:MM=R:DD$="Y1":GOSUB 3450:RETURN
3440 REM FIN DE SALVAR MATRICES
3450 TRAP 16350:CHANG=0:REM SUB ALMACENAR
3460 PRINT :PRINT "ENTRE el Identificador de DISCO (D1, D2)
 ";:INPUT DDI$:GOSUB 3330
3470 PRINT :PRINT "EL DISCO DE DATOS DEBE ESTAR EN ";DDI$:P
RINT "CORRECTO (S/N) ?",:INPUT Q$
3480 IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 3510
3490 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 3460
3500 GOTO 3470
3510 PRINT "èENTRE el nombre del archivo de la matriz en la
 forma ";DDI$;":NNNNNNNN.SSS";:PRINT ,,,:INPUT NDFN$
3520 GOSUB 3310:OPEN #3,4,0,NDFN$:PRINT "EL ARCHIVO YA EXIS
TE -":PRINT "Desea Actualizarlo ";:INPUT Q$
3530 IF Q$<>"Y" AND Q$<>"y" THEN CLOSE #3:GOTO 3460
3540 OPEN #2,8,0,NDFN$:PRINT #2,NN,MM:FOR IQX=1 TO NN:FOR J
QX=1 TO MM
3550 PRINT "Matriz ";DD$;"Salvada en disco ";NDFN$:TRAP 1:C
LOSE #2:RETURN
3560 PRINT "ARCHIVO ";NDFN$;" No Existe. Trate Otra Vez":PR
INT :CLOSE #3:GOTO 3510
```

A.4: OBSERVADOR ESTOCASTICO

```
<<ESTOC.>> Es una rutina de estimacion estocastica para un
sistema SISE observable con la siguiente formulacion:
Modelo del MENSAJE:
x(i+1) = A * x(i) + B * u(i) + w(i)
El RUIDO de ENTRADA es un proceso de RUIDO BLANCO de MEDIA
CERO con:
cov(w(j),w(i)) = Q(i)   PARA j=i
               = 0      PARA j<>i.
Modelo de la MEDICION:
y(i) = C * x(i) + v(i)
El RUIDO de la MEDICION es un proceso de RUIDO BLANCO de ME
DIA CERO con:
cov(v(j),v(i)) = R(i)   PARA j=i
               = 0      PARA j<>i
Otras ASUNCIONES son:
cov(w(j),v(i)) = 0      PARA todo j,i
cov(x(j),w(i)) = 0      PARA todo j,i

Orden del Sistema =  2
Numero de Entradas =  1
Numero de Salidas =  1

Numero de Mediciones =  60

Debe entrar los valores iniciales de C,A,B,Q,R,X,XE,P,Y
Poniendo el valor inicial i=1


Matriz C

 0.000  0.100E+01

Matriz R

 0.100E+01

Matriz A

 0.700  0.269E+03
 -.948E+02  -.205E+03

Matriz B

 0.000
 0.476E+03
```

Matriz P

```
 0.100E+01  0.000
 0.000  0.100E+01
```

Matriz Q

```
 0.100E+01  0.000
 0.000  0.100E+01
```

Matriz x

```
 0.000
 0.000
```

Matriz xe

```
 0.000
 0.000
```

Matriz y

```
 0.26
 0.45
 0.59
 0.69
 0.77
 0.82
 0.85
 0.86
 0.86
 0.85
 0.82
 0.79
 0.76
 0.71
 0.66
 0.61
 0.56
 0.51
 0.46
 0.40
 0.35
 0.31
 0.26
 0.22
 0.18
 0.15
 0.12
```

0.09
0.07
0.05
0.03
0.02
0.01
-.00
-.01
-.01
-.01
-.01
-.01
-.01
-.01
-.01
-.01
-.00
0.00
0.01
0.01
0.01
0.02
0.02
0.02
0.02
0.03
0.03
0.03
0.03
0.03
0.03
0.03
0.03

ESTIMADOS ESTOCASTICOS

t=iT	x1(t)	x2(t)	y(i)	xe1(i)	xe2(i)
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.06	0.43	0.26	0.53	0.31
3	0.22	0.77	0.45	1.05	0.53
4	0.47	1.03	0.59	1.59	0.70
5	0.77	1.21	0.69	2.04	0.82
6	1.12	1.34	0.77	2.48	0.91
7	1.49	1.41	0.82	2.85	0.96
8	1.87	1.44	0.85	3.19	0.99
9	2.26	1.42	0.86	3.50	1.00
10	2.64	1.38	0.86	3.76	0.99
11	3.00	1.31	0.85	3.98	0.96

12	3.35	1.23	0.82	4.16	0.93
13	3.67	1.13	0.79	4.32	0.88
14	3.96	1.02	0.76	4.43	0.82
15	4.22	0.91	0.71	4.54	0.76
16	4.46	0.80	0.66	4.62	0.70
17	4.66	0.69	0.61	4.68	0.63
18	4.84	0.59	0.56	4.74	0.57
19	4.98	0.49	0.51	4.79	0.50
20	5.11	0.40	0.46	4.81	0.44
21	5.20	0.31	0.40	4.83	0.38
22	5.28	0.23	0.35	4.85	0.32
23	5.34	0.17	0.31	4.86	0.27
24	5.37	0.11	0.26	4.87	0.22
25	5.41	0.06	0.22	4.88	0.18
26	5.42	0.01	0.18	4.89	0.14
27	5.42	-0.02	0.15	4.89	0.11
28	5.41	-0.05	0.12	4.89	0.08
29	5.40	-0.08	0.09	4.89	0.05
30	5.38	-0.09	0.07	4.89	0.03
31	5.36	-0.11	0.05	4.89	0.01
32	5.33	-0.11	0.03	4.89	-0.00
33	5.30	-0.12	0.02	4.89	-0.02
34	5.28	-0.12	0.01	4.89	-0.02
35	5.25	-0.12	-0.00	4.89	-0.03
36	5.22	-0.11	-0.01	4.89	-0.03
37	5.20	-0.11	-0.01	4.89	-0.04
38	5.17	-0.10	-0.01	4.89	-0.04
39	5.15	-0.09	-0.01	4.89	-0.03
40	5.13	-0.09	-0.01	4.89	-0.03
41	5.11	-0.08	-0.01	4.89	-0.03
42	5.09	-0.07	-0.01	4.89	-0.03
43	5.08	-0.06	-0.01	4.89	-0.02
44	5.07	-0.05	-0.01	4.88	-0.02
45	5.06	-0.05	-0.00	4.88	-0.01
46	5.05	-0.04	0.00	4.88	-0.01
47	5.04	-0.04	0.01	4.88	-0.00
48	5.04	-0.03	0.01	4.88	-0.00
49	5.03	-0.02	0.01	4.88	0.00
50	5.03	-0.02	0.02	4.88	0.01
51	5.03	-0.02	0.02	4.88	0.01
52	5.03	-0.01	0.02	4.88	0.01
53	5.03	-0.01	0.02	4.88	0.01
54	5.03	-0.01	0.03	4.88	0.02
55	5.03	-0.01	0.03	4.88	0.02
56	5.03	-0.01	0.03	4.88	0.02
57	5.03	-0.02	0.03	4.88	0.02
58	5.03	-0.01	0.03	4.88	0.02
59	5.04	-0.01	0.03	4.88	0.02
60	5.04	-0.01	0.03	4.88	0.02

61 5.04 -0.01 0.03 4.88 0.02

```
1 CLEAR:DEFINT L-N,I-K,R:MENUFLAG=0:OPTION BASE 1:POKE 82,0
:GRAPHICS (0):POKE 710,0
20 CLS:PRINT "<<ESTOC.>> Es una rutina de estimacion  Estoc
astica para un sistema SISE observa";
30 PRINT"ble con la siguiente formulacion:":PRINT"Modelo de
l MENSAJE:":PRINT"x(i + 1) = A * x(i) + B * u(i) + w(i)"
40 PRINT "El RUIDO de ENTRADA es un proceso de RUIDO BLANCO
 DE MEDIA CERO con:"
50 PRINT "cov(w(j),w(i)) = Q(i)  PARA j=i":PRINT "
       = 0      PARA j<>i":PRINT "Modelo de la Medicion:"
60 PRINT "y(i) = C * x(i) + v(i)":PRINT "El RUIDO de la MED
ICION es un proceso de RUIDO BLANCO de MEDIA CERO con:"
70 PRINT"cov(v(j),v(i)) = R(i)  PARA j=i":PRINT"
     = 0      PARA j<>i":PRINT "Otras ASUNCIONES son:"
80 PRINT "cov(w(j),v(i)) = 0      PARA todo j,i":PRINT "cov(
x(j),w(i)) = 0      PARA todo j,i":PRINT
90 INPUT"Medio de salida para los resultados:  impresora (1
) o pantalla (0) ";IPR:CLS:IF IPR<>0 AND IPR<>1 THEN 90
100 IF IPR=0 THEN 210 ELSE OPEN #7,"P:" OUTPUT
110 PRINT #7,"<<ESTOC.>> Es una rutina de estimacion estoca
stica para un"
120 PRINT #7,"sistema SISE observable con la siguiente form
ulacion:"
130 PRINT #7,"Modelo del MENSAJE:":PRINT #7,"x(i+1) = A * x
(i) + B * u(i) + w(i)"
140 PRINT #7,"El RUIDO de ENTRADA es un proceso de RUIDO BL
ANCO de MEDIA CERO con:"
150 PRINT #7,"cov(w(j),w(i)) = Q(i)  PARA j=i"
160 PRINT #7,"                 = 0      PARA j<>i":PRINT #7,"M
odelo de la MEDICION:":PRINT #7,"y(i) = C * x(i) + v(i)"
170 PRINT #7,"El RUIDO de la MEDICION es un proceso de RUID
O BLANCO de MEDIA CERO con:"
180 PRINT #7,"cov(v(j),v(i)) = R(i)  PARA j=i":PRINT #7,"
               = 0      PARA j<>i"
190 PRINT #7,"Otras ASUNCIONES son:":PRINT #7,"cov(w(j),v(i
)) = 0      PARA todo j,i"
200 PRINT #7,"cov(x(j),w(i)) = 0      PARA todo j,i":PRINT #
7,
210 INPUT"Entre el ORDEN del Sistema Dinamico ";N:IF N<>INT
(N) OR N<0 THEN 210
220 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"Orden del Sistema = ";N:NE
XT IR
230 INPUT"Entre NUMERO de Entradas al Sistema ";R:IF R<>INT
(R) OR R<0 THEN 230
240 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"Numero de Entradas = ";R:N
EXT IR
```

```
250 INPUT"Entre NUMERO de Salidas ";M:IF M<>INT(M) OR M<0 T
HEN 250
260 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"Numero de Salidas = ";M:NE
XT IR
270 PRINT #IPR+6,:INPUT"Entre NUMERO de Mediciones ";IK:IF
IK<>INT(IK) OR IK<0 THEN 270
280 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"Numero de Mediciones = ";I
K:PRINT #IR,:NEXT IR
290 DIM X(IK+1,N,R),XE(IK+1,N,R),P(IK+1,N,N),TK(IK+1,N,M),Y
(IK+2,M,R),YE(IK+1,M,R),YT(IK+1,M,R),XT(IK+2,N,R)
300 DIM PT(IK+1,N,N),HAT(IK+1,N),DD$(52)
310 IF M=1 AND R=1 THEN 330 ELSE FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #I
R,"NOTA: El sistema debe ser SISE":PRINT #IR,
320 PRINT #IR,"Numero de Entradas = ";M:PRINT #IR,:PRINT #I
R,"Numero de Salidas = ";R:PRINT #IR,:NEXT IR:GOTO 1180
330 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"Debe entrar los valores in
iciales de C,A,B,Q,R,X,XE,P,Y"
340 PRINT "Usando un campo variable B*U: x(i+1) = A * x(i)
+ B * u(i) + w(i)"
350 PRINT #IR,"Poniendo el valor inicial i=1":PRINT #IR,:NE
XT IR
360 NN=M:MM=N:DD$="C":GOSUB 1280
370 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO N:C(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J1
,I1
380 NN=M:MM=M:DD$="R":GOSUB 1280
390 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO M:RM(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J
1,I1
400 NN=N:MM=N:DD$="A":GOSUB 1280
410 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:A(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J1
,I1
420 NN=N:MM=M:DD$="B":GOSUB 1280
430 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:B(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J1
,I1
440 NN=N:MM=N:DD$="P":GOSUB 1280
450 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:P(1,I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT
J1,I1
460 NN=N:MM=N:DD$="Q":GOSUB 1280

470 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:QM(I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT J
1,I1
480 NN=N:MM=R:DD$="x":GOSUB 1280
490 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO 1:X(1,I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT:
NEXT
500 NN=N:MM=R:DD$="xe":GOSUB 1280
510 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO 1:XE(1,I1,J1)=HAT(I1,J1):NEXT
 J1,I1
520 ' ENTRADA DE LAS MEDICIONES DE SALIDA
530 PRINT "Entre las Mediciones de Salida y(i), i = 2, ...,
";IK+1:PRINT
540 NN=IK:MM=1:DD$="y":GOSUB 1280
```

```
850 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:APR(I1,J1)=B(I1,J1):NEXT J1
,I1
860 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=-CPR(I1,J1):NEXT
 J1,I1
870 IF RM(1,1)>0 THEN BPR(1,1)=1
880 IF RM(1,1)=0 AND QM(1,1)=0 THEN FOR I1=1 TO N:FOR J1=1
TO M:TK(IU,I1,J1)=0:NEXT J1,I1
890 NPR=M:MPR=M:KPR=R:GOSUB 1250 ' mat b*kt1*a*xe1
900 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:XT(IU,I1,J1)=F(I1,J1)+CPR(I
1,J1):NEXT J1,I1
910 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=C(I1,J1):NEXT J1
,I1
920 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=XT(IU,I1,J1):NEX
T J1,I1
930 NPR=M:MPR=N:KPR=R:GOSUB 1250 ' mat c*xt
940 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO R:YT(IU,I1,J1)=Y(IU,I1,J1)-CP
R(I1,J1):NEXT J1,I1
950 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:APR(I1,J1)=TK(IU,I1,J1):NEX
T J1,I1
960 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=YT(IU,I1,J1):NEX
T J1,I1
970 NPR=N:MPR=M:KPR=R:GOSUB 1250 ' mat kt*(y-c*xt)
980 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:XE(IU,I1,J1)=XT(IU,I1,J1)+C
PR(I1,J1):NEXT J1,I1
990 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=C(I1,J1):NEXT J1
,I1
1000 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=PT(IU,I1,J1):NE
XT J1,I1
1010 NPR=M:MPR=N:KPR=N:GOSUB 1250 ' mat pt1=c*pt
1020 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:APR(I1,J1)=TK(IU,I1,J1):NE
XT J1,I1
1030 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
 J1,I1
1040 NPR=N:MPR=M:KPR=N:GOSUB 1250 ' mat tk*c*pt
1050 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:P(IU,I1,J1)=PT(IU,I1,J1)-C
PR(I1,J1):NEXT J1,I1
1060 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=A(I1,J1):NEXT J
1,I1
1070 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=X(IU-1,I1,J1):N
EXT J1,I1
1080 NPR=N:MPR=N:KPR=R:GOSUB 1250 ' mat x=a*x+b
1090 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:X(IU,I1,J1)=CPR(I1,J1)+B(I
1,J1):NEXT J1,I1,IU
1100 A$=STRING$(36,"-"):IF N>2 THEN GOSUB 2080
```

```
550 FOR I1=1 TO IK:Y(I1+1,1,1)=HAT(I1,1):NEXT I1
560 FOR IU=2 TO IK+1
570 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=P(IU-1,I1,J1):NE
XT J1,I1
580 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=A(J1,I1):NEXT J1
,I1
590 NPR=N:MPR=N:KPR=N:GOSUB 1250 ' mat aa=p*(a)'
600 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=A(I1,J1):NEXT J1
,I1
610 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:BPR(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
J1,I1
620 NPR=N:MPR=N:KPR=N:GOSUB 1250 ' mat pt=a*p*(a)'
630 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:PT(IU,I1,J1)=CPR(I1,J1)+QM(
I1,J1):NEXT J1,I1
640 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=PT(IU,I1,J1):NEX
T J1,I1
650 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=C(J1,I1):NEXT J1
,I1
660 NPR=N:MPR=N:KPR=R:GOSUB 1250 ' mat cc=pt*(c)'
670 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=C(I1,J1):NEXT J1
,I1
680 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:BPR(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
J1,I1
690 NPR=M:MPR=N:KPR=M:GOSUB 1250 ' mat cc1=c*cc
700 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO M:APR(I1,J1)=CPR(I1,J1)+RM(I1
,J1):NEXT J1,I1
710 NV=M:GOSUB 1940 ' encuentra la matriz inversa de c*pt*(
c)'+r
720 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:APR(I1,J1)=C(J1,I1):NEXT J1
,I1
730 NPR=N:MPR=M:KPR=M:GOSUB 1250 ' mat cc3=(c)'*inv(c*pt*(c
)'+r)
740 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=PT(IU,I1,J1):NEX
T J1,I1
750 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:BPR(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT
J1,I1
760 NPR=N:MPR=N:KPR=M:GOSUB 1250 ' mat kt=pt*(c)'*inv(c*pt*
(c)'+r)
770 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:TK(IU,I1,J1)=CPR(I1,J1):NEX
T J1,I1
780 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO N:APR(I1,J1)=A(I1,J1):NEXT J1
,I1
790 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=XE(IU-1,I1,J1):N
EXT J1,I1
800 NPR=N:MPR=N:KPR=R:GOSUB 1250 ' mat a*xe
810 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO R:F(I1,J1)=CPR(I1,J1):NEXT J1
,I1
820 FOR I1=1 TO N:FOR J1=1 TO M:APR(I1,J1)=TK(IU,I1,J1):NEX
T J1,I1
830 FOR I1=1 TO M:FOR J1=1 TO R:BPR(I1,J1)=F(I1,J1):NEXT J1
,I1
840 NPR=N:MPR=M:KPR=R:GOSUB 1250 ' mat kt*a*xe1
```

```
1110 IF N>2 THEN 1140 ELSE FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"EST
IMADOS ESTOCASTICOS":PRINT #IR,
1120 PRINT #IR,"t=iT  x1(t) x2(t) y(i) xe1(i) xe2(i)":PRINT
 #IR,A$: FOR I=1 TO IK+1
1130 PRINT #IR,USING"###";I;:PRINT #IR,USING"###.## ";X(I,1
,1);X(I,2,1);Y(I,1,1);XE(I,1,1);XE(I,2,1):NEXT I,IR
1140 PRINT :INPUT"Desea SALVAR en disco los valores Estimad
os RESULTANTES ? (S/N) ";Q$:PRINT
1150 IF (Q$="S") OR (Q$="s") THEN 1170
1160 IF (Q$="N") OR (Q$="n") THEN 1180 ELSE 1140
1170 GOSUB 2190
1180 IF MENUFLAG=0 THEN 1220 ' SIN MENU
1190 PRINT:INPUT"Desea regresar al Menu de ESTIMACION Menu
? (S/N) ";Q$:PRINT
1200 IF (Q$<>"S") AND (Q$<>"s") AND (Q$<>"N") AND (Q$<>"n")
 THEN 1190
1210 IF (Q$="S" OR Q$="s") AND (MENUFLAG=1) THEN RUN"D1:MEN
U.bas",4990
1220 INPUT"Desea volver a correr <<ESTOC.>> ? (S/N) ";Q$:PR
INT
1230 IF (Q$<>"S") AND (Q$<>"s") AND (Q$<>"N") AND (Q$<>"n")
 THEN 1220
1240 IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 1 ELSE END:'PROGRAMA <<KALMAN
>>
1250 ' SUB PRODUCTO DE DOS MATRICES
1260 FOR I5=1 TO NPR:FOR K5=1 TO KPR:CPR(I5,K5)=0:J5=0
1270 J5=J5+1:CPR(I5,K5)=CPR(I5,K5)+APR(I5,J5)*BPR(J5,K5):IF
 J5<MPR THEN 1270 ELSE NEXT K5,I5:RETURN
1280 ' SUB mat
1290 ON ERROR GOTO 1760:CHANG=0:PRINT:PRINT "Defina la MATR
IZ ";DD$;"(";NN;"x";MM;") :"
1300 PRINT:PRINT "Tiene la opcion de RECUPERAR una matriz p
reviamente almacenada en disco":PRINT SPC(19);"O"
1310 PRINT"ENTRAR una nueva matriz desde el teclado":INPUT"
ENTRE su seleccion (R/E) ";Q$
1320 IF Q$="E" OR Q$="e" THEN QN$="ENTRAR"
1330 IF Q$="R" OR Q$="r" THEN QN$="RECUPERAR"
1340 IF QN$<>"ENTRAR" AND QN$<>"RECUPERAR" THEN 1300
1350 PRINT:PRINT"Confirme el Modo ";QN$;"para la Entrada de
 Datos (S/N) ";:INPUT Q$:IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 1300
1360 IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 1370 ELSE 1350
1370 IF QN$="ENTRAR" THEN 1470
1380 PRINT:INPUT"ENTRE el Identificador de la Manejadora de
 DISCO (D1, D2) ";DDI$:GOSUB 1780
1390 PRINT "El DISCO DE DATOS DEBERIA ESTAR EN ";DDI$:INPUT
"CORRECTO (S/N) ? ";Q$:IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 1410
1400 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 1380 ELSE 1390
```

```
1410 CLS:PRINT"ENTRE el nombre del archivo de la matriz en
la forma ";DDI$;":NNNNNNNN.SSS";SPC(23);:INPUT DFN$
1420 IF LEN(DFN$)<4 OR LEN(DFN$)>15 THEN 1410
1430 IF (DFN$,1,2)<>DDI$ AND LEFT$(DFN$,3)<>":" THEN 1410 E
LSE OPEN #1,DFN$ INPUT:INPUT #1,NND,MMD
1440 IF NND=NN AND MMD=MM THEN 1460 ELSE PRINT "La matriz d
el archivo es";NND;"x";MMD;". Deberia ser ";NN;"x";MM;
1450 PRINT "Trate otra vez":CLOSE #1:GOTO 1300
1460 FOR IQX=1 TO NN:FOR JQX=1 TO MM:INPUT #1,HAT(IQX,JQX):
NEXT JQX,IQX:CLOSE #1:GOTO 1490
1470 PRINT:PRINT "Matriz ";DD$;"(";NN;"x";MM;")":PRINT
1480 FOR I=1 TO NN:FOR J=1 TO MM:PRINT DD$;"(";I;",";J;")";
:INPUT HAT(I,J):NEXT J,I
1490 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,:PRINT #IR,"Matriz ";DD$:P
RINT #IR,
1500 FOR I=1 TO NN:FOR J=1 TO MM:PRINT #IR,USING " #.###^^^
^ ";HAT(I,J);:NEXT J:PRINT #IR,:NEXT I
1510 PRINT:INPUT"CAMBIOS (S/N)? ";Q$:IF (Q$="S") OR (Q$="s"
) THEN CHANG=1:GOTO 1530
1520 IF (Q$="N") OR (Q$="n") THEN 1550 ELSE 1510
1530 PRINT:PRINT"COORDENADAS DE ";DD$;"(*),°fil,colé ";:INP
UT I,J:IF (I<=0) OR (I>NN) OR (J<0) OR (J>MM) THEN 1530
1540 PRINT DD$;"(";I;",";J;")";:INPUT HAT(I,J):GOTO 1490
1550 IF PM=1 OR IPR=1 THEN NEXT IR ELSE 1560
1560 IF CHANG=0 AND ON$="RECUPERAR" THEN GOSUB 1720
1570 PRINT:INPUT"Desea salvar esta matriz en disco (S/N)? "
;Q$:CLS:IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 1750
1580 IF Q$<>"S" AND Q$<>"s" AND Q$<>"N" AND Q$<>"n" THEN 15
70
1590 PRINT:INPUT"ENTRE Identificador de la Manejadora de DI
SCO (D1, D2) ";DDI$:GOSUB 1630
1600 PRINT "EL DISCO DE DATOS DEBE EN LA MANEJADORA DE DISC
O ";DDI$:INPUT"CORRECTO (S/N) ?";Q$
1610 IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 1670
1620 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 1590 ELSE 1600
1630 IF RIGHT$(DDI$,1)<>"1" AND RIGHT$(DDI$,1)<>"2" THEN 15
90
1640 IF LEFT$(DDI$,1)="D" THEN RETURN
1650 IF LEFT$(DDI$,1)="d" THEN DDI$="D"+RIGHT$(DDI$,1) ELSE
 1590
1660 RETURN
1670 CLS:PRINT"ENTRE el nombre del archivo de la matriz en
la forma ";DDI$;":NNNNNNNN.SSS";SPC(23);:INPUT NDFN$
1680 IF MID$(NDFN$,1,2)<>DDI$ AND LEFT$(NDFN$,3)<>":" THEN
1670
```

```
1690 OPEN #3,NDFN$ INPUT:PRINT "ARCHIVO YA EXISTE -";
1700 INPUT"Desea Actualizarlo ?";QQQQ#:IF QQQQ$="S" OR QQQQ
$="s" THEN CLOSE #3:GOTO 1720
1710 CLOSE #1:GOTO 1590
1720 OPEN #2,NDFN$ OUTPUT:PRINT #2,NN,MM
1730 FOR IQX=1 TO NN:FOR JQX=1 TO MM:PRINT #2,HAT(IQX,JQX):
NEXT JQX,IQX:CLOSE #2
1740 PRINT "Matriz ";DD$;" Salvada en disco de archivos ";N
DFN$:ON ERROR GOTO 0:CLOSE #2:CLS:RETURN
1750 ON ERROR GOTO 0:CLOSE #2:RETURN
1760 IF ERR=170 AND ERL=1420 THEN PRINT "FILE ";DFN$;" Does
n't Exist. Please Try Again ";PRINT:CLOSE #1
1770 RESUME 1300:IF ERR=170 AND (ERL=1670 OR ERL=1410) THEN
 RESUME NEXT:ON ERROR GOTO 1
1780 IF RIGHT$(DDI$,1)<>"1" AND RIGHT$(DDI$,1)<>"2" THEN 13
80
1790 IF LEFT$(DDI$,1)="D" THEN RETURN
1800 IF LEFT$(DDI$,1)="d" THEN DDI$="D"+RIGHT$(DDI$,1):RETU
RN
1810 IF LEFT$(DDI$,1)="d" THEN DDI$="D"+RIGHT$(DDI$,1) ELSE
 1380
1820 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N:INPUT HAT(I,J):PRINT:NEXT J,
I
1830 FOR I=1 TO NN:FOR J=1 TO MM:PRINT USING"##.###^^^^ "HA
T(I,J);:NEXT J1:PRINT:NEXT I1
1840 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,"Matriz ";DD$;" is":PRINT
#IR,
1850 FOR I=1 TO NN:FOR J=1 TO MM:PRINT #IR,USING "##.###^^^
^ ";HAT(I,J);:NEXT J:PRINT #IR,:NEXT I1:PRINT #IR,:NEXT IR
1860 PRINT:INPUT"CAMBIOS (S/N)?";Q$:IF (Q$="S") OR (Q$="s")
 THEN 1880
1870 IF (Q$="N") OR (Q$="n") THEN 1930ELSE 1860
1880 PRINT "COORDENADAS DE ";DD$;"(*),°fil, colé";:PRINT :I
NPUT I,J
1890 IF(I<=0) OR (I>NN) OR (J<0) OR (J>MM) THEN 1880
1900 PRINT DD$;"(";I;",";J;")";:INPUT HAT(I,J)
1910 PRINT #7,"La Nueva Matriz ";DD$;" es":PRINT:FOR I=1 TO
 NN:FOR J=1 TO MM:PRINT #7,USING"##.###^^^^ ";HAT(I,J);
1920 NEXT J1:PRINT #IR,:NEXT I1
1930 PRINT #IR,:IF IPR=0 THEN 1860 ELSE NEXT IR
1940 ' SUB INVERSION DE MATRIZ
1950 FOR I=1 TO NV:FOR J=1 TO NV:IF I<>J THEN BPR(I,J)=0 EL
SE BPR(I,J)=1
1960 NEXT J,I:FOR K=1 TO NV:IF K>=NV THEN 2010 ELSE IMAX=K:
AMAX=ABS(APR(K,K)):KP1=K+1
1970 FOR I=KP1 TO NV:IF BMAX<ABS(BPR(I,K)) THEN IMAX=I:AMAX
=ABS(APR(I,K))
1980 NEXT I:IF IMAX=K THEN 2010
```

```
1990 FOR J=1 TO NV:ATMP=BPR(IMAX,J):APR(IMAX,J)=APR(K,J):AP
R(K,J)=ATMP
2000 ATMP=APR(IMAX,J):APR(IMAX,J)=APR(K,J):APR(K,J)=ATMP:NE
XT J
2010 IF ABS(APR(K,K))<=1.0E-07 THEN 2070
2020 DIV=APR(K,K):FOR J=1 TO NV:APR(K,J)=APR(K,J)/DIV:BPR(K
,J)=BPR(K,J)/DIV:NEXT J
2030 FOR I=1 TO NV:AMULT=APR(I,K):IF I-K=0 THEN 2050
2040 FOR J=1 TO NV:APR(I,J)=APR(I,J)-AMULT*APR(K,J):BPR(I,J
)=BPR(I,J)-AMULT*BPR(K,J):NEXT J
2050 NEXT I,K
2060 RETURN
2070 PRINT  "MATRIZ SINGULAR PARA K = ";K:GOTO 1180
2080 ' Sub imprimir para n>=3
2090 FOR IR=6 TO IPR+6:PRINT #IR,:PRINT#IR,"ESTIMADOS DEL F
ILTRO DE KALMAN"
2100 PRINT #IR,:PRINT #IR,"  t=iT    x1(t),  x2(t), ..., x"
;N;"(t)":PRINT #IR,A$
2110 FOR I=1 TO IK+1:PRINT #IR,USING"###.## ";I;:FOR J=1 TO
 N:PRINT #IR,USING"##.###^^^^ ";X(I,J,1);:NEXT :PRINT #IR,
2120 NEXT:PRINT #IR,:PRINT #IR,"  t=iT   xe1(i), xe2(i), ..
., xe";N;"(i)":PRINT #IR,A$
2130 FOR I=1 TO IK+1:PRINT #IR,USING"###.## ";I;:FOR J=1 TO
 N:PRINT #IR,USING"##.###^^^^ ";XE(I,J,1);:NEXT:PRINT #IR,
2140 NEXT I:PRINT #IR,:PRINT #IR,"  t=iT   y1(i), y2(i), ..
., y";IK+1;"(i)":PRINT #IR,A$
2150 FOR I=1 TO IK+1:PRINT #IR,USING"###.## ";I;:PRINT #IR,
USING"##.###^^^^ ";Y(I,1,1);:PRINT #IR,:NEXT I:PRINT #IR,
2160 PRINT #IR,"  t=iT   P11(i), P22(i), ..., P";N;N;"(i)":
PRINT #IR,A$:FOR I=1 TO IK+1:PRINT #IR,USING"###.## ";I;
2170 FOR J=1 TO N:PRINT #IR,USING"##.###^^^^ ";P(I,J,J);:NE
XT J:PRINT #IR,:NEXT I:PRINT #IR,:NEXT IR
2180 RETURN
2190 'SALVANDO MATRICES
2200 PRINT "... SALVANDO Trayectorias de los ESTADOS filtra
dos x(t), t=iT ..."
2210 FOR I=1 TO IK+1:FOR J=1 TO N:HAT(I,J)=X(I,J,1):NEXT J,
I
2220 NN=IK+1:MM=N:DD$="Trayectoria de los Estados Filtrados
 x(t) vs t, t=iT":GOSUB 2300
2230 PRINT "... SALVANDO Trayectorias de los ESTADOS Estima
dos xe(t), i=1,.. ";IK+1;"..."
2240 FOR I=1 TO IK+1:FOR J=1 TO N:HAT(I,J)=XE(I,J,1):NEXT J
,I
2250 NN=IK+1:MM=N:DD$="Trayectoria del Estado Estimado xe(i
) vs i, i=1,...":GOSUB 2300
```

```
2260 PRINT "... SALVANDO Trayectorias de las SALIDAS y(i),
i = 1,..."
2270 FOR I=1 TO IK+1:HAT(I,1)=Y(I,1,1):NEXT I
2280 NN=K+1:MM=1:DD$="Trayectoria de la Salida y(i) vs i, i
 = 1,...":GOSUB 2300
2290 RETURN ' FIN DE SALVAR MATRICES
2300 ON ERROR GOTO 2420:CHANG=0 ' SUB ALMACENAR
2310 PRINT:INPUT"ENTRE el Identificador de la Manejadora de
 DISCO (D1, D2) ";DDI$:GOSUB 2460
2320 PRINT "EL DISCO DE DATOS DEBE ESTAR EN ";DDI$:INPUT"CO
RRECTO (S/N) ?";Q$:IF Q$="S" OR Q$="s" THEN 2340
2330 IF Q$="N" OR Q$="n" THEN 2310 ELSE 2320
2340 CLS:INPUT"ENTRE el nombre del archivo en la forma";DDI
$;:INPUT":NNNNNNNN.SSS";NDFN$
2350 OPEN #3,NDFN$ INPUT:PRINT "ARCHIVO YA EXISTE -";:INPUT
"Desea Actualizarlo ?";Q$
2360 IF Q$="Y" OR Q$="y" THEN CLOSE #3:GOTO 2380
2370 CLOSE:GOTO 2310
2380 OPEN #2,NDFN$ OUTPUT:PRINT #2,NN,MM
2390 FOR IQX=1 TO NN:FOR JQX=1 TO MM:PRINT #2,HAT(IQX,JQX):
NEXT JQX,IQX:CLOSE #2:CLOSE #3
2400 PRINT DDI$;" Resultante Salvada en disco ";NDFN$
2410 ON ERROR GOTO 1:CLOSE #2:RETURN
2420 IF ERR=170 AND ERL=2380 THEN PRINT "ARCHIVO ";DFN$;" N
o Existe. Trate Otra Vez":PRINT:CLOSE #2:CLOSE #3:CLOSE #2
2430 RESUME 2340:IF ERR=170 AND ERL=2350 THEN CLOSE #3:RESU
ME 2340
2440 IF ERR=170 AND (ERL=2350 OR ERL=2380) THEN RESUME NEXT
2450 ON ERROR GOTO 1
2460 IF RIGHT$(DDI$,1)<>"1" AND RIGHT$(DDI$,1)<>"2" THEN 23
10
2470 IF LEFT$(DDI$,1)="D" THEN RETURN
2480 IF LEFT$(DDI$,1)="d" THEN DDI$="D"+RIGHT$(DDI$,1) ELSE
 2320:RETURN
```

A.5: DISCRETIZADOR

<<DISCR.>> Es una rutina que usa una serie matricial truncada para Discretizar un Sistema SISE (A,B,C,D) con la siguiente formulacion:

```
                           (FT)^^2            (FT)^^IPROX
EXP(FT) = I + FT +    -------- + ... + ------------
                              2                 (IPROX)!
donde  T        es el Periodo de Muestreo
       LIM      = (n + r) = 3
       IPROX    es el numero de terminos de la serie truncada
siendo n        = 2, el orden del sistema
       r        = 1, el numero de entradas
```

Matriz F

0.7	269.0000	0.0000
-94.7619	-204.7619	476.1905

Matriz y(0)

0.00	0.00	1.00

LIM	3
T	.001
IPROX	20

PHI ELEMENTOS DE LA MATRIZ PHI(I,J) EN EL ORDEN

PHI(1,1),PHI(1,2),...,PHI(1,LIM),
PHI(2,1),PHI(2,2),...,PHI(2,LIM),...,
PHI(LIM,1),PHI(LIM,2),...,PHI(LIM,LIM)

```
PHI( 1 , 1 )= .988801
PHI( 1 , 2 )= .242303
PHI( 1 , 3 )= 5.97799E-02
------------------------- 1
PHI( 2 , 1 )=-8.53573E-02
PHI( 2 , 2 )= .80373
PHI( 2 , 3 )= .428776
------------------------- 2
PHI( 3 , 1 )= 0
PHI( 3 , 2 )= 0
PHI( 3 , 3 )= 1
------------------------- 3
```

LA MATRIZ A(T) ES		LA MATRIZ B(T) ES
.988801	.242303	5.97799E-02
-8.53573E-02	.80373	.428776

ELEMENTOS DEL VECTOR DE ESTADO EN EL ORDEN
X(1),X(2),...,X(N).

```
X( 1 )= 5.97799E-02
X( 2 )= .428776
------------------------------ 1
X( 1 )= .222784
X( 2 )= .768293
------------------------------ 2
X( 1 )= .466229
X( 2 )= 1.02726
------------------------------ 3
X( 1 )= .769696
X( 2 )= 1.21462
------------------------------ 4
X( 1 )= 1.11516
X( 2 )= 1.3393
------------------------------ 5
X( 1 )= 1.48697
X( 2 )= 1.41003
------------------------------ 6
X( 1 )= 1.87175
X( 2 )= 1.43513
------------------------------ 7
X( 1 )= 2.25831
X( 2 )= 1.42247
------------------------------ 8
X( 1 )= 2.63747
X( 2 )= 1.37929
------------------------------ 9
X( 1 )= 3.00192
X( 2 )= 1.31223
------------------------------ 10
X( 1 )= 3.34604
X( 2 )= 1.22722
------------------------------ 11
X( 1 )= 3.66571
X( 2 )= 1.12952
------------------------------ 12
```

```
X( 1 )= 3.95812
X( 2 )= 1.02371
---------------------------------- 13
X( 1 )= 4.22162
X( 2 )= .913707
---------------------------------- 14
X( 1 )= 4.45552
X( 2 )= .802804
---------------------------------- 15
X( 1 )= 4.65993
X( 2 )= .693702
---------------------------------- 16
X( 1 )= 4.83561
X( 2 )= .588566
---------------------------------- 17
X( 1 )= 4.98385
X( 2 )= .48907
---------------------------------- 18
X( 1 )= 5.10632
X( 2 )= .396448
---------------------------------- 19
X( 1 )= 5.20497
X( 2 )= .311551
---------------------------------- 20
X( 1 )= 5.28196
X( 2 )= .234896
---------------------------------- 21
X( 1 )= 5.3395
X( 2 )= .166715
---------------------------------- 22
X( 1 )= 5.37988
X( 2 )= .107004
---------------------------------- 23
X( 1 )= 5.40534
X( 2 )= 5.55662E-02
---------------------------------- 24
X( 1 )= 5.41805
X( 2 )= 1.20504E-02
---------------------------------- 25
X( 1 )= 5.42008
X( 2 )=-2.40095E-02
---------------------------------- 26
X( 1 )= 5.41334
X( 2 )=-5.31648E-02
---------------------------------- 27
X( 1 )= 5.39962
X( 2 )=-7.60229E-02
---------------------------------- 28
```

```
X( 1 )= 5.38051
X( 2 )=-9.32232E-02
------------------------------------------------ 29
X( 1 )= 5.35745
X( 2 )=-.105416
------------------------------------------------ 30
X( 1 )= 5.33169
X( 2 )=-.113248
------------------------------------------------ 31
X( 1 )= 5.30432
X( 2 )=-.117344
------------------------------------------------ 32
X( 1 )= 5.27627
X( 2 )=-.118299
------------------------------------------------ 33
X( 1 )= 5.24829
X( 2 )=-.116673
------------------------------------------------ 34
X( 1 )= 5.22103
X( 2 )=-.112978
------------------------------------------------ 35
X( 1 )= 5.19497
X( 2 )=-.107681
------------------------------------------------ 36
X( 1 )= 5.17048
X( 2 )=-.101199
------------------------------------------------ 37
X( 1 )= 5.14783
X( 2 )=-9.38993E-02
------------------------------------------------ 38
X( 1 )= 5.12721
X( 2 )=-8.60994E-02
------------------------------------------------ 39
X( 1 )= 5.10871
X( 2 )=-7.80701E-02
------------------------------------------------ 40
X( 1 )= 5.09237
X( 2 )=-7.00376E-02
------------------------------------------------ 41
X( 1 )= 5.07815
X( 2 )=-6.21863E-02
------------------------------------------------ 42
X( 1 )= 5.06599
X( 2 )=-5.46623E-02
------------------------------------------------ 43
X( 1 )= 5.05579
X( 2 )=-4.75773E-02
------------------------------------------------ 44
```

```
X( 1 )= 5.04743
X( 2 )=-4.10126E-02
------------------------------------------ 45
X( 1 )= 5.04074
X( 2 )=-3.50222E-02
------------------------------------------ 46
X( 1 )= 5.03559
X( 2 )=-2.96371E-02
------------------------------------------ 47
X( 1 )= 5.0318
X( 2 )=-2.48689E-02
------------------------------------------ 48
X( 1 )= 5.0292
X( 2 )=-2.07128E-02
------------------------------------------ 49
X( 1 )= 5.02764
X( 2 )=-1.71508E-02
------------------------------------------ 50
X( 1 )= 5.02696
X( 2 )=-1.41549E-02
------------------------------------------ 51
X( 1 )= 5.02702
X( 2 )=-.011689
------------------------------------------ 52
X( 1 )= 5.02767
X( 2 )=-9.71174E-03
------------------------------------------ 53
X( 1 )= 5.02879
X( 2 )=-8.17817E-03
------------------------------------------ 54
X( 1 )= 5.03027
X( 2 )=-7.04157E-03
------------------------------------------ 55
X( 1 )= 5.03202
X( 2 )=-6.25455E-03
------------------------------------------ 56
X( 1 )= 5.03393
X( 2 )=-5.77062E-03
------------------------------------------ 57
X( 1 )= 5.03594
X( 2 )=-5.54493E-03
------------------------------------------ 58
X( 1 )= 5.03798
X( 2 )=-5.53495E-03
------------------------------------------ 59
X( 1 )= 5.04
X( 2 )=-5.70115E-03
------------------------------------------ 60
```

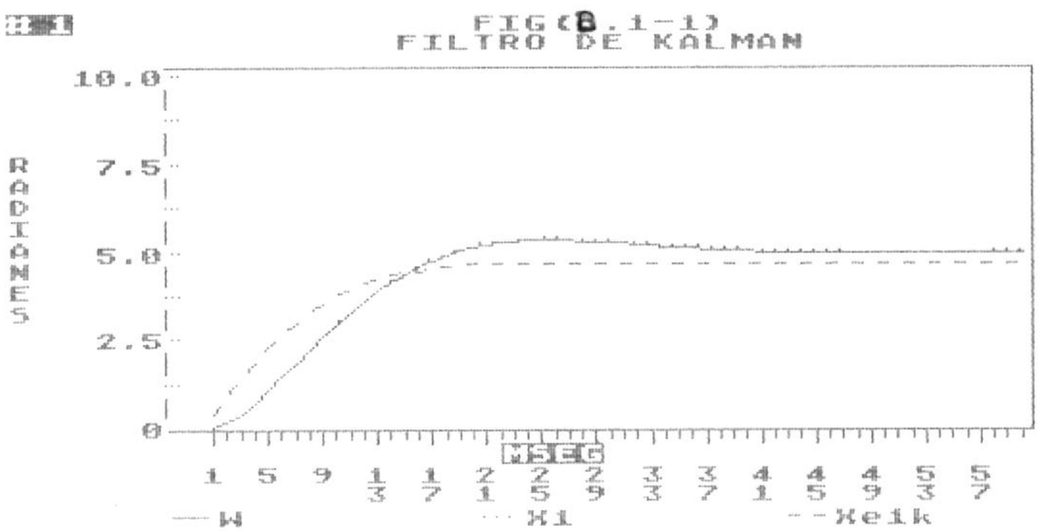
```
10 DIM A(8,8),B(8,8),C(8,8),D(8,8),X(8),Y(8)
20 DATA 0.7,269,0,-94.76190476,-204.7619048,476.1904762,0,0
,0
30 DATA 0,0,1
40 PRINT  "è":OPEN#7,"P:" OUTPUT
50 PRINT#7,"LIM",:INPUT LIM:PRINT#7,LIM
60 FOR I=1 TO LIM:FOR J=1 TO LIM:READ A:A(I,J)=A:NEXT J:NEX
T I
70 FOR I=1 TO LIM:READ Y:Y(I)=Y:NEXT I
80 PRINT#7,"T",:INPUT T:PRINT#7,T
90 FOR I=1 TO LIM:FOR J=1 TO LIM
100 A(I,J)=T*A(I,J):NEXT J:NEXT I
110 FOR I=1 TO LIM:FOR J=1 TO LIM
120 C(I,J)=0:D(I,J)=A(I,J):B(I,J)=A(I,J):NEXT J:NEXT I
130 PRINT#7,"IPROX",:INPUT IPROX:PRINT#7,IPROX
140 PRINT#7,:PRINT#7,"PHI ELEMENTOS DE LA MATRIZ PHI(I,J) E
N EL ORDEN":PRINT#7,
150 PRINT#7, "PHI(1,1),PHI(1,2),....,PHI(1,LIM),":PRINT #7,"
PHI(2,1),PHI(2,2),....,PHI(2,LIM),....,"
160 PRINT#7,"PHI(LIM,1),PHI(LIM,2),....,PHI(LIM,LIM)":PRINT#
7,
170 FOR IK=2 TO IPROX:DEN=IK
180 FOR I=1 TO LIM:FOR J=1 TO LIM:FOR K=1 TO LIM
190 C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)/DEN:NEXT K:NEXT J:NEXT I
200 FOR I=1 TO LIM:FOR J=1 TO LIM
210 B(I,J)=C(I,J):D(I,J)=D(I,J)+C(I,J):NEXT J:NEXT I
220 FOR I=1 TO LIM:FOR J=1 TO LIM
230 C(I,J)=0:NEXT J:NEXT I:NEXT IK
240 FOR I=1 TO LIM
250 C(I,I)=1:NEXT I
260 FOR I=1 TO LIM:FOR J=1 TO LIM
270 D(I,J)=D(I,J)+C(I,J)
280 PRINT#7,"PHI(";I;",";J;")=";D(I,J):NEXT J:PRINT#7,"----
----------------------";I:NEXT I
290 OPEN #1,"K:" INPUT:GET #1,A:PRINT  "è":GOSUB 380
300 PRINT#7,:PRINT#7,"ELEMENTOS DEL VECTOR DE ESTADO EN EL
ORDEN"
310 PRINT#7,"X(1),X(2),....,X(N).":PRINT#7,
320 FOR L=1 TO 60:FOR I=1 TO LIM
330 X(I)=0:NEXT I
340 FOR I=1 TO LIM:FOR J=1 TO LIM
350 X(I)=X(I)+D(I,J)*Y(J):NEXT J:NEXT I
360 FOR K=1 TO LIM-1
370 Y(K)=X(K):PRINT#7, "X(";K;")=";Y(K):NEXT K:PRINT#7,"---
-----------------------";L:STOP:NEXT L:END
380 PRINT#7,"---------------------- -----------------":PRIN
T#7,"LA MATRIZ A(T) ES       LA MATRIZ B(T) ES"
390 PRINT#7,"_________________________ ___________________"
```

```
400 PRINT#7,:FOR I=1 TO LIM-1:FOR J=1 TO LIM-2:PRINT#7,D(I,
J),D(I,J+1),D(I,J+2):NEXT J:NEXT I
410 PRINT#7,"----------------------- --------------------"
420 GET#1,C:PRINT "è":RETURN
```

APENDICE B

GRAFICAS Y TABLAS

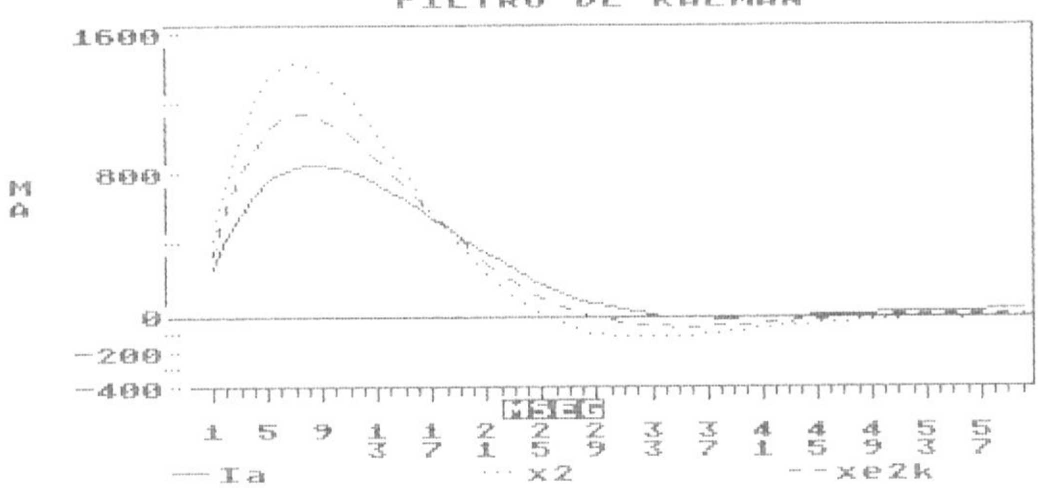
B.1: FILTRO DE KALMAN



P 1	W	X1	Xelk
1	0.06	0.06	0.49
2	0.22	0.22	0.98
3	0.46	0.47	1.49
4	0.77	0.77	1.91
5	1.11	1.12	2.33
6	1.48	1.49	2.70
7	1.86	1.87	3.03
8	2.25	2.26	3.33
9	2.62	2.64	3.59
10	2.99	3.00	3.80
11	3.33	3.35	3.98
12	3.64	3.67	4.14
13	3.93	3.96	4.25
14	4.19	4.22	4.36
15	4.42	4.46	4.44
16	4.62	4.66	4.50
17	4.79	4.84	4.56
18	4.94	4.98	4.61
19	5.06	5.11	4.64
20	5.15	5.20	4.66
P 2	W	X1	Xelk
21	5.23	5.28	4.68
22	5.28	5.34	4.69
23	5.32	5.37	4.70
24	5.35	5.41	4.71
25	5.36	5.42	4.72
26	5.36	5.42	4.72
27	5.35	5.41	4.72
28	5.34	5.40	4.72
29	5.32	5.38	4.72
30	5.29	5.36	4.72
31	5.27	5.33	4.72
32	5.24	5.30	4.72
33	5.21	5.28	4.72
34	5.18	5.25	4.72
35	5.16	5.22	4.72
36	5.13	5.20	4.72
37	5.11	5.17	4.72
38	5.09	5.15	4.72
39	5.07	5.13	4.72
40	5.05	5.11	4.72

P 3	W	X1	Xe1k
41	5.03	5.09	4.72
42	5.02	5.08	4.72
43	5.01	5.07	4.71
44	5.00	5.06	4.71
45	4.99	5.05	4.71
46	4.98	5.04	4.71
47	4.98	5.04	4.71
48	4.98	5.03	4.71
49	4.97	5.03	4.71
50	4.97	5.03	4.71
51	4.97	5.03	4.71
52	4.97	5.03	4.71
53	4.97	5.03	4.71
54	4.97	5.03	4.71
55	4.97	5.03	4.71
56	4.98	5.03	4.71
57	4.98	5.03	4.71
58	4.98	5.04	4.71
59	4.98	5.04	4.71
60	4.98	5.04	4.71

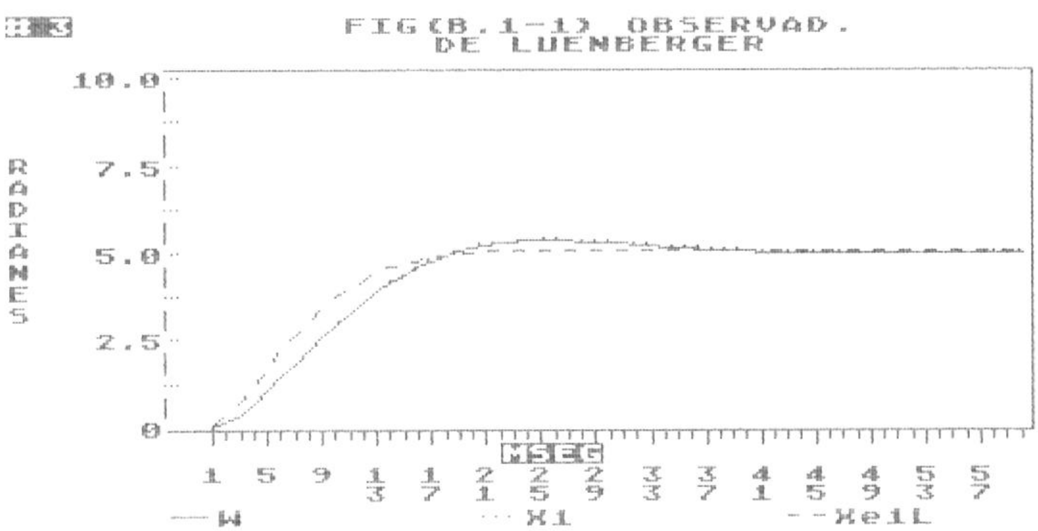
FIG (B.1-2)
FILTRO DE KALMAN



P 1	Ia	x2	xe2k
1	263.97	428.78	346.38
2	449.48	768.29	608.89
3	588.82	1027.26	808.04
4	691.83	1214.62	953.23
5	765.71	1339.30	1052.51
6	815.84	1410.03	1112.94
7	846.23	1435.13	1140.68
8	860.01	1422.47	1141.24
9	859.69	1379.29	1119.49
10	847.38	1312.23	1079.81
11	824.90	1227.22	1026.06
12	793.91	1129.52	961.72
13	755.95	1023.71	889.83
14	712.45	913.71	813.08
15	664.77	802.80	733.79
16	614.17	693.70	653.94
17	561.81	588.57	575.19
18	508.77	489.07	498.92
19	455.99	396.45	426.22
20	404.31	311.55	357.93
P 2	Ia	x2	xe2k
21	354.45	234.90	294.68
22	306.99	166.72	236.86
23	262.42	107.00	184.71
24	221.09	55.57	138.33
25	183.24	12.05	97.65
26	149.01	-24.01	62.50
27	118.48	-53.17	32.66
28	91.62	-76.02	7.80
29	68.33	-93.22	-12.44
30	48.48	-105.42	-28.47
31	31.87	-113.25	-40.69
32	18.28	-117.34	-49.53
33	7.46	-118.30	-55.42
34	-0.85	-116.67	-58.76
35	-6.91	-112.98	-59.94
36	-11.00	-107.68	-59.34
37	-13.40	-101.20	-57.30
38	-14.34	-93.90	-54.12
39	-14.10	-86.10	-50.10
40	-12.83	-78.07	-45.45

P 3	Ia	x2	xe2k
41	-10.81	-70.00	-40.40
42	-8.20	-62.19	-35.19
43	-5.17	-54.66	-29.91
44	-1.86	-47.58	-24.72
45	1.60	-41.01	-19.70
46	5.11	-35.02	-14.95
47	8.57	-29.64	-10.53
48	11.93	-24.87	-6.47
49	15.11	-20.71	-2.80
50	18.09	-17.15	0.47
51	20.82	-14.16	3.33
52	23.30	-11.69	5.81
53	25.51	-9.71	7.90
54	27.46	-8.18	9.64
55	29.14	-7.04	11.05
56	30.56	-16.26	7.15
57	31.75	-5.77	12.99
58	32.71	-5.55	13.58
59	33.48	-5.54	13.97
60	34.05	-5.70	14.18

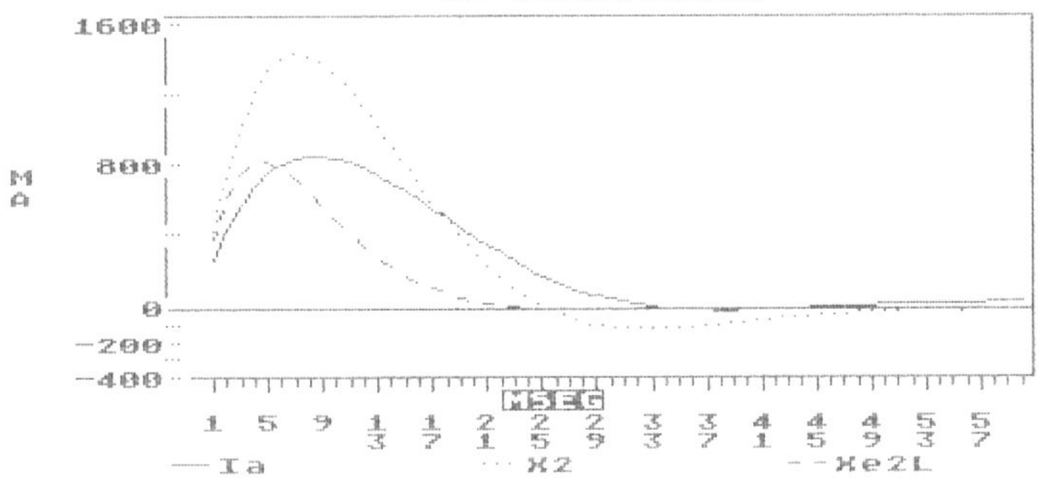
B.2: OBSERVADOR DE LUENBERGER



P 1	W	X1	Xe1L
1	0.06	0.06	0.12
2	0.22	0.22	0.43
3	0.46	0.47	0.84
4	0.77	0.77	1.3
5	1.11	1.12	1.78
6	1.48	1.49	2.25
7	1.86	1.87	2.69
8	2.25	2.26	3.1
9	2.62	2.64	3.45
10	2.99	3	3.76
11	3.33	3.35	4.03
12	3.64	3.67	4.26
13	3.93	3.96	4.44
14	4.19	4.22	4.59
15	4.42	4.46	4.72
16	4.62	4.66	4.81
17	4.79	4.84	4.89
18	4.94	4.98	4.95
19	5.06	5.11	4.99
20	5.15	5.2	5.02
P 2	W	X1	Xe1L
21	5.23	5.28	5.05
22	5.28	5.34	5.06
23	5.32	5.37	5.07
24	5.35	5.41	5.08
25	5.36	5.42	5.08
26	5.36	5.42	5.08
27	5.35	5.41	5.08
28	5.34	5.4	5.08
29	5.32	5.38	5.08
30	5.29	5.36	5.07
31	5.27	5.33	5.07
32	5.24	5.3	5.07
33	5.21	5.28	5.06
34	5.18	5.25	5.06
35	5.16	5.22	5.06
36	5.13	5.2	5.06
37	5.11	5.17	5.06
38	5.09	5.15	5.06
39	5.07	5.13	5.05
40	5.05	5.11	5.05

P 3	W	X1	Xe1L
41	5.03	5.09	5.05
42	5.02	5.08	5.05
43	5.01	5.07	5.05
44	5	5.06	5.05
45	4.99	5.05	5.05
46	4.98	5.04	5.05
47	4.98	5.04	5.05
48	4.98	5.03	5.05
49	4.97	5.03	5.05
50	4.97	5.03	5.05
51	4.97	5.03	5.05
52	4.97	5.03	5.05
53	4.97	5.03	5.05
54	4.97	5.03	5.05
55	4.97	5.03	5.05
56	4.98	5.03	5.05
57	4.98	5.03	5.05
58	4.98	5.04	5.05
59	4.98	5.04	5.05
60	4.98	5.04	5.05

FIG(B.2-2) OBSERVAD. DE LUENBERGER

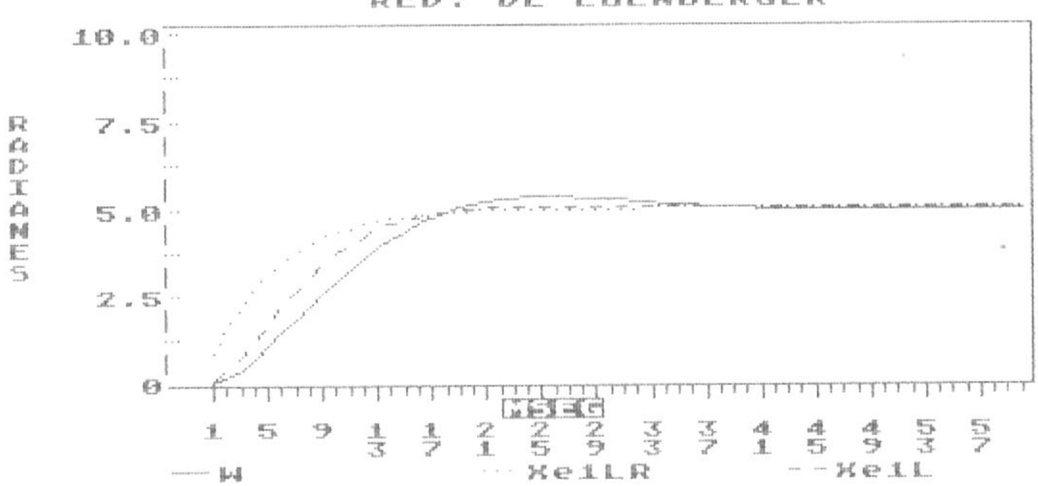


P 1	Ia	X2	Xe2L
1	263.97	428.78	388.77
2	449.48	768.29	631.59
3	588.82	1027.26	765.65
4	691.83	1214.62	820.76
5	765.71	1339.30	820.47
6	815.84	1410.03	783.07
7	846.23	1435.13	722.46
8	860.01	1422.47	649.03
9	859.69	1379.29	570.32
10	847.38	1312.23	491.60
11	824.90	1227.22	416.42
12	793.91	1129.52	347.01
13	755.95	1023.71	284.58
14	712.45	913.71	229.65
15	664.77	802.80	182.21
16	614.17	693.70	141.94
17	561.81	588.57	108.28
18	508.77	489.07	80.56
19	455.99	396.45	58.09
20	404.31	311.55	40.13
P 2	Ia	X2	Xe2L
21	354.45	234.90	26.01
22	306.99	166.72	15.11
23	262.42	107.00	6.84
24	221.09	55.57	0.72
25	183.24	12.05	-3.69
26	149.01	-24.01	-6.75
27	118.48	-53.17	-8.78
28	91.62	-76.02	-10.01
29	68.33	-93.22	-10.66
30	48.48	-105.42	-10.89
31	31.87	-113.25	-10.83
32	18.28	-117.34	-10.57
33	7.46	-118.30	-10.20
34	-0.85	-116.67	-9.76
35	-6.91	-112.98	-9.30
36	-11.00	-107.68	-8.85
37	-13.40	-101.20	-8.84
38	-14.34	-93.90	-8.03
39	-14.10	-86.10	-7.68
40	-12.83	-78.07	-7.37

P 3	Ia	X2	Xe2L
41	-10.81	-70.00	-7.10
42	-8.20	-62.19	-6.88
43	-5.17	-54.66	-6.70
44	-1.86	-47.58	-6.54
45	1.60	-41.01	-6.42
46	5.11	-35.02	-6.32
47	8.57	-29.64	-6.24
48	11.93	-24.87	-6.18
49	15.11	-20.71	-6.14
50	18.09	-17.15	-6.11
51	20.82	-14.16	-6.08
52	23.30	-11.69	-6.07
53	25.51	-9.71	-6.06
54	27.46	-8.18	-6.05
55	29.14	-7.04	-6.05
56	30.56	-16.26	-6.05
57	31.75	-5.77	-6.05
58	32.71	-5.55	-6.05
59	33.48	-5.54	-6.05
60	34.05	-5.70	-6.05

B.3: OBSERVADOR REDUCIDO DE LUENBERGER

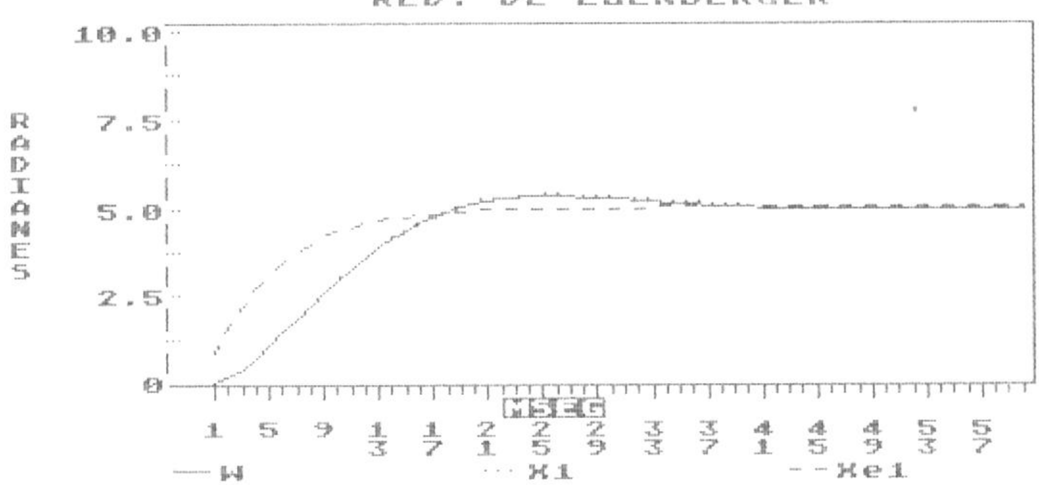
FIG(B.3-1) OBSERVAD. RED. DE LUENBERGER



P 1	W	Xe1LR	Xe1L
1	0.06	0.91	0.12
2	0.22	1.66	0.43
3	0.46	2.28	0.84
4	0.77	2.78	1.30
5	1.11	3.19	1.78
6	1.48	3.52	2.25
7	1.86	3.80	2.69
8	2.25	4.02	3.10
9	2.62	4.21	3.45
10	2.99	4.36	3.76
11	3.33	4.48	4.03
12	3.64	4.59	4.26
13	3.93	4.67	4.44
14	4.19	4.74	4.59
15	4.42	4.79	4.72
16	4.62	4.84	4.81
17	4.79	4.87	4.89
18	4.94	4.91	4.95
19	5.06	4.93	4.99
20	5.15	4.95	5.02
P 2	W	Xe1LR	Xe1L
21	5.23	4.97	5.05
22	5.28	4.98	5.06
23	5.32	4.99	5.07
24	5.35	5.00	5.08
25	5.36	5.01	5.08
26	5.36	5.01	5.08
27	5.35	5.02	5.08
28	5.34	5.02	5.08
29	5.32	5.03	5.08
30	5.29	5.03	5.07
31	5.27	5.03	5.07
32	5.24	5.03	5.07
33	5.21	5.04	5.06
34	5.18	5.04	5.06
35	5.16	5.04	5.06
36	5.13	5.04	5.06
37	5.11	5.04	5.06
38	5.09	5.04	5.06
39	5.07	5.04	5.05
40	5.05	5.04	5.05

P 3	W	Xe1LR	Xe1L
41	5.03	5.04	5.05
42	5.02	5.04	5.05
43	5.01	5.04	5.05
44	5.00	5.04	5.05
45	4.99	5.04	5.05
46	4.98	5.04	5.05
47	4.98	5.04	5.05
48	4.98	5.04	5.05
49	4.97	5.04	5.05
50	4.97	5.04	5.05
51	4.97	5.04	5.05
52	4.97	5.04	5.05
53	4.97	5.04	5.05
54	4.97	5.04	5.05
55	4.97	5.04	5.05
56	4.98	5.04	5.05
57	4.98	5.04	5.05
58	4.98	5.04	5.05
59	4.98	5.04	5.05
60	4.98	5.04	5.05

FIG(B.3-2) OBSERVAD. RED. DE LUENBERGER

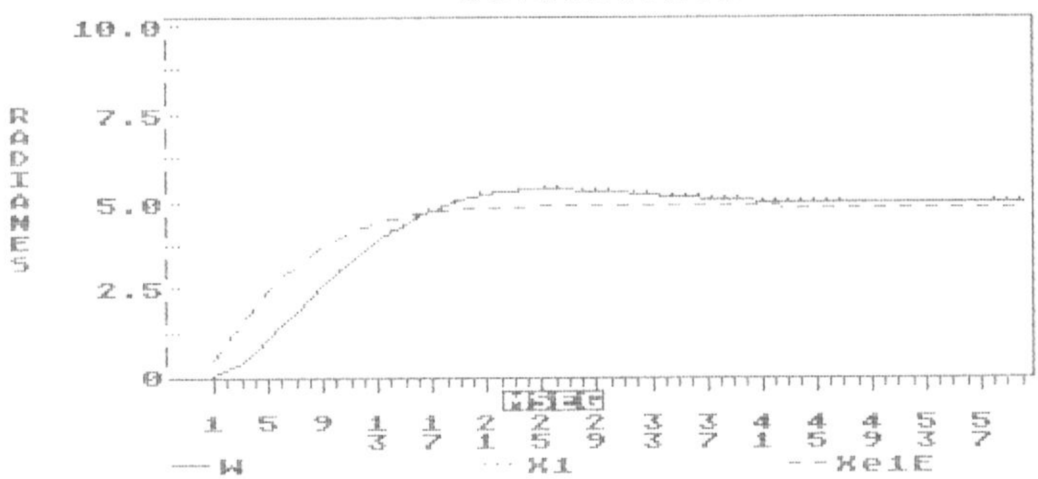


P 1	W	X1	Xe1
1	0.06	0.06	0.91
2	0.22	0.22	1.66
3	0.46	0.47	2.28
4	0.77	0.77	2.78
5	1.11	1.12	3.19
6	1.48	1.49	3.52
7	1.86	1.87	3.80
8	2.25	2.26	4.02
9	2.62	2.64	4.21
10	2.99	3.00	4.36
11	3.33	3.35	4.48
12	3.64	3.67	4.59
13	3.93	3.96	4.67
14	4.19	4.22	4.74
15	4.42	4.46	4.79
16	4.62	4.66	4.84
17	4.79	4.84	4.87
18	4.94	4.98	4.91
19	5.06	5.11	4.93
20	5.15	5.20	4.95
P 2	W	X1	Xe1
21	5.23	5.28	4.97
22	5.28	5.34	4.98
23	5.32	5.37	4.99
24	5.35	5.41	5.00
25	5.36	5.42	5.01
26	5.36	5.42	5.01
27	5.35	5.41	5.02
28	5.34	5.40	5.02
29	5.32	5.38	5.03
30	5.29	5.36	5.03
31	5.27	5.33	5.03
32	5.24	5.30	5.03
33	5.21	5.28	5.04
34	5.18	5.25	5.04
35	5.16	5.22	5.04
36	5.13	5.20	5.04
37	5.11	5.17	5.04
38	5.09	5.15	5.04
39	5.07	5.13	5.04
40	5.05	5.11	5.04

P 3	W	X1	Xe1
41	5.03	5.09	5.04
42	5.02	5.08	5.04
43	5.01	5.07	5.04
44	5.00	5.06	5.04
45	4.99	5.05	5.04
46	4.98	5.04	5.04
47	4.98	5.04	5.04
48	4.98	5.03	5.04
49	4.97	5.03	5.04
50	4.97	5.03	5.04
51	4.97	5.03	5.04
52	4.97	5.03	5.04
53	4.97	5.03	5.04
54	4.97	5.03	5.04
55	4.97	5.03	5.04
56	4.98	5.03	5.04
57	4.98	5.03	5.04
58	4.98	5.04	5.04
59	4.98	5.04	5.04
60	4.98	5.04	5.04

B.4: OBSERVADOR ESTOCASTICO

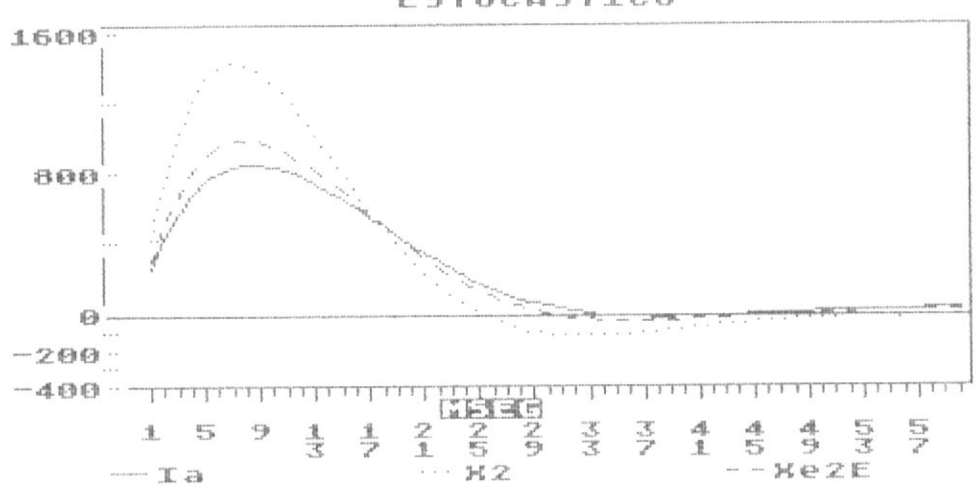
FIG(B.4-1) OBSERVAD. ESTOCASTICO



P 1	W	X1	Xe1E
1	0.06	0.06	0.53
2	0.22	0.22	1.05
3	0.46	0.47	1.59
4	0.77	0.77	2.04
5	1.11	1.12	2.48
6	1.48	1.49	2.85
7	1.86	1.87	3.19
8	2.25	2.26	3.50
9	2.62	2.64	3.76
10	2.99	3.00	3.98
11	3.33	3.35	4.16
12	3.64	3.67	4.32
13	3.93	3.96	4.43
14	4.19	4.22	4.54
15	4.42	4.46	4.62
16	4.62	4.66	4.68
17	4.79	4.84	4.74
18	4.94	4.98	4.79
19	5.06	5.11	4.81
20	5.15	5.20	4.83
P 2	W	X1	Xe1E
21	5.23	5.28	4.85
22	5.28	5.34	4.86
23	5.32	5.37	4.87
24	5.35	5.41	4.88
25	5.36	5.42	4.89
26	5.36	5.42	4.89
27	5.35	5.41	4.89
28	5.34	5.40	4.89
29	5.32	5.38	4.89
30	5.29	5.36	4.89
31	5.27	5.33	4.89
32	5.24	5.30	4.89
33	5.21	5.28	4.89
34	5.18	5.25	4.89
35	5.16	5.22	4.89
36	5.13	5.20	4.89
37	5.11	5.17	4.89
38	5.09	5.15	4.89
39	5.07	5.13	4.89
40	5.05	5.11	4.89

P 3	W	X1	Xe1E
41	5.03	5.09	4.89
42	5.02	5.08	4.89
43	5.01	5.07	4.88
44	5.00	5.06	4.88
45	4.99	5.05	4.88
46	4.98	5.04	4.88
47	4.98	5.04	4.88
48	4.98	5.03	4.88
49	4.97	5.03	4.88
50	4.97	5.03	4.88
51	4.97	5.03	4.88
52	4.97	5.03	4.88
53	4.97	5.03	4.88
54	4.97	5.03	4.88
55	4.97	5.03	4.88
56	4.98	5.03	4.88
57	4.98	5.03	4.88
58	4.98	5.04	4.88
59	4.98	5.04	4.88
60	4.98	5.04	4.88

FIG(B.4-2) OBSERVAD.
ESTOCASTICO

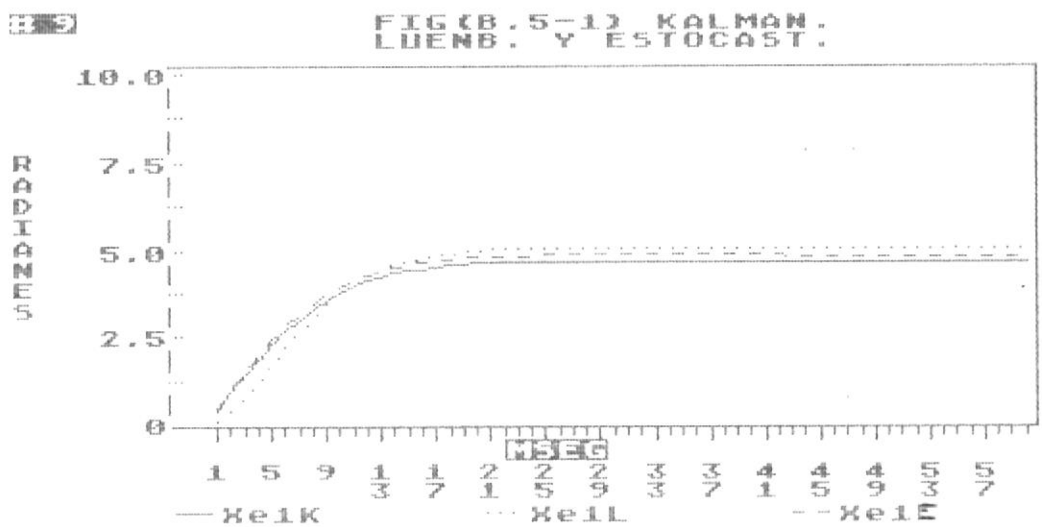


FIG(B.4-2) OBSERVAD.
ESTOCASTICO

P 1	Ia	X2	Xe2E
1	263.97	428.78	305.17
2	449.48	768.29	529.18
3	588.82	1027.26	698.43
4	691.83	1214.62	822.53
5	765.71	1339.30	909.11
6	815.84	1410.03	964.39
7	846.23	1435.13	993.46
8	860.01	1422.47	1000.63
9	859.69	1379.29	989.59
10	847.38	1312.23	963.59
11	824.90	1227.22	925.48
12	793.91	1129.52	877.81
13	755.95	1023.71	822.89
14	712.45	913.71	762.77
15	664.77	802.80	699.28
16	614.17	693.70	634.05
17	561.81	588.57	568.50
18	508.77	489.07	503.85
19	455.99	396.45	441.11
20	404.31	311.55	381.12
P 2	Ia	X2	Xe2E
21	354.45	234.90	324.56
22	306.99	166.72	271.92
23	262.42	107.00	223.57
24	221.09	55.57	179.71
25	183.24	12.05	140.44
26	149.01	-24.01	105.76
27	118.48	-53.17	75.57
28	91.62	-76.02	49.71
29	68.33	-93.22	27.94
30	48.48	-105.42	10.01
31	31.87	-113.25	-4.41
32	18.28	-117.34	-15.62
33	7.46	-118.30	-23.98
34	-0.85	-116.67	-29.80
35	-6.91	-112.98	-33.43
36	-11.00	-107.68	-35.17
37	-13.40	-101.20	-35.35
38	-14.34	-93.90	-34.23
39	-14.10	-86.10	-32.10
40	-12.83	-78.07	-29.14

P 3	Ia	X2	Xe2E
41	-10.81	-70.00	-25.61
42	-8.20	-62.19	-21.70
43	-5.17	-54.66	-17.54
44	-1.86	-47.58	-13.29
45	1.60	-41.01	-9.05
46	5.11	-35.02	-4.92
47	8.57	-29.64	-0.98
48	11.93	-24.87	2.73
49	15.11	-20.71	6.16
50	18.09	-17.15	9.28
51	20.82	-14.16	12.08
52	23.30	-11.69	14.55
53	25.51	-9.71	16.71
54	27.46	-8.18	18.55
55	29.14	-7.04	20.10
56	30.56	-16.26	18.86
57	31.75	-5.77	22.37
58	32.71	-5.55	23.15
59	33.48	-5.54	23.73
60	34.05	-5.70	24.11

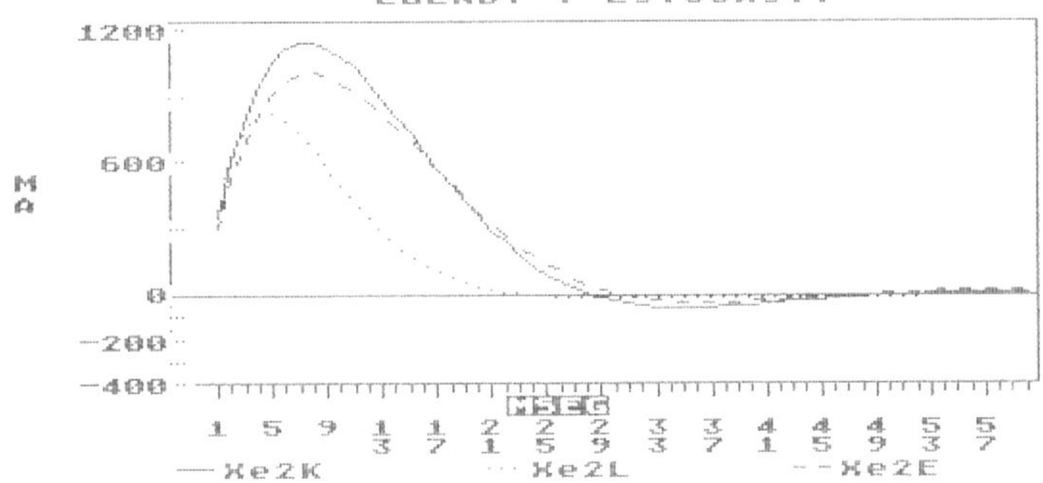
B.5: COMPARACION DE KALMAN, LUENBERGER Y ESTOCASTICO



P 1	Xe1K	Xe1L	Xe1E
1	0.49	0.12	0.53
2	0.98	0.43	1.05
3	1.49	0.84	1.59
4	1.91	1.30	2.04
5	2.33	1.78	2.48
6	2.70	2.25	2.85
7	3.03	2.69	3.19
8	3.33	3.10	3.50
9	3.59	3.45	3.76
10	3.80	3.76	3.98
11	3.98	4.03	4.16
12	4.14	4.26	4.32
13	4.25	4.44	4.43
14	4.36	4.59	4.54
15	4.44	4.72	4.62
16	4.50	4.81	4.68
17	4.56	4.89	4.74
18	4.61	4.95	4.79
19	4.64	4.99	4.81
20	4.66	5.02	4.83
P 2	Xe1K	Xe1L	Xe1E
21	4.68	5.05	4.85
22	4.69	5.06	4.86
23	4.70	5.07	4.87
24	4.71	5.08	4.88
25	4.72	5.08	4.89
26	4.72	5.08	4.89
27	4.72	5.08	4.89
28	4.72	5.08	4.89
29	4.72	5.08	4.89
30	4.72	5.07	4.89
31	4.72	5.07	4.89
32	4.72	5.07	4.89
33	4.72	5.06	4.89
34	4.72	5.06	4.89
35	4.72	5.06	4.89
36	4.72	5.06	4.89
37	4.72	5.06	4.89
38	4.72	5.06	4.89
39	4.72	5.05	4.89
40	4.72	5.05	4.89

P 3	Xe1K	Xe1L	Xe1E
41	4.72	5.05	4.89
42	4.72	5.05	4.89
43	4.71	5.05	4.88
44	4.71	5.05	4.88
45	4.71	5.05	4.88
46	4.71	5.05	4.88
47	4.71	5.05	4.88
48	4.71	5.05	4.88
49	4.71	5.05	4.88
50	4.71	5.05	4.88
51	4.71	5.05	4.88
52	4.71	5.05	4.88
53	4.71	5.05	4.88
54	4.71	5.05	4.88
55	4.71	5.05	4.88
56	4.71	5.05	4.88
57	4.71	5.05	4.88
58	4.71	5.05	4.88
59	4.71	5.05	4.88
60	4.71	5.05	4.88

FIG(B.5-2) KALMAN.
LUENB. Y ESTOCAST.



P 1	Xe2K	Xe2L	Xe2E
1	346.38	388.77	305.17
2	608.89	631.59	529.18
3	808.04	765.65	698.43
4	953.23	820.76	822.53
5	1052.51	820.47	909.11
6	1112.94	783.07	964.39
7	1140.68	722.46	993.46
8	1141.24	649.03	1000.63
9	1119.49	570.32	989.59
10	1079.81	491.60	963.59
11	1026.06	416.42	925.48
12	961.72	347.01	877.81
13	889.83	284.58	822.89
14	813.08	229.65	762.77
15	733.79	182.21	699.28
16	653.94	141.94	634.05
17	575.19	108.28	568.50
18	498.92	80.56	503.85
19	426.22	58.09	441.11
20	357.93	40.13	381.12
P 2	Xe2K	Xe2L	Xe2E
21	294.68	26.01	324.56
22	236.86	15.11	271.92
23	184.71	6.84	223.57
24	138.33	0.72	179.71
25	97.65	-3.69	140.44
26	62.50	-6.75	105.76
27	32.66	-8.78	75.57
28	7.80	-10.01	49.71
29	-12.44	-10.66	27.94
30	-28.47	-10.89	10.01
31	-40.69	-10.83	-4.41
32	-49.53	-10.57	-15.62
33	-55.42	-10.20	-23.98
34	-58.76	-9.76	-29.80
35	-59.94	-9.30	-33.43
36	-59.34	-8.85	-35.17
37	-57.30	-8.84	-35.35
38	-54.12	-8.03	-34.23
39	-50.10	-7.68	-32.10
40	-45.45	-7.37	-29.14

P 3	Xe2K	Xe2L	Xe2E
41	-40.40	-7.10	-25.61
42	-35.19	-6.88	-21.70
43	-29.91	-6.70	-17.54
44	-24.72	-6.54	-13.29
45	-19.70	-6.42	-9.05
46	-14.95	-6.32	-4.92
47	-10.53	-6.24	-0.98
48	-6.47	-6.18	2.73
49	-2.80	-6.14	6.16
50	0.47	-6.11	9.28
51	3.33	-6.08	12.08
52	5.81	-6.07	14.55
53	7.90	-6.06	16.71
54	9.64	-6.05	18.55
55	11.05	-6.05	20.10
56	7.15	-6.05	18.86
57	12.99	-6.05	22.37
58	13.58	-6.05	23.15
59	13.97	-6.05	23.73
60	14.18	-6.05	24.11

APENDICE C

MANUAL DEL USUARIO

Los siguientes pasos deben seguirse para correr los programas:

1 Encienda la computadora PC con un sistema MS/DOS versiòn 2.0.

2 Cuando obtenga el mensaje **A>** del DOS, tipee **basica** y presione la tecla RETURN.

3 Cuando esté en Basic avanzado, tipee LOAD"**nombre del programa** y presione la tecla RETURN.

4 Corra el programa presionando la tecla F2.

BIBLIOGRAFIA

1 ANDERSON B.D.O. & MOORE, Linear Optimal Control, Prentice Hall, Electrical Engineering Series, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971, 295p.

2 D'AZZO J.J. & HOUPIS C.H., Anàlisis y Diseno de Sistemas Lineales de Control, convencional y moderno, segunda ediciòn, McGraw - Hill Book Company, New York, 1975 - 1981.

3 CADZOW J.A. & MARTENS H.R., Discrete-Time and Computer Control Systems. Prentice Hall, Electrical Engineering Series, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.

4 JAMSHIDI M., User's Guide Software for Multivariable Control Systems, Departament of Electrical and Computer Engineering College of Engineering University of New Mexico Alburqueque, July 1985.

5 KWAKERNAAK H. & SIVAN R., Linear Optimal Control Systems, Wiley &Sons, Inc. New York, 1972.

6 NOTON M., Modern Control Engineering, University of Wa-

terloo, Ontario Canadà, Pergamon Press Inc. New York, pag 211 - 215.

7 PALM III W.J., Modelaje, Anàlisis y Control de Sistemas Dinàmicos, John Wiley & Sons, New York, 1983.

8 ROSCO J.S., Simulaciòn Digital de Sistemas Fìsicos, Addison - Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts - Menlo Park, 1972.

9 URQUIZO J., Apuntes de Simulaciòn Analògica y Digital, 1986.

10 VILLAFUERTE C., Apuntes de Control.