

515.42
VIC



ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

Instituto de Ciencias Matemáticas

**"TRANSFORMADA DE WAVELET APLICADA A LA
ESTADISTICA"**

TESIS DE GRADO

**Previa a la obtención del Título de:
INGENIERO EN ESTADISTICA INFORMATICA**

Presentada por:

Patricio Francisco Vicuña Franco



GUAYAQUIL - ECUADOR

AÑO

2000



AGRADECIMIENTO

A Dios, a mis padres,
abuelos, a mi novia y mis
amigos que me ayudaron
cuando más lo necesite.

DEDICATORIA

A MI PADRE

A MI MADRE

A MIS ABUELITAS

A MIS ABUELITOS

A MI NOVIA

A MIS HERMANAS

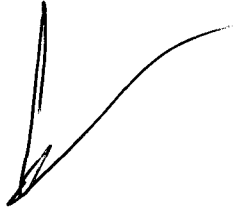
A MIS TIOS

A UN INOLVIDABLE AMIGO

ALEXANDER VICENTE CUSTODE

MORÁN.

TRIBUNAL DE GRADUACIÓN



Ing. Felix Ramírez

**DIRECTOR DEL INSTITUTO DE
MATEMATICAS**

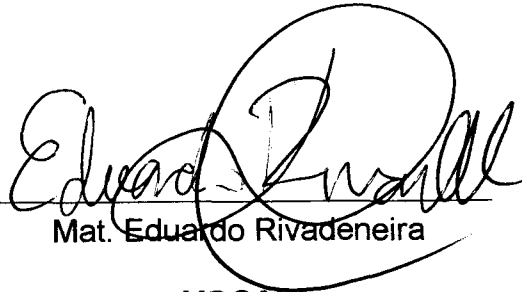


Mat. Fernando Sandoya

DIRECTOR DE TESIS

Dr. José Marín López

VOCAL



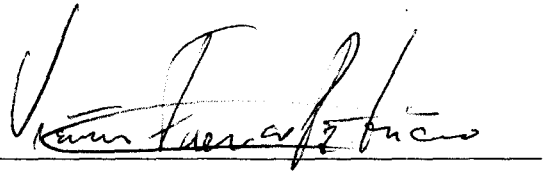
Mat. Eduardo Rivadeneira

VOCAL

DECLARACIÓN EXPRESA.

"La responsabilidad del contenido de esta Tesis de Grado, me corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL"

(Reglamento de Graduación de la ESPOL)

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Patricio Francisco Vicuña Franco', is written over a horizontal line.

Patricio Francisco Vicuña Franco

INDICE GENERAL

RESUMEN	II
ÍNDICE GENERAL	III
ÍNDICE DE FIGURAS	IV
ÍNDICE DE TABLAS	V
INTRODUCCIÓN	1

I. INTRODUCCIÓN A LAS WAVELETS

1.1 Perspectiva Histórica.....	5
1.2 Aplicaciones de las Wavelets.....	7
1.3 Wavelet y Estadística.....	9
1.4 Objetivos de la tesis	10

II. GENERALIDADES

2.1 Notaciones	12
2.2 Espacios de Hilbert.....	16
2.3 Teorema de la proyección ortogonal.....	18
2.4 Conjuntos Ortonormales	21
2.5 Reproducción del Núcleo del espacio de Hilbert	21
2.6 La Transformada de Fourier.....	22

2.6.1	Propiedades básicas de la Transformada de Fourier.....	22
2.7	Series de Fourier.....	24
2.8	Transformada discreta de Fourier.....	27
III.	TRANSFORMADA DE WAVELET EN FORMA CONTINUA Y ANÁLISIS MULTIRESOLUCIÓN	
3.1	Transformada de Wavelet en forma continua.....	29
3.2	Propiedades básicas de la transformada de Wavelet	30
3.3	Análisis de multiresolución	33
3.3.1	Derivada de una función Wavelet.....	41
3.4	Wavelet de Haar.....	42
3.5	Wavelet de Shannon	44
3.6	Wavelet de Daubechies	47
IV.	TRANSFORMADA DISCRETA DE WAVELET	
4.1	Introducción.....	53
4.2	Algoritmo Cascada.....	58
4.3	La notación del operador de DWT	63
V.	WAVELET SHRINKAGE	
5.1	Método Shrinkage.....	69
5.2	Estimador de regresión lineal Wavelet	73

5.2.1 Núcleos Wavelets	73
5.2.2 Estimador de encaje local constante.....	75

VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

ANEXOS

BIBLIOGRAFÍA

RESUMEN

El presente trabajo es una aplicación del procedimiento de transformada de Wavelet aplicada a la estadística, la aplicación muestra como reduce el ruido de una serie de datos y suaviza su comportamiento.

El objetivo es tener una serie de datos en el tiempo, a los datos se aplica la transformada discreta de Wavelet de los cuales se obtienen coeficientes Wavelets, luego se procede aplicar el estimador Wavelet Shrinkage utilizando los coeficientes Wavelets, para que tenga efecto de reducción del ruido se aplica la transformada inversa de Wavelet en forma discreta, obteniendo así la Wavelet deseada.

INDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Areas donde se desarrollan las Wavelets.....	3
Figura 1.2	Imágenes fractales de Daubechies con filtros N=2	6
Figura 2.1	Onda cuadrada	26
Figura 2.2	Gráfico de la función f(x) referente a la onda cuadrada	27
Figura 3.1	Gráfico de $m_0(w) = \cos\left(\frac{w}{2}\right)$ y $m_1(w) = \text{sen}\left(\frac{w}{2}\right)$	43
Figura 3.2	Función de escala de Shannon	46
Figura 3.3	Función Wavelet de Shannon	47
Figura 3.4	Función de escala de una Wavelet de Daub2	49
Figura 3.5	Función de escala Daubechies 8.....	50
Figura 3.6	Wavelet madre de Marr	51
Figura 3.7	Transformada continua de Wavelet de la función de prueba.....	52
Figura.4.1.1	DWT((1,2))	55
Figura.4.1	Función de interpolación y sobre [0,8).	55
Figura 4.2	Descomposición del algoritmo.	66
Figura 4.3	Algoritmo de reconstrucción	67
Figura 4.4	Ilustración del procedimiento de descomposición	68
Figura 4.5	Ilustración del procedimiento de reconstrucción	68

Figura 5.1 Paradigma Wavelet-Shrinkage73

Figura 5.2 Accidentes de motocicleta79

Figura 5.3 Accidentes de motocicleta estimado por Wavelet.....82

INDICE DE TABLAS

Tabla I	La analogía entre los métodos de Fourier y Wavelet.....	53
Tabla II	Decimatación y Dilatación en acción.....	64
Tabla III	Datos para la aplicación Wavelet Shrinkage.....	78
Tabla IV	Coefiente Wavelet.....	80
Tabla V	Estimación Wavelet.....	81

RESUMEN

El presente trabajo es una aplicación del procedimiento de la transformada de Wavelet aplicada a la estadística, la aplicación muestra como reduce el ruido de una serie de datos y suaviza su comportamiento.

El objetivo es tener una serie de datos en el tiempo, a los datos se aplica la transformada discreta de Wavelet de los cuales se obtienen coeficientes Wavelets, luego se procede aplicar el estimador Wavelet Shrinkage utilizando los coeficientes Wavelets, para que tenga efecto de reducción del ruido se aplica la transformada inversa de Wavelet en forma discreta, obteniendo así la Wavelet deseada.

INTRODUCCIÓN

Las Wavelets constituyen una importante herramienta matemática que ha tenido un gran auge en los 10 últimos años, durante los cuales se han desarrollado muchas aplicaciones. Las Wavelets son funciones que satisfacen ciertos requerimientos matemáticos y en general son utilizadas para la representación de datos o funciones.

Se estudiará la aplicación de la transformada de wavelet orientada a la estadística, sus efectos y propiedades para mejorar las estimaciones de un parámetro de una población, sin importar la naturaleza de su distribución.

Mediante el uso del método wavelet shrinkage se realizará la suavización del comportamiento de datos generados con una distribución libre de supuestos, obteniendo así una serie suavizada que estima el comportamiento de los datos orginales.

CAPÍTULO 1

1. INTRODUCCIÓN A LAS WAVELETS

Las Wavelets constituyen una importante herramienta matemática que ha tenido un gran auge en los 10 últimos años, durante los cuales se han desarrollado muchas aplicaciones. Las Wavelets son funciones que satisfacen ciertos requerimientos matemáticos y en general son utilizadas para la representación de datos o funciones.

Las Wavelets han hecho su aparición en muchas áreas de la ciencia pura y aplicada y en la ingeniería. La computación gráfica con sus muchos y variados problemas computacionales no es la excepción a esta regla. En este estudio se trata de explicar las ideas básicas tras las wavelets y la aplicación que estas pueden tener en un campo tan práctico de la ciencia como lo es la estadística. Las principales ideas que originaron estos nuevos instrumentos matemáticos son la búsqueda de algoritmos rápidos

y efectivos para calcular representaciones compactas de funciones y conjuntos de datos. Cuáles representaciones compactas pueden llevarse a cabo? , hay muchas aproximaciones, algunas computacionalmente más efectivas que otras, pero todas ellas "explotan" la estructura de los datos o las características de las funciones. Dependiendo del área de aplicación esta explotación toma diferentes nombres: explotación de la "estructura", "suavizamiento", "coherencia", o "correlación". Por supuesto, para señales puramente aleatorias o datos se pueden hallar representaciones no compactas. Pero muchas de las veces nos interesan datos reales y funciones que exhiben alguna suavidad o coherencia. En estos casos las Wavelets constituyen las herramientas más recomendables.

El nombre "Wavelet" es relativamente nuevo (1980's), sin embargo las ideas alrededor del tema estuvieron por largo tiempo en muchas áreas del análisis abstracto del procesamiento de señales y la física teórica. La principal contribución en el campo de wavelets ha sido reunir un número de ideas similares desde diferentes disciplinas y crear una sinergia entre estas técnicas, como se describe en la figura 1.1. El resultado es una caja de herramientas flexible y poderosa de técnicas algorítmicas combinadas con una sólida teoría básica.

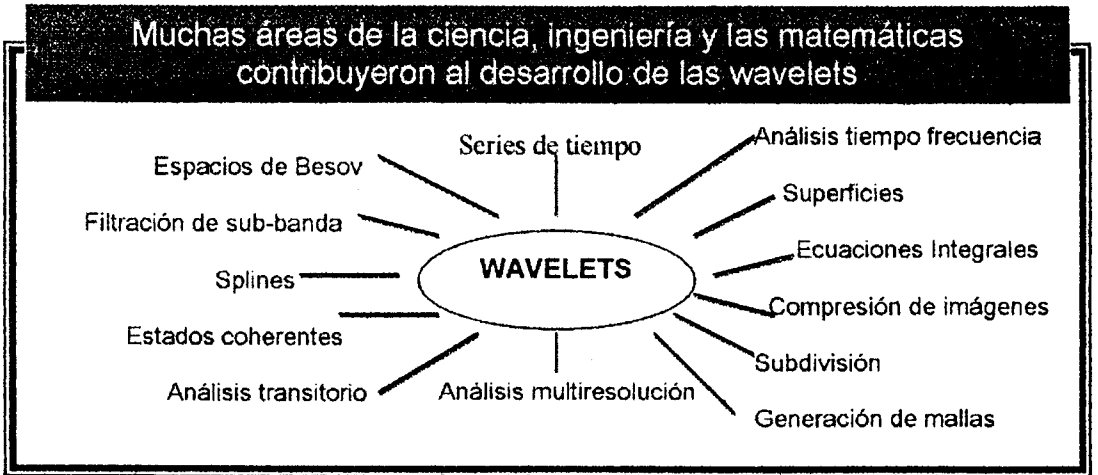


FIGURA 1.1 Areas de la ciencia.

Por causa de los diferentes "orígenes" de las wavelets, hay muchos caminos para motivar su construcción y conocer sus propiedades. Un ejemplo es la filtración de sub-banda en el área de procesamiento de señales, donde se apunta a descomponer una señal en sus frecuencias de banda. En este caso el diseño del filtro y el análisis de Fourier son herramientas esenciales. En cambio, los investigadores en la teoría de la aproximación y el análisis abstracto están interesados en la caracterización de espacios funcionales definidos con varias nociones de suavizamiento. En el campo de la estadística en cambio se requiere analizar el comportamiento de una serie aleatoria de datos para lo cual las nociones de suavizamiento y tendencia son fundamentales.

En el análisis de Wavelet las escalas toman un rol importante en su desarrollo, y en el procedimiento del análisis se adopta un prototipo de función Wavelet, el cual es llamado Wavelet madre. Una de las aplicaciones del análisis Wavelet es la compresión de datos.

La transformada Wavelet tiene aplicaciones en diversos campos, entre los cuales tenemos:

- ✓ Astronomía,
- ✓ Acústica,
- ✓ Ingeniería nuclear,
- ✓ Procesamiento de señal e imagen,
- ✓ Óptica,
- ✓ Fractales,
- ✓ Predicción de terremotos,
- ✓ Visión humana,
- ✓ Aplicaciones matemáticas (resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales)
- ✓ Estadística.

1.1 Perspectiva Histórica

Como se planteó antes, en la historia de las matemáticas, el análisis Wavelet tiene muchos orígenes, algunos de los resultados que dieron origen al análisis Wavelet fueron desarrollados en 1930.

Antes de 1930, se trabajaba con la teoría del análisis de frecuencia, desarrollada por Fourier(1807) y que establece que si $f(x)$ es una función periódica con periodo T , f puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{nx\pi}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{nx\pi}{T}\right) \right)$$

donde los coeficientes a_n y b_n son calculados de la siguiente manera:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{T}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{nx\pi}{T}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

De esta manera fue desarrollada la teoría de las series de Fourier.

Las primeras Wavelets aparecieron en la tesis de A.Haar(1909). Una de las propiedades de las Wavelets de Haar es que estas tienen soporte compacto, sin embargo las Wavelets de Haar no son diferenciables continuamente, lo cual limita sus aplicaciones como ya veremos luego. La transformada de Wavelet permite comprimir un conjunto infinito de datos. Y desde luego, cabe anotar que algunas bases de Wavelets tienen imágenes fractales como se ve en la figura 1.2 y como se analizará en la sección 3.6.

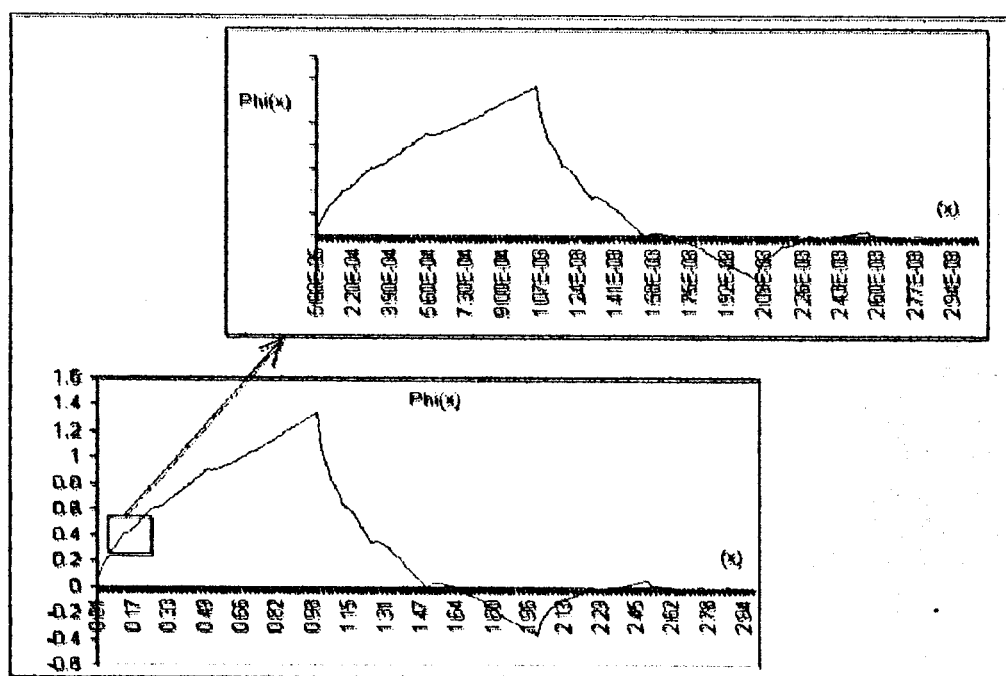


Figura 1.2 Imágenes fractales de Daubechies con filtros $N=2$.

En forma análoga a la teoría de Fourier se habla de transformada continua, discreta o inversa, en lo referente a la transformada de Wavelet se pueden mencionar varios tipos de ellas:

- ✓ La transformada continua de Wavelet
- ✓ La transformada discreta de Wavelet
- ✓ La transformada inversa de Wavelet.

1.2 Aplicaciones de las Wavelets

Las siguientes aplicaciones muestran que las Wavelets pueden tener en el campo de la vida real muchos usos prácticos.

Comprensión de huellas digitales realizado por el FBI.

Desde 1924 hasta la fecha, el FBI(Federal Bureau of Investigation) ha recolectado varios millones de huellas digitales. Dicha recopilación consiste en poner las huellas dactilares sobre un papel mediante tinta, luego estas huellas son escaneadas, pero la calidad de digitalización es realmente baja. Las imágenes de las huellas dactilares son digitalizadas en una resolución de 500 pixeles por pulgada con 256 niveles de información de escala gris por pixel. Una sola huella digital tiene alrededor de 700,000 pixeles y necesita alrededor de 0.6 Mbytes de almacenamiento en disco. Así un par de manos requiere alrededor de 6 Mbytes de almacenamiento en disco. Luego, el almacenamiento de todos los archivos de huellas digitales del FBI ocupan un espacio de alrededor de 200 terabytes de datos. Hay que notar que el precio promedio de almacenamiento por Gbyte es de 900 dólares, el costo de las imágenes

no comprimidas es entonces alrededor de 200 millones de dólares. Obviamente la compresión de datos es obligatoria para reducir esta cifra monetaria.

En Internet la información acerca de Compresión de huellas digitales por parte del FBI usando las transformada Wavelet, puede verse en FTP en <ftp.c3.lanl.gov> (128.165.21.64) en el directorio `pub/WSQ/print_data`.

Reducción de ruido

En diversos campos del conocimiento desde la ciencia planetaria hasta los espectros moleculares, los científicos se han enfrentado con el problema de recobrar la verdadera señal desde una incompleta, lo cual significa que la señal disponible o captada tendría ruido o error. ¿Pueden las Wavelets ayudar a resolver el problema de eliminar el ruido?, la respuesta es "si", a través de una técnica llamada *Wavelet shrinkage y método de reducción*, David Donoho ha trabajado por muchos años [1] desarrollando esta técnica. La técnica trabaja de la siguiente manera, cuando se descompone un conjunto de datos usando Wavelet, los filtros actúan como ponderaciones promediadas que producen el detalle perdido. Algunos de los resultados de los coeficientes Wavelet corresponden a los detalles del conjunto de datos; si los detalles son pequeños estos podrían ser omitidos sin que afecte la característica

esencial del conjunto de datos. Así, esta técnica deja una señal libre de ruido. .

1.3 Wavelet y Estadística

Las aplicaciones de la teoría Wavelet son recientes y tienen pocos años de desarrollo. Los métodos wavelets aplicados al análisis estadístico permiten uso en:

- ✓ Regresión
- ✓ Estimación de funciones de densidad
- ✓ Análisis de factores
- ✓ Modelación y predicción en análisis de series de tiempo.

Ultimamente, las wavelets han logrado una gran notoriedad en la estadística **no paramétrica** (donde el método es libre de distribuciones y de supuestos tales como suposiciones acerca de la población, conocimiento de la desviación estándar y si las muestras son independientes o no) y en las **series de tiempo**. En lo referente a la estimación estadística se aplica a la suavización o reducción de ruido (Wavelet Shrinkage). Con el método Wavelet shrinkage se han hecho importantes aplicaciones para predicciones y estimación de parámetros.

Lo que se trata con este tipo de método es suavizar mediante estimaciones el modelo no paramétrico.

1.4 Objetivos de la tesis

Se estudiará la aplicación de la transformada de wavelet orientada a la estadística, sus efectos y propiedades para mejorar las estimaciones de un parámetro de una población, sin importar la naturaleza de su distribución.

Mediante el uso del método wavelet shrinkage se realizará la suavización del comportamiento de datos generados con una distribución libre de supuestos (recordando que se trabaja con el modelo no paramétrico), obteniendo así una serie suavizada que estima el comportamiento de los datos originales.

Se pretende también el desarrollo de un algoritmo que facilite la aplicación del método wavelet shrinkage, para estimar y pronosticar valores en una serie histórica, y la implementación del algoritmo de Daubechies-Lagarias para calcular los coeficientes de la función de escalonamiento de la wavelet de Daubechies. Además se trata de hacer notar la utilidad de la incorporación de nuevas técnicas y conceptos del análisis matemático en campos tan prácticos como la estadística, y como

estos enfoques, a pesar de su complejidad, permiten una mejor modelización de la realidad y la realización de buenos pronósticos en situaciones en las que las técnicas tradicionales no pueden aplicarse o dan pésimas aproximaciones.

CAPÍTULO 2

2. GENERALIDADES

2.1 Notaciones

Para denotar a los conjuntos de números naturales, enteros, reales y complejos se utilizará la notación \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} y \mathbb{C} respectivamente. El módulo de un número complejo $z \in \mathbb{C}$ será denotado por $|z|$ y el conjugado por \bar{z} . El conjunto de números reales positivos se identificará por \mathbb{R}^+ . Todas las funciones consideradas, son funciones medibles.

Definición.- La medida exterior de un conjunto E , que se escribe $u^*(E)$, es una aplicación que cumple con los siguientes axiomas:

1. $u^*(E)$ esta definida para todo el conjunto E .
2. $u^*(E) \geq 0$

3. $u^*(E_1 \cup E_2 \cup \dots) \leq u^*(E_1) + u^*(E_2) + \dots$ para todos los conjunto E_1, E_2, \dots ;
disjuntos o no.
4. La medida exterior es invariante por traslación.

Definición.- Un conjunto E se dice medible, o mas precisamente medible con respecto a una medida exterior, si para todos los conjuntos T

$$u^*(T) = u^*(T \cap E) + u^*(T \cap E^c),$$

en tal caso $u^*(E) = u(E)$ se llama medida de E .

Definición.- Sea E un conjunto medible y f una función definida sobre E . Se dice que f es medible según Lebesgue, o brevemente medible sobre E , si $\forall k \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E / f(x) > k\}$ es medible.

Definición.- El punto $x \in \mathbb{R}^n$ se denomina punto de adherencia del conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ si cualquier entorno de este punto contiene al menos un punto del conjunto E .

Definición.- El conjunto de todos los puntos de adherencia del conjunto E se denomina clausura de E y se representa con \overline{E} .

Definición.- El soporte de una función f denotado por $\text{supp}(f)$ es la clausura en \mathbb{R} del conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$, es decir $\overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$.

Además, se usarán los elementos que definimos a continuación:

La función indicadora de una relación ρ , $1(\rho)$ definida como:

$$1(\rho) = \begin{cases} 1, & \text{si la relación es satisfecha} \\ 0, & \text{si la relación no es satisfecha} \end{cases}$$

Se define la función delta de Kronecker $\delta_{u,v}$ usando la función indicadora como $1(u=v)$. De aquí se sigue la definición de δ_u como $\delta_{u,0}$. El máximo y mínimo de a y b se representan por $a \vee b$ y $a \wedge b$ respectivamente.

Además si utilizamos la siguiente representación:

f_+ para la parte positiva de la función f .

f_- para la parte negativa de la función f .

Se tiene entonces lo siguiente:

$$f_+ = f \cdot 1(f \geq 0) = f \vee 0$$

$$f_- = f \cdot 1(f \leq 0) = -(f \wedge 0)$$

y según la definición, $|f| = f_+ + f_-$ y $f = f_+ - f_-$.

Se usará la notación "O" (grande) para indicar la velocidad de convergencia de una sucesión a otra; cuando $a_n = O(b_n)$ quiere decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$$

y la notación $a_n = o(b_n)$ ("o"chica), para indicar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Un punto de Lebesgue de una función f es cualquier punto x tal que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{-r}^r |f(x+t) - f(x)| dx = 0$$

La función Delta de Dirac $\delta(x)$ se define como:

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \mathbf{1}_{[0 \leq x \leq a]} \quad (2.1)$$

de esta definición se obtiene lo siguiente:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

La función delta de Dirac así definida satisface las siguientes relaciones:

$$\int_R \delta(x) dx = 1; \quad \int_R \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0),$$

esta función delta Dirac también puede ser expresada como la derivada generalizada de la función escalón de Heaviside $H(x)$, definida como:

$$H(x) = \mathbf{1}(x \geq 0) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

2.2 Espacios de Hilbert

Espacios Pre-Hilbertianos

Definición.- Sea E un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}

Una aplicación $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow K$ es un producto escalar si

$$\forall x, y, z \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in K$$

$$\text{i) } \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$\text{ii) } \quad \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$$

$$\text{iii) } \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ y } \langle x, x \rangle = 0 \text{ si y solo si } x = 0$$

Definición.- Un espacio vectorial provisto de un producto escalar (E, \langle, \rangle) se llama espacio pre-hilbertiano.

Definición.- La norma $\|x\|$ de un elemento x de un espacio pre-hilbertiano

$$E, \quad x \in E \text{ se define por: } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Definición.- Un espacio vectorial E se dice espacio vectorial normado si está dotado de una norma.

Definición.- Si E es un espacio vectorial normado y $\{x_n\}$ es una sucesión de elementos de E , se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia $x \in E$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0 \quad \text{y se escribe como} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \text{donde } d(x, x_n)$$

representa la distancia de x a x_n .

Definición.- Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio vectorial normado es una sucesión de Cauchy si

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} d(x_n, x_m) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|x_n - x_m\| = 0.$$

Definición.- Un espacio vectorial normado se denomina espacio COMPLETO si toda sucesión de Cauchy converge en dicho espacio.

Definición.- Un espacio vectorial provisto de una norma proveniente de un producto escalar se dice ESPACIO DE HILBERT si y solo si es completo.

Trabajar con el espacio abstracto de Hilbert es beneficioso en muchos aspectos. Nuestra intuición geométrica basada en las propiedades de los

espacios Euclidianos \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , puede ser en parte fácilmente extendida a un espacio arbitrario de Hilbert. Un ejemplo es el teorema de la proyección. La norma en un espacio de Hilbert está asociada con una expresión cuadrática y con el proceso de reducción para minimizar la norma en la categoría de problemas lineales.

2.3 Teorema de la proyección ortogonal.

Definición.- Sea H un espacio de Hilbert, se tienen las siguientes definiciones:

- x es ortogonal a y en H si $\langle x, y \rangle = 0$
- El ortogonal de x en H es $x^\perp = \{y \in H / \langle x, y \rangle = 0\}$
- El ortogonal de $M \subset H$ es $M^\perp = \{y \in H / \langle x, y \rangle = 0 \forall x \in M\}$

Propiedades:

- x^\perp es un subespacio vectorial cerrado en H .
- M^\perp es un subespacio vectorial cerrado de H .
- Además $M \cap M^\perp = \{0\}$

Definición.- Sea H un espacio de Hilbert y sea M un subespacio de él. Al conjunto

$$M^\perp = \{x \in H \mid \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in M\},$$

se llama complemento ortogonal de M .

Ejemplos importantes de espacios de Hilbert son:

- *El Espacio Euclidiano (finito-dimensional) \mathbb{R}^n*

Este espacio es un espacio de Hilbert, con el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ y la norma } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Donde $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que: $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

- *El Espacio de todas las funciones real integrables*

$$L_1(\mathbb{R}) = \{f \mid \int_{\mathbb{R}} |f| < \infty.\}$$

con el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int f \cdot g, \text{ y la norma } \|f\| = \sqrt{\int f^2}$$

- *El Espacio de todas las funciones reales cuadrado integrables*

$$L_2(\mathbb{R}) = \left\{ f / \int_{\mathbb{R}} |f|^2 < \infty. \right\}$$

con el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int f \cdot g, \text{ y la norma } \|f\| = \sqrt{\int f^2}$$

- *El Espacio de todas las funciones complejas cuadrado integrables*

$$L_2(\mathbb{C}) = \left\{ f / \int f \cdot \bar{f} < \infty. \right\}$$

con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int f \cdot \bar{g} \text{ y la norma } \|f\| = \sqrt{\int f \cdot \bar{f}}$$

- *Espacios de todas las sucesiones cuadrado sumables ℓ_2*

$$\ell_2 = \left\{ \{x_n\} / \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

$$\mathbf{x} = \{x_n\} \in \ell_2 \text{ si } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty$$

con el producto interno definido por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i \bar{y}_i \text{ y la norma } \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{Z}} |x_i|^2} .$$

2.4 Conjuntos Ortonormales

Definición.- Un conjunto x_1, x_2, \dots, x_n de elementos de un espacio de Hilbert H es ortonormal si

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } i=j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

2.5 Reproducción del Núcleo del espacio de Hilbert

Una función de dos variables x y y , $K(x,y)$ es llamada función reproductora del núcleo para el espacio de funciones H si

- (i) Para un y fijo, $K(x,y)$ es una función en H .
- (ii) Para cada función $f \in H$ y cada y , K tiene la propiedad reproductora:

$$f(y) = \langle f(x), K(x, y) \rangle.$$

Teorema.- Sea V un subespacio de L_2 y sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, una base ortonormal de V . Entonces V es un espacio de Hilbert con función reproductora del núcleo:

$$K(x, y) = \sum_n e_n(x) e_n(y)$$

$$f(y) = \int f(x) K(x, y) dx. \quad \forall f \in V.$$

2.6 La transformada de Fourier

Definición. – La transformada de Fourier de una función $f \in L_1(\mathbb{R})$, está definida por:

$$\hat{f}(w) = F[f(x)] = \langle f(x), e^{-iwx} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iwx} dx$$

Definición. – Si $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ es la transformada de Fourier de $f \in L_1(\mathbb{R})$, entonces:

$$f(x) = F^{-1}[\hat{f}(w)] = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(w) e^{iwx} dw$$

es la denominada transformada de Fourier inversa.

2.6.1 Propiedades básicas de la Transformada de Fourier:

La transformada de Fourier definida anteriormente satisface las siguientes propiedades:

[BOU] Límite infinito, $\hat{f} \in L_\infty(\mathbb{R})$, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

[UC] Continuidad Uniforme, $\hat{f}(w)$ es uniformemente convergente sobre

$-\infty < w < \infty$

[LIN] Linealidad, $F[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha F[f(x)] + \beta F[g(x)]$

[DER] Derivada, $F[f^{(n)}(x)] = (iw)^n \hat{f}(w)$

[SHI] Desplazamiento, $F[f(x-x_0)] = e^{-iw x_0} \hat{f}(w)$

[SCA] Escala, $F[f(ax)] = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$

[SYM] Simetría, $F[F[f(x)]] = 2\pi f(-x)$

[CON] Convolución, si se define el producto de convolución de f y g

como: $f * g(x) = \int f(x-t)g(t)dt$, una de las propiedades más importantes

de la transformada de Fourier es que $F[f * g(x)] = \hat{f}(w)\hat{g}(w)$

[MOM] Teorema del Momento, $\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx = (i)^n \frac{d^n \hat{f}(w)}{dw^n} \Big|_{w=0}$

Según estas propiedades, por ejemplo la función delta de Dirac satisface las propiedades:

- $f(x) * \delta(x-x_0) = f(x-x_0)$
- $F[\delta(x-x_0)] = e^{-iw x_0}$

Nota: Las normas $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ para el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ están definidas por

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{norma de la suma}$$

2.7 Series de Fourier

La teoría de las series de Fourier tiene un rol importante en la teoría de la transformada Wavelet. El cálculo de filtros Wavelet de funciones de transferencia y la realización de pruebas de ortogonalidad son algunos ejemplos importantes de la iteración de la transformada Wavelet con las series de Fourier.

El resultado más importante de la teoría de las series de Fourier indica que toda función periódica con periodo T , $f(x)=f(x+T)$, puede ser expandida en serie de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$$

donde:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx .$$

En términos de funciones trigonométricas la expresión anterior toma la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right)$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{T}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{nx\pi}{T}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

a_n y b_n se denominan los coeficientes de Fourier.

Unicidad. – Si $f \in L_1(\mathbb{R})$, y $a_n=0$, $b_n=0$, $n=1, 2, \dots$; entonces f es la función cero, es decir $f=0$.

Aplicación.-

Como una aplicación desarrollamos la serie de Fourier para la función onda cuadrada.

$$f(x) = \begin{cases} k, & -\pi < x < 0 \\ -k, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Con $f(x+2\pi)=f(x)$

Encontramos los coeficientes de Fourier:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} k \cos nx \, dx \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[-k \frac{\text{sen } nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + k \frac{\text{sen } nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \text{sen } nx \, dx + \int_0^{\pi} k \text{sen } nx \, dx \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-k \frac{\text{cos } nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - k \frac{\text{cos } nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right]$$

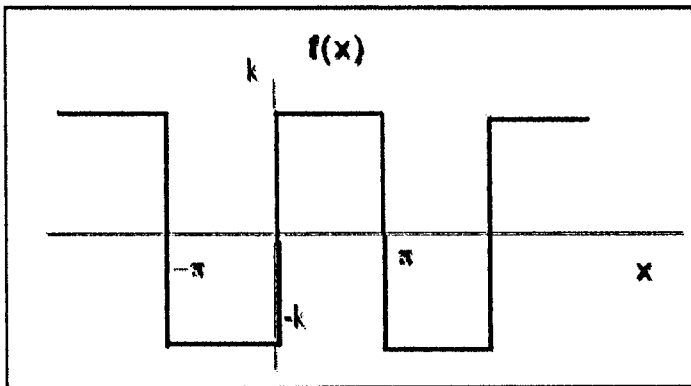


Figura 2.1 Onda cuadrada

La suma parcial de la correspondiente serie de Fourier toma la forma:

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\text{sen } x + \frac{1}{3} \text{sen } 3x + \frac{1}{5} \text{sen } 5x + \dots \right)$$

$$S1 = \frac{4k}{\pi} \text{sen } x$$

S1 es el primer término de la serie de $f(x)$.

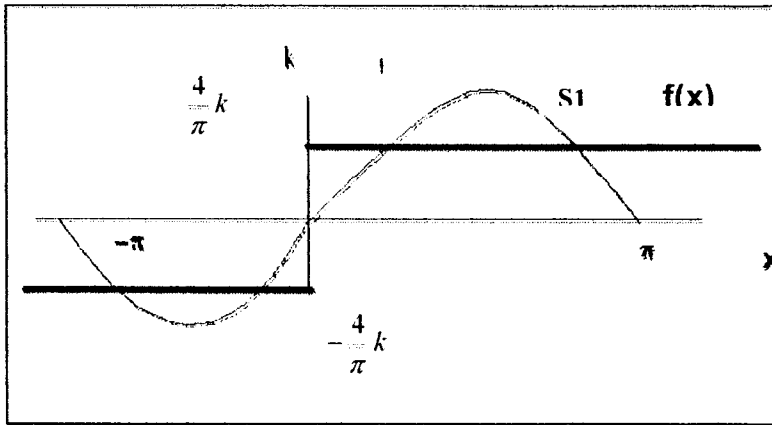


Figura 2.2 Gráfico de la función $f(x)$ referente a la onda cuadrada.

2.8 Transformada discreta de Fourier

La transformada discreta de Fourier denotada con DFT, de una sucesión

$\underline{f} = \{f_n, n=0,1,\dots,N-1\}$ se define como:

$$\underline{F} = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} f_n w_N^{nk}, k=0,\dots,N-1 \right\}$$

donde:

$$w_N = e^{-i2\pi / N}.$$

y la transformada discreta inversa de Fourier se define como:

$$\underline{f} = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} F_K w_N^{-nk}, n=0,\dots,N-1 \right\}.$$

Obviamente, la transformada continua de Fourier se aplica a funciones cuyo dominio es algún subconjunto de los reales, mientras que la transformada discreta se aplica sobre un conjunto discreto de observaciones. En el siguiente capítulo se desarrollara la transformada Wavelet en su forma continua y discreta.

CAPÍTULO 3

3. TRANSFORMADA DE WAVELET EN FORMA CONTINUA

3.1 Transformada de Wavelet en forma continua.

En este capítulo, daremos algunos de los resultados teóricos más importantes de la transformada de Wavelet. Empezaremos con la transformada de Wavelet en forma continua, para la cual el análisis de multiresolución es un concepto fundamental en su construcción y una forma de entenderla. La principal herramienta matemática usada en esta parte es el análisis de Fourier.

Sea $\psi_{a,b}(x)$, con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$ una familia de funciones definida en base a la traslación y dilatación de una sola función $\psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$,

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Con una norma que satisface la propiedad que $\|\psi_{a,b}(x)\|$ es independiente de **a** y **b**. Esta función ψ es llamada la función Wavelet o la Wavelet madre y satisface la condición de admisibilidad,

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\Psi(w)|^2}{|w|} dw < \infty$$

donde $\Psi(w)$ es la transformada de Fourier de $\psi(x)$. Esta condición de admisibilidad implica que

$$0 = \Psi(0) = \int \psi(x) dx .$$

Sea $f(x) \in L_2$, la transformada de Wavelet en forma continua es definida como una función de dos variables

$$CWT_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx .$$

donde **a**, **b** varían continuamente sobre $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$, **a** se denomina parámetro de dilatación y **b** es el parámetro de traslación.

3.2 Propiedades básicas de la transformada de Wavelet

Resolución de identidad, cuando la condición de admisibilidad es satisfecha, es decir, $C_\psi < \infty$, es posible encontrar la transformada continua inversa, a través de la relación conocida como resolución de identidad o

Identidad reproductora de Calderón, que se establece de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} CWT_f(a,b) \psi_{a,b}(x) \frac{da db}{a^2},$$

Si restringimos los valores que toma a al conjunto $(0, +\infty)$, se tiene:

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\Psi(w)|^2}{w} dw < \infty,$$

y la relación resolución de identidad se transforma en:

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty CWT_f(a,b) \psi_{a,b}(x) \frac{da db}{a^2}.$$

Ahora, se listarán alguna propiedades importantes de la transformada Wavelet en forma continua:

Propiedad de Cambio (shifting), si $f(x)$ tiene una transformada Wavelet en forma continua $CWT_f(a,b)$, entonces $g(x) = f(x - \beta)$ tiene una transformada Wavelet en forma continua, $CWT_g(a,b) = CWT_f(a, b - \beta)$.

Propiedad de Escala, si $f(x)$ tiene una transformada Wavelet en forma

continúa $CWT_f(a,b)$, entonces $g(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{x}{s}\right)$, tiene una transformada

Wavelet en forma continua:

$$CWT_g(a,b) = CWT_f\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right).$$

Propiedad de Conservación de Energía,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |CWT_f(a,b)|^2 \frac{da db}{a^2}$$

Propiedad de Localización, sea $f(x) = \delta(x-x_0)$, es decir la función Delta de

Dirac en el punto x_0 . Entonces:

$$CWT_f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x_0 - b}{a}\right).$$

En cuanto a $\psi(x)$, existen diversas funciones que pueden usarse como Wavelet madre y que dan origen a transformadas de Wavelet distintas, a continuación se desarrolla la Wavelet de Haar.

Transformada de Haar en forma continua.

La transformada de Wavelet de Haar en forma continua es:

$$\psi_{a,b}^{HAAAR}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} [1(b \leq x \leq \frac{a}{2} + b) - 1(\frac{a}{2} + b \leq x \leq a + b)]$$

Así, si F una primitiva de f , es decir, $F'=f$, entonces

$$CWT_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b}^{HAAAR} \rangle = \frac{2}{\sqrt{a}} \left[F\left(\frac{a}{2} + b\right) - \frac{F(b) + F(a+b)}{2} \right].$$

3.3 Análisis de multiresolución

Existen dos maneras para presentar las Wavelets, una es como ya lo hicimos antes por medio de la transformada continua de Wavelet y la otra es mediante el análisis de multiresolución.

El análisis de multiresolución (MRA) parte de una sucesión de subespacios cerrados V_n , $n \in \mathbb{Z}$ en $L_2(\mathbb{R})$ tal que estos subespacios mantienen una jerarquía, es decir

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

y tal que

$$\bigcap_n V_n = \{0\}$$

$$\bigcup_j \overline{V_j} = L_2(\mathbb{R})$$

Según esto, los subespacios tendrán una intersección que será el vector nulo.

La jerarquía es construida tal que satisfaga dos condiciones:

(i) Los V -espacios son auto similares, lo cual significa que:

$$f(2^j x) \in V_j \text{ si y solo si } f(x) \in V_0 \quad (3.1)$$

(ii) Existe una función de escalonamiento $\phi \in V_0$ que genera el espacio V_0 .

$$V_0 = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) / f(x) = \sum_k c_k \phi(x-k) \right\} \quad (3.2)$$

donde el conjunto $\{ \phi(\bullet - k), k \in \mathbb{Z} \}$ es una base ortonormal de V_0 .

Asumiendo que $\int \phi(x) dx \neq 0$. Puesto que $V_0 \subset V_1$ y la función $\phi(x) \in V_0$ entonces $\phi(x) \in V_1$ y por tanto puede ser representada como una combinación lineal de funciones de V_1 , pero según (3.2) $\phi(x-k) \in V_0$ y $\phi(2x-k) \in V_1$ según (3.1), entonces

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \phi(2x-k), \quad (3.3)$$

esta ecuación es conocida como la "ecuación de escalonamiento", y es fundamental en la construcción y análisis de la transformada de Wavelet. El posicionamiento de los índices toma distintas convenciones, la que es llamada la "*convención de Daubechies*" que establece

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots$$

y si los índices de los subespacios de multiresolución están al reverso, es decir

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

entonces se tiene la llamada "*convención de Mallat*".

Una generalización de (3.1) y (3.2) permite llegar a determinar que la familia $\{\phi_{jk}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), j \text{ fijo}, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de V_j , acorde al índice de Mallat.

Mientras que $\{\phi_{jk}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j} x - k), j \text{ fijo}, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de V_j , acorde al índice de *Daubechies*.

Los coeficientes h_n son importantes para relacionar el análisis multiresolución a la teoría de la señal de un proceso. El vector $\tilde{h} = \{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ es llamado **filtro wavelet**.

Se define la función m_0 como la **función de transferencia**, la cual permite describir el comportamiento del filtro Wavelet asociado en el dominio de Fourier,

$$m_0(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ikw} = \frac{1}{\sqrt{2}} H(w).$$

La función m_0 es entonces periódica con periodo 2π y los filtros $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ son los coeficientes de Fourier de la función $H(w) = \sqrt{2}m_0(w)$.

En el dominio de Fourier, $\Phi(w)$ es la transformada de Fourier de la función dada en (3.3) $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \phi(2x - k)$, y entonces

$\Phi(w) = m_0\left(\frac{w}{2}\right) \Phi\left(\frac{w}{2}\right)$, como se demuestra a continuación:

$$\begin{aligned} \Phi(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-imx} dx \\ &= \sum_k \sqrt{2} h_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - k) e^{-imx} dx \\ &= \sum_k \frac{h_k}{\sqrt{2}} e^{-ikw/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - k) e^{-i(2x-k)w/2} d(2x - k) \\ &= \sum_k \frac{h_k}{\sqrt{2}} e^{ikw/2} \Phi\left(\frac{w}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= m_0\left(\frac{w}{2}\right)\Phi\left(\frac{w}{2}\right) \quad (3.4)$$

Haciendo lo mismo repetidamente, en n iteraciones se tiene

$$\Phi(w) = m_0\left(\frac{w}{2^1}\right) * m_0\left(\frac{w}{2^2}\right) * m_0\left(\frac{w}{2^3}\right) * \dots * m_0\left(\frac{w}{2^n}\right), \text{ es decir}$$

$$\Phi(w) = \prod_{n=1}^{\infty} m_0\left(\frac{w}{2^n}\right).$$

Ahora, se probarán 2 propiedades importantes de los filtros Wavelet asociados al análisis multiresolución con normalización y ortogonalidad.

Normalización

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \int \phi(x) dx &= \sqrt{2} \sum_k h_k \int \phi(2x - k) dx \\ &= \sqrt{2} \sum_k h_k \frac{1}{2} \int \phi(2x - k) d(2x - k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k \int \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Puesto que $\int \phi(x) dx \neq 0$ por suposición.

Este resultado permite decir que $m_0(0)=1$, puesto que $\int \phi(x) dx \neq 0$ y $\phi(x) \in L_1(\mathbb{R})$ en el dominio del tiempo, tal que $\Phi(0) \neq 0$ y $\Phi(w) \in L_\infty$ en el dominio de Fourier.

Ortogonalidad. Sea $l \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_k h_k h_{k-2l} = \delta_l .$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \phi(x)\phi(x-l) &= \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2x-k)\phi(x-l) \\ &= \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2x-k) \sqrt{2} \sum_m h_m \phi(2(x-l)-m). \end{aligned}$$

por integración de ambos lados, se tiene:

$$\begin{aligned} \delta_l &= 2 \sum_k h_k \left[\sum_m h_m \frac{1}{2} \int \phi(2x-k)\phi(2x-2l-m)d(2x) \right] \\ &= \sum_k \sum_m h_k h_m \delta_{k,2l+m} \\ &= \sum_k h_k h_{k-2l} \end{aligned}$$

Lo último se obtiene tomando $k = 2l + m$.

Un caso de especial importancia es cuando $l=0$, con lo cual la ecuación $\sum_k h_k h_{k-2l} = \delta_l$ se transforma en $\sum_k h_k^2 = 1$.

El hecho de que el sistema $\{\phi(\bullet - k), k \in \mathbb{Z}\}$ constituye una base ortonormal para V_0 puede ser expresada en el dominio de Fourier en términos de $\Phi(w)$ o $m_0(w)$ de la siguiente manera:

(a) En términos de $\Phi(w)$:

$$f(w) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\Phi(w + 2l\pi)|^2 = 1$$

(b) En términos de m_0

$$|m_0(w)|^2 + |m_0(w + \pi)|^2 = 1$$

Puesto que $\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\Phi(2w + 2l\pi)|^2 = 1$, por la ecuación (3.4):

$$\Phi(w) = m_0\left(\frac{w}{2}\right)\Phi\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |m_0(w + l\pi)|^2 |\Phi(w + l\pi)|^2 = 1,$$

ahora dividiendo esta suma en dos partes, una con índices impares y otra con índices pares, se tiene,

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_0(w + 2k\pi)|^2 |\Phi(w + 2k\pi)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_0(w + (2k+1)\pi)|^2 |\Phi(w + (2k+1)\pi)|^2$$

para simplificar la expresión, usaremos la periodicidad 2π de $m_0(w)$:

$$\begin{aligned} 1 &= |m_0(w)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(w + 2k\pi)|^2 + |m_0(w + \pi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi((w + \pi) + 2k\pi)|^2 \\ &= |m_0(w)|^2 + |m_0(w + \pi)|^2. \end{aligned}$$

Las condiciones $|m_0(w)|^2 + |m_0(w + \pi)|^2 = 1$ y $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(2w + 2k\pi)|^2 = 1$, no son

equivalentes. La primera expresión es necesaria y la segunda expresión es una condición suficiente de ortogonalidad.

Por ejemplo,

$$\phi(x) = \frac{1}{3} \mathbf{1}(0 \leq x \leq 3)$$

tiene una función de transferencia

$$m_0(w) = \frac{1 + e^{-3iw}}{2};$$

que satisface

$$m_0(0) = 1 \text{ y } \left| \frac{1+e^{-3iw}}{2} \right|^2 + \left| \frac{1-e^{-3iw}}{2} \right|^2 = 1,$$

no obstante, puesto que $\Phi(w) = e^{-3iw/2} \frac{\text{sen}(3w/2)}{3w/2}$, la suma:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(2w + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cos w + \frac{2}{9} \cos 2w \neq 1.$$

3.3.1 Derivada de una función Wavelet.

Siempre que una sucesión de subespacios satisface las propiedades del análisis multiresolución, existe una base ortonormal para $L_2(\mathbb{R})$,

$$\{\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), j, k \in \mathbb{Z}\},$$

tal que $\{\psi_{jk}(x), j \text{ fijo}, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal del "espacio diferencia" $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$. La función $\psi(x) = \psi_{00}(x)$ es llamada la función wavelet o informalmente la wavelet madre, conviene observar que $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$ significa que $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ donde \oplus representa la suma directa de subespacios, es decir el subespacio V_{j+1} es igual a la suma directa del subespacio V_j y su complemento ortogonal W_j .

3.4 Wavelet de Haar

Se mostrará como el análisis de multiresolución desempeña un papel importante en la Wavelet de Haar.

En este caso sea $\phi(x) = 1(0 \leq x \leq 1)$ y supongamos que ψ es desconocida.

La ecuación de escalonamiento $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \phi(2x - k)$ es muy simple

para el caso de Haar. Por simple inspección, observamos que la ecuación de escalonamiento satisface:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi(2x) + \phi(2x - 1) \\ \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \phi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \phi(2x - 1)\end{aligned}$$

Donde los filtros Wavelets son los coeficientes:

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Para la Wavelet de Haar, la función de transferencia se convierte en:

$$m_0(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iw0} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iw1} \right) = \frac{1 + e^{-iw}}{2}$$

Ahora

$$m_1(w) = -e^{-iw} \overline{m_0(w + \pi)} = -e^{-iw} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{iw} \right) = \frac{1 - e^{-iw}}{2}.$$

Observando que

$$m_0(w) = |m_0(w)|e^{i\varphi(w)} = \cos\left(\frac{w}{2}\right)e^{-iw/2},$$

pues $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. Con lo que $\varphi(w) = -w/2$; es decir, la Wavelet de

Haar tiene una fase lineal, esto quiere decir que la función de escala es simétrica en el dominio de tiempo, también, la condición de ortogonalidad

$|m_0(w)|^2 + |m_1(w)|^2 = 1$, es fácilmente verificada dado que $|m_0(w)|^2 = \cos^2\left(\frac{w}{2}\right)$ y $|m_1(w)|^2 = \text{sen}^2\left(\frac{w}{2}\right)$, entonces la condición de ortogonalidad se transforma en la

identidad trigonométrica fundamental $\text{sen}^2 \frac{w}{2} + \cos^2 \frac{w}{2} = 1$.

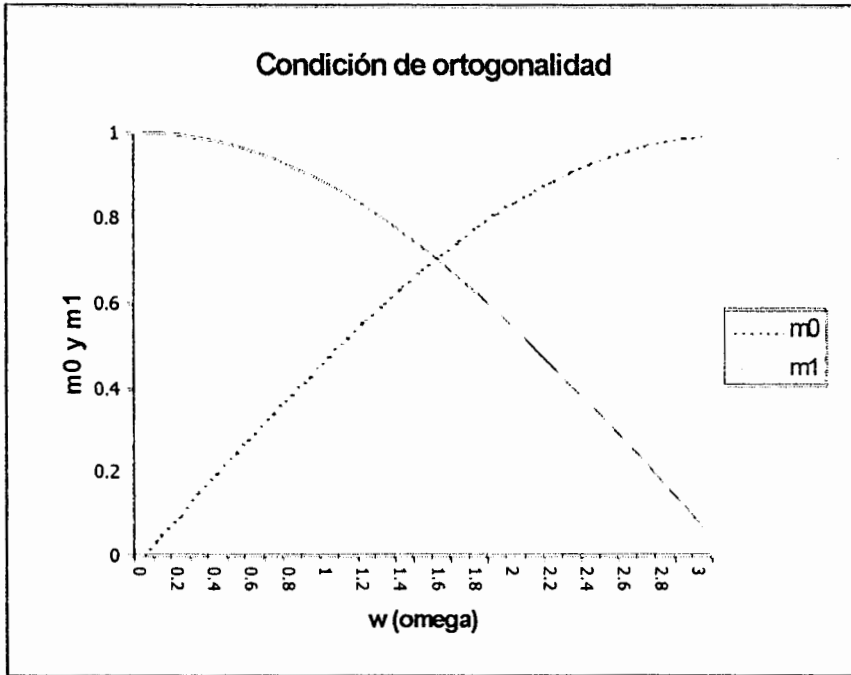


Figura 3.1 Gráfico de $m_0(w) = \cos\left(\frac{w}{2}\right)$ y $m_1(w) = \text{sen}\left(\frac{w}{2}\right)$.

De la relación $\Psi(w) = \frac{1 - e^{-iw/2}}{2} \Phi\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{w}{2}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{w}{2}\right) e^{-iw/2}$, que

proviene de $\Psi(w) = m_0\left(\frac{w}{2}\right)\Phi\left(\frac{w}{2}\right)$, y aplicando la transformada inversa de

Fourier se obtiene que :

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1)$$

en el dominio de tiempo. Por tanto encontramos la función Wavelet de Haar ψ .

3.5 Wavelet de Shannon

Analizaremos ahora la llamada Wavelet de Shannon, algunas veces llamada Wavelet Littlewood-Paley. La función de escala en la base de Shannon es definida en el dominio de Fourier como:

$$\Phi(w) = 1(-\pi \leq x \leq \pi).$$

Ahora

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwx} dw = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}.$$

Y, como antes, la familia $\{\phi(\bullet - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal. En

efecto, $\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\Phi(w + 2\pi l)|^2 = 1$ se satisface trivialmente, y equivalentemente

en el dominio tiempo,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\phi(x-k)dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega k} \Phi(\omega)\overline{\Phi(\omega)} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega k} d\omega \\
 &= \frac{\text{sen}(\pi k)}{\pi k} \\
 &= \delta_k
 \end{aligned}$$

Por simple inspección $\Phi(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$, y encontramos que para la Wavelet de Shannon $m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$, para $\omega \in [-\pi, \pi]$ y $m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$, para $\omega \in [-2\pi, -\pi) \cup (\pi, 2\pi]$.

Dado que existe una periodicidad 2π , se obtiene que:

$$m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

Y también:

$$\Psi(\omega) = -e^{-i\omega/2} 1(-\pi \leq |\omega| \leq \pi) = -e^{-i\omega/2} \left[\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) - \Phi(\omega) \right].$$

La función $\psi(x)$ en su correspondiente dominio de tiempo es:

$$\psi(x) = \phi\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2\phi(2x - 1),$$

donde, el soporte de Φ es $[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$.

En el siguiente gráfico se muestra el comportamiento de $\phi(x)$, la función de escala en la Wavelet de Shannon, para algunos valores de x :

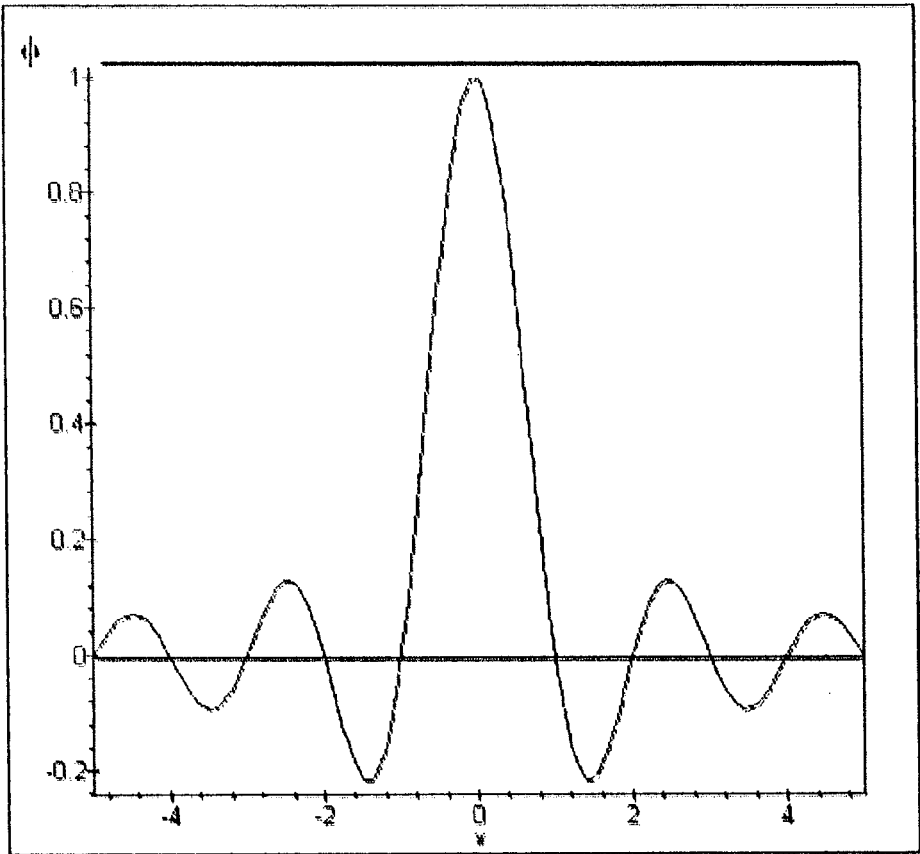


Figura 3.2 Función de escala de Shannon.

Y en la figura 3.3 se muestra el comportamiento de la función Wavelet ψ de Shannon encontrada anteriormente

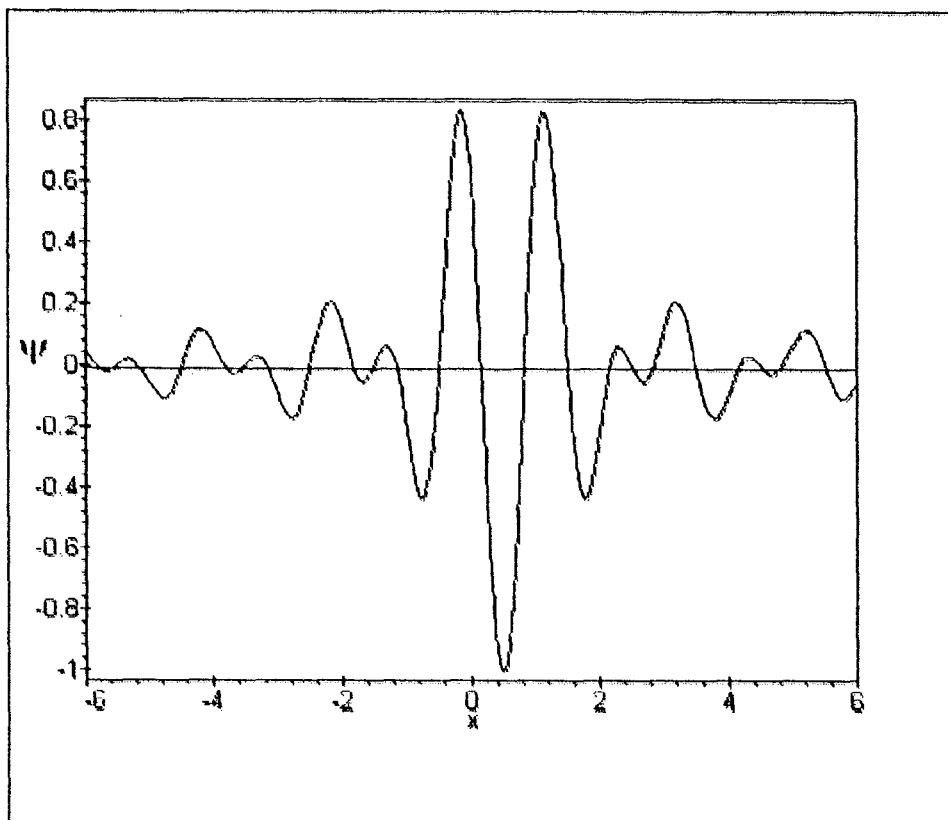


Figura 3.3 Función Wavelet de Shannon

Para la generación de los respectivos gráficos se utilizó una función y un procedimiento en *visual basic- project excel* (ver apéndice A).

3.6 Wavelet de Daubechies

Esta sección trata sobre otra Wavelet, la Wavelet de Daubechies que es una de las más usadas; aunque, la función de escalonamiento ya no tiene una representación explícita. Si $\phi(x)$ es la función de escalonamiento de Daubechies, entonces aplicamos el algoritmo llamado Lagarias-Daubechies (ver apéndice B), el cual permite obtener el valor de

$\phi(x)$ dado un valor x del intervalo $(0,1)$, y representado el valor de x mediante el algoritmo Diadico (ver apéndice C) que expresa x en

términos de cero y unos, es decir, $x = \sum_{j=1}^{\infty} d_j 2^{-j}$, y donde se encontrará

$\phi(0.76)$, $\phi(1.76)$, $\phi(2.76)$. Primeramente será necesario formar la matriz T_0 y T_1 , definidas de la siguiente manera:

$$T_0 = \sqrt{2} \cdot h_{2i-j-1}, \quad 1 \leq i, j \leq 2N-1; \quad T_1 = \sqrt{2} \cdot h_{2i-j}, \quad 1 \leq i, j \leq 2N-1,$$

donde los h_i son los filtros wavelets de Daubechies, los filtros para Daubechies dos son:

$$[0] 0.4829629131445341433748716,$$

$$[1] 0.836516303737807905575294,$$

$$[2] 0.224143868042013381025973,$$

$$[3] -0.1294095225512603811744494$$

Haciendo los cálculos respectivos se hallan las matrices y los resultados de $\phi(0.76)$, $\phi(1.76)$, $\phi(2.76)$, que se muestran en la tabla siguiente:

T_0	0.6830127	0	0	
	0.3169873	1.1830127	0.6830127	
	0	-0.1830127	0.3169873	
T_1	1.1830127	0.6830127	0	
	-0.1830127	0.3169873	1.1830127	
	0	0	-0.1830127	
$\phi(0.76)$	1.11976651	1.11976518	1.11976384	1.11976518
$\phi(1.76)$	-0.11350775	-0.11350602	-0.1135043	-0.11350602
$\phi(2.76)$	-0.00625877	-0.00625915	-0.00625954	-0.00625915

Cálculo de ϕ de Daub2, $x=0.76$, $n=20$

Lo que permite graficar la función de escala de una Wavelet de Daub2, que se muestra en la figura 3.4

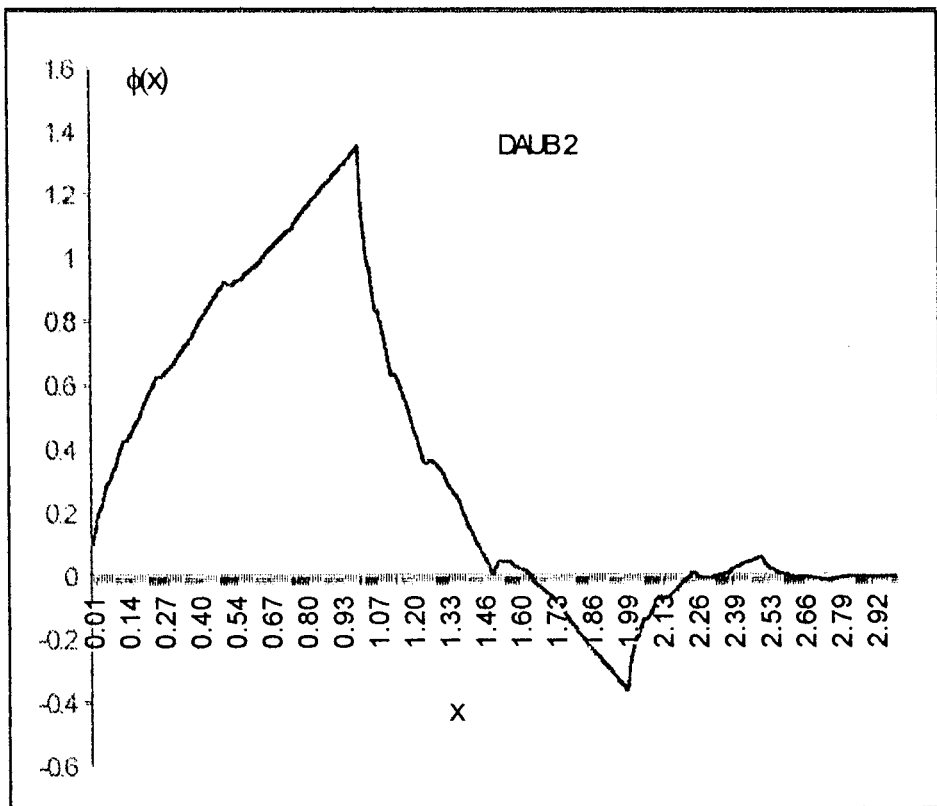


Figura 3.4 Función de escala de una Wavelet de Daub2

Para ver el gráfico de otras funciones de escala de una Wavelet de Daubechies con filtros con $N=2,4,8$ ver apéndice D

Una de las funciones de escala más usadas es Daubechies 8, el comportamiento de la función de escala ϕ se muestra en la figura 3.5.

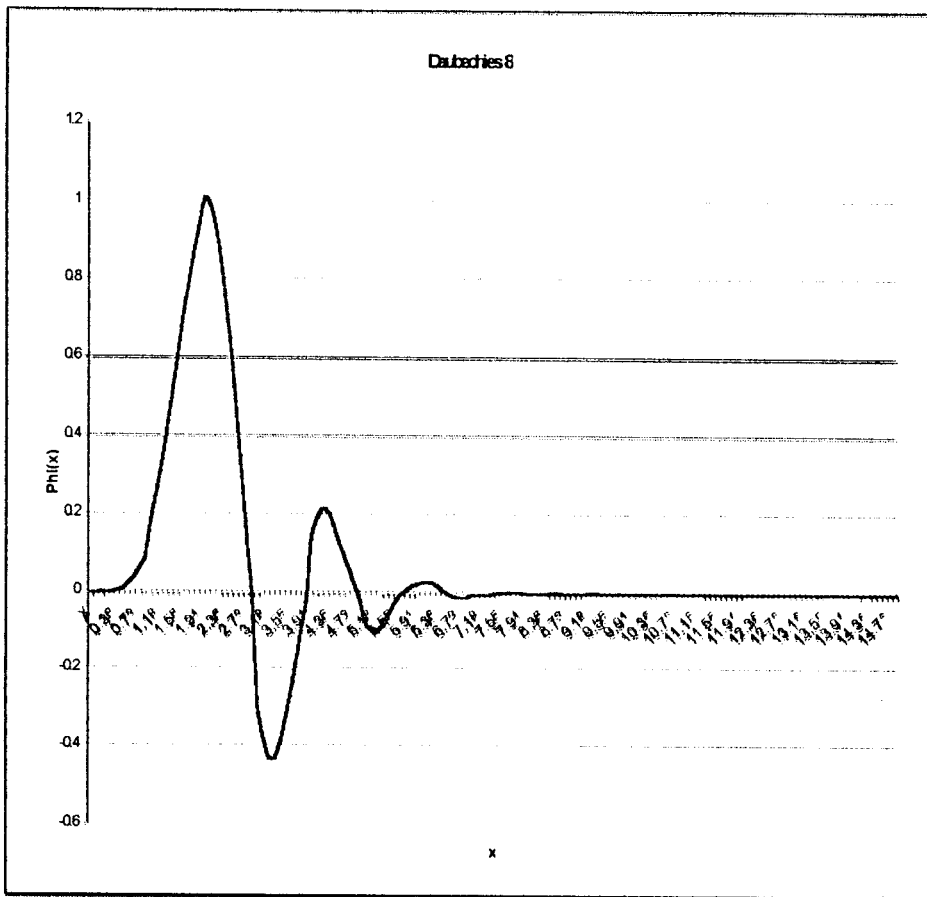


Figura 3.5 Función de escala Daubechies 8.

Aplicación

Se procedió numéricamente a calcular la transformada continua wavelet de la función de prueba $y(x) = \sqrt{x(1-x)} \operatorname{sen}\left(\frac{2.1\pi}{x+0.05}\right)$, $0 \leq x \leq 1$, donde la wavelet madre a utilizar es la *wavelet de Marr* o conocida también como "sombrero mexicano" cuya expresión es $\psi(x) = (1-x^2)e^{-x^2/2}$, el comportamiento de la función $\psi(x)$ es la siguiente:

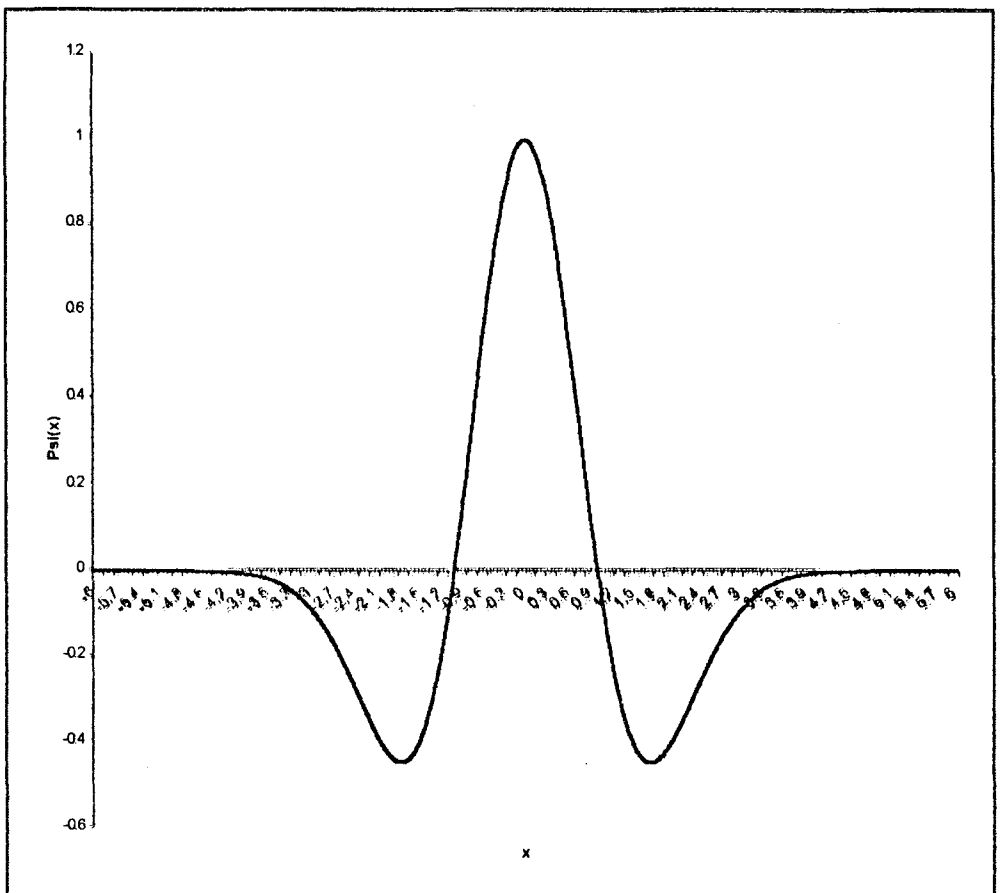


Figura 3.6 Wavelet madre de Marr.

Ahora en el intervalo $[0,1]$ de la función de prueba se tuvo el resultado de la transformada continua de wavelet.

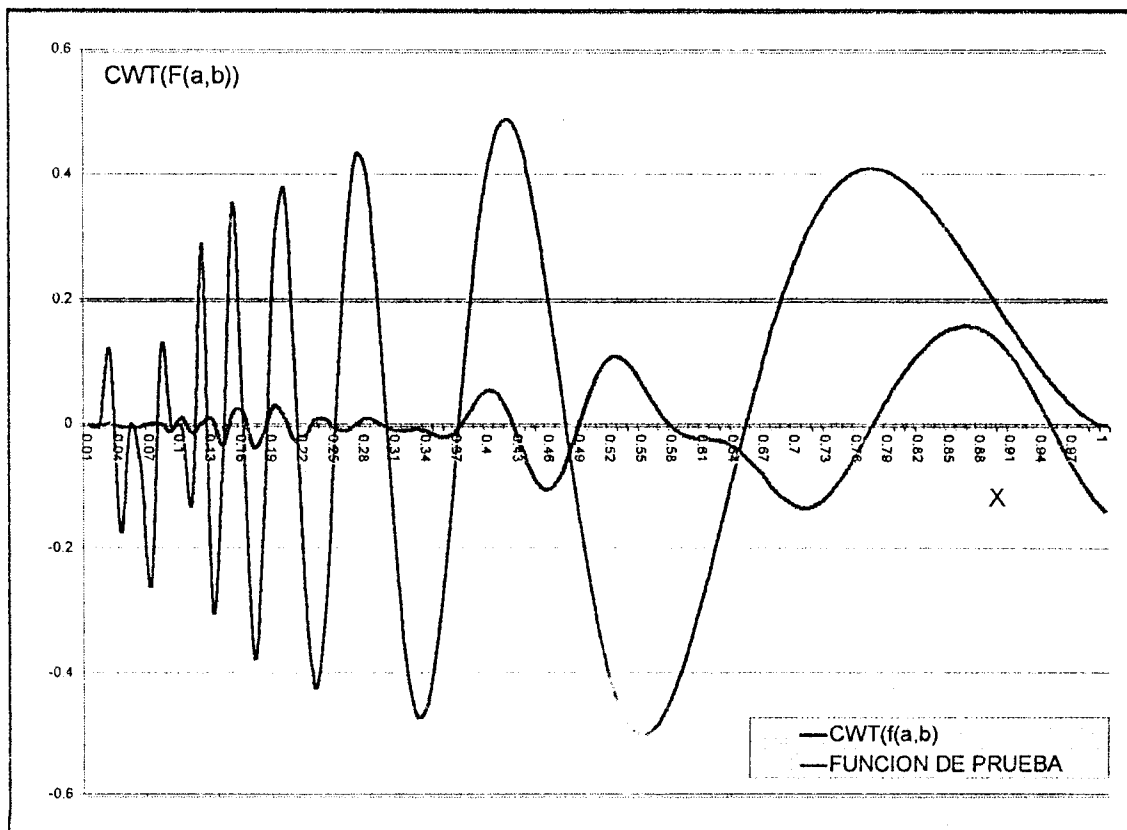


Figura 3.7 Transformada continua de Wavelet de la función de prueba.

La transformada continua de Wavelet fue desarrollada de la siguiente manera:

$$\int_0^b x(1-x) \sin\left(\frac{2.1\pi}{x+0.05}\right) (1-x^2) e^{-x^2/2} dx ,$$

para calcular la integral de la transformada se procedió a implementar el algoritmo de la cuadratura de gauss (ver apéndice E).

CAPÍTULO 4

4. TRANSFORMADA DISCRETA DE WAVELET

4.1 Introducción

Al contrario de lo que sucede con la transformada continua de Wavelet, la transformada discreta de Wavelet (DWT) es aplicada a un conjunto de datos discretos y produce salidas discretas. Transformar señales y vectores de datos por medio de DWT, es un proceso que se parece a la transformada rápida de Fourier (FFT), que es el método de Fourier aplicado a un conjunto de medidas discretas, es decir la transformada discreta de Fourier, la analogía entre el método de Fourier y el método de Wavelet.

TABLA I. LA ANALOGIA ENTRE LOS METODOS DE FOURIER Y WAVELET

Métodos de Fourier	Integrales de Fourier	Series de Fourier	Transformada discreta de Fourier.
Método de Wavelet	Transformada Continua de Wavelet.	Series de Wavelet.	Transformada discreta de Wavelet.

La transformada discreta de Wavelet mapea datos desde el dominio del tiempo (vector de datos ingresado) al dominio Wavelet. El resultado es un vector del mismo tamaño. Las transformaciones de Wavelet son lineales y por ello pueden ser definidas por matrices de dimensión $n \times n$ si a ellas se aplican vectores de tamaño n . Dependiendo de las condiciones de frontera, la matriz asociada a la transformación lineal puede ser ortogonal. Cuando la matriz es ortogonal, la correspondiente transformación es una rotación de \mathbb{R}^n en la cual el dato representa la coordenada del punto. La coordenada del punto en el espacio rotado comprende las coordenadas originales de la transformada discreta de Wavelet.

Aplicación

Sea el vector de datos $(1,2)$ y sea $M(1,2)$ el punto en \mathbb{R}^2 con coordenadas dadas por el vector de datos. La rotación de los ejes coordenados por un ángulo de $\pi/4$ puede ser interpretada como una DWT en la base Wavelet de Haar, con matriz asociada dada por la matriz de rotación:

$$W = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\text{scn}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \text{scn}\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

y la transformada discreta de Wavelet de $(1,2)'$ es entonces

$$DWT((1,2)) = W \cdot (1,2)' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right)'$$

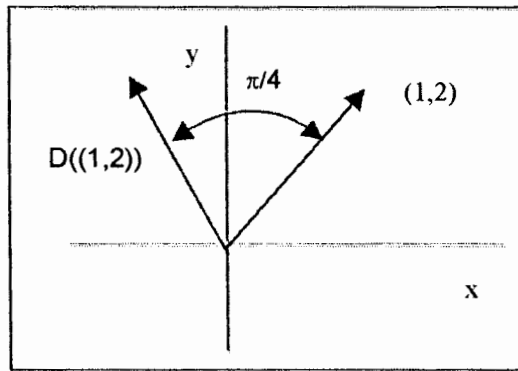


Figura 4.1.1 DWT((1,2))

Aplicación

Consideremos ahora la siguiente figura:

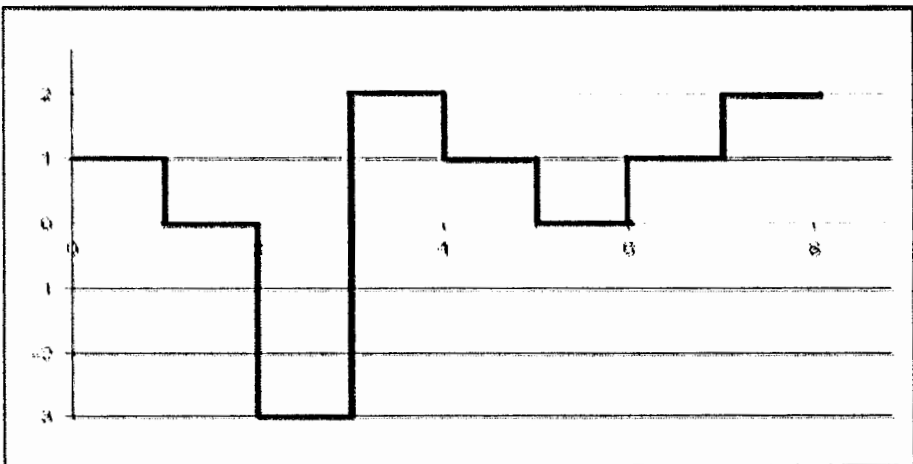


Figura.4.1 Una función de interpolación y sobre $[0,8)$.

Sea el vector $y = (1,0,-3,2,1,0,1,2)$ asociado a la figura 4.1. Los valores $f(n) = y_n, n = 0,1,\dots,7$ son interpolados por una función constante por

tramos como se muestra en la figura 4.1. Asumiremos que f pertenece al espacio multiresolución de Haar V_0 .

La siguiente ecuación de matrices da la relación entre \underline{y} y los coeficientes Wavelets (datos en el dominio Wavelet).

La matriz asociada a la transformación proviene de:

$$\psi_{a,b}^{HAAR}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[1(b \leq x \leq \frac{a}{2} + b) - 1(\frac{a}{2} + b \leq x \leq a + b) \right]$$

con lo que se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{00} \\ d_{00} \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_{20} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{bmatrix}$$

La solución es

$$\begin{bmatrix} c_{00} \\ d_{00} \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_{20} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Así entonces:

$$f = \sqrt{2}\phi_{-3,0} - \sqrt{2}\psi_{-3,0} + \psi_{-2,0} - \psi_{-2,1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{-1,0} - \frac{5}{\sqrt{2}}\psi_{-1,1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{-1,2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{-1,3} \tag{4.1}$$

La solución es fácil de verificar.

	Col1	Col2	Col3	Col4	Col5	Col6	Col7	Col8	Solución
coeficientes	1.41421356	-1.41421356	1	-1	0.70710678	-3.63633911	0.70710678	-0.70710678	
Fila 1	0.6	-0.5	0.6	0	0	0	0	0	1
Fila 2	0.5	-0.5	0.5	0	-0.5	0	0	0	0
Fila 3	0.6	-0.5	-0.6	0	0	-2.5	0	0	-3
Fila 4	0.5	-0.5	-0.5	0	0	2.5	0	0	2
Fila 5	0.5	0.5	0	-0.5	0	0	0.5	0	1
Fila 6	0.5	0.5	0	0.5	0	0	-0.5	0	0
Fila 7	0.5	0.5	0	0.5	0	0	0	-0.5	1
Fila 8	0.5	0.5	0	0.5	0	0	0	0.5	2

En la tabla se evalúan la fila i de la matriz de coeficientes de la Wavelet de Haar (8x8) multiplicada por el vector solución (1x8), teniendo como solución el vector de datos.

Todo lo desarrollado hasta aquí es realmente riguroso, pero de limitado valor práctico, ya que almacenar y manipular las matrices de la

transformación cuando el vector de datos es mayor que 2000 no es práctico.

4.2 Algoritmo Cascada

En el contexto de procesamiento de imágenes, Burt y Adelson [1] desarrollaron el algoritmo Pirámide ortogonal y biortogonal. El procedimiento Pirámide o cascada procesa una imagen en diferentes escalas, ranqueándola desde fino a tosco, en un algoritmo de árbol. Las imágenes pueden ser sin ruido blanco, extendidas o comprimidas por una apropiada escala de tratamientos.

Mallat fue el primero en unir las Wavelets, el análisis multiresolución y el algoritmo cascada de manera formal [2]. El algoritmo cascada de Mallat da una lista constructiva y eficiente de procedimientos para ejecutar la transformación discreta de Wavelet.

El algoritmo cascada relaciona los coeficientes Wavelets de diferentes niveles en la transformación por filtros con \underline{h} y \underline{g} .

En el algoritmo cascada es conveniente enlazar los datos originales con el espacio V_j , y muchas veces con V_0 . Para luego suavizarlos complementando con los espacios (V_{j-1}, W_{j-1}) , (V_{j-2}, W_{j-2}) , etc. Decrecer en

los índices en los espacios- V es equivalente a una aproximación más tosca de los datos.

Sustituyendo los índices en la ecuación de escala

$$\phi(x) = \sum_{k \in Z} h_k \sqrt{2} \phi(2x - k) \quad \text{y la ecuación} \quad \psi(x) = \sum_{k \in Z} g_k \sqrt{2} \phi(2x - k), \quad \text{se}$$

obtiene:

$$\phi_{j-1,l}(x) = \sum_{l \in Z} h_{l-2k} \phi_{jl}(x) \quad \text{y} \quad \psi_{j-1,k}(x) = \sum_{l \in Z} g_{l-2k} \phi_{jl}(x). \quad (4.2)$$

Las relaciones en (4.2) son fundamentales en el desarrollo del algoritmo cascada.

Utilicemos ahora la ortogonalidad de los subespacios V_j y W_j , considerando el análisis multiresolución con la convención:

$$\dots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots$$

Entonces $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, y cualquier función $v_j \in V_j$ puede ser representada de manera única como $v_j(x) = v_{j-1}(x) + w_{j-1}(x)$, donde $v_{j-1} \in V_{j-1}$ y $w_{j-1} \in W_{j-1}$. Es usual denotar los coeficientes asociados con $\phi_{jk}(x)$ y $\psi_{jk}(x)$ por c_{jk} y d_{jk} , respectivamente.

Así,

$$\begin{aligned}
 v_j(x) &= \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(x) \\
 v_j(x) &= \sum_l c_{j-1,l} \phi_{j-1,l}(x) + \sum_l d_{j-1,l} \psi_{j-1,l}(x) \\
 v_j(x) &= v_{j-1}(x) + w_{j-1}(x)
 \end{aligned}$$

Usando la ecuación de escala general (4.2), la ortogonalidad de $w_{j-1}(x)$ y $\phi_{j-1,l}(x)$ para todo j y l , y la propiedad de aditividad del producto interno, obtenemos,

$$\begin{aligned}
 c_{j-1,l} &= \langle v_j, \phi_{j-1,l} \rangle \\
 c_{j-1,l} &= \left\langle v_j, \sum_k h_{k-2l} \phi_{j,k} \right\rangle \\
 &= \sum_k h_{k-2l} \langle v_j, \phi_{j,k} \rangle \quad (4.3) \\
 &= \sum_k h_{k-2l} c_{j,k}.
 \end{aligned}$$

Y de manera similar $d_{j-1,l} = \sum_k g_{k-2l} c_{j,k}$.

El algoritmo cascada trabaja también en la dirección inversa. Los coeficientes en la escala más fina correspondiente a V_j pueden ser obtenidas de los coeficientes correspondientes a V_{j-1} y W_{j-1} . Así, La relación

$$\begin{aligned}
c_{j,k} &= \langle v_j, \phi_{j,k} \rangle \\
c_{j,k} &= \sum_l c_{j-1,l} \langle \phi_{j-1,l}, \phi_{j,k} \rangle + \sum_l d_{j-1,l} \langle \psi_{j-1,l}, \psi_{j,k} \rangle \quad (4.4) \\
c_{j,k} &= \sum_l c_{j-1,l} h_{k-2l} + \sum_l d_{j-1,l} g_{k-2l}
\end{aligned}$$

describe en un solo paso la reconstrucción del algoritmo.

Aplicación

Para DAUB2, la ecuación de escala en valores enteros es:

$$\phi(n) = \sum_{k=0}^3 h_k \sqrt{2} \phi(2n-k).$$

Recordando que $h = \{h_0, h_1, h_2, h_3\} = \left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right\}$

Se tiene que $\phi(0) = \sqrt{2} h_0 \phi(0)$ y $\sqrt{2} h_0 \neq 1$, de esto se sigue que

$\phi(0) = 0$. También se obtiene: $\phi(3) = 0$. Para $\phi(1)$ y $\phi(2)$ obtenemos el

sistema

$$\begin{bmatrix} \phi(1) \\ \phi(2) \end{bmatrix} = \sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} h_1 & h_0 \\ h_3 & h_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi(1) \\ \phi(2) \end{bmatrix}$$

Además de $\sum_k \phi(x-k)=1$ se sigue que $\phi(1)+\phi(2)=1$. Resolviendo para $\phi(1)$ y $\phi(2)$ se obtiene entonces:

$$\phi(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \phi(2) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Ahora, se puede definir ϕ ,

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_k h_k \sqrt{2} \phi(1-k) = h_0 \sqrt{2} \phi(1) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{3}{2}\right) &= \sum_k h_k \sqrt{2} \phi(3-k) = h_1 \sqrt{2} \phi(2) + h_2 \sqrt{2} \phi(1) \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\phi\left(\frac{5}{2}\right) = \sum_k h_k \sqrt{2} \phi(5-k) = h_3 \sqrt{2} \phi(2) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

o ψ ,

$$\psi(-1) = \psi(2) = 0,$$

$$\psi\left(\frac{-1}{2}\right) = \sum_k g_k \sqrt{2} \phi(-1-k) = h_1 \sqrt{2} \phi(1) = -\frac{1}{4}, \quad [g_n = (-1)^n h_{1-n}]$$

$$\psi(0) = \sum_k g_k \sqrt{2} \phi(0-k) = g_{-2} \sqrt{2} \phi(2) + g_{-1} \sqrt{2} \phi(1) = -h_2 \sqrt{2} \phi(1) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

, etc.

4.3 La notación del operador de DWT.

La representación por medio de operadores es una manera elegante de describir el algoritmo cascada. Se puede utilizar para expresar el operador en términos de matrices o filtros. Trabajaremos con el operador en términos de filtros. Ahora definiremos los operadores de decimatación y dilatación, que actúan sobre el espacio de sucesiones ℓ_2 .

Definición .-

Decimatación $[\downarrow 2]$ es un mapeo desde $\ell(\mathbb{Z})$ a $\ell(2\mathbb{Z})$ definido en coordenadas como

$$([\downarrow 2]a_n)_k = \sum_n a_n \delta_{n-2k} = a_{2k}. \quad (4.5)$$

Es decir, cuando aplicado a una sucesión retiene los valores sobre posiciones con índices pares.

Dilatación es un mapeo desde $\ell(2\mathbb{Z})$ a $\ell(\mathbb{Z})$ definido como

$$([\uparrow 2]a_n)_k = \sum_n a_n \delta_{k-2n}.$$

Es decir, expande la sucesión de términos pares, poniendo ceros entre los valores originales.

La tabla siguiente muestra la acción de $[\downarrow 2]$ y $[\uparrow 2]$ sobre la sucesión $\{1, 0, -3, 2, 1, 0, 1, 2\}$ tal que el primer elemento tiene un índice de -2 .

Tabla II. Decimatación y Dilatación en acción

Índice k	-2	-1	0	1	2	3	4	5
a_n	1	0	-3	2	1	0	1	2
$[\downarrow 2]a$		1	-3	1	1			
$[\uparrow 2]a$	0	0	-3	0	2	0	1	0

Sean \mathbf{H} y \mathbf{G} convoluciones con los filtros h y g .

$$\mathbf{H}: \ell(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}) \quad (\mathbf{H}a)_k = \sum_n h_{n-k} a_n$$

$$\mathbf{G}: \ell(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell(\mathbb{Z}) \quad (\mathbf{G}a)_k = \sum_n g_{n-k} a_n.$$

$$\text{Y sea } \mathcal{H} \equiv [\downarrow 2]\mathbf{H} \text{ y } \mathcal{G} \equiv [\downarrow 2]\mathbf{G}$$

Los operadores \mathcal{H} y \mathcal{G} satisfacen las siguientes relaciones:

$$(\mathcal{H}a)_k = \sum_n h_{n-2k} a_n$$

$$(\mathcal{G}a)_k = \sum_n g_{n-2k} a_n.$$

La siguiente aplicación de los operadores \mathcal{H} y \mathcal{G} nos lleva a un paso de la transformación discreta de wavelet.

Para ilustrar, asumiremos que el vector de datos es de longitud 2^j .

La señal original es $\tilde{c}^{(j)} = \{c_k^{(j)}\}$, de longitud 2^j , $\tilde{c}^{(j)}$ puede ser interpolado

por la función $f(x) = \sum c_k^{(j)} \phi(x-k)$ desde el subespacio V_j . En cada

paso de la transformada de Wavelet, nos moveremos a la próxima aproximación(nivel) menos fino $\tilde{c}^{(j-1)}$ aplicando el operador \mathcal{H} ,

$\tilde{c}^{(j-1)} = \mathcal{H} \tilde{c}^{(j)}$. El "detalle de información" perdido por aproximar $\tilde{c}^{(j)}$ por

el "promediado" o menos fino $\tilde{c}^{(j-1)}$ está dado por $\tilde{d}^{(j-1)} = \mathcal{G} \tilde{c}^{(j)}$.

La sucesión de la transformada discreta de Wavelet $y = \tilde{c}^{(j)}$ de longitud 2^j ,

puede ser representada entonces como:

$$(\tilde{c}^{(j-k)}, \tilde{d}^{(j-k)}, \tilde{d}^{(j-k+1)}, \dots, \tilde{d}^{(j-2)}, \tilde{d}^{(j-1)}). \quad (4.6)$$

En el siguiente diagrama se ilustra la **descomposición del algoritmo**

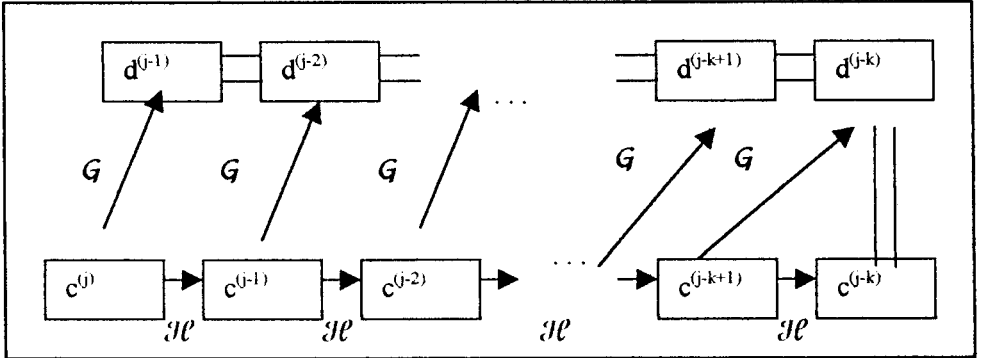


Figura 4.2 Ilustración de la descomposición del algoritmo

Así, se resume la transformada discreta de Wavelet en la siguiente línea

$$y \rightarrow (\mathcal{H}^k y, G\mathcal{H}^{k-1} y, \dots, G\mathcal{H}^2 y, G\mathcal{H} y, Gy)$$

El número k puede ser arbitrariamente cualquier entero entre 1 y J y es asociado con el espacio tosco-suavizado, V_{j-k} . En términos del espacio multiresolución (4.6) corresponde a la descomposición multiresolución $V_{j-k} \oplus W_{j-k} \oplus W_{j-k+1} \oplus \dots \oplus W_{j-1}$. Cuando $K=J$ el vector $\tilde{c}^{(0)}$ contiene un solo elemento, $c^{(0)}$.

La reconstrucción (que es el proceso inverso al de descomposición) se define de la siguiente manera:

$$(\mathcal{H}^* a)_k = \sum_n h_{n-2k} a_n$$

$$(G^*a)_{k=} \sum_n g_{n-2k} a_n.$$

El vector $\tilde{c}^{(j)}$ es reconstruido de la siguiente manera:

$$\tilde{c}^{(j)} = \mathcal{H}^* \tilde{c}^{(j-1)} + G^* d^{(j-1)} = \mathcal{R}^*(\tilde{c}^{(j-1)}, d^{(j-1)}),$$

lo cual se transforma a:

$$(\mathcal{H}^k \tilde{y}, G\mathcal{H}^{k-1} \tilde{y}, \dots, G\mathcal{H}^2 \tilde{y}, G\mathcal{H} \tilde{y}, G\tilde{y}) = (\tilde{c}^{(j-k)}, \tilde{d}^{(j-k)}, \tilde{d}^{(j-k+1)}, \dots, \tilde{d}^{(j-2)}, \tilde{d}^{(j-1)}).$$

y

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} (\mathcal{H}^*)^{k-1-i} G^* d^{(j-k+i)} + (\mathcal{H}^*)^k \tilde{c}^{(j-k)} = \tilde{y}.$$

Se ilustra el algoritmo de reconstrucción en la siguiente figura.

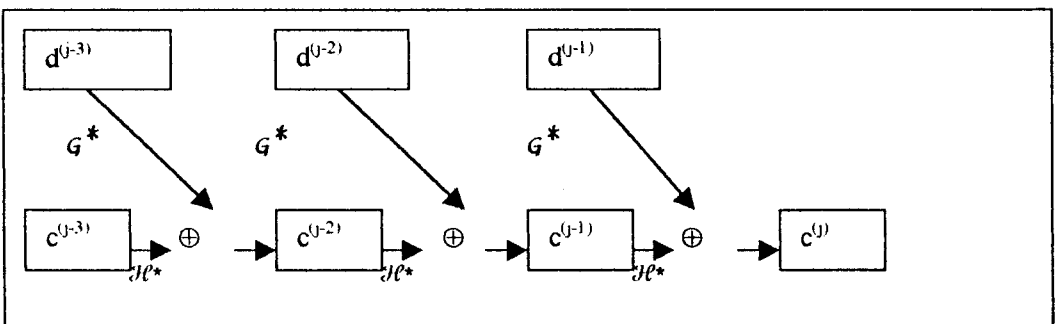


Figura 4.3 Algoritmo de reconstrucción.

En la siguiente aplicación se observa la acción de los algoritmos de descomposición y reconstrucción:

Aplicación.-

Sea $y = (1, 0, -3, 2, 1, 0, 1, 2)$ deseamos hallar transformada discreta por Haar.
 $K=3$ $J=3$. El procedimiento de descomposición se ilustra en la siguiente figura.

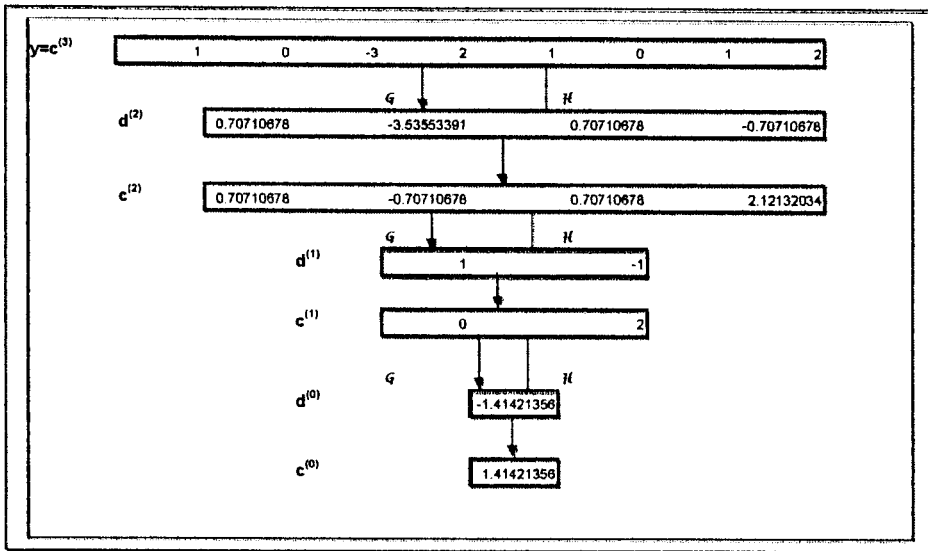


Figura 4.4 Ilustración del procedimiento de descomposición

El procedimiento de reconstrucción se ilustra en la siguiente figura:

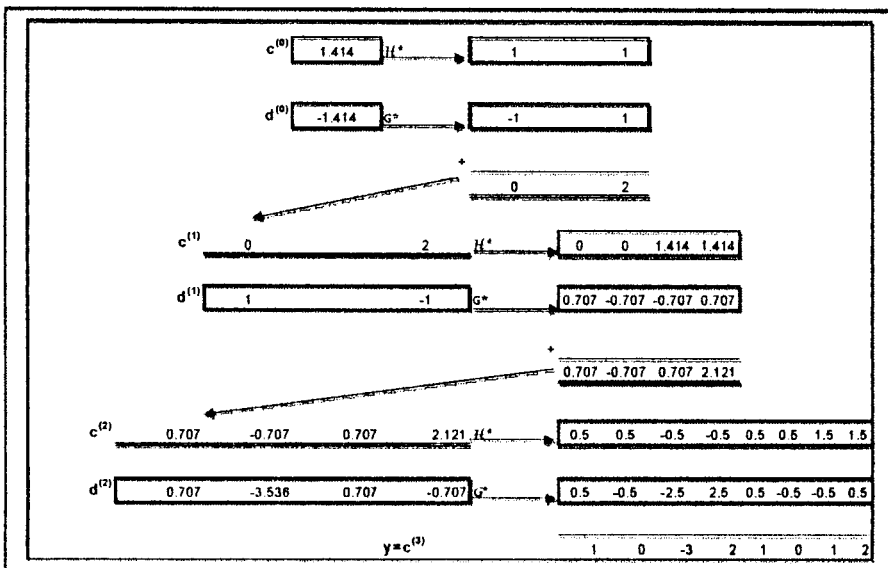


Figura 4.5 Ilustración del procedimiento de reconstrucción

CAPÍTULO 5

5. WAVELET SHRINKAGE

5.1 Método Shrinkage

En esta parte formalizaremos la idea de la estimación wavelet shrinkage de funciones muestreadas discretamente. El término Wavelet shrinkage usualmente se refiere a la reconstrucción obtenida a partir de la reducción de los coeficientes de las wavelets en una serie de datos.

Existen buenos estimadores para obtener el estimador shrinkage. Por ejemplo, los estimadores Bayesianos, minimax, y Gamma-minimax, son estimadores que satisfacen el modelo Shrinkage.

El método de shrinkage tiene la característica especial de suavizar, por que la medida de suavidad de una función depende de la magnitud de los coeficientes wavelets.

Considerando el modelo de regresión estadístico

$$y_i = f(x_i) + \sigma \varepsilon_i = f_i + \sigma \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, n \quad (5.1)$$

donde los x_i son puntos igualmente espaciados y los ε_i son variables aleatorias con media cero. Al menos que se especifique lo contrario, se asumirá que los ε_i son normales con media cero y varianza 1 $N(0,1)$. El objetivo de la regresión no paramétrica es estimar una función de densidad desconocida f de las observaciones muestrales $y_i, i=1, \dots, n$. En notación de vector el modelo (5.1) puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\underline{y} = \underline{f} + \sigma \underline{\varepsilon}, \quad (5.2)$$

donde $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$ y $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

El estimador discreto de f en Y_i se representará con $\hat{f} = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n)$ y su bondad se calcula por medio de la media cuadrática de su error (MCE), que se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \text{MCE}(\hat{f}, f) &= \frac{1}{n} E \|\hat{f} - f\|_{\ell_2}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E [\hat{f}(x_i) - f(x_i)]^2. \end{aligned}$$

El estimador \hat{f} necesita los siguientes requerimientos para ser buen estimador:

[SUAVIDAD]

El estimador \hat{f} debe ser, con alta probabilidad, tan suave como f .

[ADAPTACION]

El estimador \hat{f} alcanza un riesgo mínimo sobre un amplio rango de suavidad, incluso cuando el estimador no logra el promedio mínimo.

Sea W una matriz de dimensión apropiada asociada con la transformación wavelet ortogonal. Observe que la "imagen wavelet" de (5.1) es:

$$d_i = \theta_i + \sigma \varepsilon_i^1, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.4)$$

o, en forma de vector

$$\underline{d} = \underline{\theta} + \sigma \underline{\varepsilon}^1,$$

con $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$, $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ y $\underline{\varepsilon}^1 = (\varepsilon_1^1, \dots, \varepsilon_n^1) = W \cdot \underline{\varepsilon}$. Debido a la ortogonalidad de W se tiene que,

$$\varepsilon^1 \sim N(0,1)$$

$$\text{MCE}(\hat{f}, f) = \text{MCE}(\hat{\underline{\theta}}, \underline{\theta}).$$

Así, desde ahora se escribirá ε en lugar de ε^1 , ya que estos dos vectores tienen una estructura estocástica idéntica.

Ahora la pregunta que se presenta es, ¿Cómo obtenemos el estimador \hat{f} usando wavelets?

El procedimiento de la estimación de \hat{f} con el uso de las wavelet tiene tres pasos principales en el dominio Wavelet.

- **Paso 1**

Transformar las observaciones $y_i, i = 1, \dots, n$ al dominio wavelet, aplicando la transformada discreta de wavelet. El resultado es una sucesión de coeficientes wavelets $d_i, i = 1, \dots, n$.

- **Paso 2**

Estimar σ . Usar este estimador para reducir los coeficientes wavelet shrinkage.

- **Paso 3**

Invertir los coeficientes reducidos, recuperando el estimador de la función \hat{f} , a través de la transformada discreta inversa de wavelet descrita en el capítulo anterior.

Gráficamente los tres pasos consistirían, de acuerdo al modelo de regresión, de un proceso dado por la siguiente estructura:

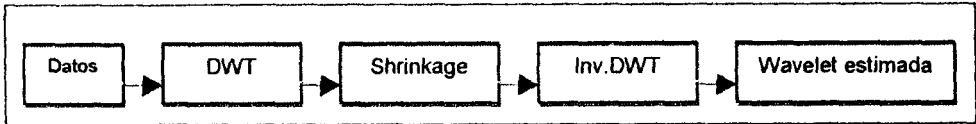


Figura 5.1 Paradigma Wavelet-Shrinkage.

5.2 Estimadores de regresión lineal wavelet.

Los estimadores de regresión lineal wavelet caen en la clase de estimadores de proyección, en los cuales el operador de proyección involucra los núcleos de las bases wavelets.

5.2.1 Núcleos Wavelets.

Por el teorema del capítulo 2 sección 5, la función

$$K(x, y) = \sum_k \phi(x - k)\phi(y - k) \quad (5.6)$$

es el núcleo reproductor de V_0 . Y por la propiedad de auto similaridad de los subespacios de multiresolución,

$$K_j(x, y) = 2^j K_j(2^j x, 2^j y) \quad (5.7)$$

es el núcleo reproductor de V_j , para $j=1,2,\dots$

Así la proyección de f sobre el espacio V_j estará dada por

$$\text{Proy}_{V_j} f(x) = \int 2^j K_j(2^j x, 2^j y) f(y) dy.$$

Los espacios de detalle W_j son también espacios de Hilbert reproductores del núcleo y se cumple que:

$$\text{Proy}_{W_j} f(x) = \int 2^j Q_j(2^j x, 2^j y) f(y) dy,$$

donde $Q(x, y) = \sum_k \psi(x-k)\psi(y-k)$.

Lema 5.2.1 Para cualquier j , $\int K_j(x, y) dy = 1$

Demostración

$$\sum_k \phi(x-k) = 1.$$

También,

$$\begin{aligned} 1 = \Phi(0) &= \int \phi(y) dy = \sum_k \phi(2^j x - k) \int \phi(y) dy = \\ &= \sum_k \phi(2^j x - k) \cdot 2^j \int \phi(2^j y - k) = \int 2^j K_j(2^j x, 2^j y) dy = \int K_j(x, y) dy. \end{aligned}$$

El siguiente resultado es útil para explorar los estimadores del núcleo wavelet, donde se establece que los límites superiores sobre $|K_j|$ dependen del comportamiento de la función de escala para todo valor de j .

Teorema 5.2.1 Sea $K_j(x, y)$ el núcleo wavelet del espacio V_j generado por la función de escala ϕ .

- a. Si ϕ tiene un decaimiento exponencial, es decir, $\phi \leq e^{-a|x|}$ para un a positivo, entonces $|K_j(x, y)| \leq C 2^j e^{-a 2^j |x-y|/2}$.
- b. Si ϕ tiene un decaimiento algebraico, es decir, $\phi \leq C_N / (1 + |x|)^N$ para un $N > 1$, entonces $|K_j(x, y)| \leq C_N 2^j / (1 + 2^j |x|)^N \leq C_N 2^j$ para $N > 1$.

5.2.2 Estimador de encaje local constante.

Considerando el modelo de regresión lineal

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n.$$

Como es usual en el análisis de regresión lineal, dos versiones equivalentes de este modelo pueden ser definidas:

- (i) Un diseño ajustado en el cual los X_i no son aleatorios (denotado por x_i) y satisfacen la condición $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1$; y

(ii) Un diseño aleatorizado en el cual (X_i, Y_i) es una pareja de variables aleatorias idénticamente distribuidas, con la esperanza condicional $m(x) = E(Y_i | X_i = x)$.

Para cada una de estas versiones del modelo de regresión lineal se han propuesto estimadores de núcleo Wavelet, como se enuncia a continuación:

Para el modelo (i), Antoniadis, Grégoire, y McKeague sugirieron el siguiente estimador del núcleo de Wavelet,

$$\hat{m} = \sum_{i=1}^n Y_i \int_{A_i} K_j(x, y) dy,$$

donde $K_j(x, y)$ está definida en (5.7) [3]. Los A_i son los intervalos de la partición del intervalo $[0, 1]$, por lo tanto $x_i \in A_i$. Una manera de definir los intervalos A_i de la partición es poner $A_i = [s_{i-1}, s_i)$, donde $s_0 = 0$ y $s_n = 1$, $i = 1, \dots, n-1$, y los $s_i = (x_i + x_{i+1})/2$, $i = 1, \dots, n-1$.

Hay que observar que la suma de las ponderaciones $\int_{A_i} K_j(x, y) dy = 1$, por

el lema 5.2.1.

En cambio, para el modelo (ii), Antoniadis, Grégorie, y McKeague propusieron una versión del estimador wavelet (Nadaraya-Watson), donde el estimador de $m(x)$ está dado por:

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K_j(x, X_i)}{\sum_{i=1}^n K_j(x, X_i)}$$

Cuando $j \rightarrow \infty$ y $n2^{-j} \rightarrow \infty$, $\hat{m}(x)$ es un estimador consistente para todo x tal que $E(Y_i | X=x^*)$ es limitado por x^* en la vecindad de x .

En la aplicación del método de Wavelet shrinkage se puede ver como este actúa dentro de un conjunto de datos, para esto se realizó la aplicación con el modelo (i), el cual es un método no paramétrico.

Aplicación

En la siguiente figura se muestra el comportamiento de los datos de una simulación de accidentes de motos de carreras a estudiar mediante Wavelet shrinkage, número de observaciones 133, donde X es la variable independiente en la abscisa y su unidad es el tiempo en segundos y Y es la variable dependiente en la ordenada y su unidad es la aceleración en m/s^2 . Los datos se adjuntan en la siguiente tabla:

Tabla III. Datos para la aplicación Wavelet Shrinkage

orden	Tiempo Segundos	Aceleración m/s^2	orden	Tiempo Segundos	Aceleración m/s^2	orden	Tiempo Segundos	Aceleración m/s^2	orden	Tiempo Segundos	Aceleración m/s^2
1	2.4	0	41	16.2	-61.7	81	27	-16	121	44.4	0
2	2.6	-1.3	42	16.4	-5.4	82	27.2	-45.6	122	45	10.7
3	3.2	-2.7	43	16.4	-80.4	83	27.2	-24.2	123	46.6	10.7
4	3.6	0	44	16.6	-59	84	27.2	9.5	124	47.8	-26.8
5	4	-2.7	45	16.8	-71	85	27.6	4	125	47.8	-14.7
6	6.2	-2.7	46	16.8	-61.1	86	28.2	12	126	48.8	-13.3
7	6.6	-2.7	47	16.8	-77.7	87	28.4	-21.5	127	50.6	0
8	6.8	-1.3	48	17.6	-37.5	88	28.4	37.5	128	52	10.7
9	7.8	-2.7	49	17.6	-85.6	89	28.6	48.9	129	53.2	-14.7
10	8.2	-2.7	50	17.6	-123.1	90	29.4	-17.4	130	55	-2.7
11	8.8	-1.3	51	17.6	-101.9	91	30.2	36.2	131	55	10.7
12	8.8	-2.7	52	17.8	-69.1	92	31	75	132	56.4	-2.7
13	9.6	-2.7	53	17.8	-104.4	93	31.2	8.1	133	57.6	10.7
14	10	-2.7	54	18.6	-112.5	94	32	54.9			
15	10.2	-5.4	55	18.6	-60.8	95	32	48.2			
16	10.6	-2.7	56	18.2	-123.1	96	32.8	46.9			
17	11	-5.4	57	19.4	-85.6	97	33.4	16			
18	11.4	0	58	19.4	-72.3	98	33.8	45.6			
19	13.2	-2.7	59	19.6	-127.2	99	34.4	1.3			
20	13.6	-2.7	60	20.2	-123.1	100	34.8	75			
21	13.8	0	61	20.4	-117.9	101	35.2	-16			
22	14.6	-13.3	62	21.2	-134	102	35.2	-64.9			
23	14.6	-5.4	63	21.4	-101.9	103	35.4	69.6			
24	14.6	-5.4	64	21.8	-106.4	104	35.6	34.8			
25	14.6	-9.3	65	22	-123.1	105	35.6	32.1			
26	14.6	-16	66	23.2	-123.1	106	36.2	-37.5			
27	14.6	-22.8	67	23.4	-128.5	107	36.2	22.8			
28	14.8	-2.7	68	24	-112.5	108	38	46.9			
29	15.4	-22.8	69	24.2	-85.1	109	38	10.7			
30	15.4	-32.1	70	24.2	-81.8	110	39.2	5.4			
31	15.4	53.5	71	24.6	53.5	111	39.4	-1.3			
32	15.4	54.9	72	25	-64.4	112	40	-21.5			
33	15.6	-40.2	73	25	-57.6	113	40.4	-13.3			
34	15.6	-21.5	74	25.4	-72.3	114	41.8	30.8			
35	15.8	-21.5	75	25.4	-44.3	115	41.8	-10.7			
36	15.8	-50.8	76	25.6	-26.8	116	42.4	29.4			
37	16	-42.9	77	26	-5.4	117	42.8	0			
38	16	-26.8	78	26.2	-107.1	118	42.8	-10.7			
39	16.2	-21.5	79	26.2	-21.5	119	43	14.7			
40	16.2	-50.8	80	26.4	-65.6	120	44	-1.3			

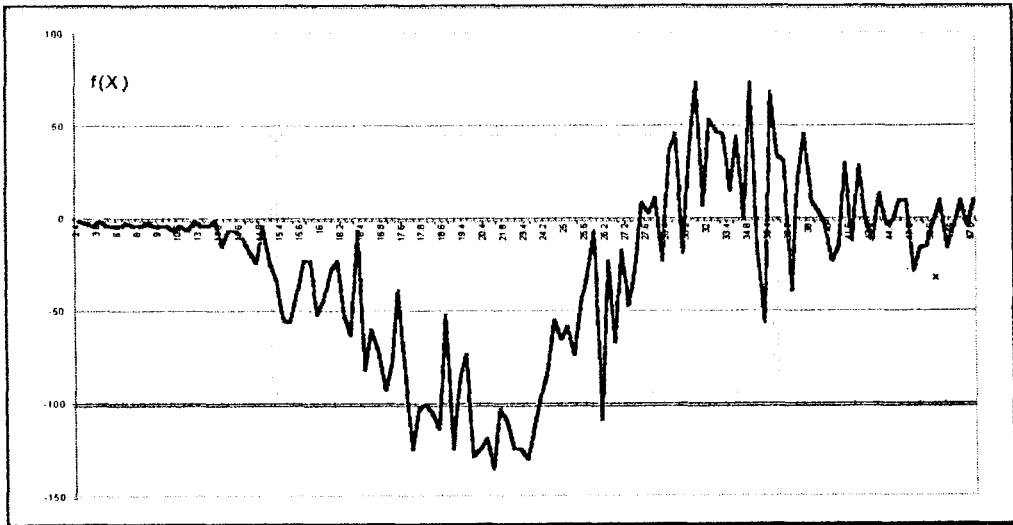


Figura 5.2 Accidentes de motocicleta con los datos de la tabla

Donde x es el tiempo y $f(x)$ es la aceleración.

Para el cálculo del modelo de shrinkage se utilizó la programación orientada a objetos de visual basic-projects, los algoritmos se encontrarán en el apéndice F.

Mediante el modelo de shrinkage se procedió a calcular el estimador $\hat{m}(x)$ con $j=3$, a continuación se presenta la descomposición Wavelet con los filtros de Daubechies 8.

La estimación de la transformada discreta de Wavelet $d = W_J \cdot y$ donde $J=7$. Los coeficientes Wavelet se los obtienen de d_i que es una matriz de 1 columna por 128 filas, la desviación estándar de los d_i es 36.16.

Los coeficientes Wavelets de la transformada discreta de Wavelet obtenidos para el ejemplo son los siguientes:

TABLA IV. Coeficientes Wavelets

COEFICIENTES							
d_1	46.72706	d_{33}	8.971565	d_{65}	6.067624	d_{97}	-0.498791
d_2	10.47207	d_{34}	10.11695	d_{66}	-2.609605	d_{98}	-7.109286
d_3	-221.3111	d_{35}	4.307958	d_{67}	-1.871354	d_{99}	-1.988906
d_4	-43.98508	d_{36}	-2.377793	d_{68}	0.426675	d_{100}	9.292022
d_5	63.90782	d_{37}	1.005023	d_{69}	-1.065659	d_{101}	10.8532
d_6	-2.703966	d_{38}	-0.380983	d_{70}	0.446773	d_{102}	8.670806
d_7	-166.5237	d_{39}	1.014603	d_{71}	0.83336	d_{103}	6.929937
d_8	138.9513	d_{40}	6.566899	d_{72}	-1.047751	d_{104}	72.01383
d_9	-43.5082	d_{41}	3.157076	d_{73}	-2.430436	d_{105}	23.98386
d_{10}	32.75026	d_{42}	-16.44998	d_{74}	-2.576568	d_{106}	20.10151
d_{11}	-30.51094	d_{43}	-23.16739	d_{75}	1.647678	d_{107}	-21.38028
d_{12}	10.70176	d_{44}	4.956213	d_{76}	8.067336	d_{108}	-10.07925
d_{13}	10.22964	d_{45}	-5.721107	d_{77}	-1.713617	d_{109}	-26.47853
d_{14}	36.50095	d_{46}	39.18146	d_{78}	-0.366689	d_{110}	54.56897
d_{15}	32.15416	d_{47}	11.53329	d_{79}	-14.96763	d_{111}	-47.14383
d_{16}	49.29074	d_{48}	-15.23585	d_{80}	-0.242496	d_{112}	-20.3112
d_{17}	22.39552	d_{49}	-6.68506	d_{81}	-2.021145	d_{113}	-0.314393
d_{18}	9.721348	d_{50}	12.14379	d_{82}	-1.283744	d_{114}	-36.35487
d_{19}	28.36778	d_{51}	3.62161	d_{83}	14.59218	d_{115}	-49.65557
d_{20}	-10.06762	d_{52}	-2.446826	d_{84}	-9.017612	d_{116}	49.41372
d_{21}	2.625173	d_{53}	44.82726	d_{85}	12.61961	d_{117}	33.48328
d_{22}	-6.603506	d_{54}	-1.570771	d_{86}	-53.6651	d_{118}	28.0461
d_{23}	-11.83306	d_{55}	-0.929301	d_{87}	-8.374057	d_{119}	-16.63612
d_{24}	-2.266134	d_{56}	12.84111	d_{88}	12.0558	d_{120}	-0.390917
d_{25}	29.71961	d_{57}	16.51637	d_{89}	-28.35436	d_{121}	5.897139
d_{26}	25.96461	d_{58}	13.19613	d_{90}	21.24185	d_{122}	-32.48331
d_{27}	13.13953	d_{59}	46.8302	d_{91}	-4.930431	d_{123}	-21.29527
d_{28}	6.95886	d_{60}	78.02193	d_{92}	25.23783	d_{124}	13.27596
d_{29}	-21.57511	d_{61}	27.43573	d_{93}	47.13625	d_{125}	8.269504
d_{30}	-15.7789	d_{62}	-22.65484	d_{94}	-32.23354	d_{126}	-5.550329
d_{31}	8.39048	d_{63}	-0.770927	d_{95}	-1.566098	d_{127}	22.33427
d_{32}	16.51596	d_{64}	13.81321	d_{96}	18.74331	d_{128}	-4.323924

Y los resultados numéricos, que se obtienen para estimar la aceleración en los accidentes de motocicleta con los datos del ejemplo son:

Tabla V. Estimación Wavelet

	x	Estimación		x	Estimación		x	Estimación		x	Estimación
1	2.4	-2.4	33	15.6	-74.4	65	22	-218.6	97	33.4	82.9
2	2.6	-2.4	34	15.6	-74.4	66	23.2	-217.5	98	33.8	78.8
3	3.2	-0.2	35	15.8	-74.4	67	23.4	-217.5	99	34.4	62.2
4	3.6	-0.2	36	15.8	-74.4	68	24	-189.4	100	34.8	62.2
5	4	16.4	37	16	-74.4	69	24.2	-189.4	101	35.2	59.7
6	6.2	13.8	38	16	-74.4	70	24.2	-189.4	102	35.2	59.7
7	6.6	13.8	39	16.2	-74.4	71	24.6	-160.4	103	35.4	59.7
8	6.8	14.1	40	16.2	-74.4	72	25	-141.9	104	35.6	59.7
9	7.8	14.6	41	16.2	-74.4	73	25	-141.9	105	35.6	59.7
10	8.2	6.6	42	16.4	-74.4	74	25.4	-141.9	106	36.2	36.8
11	8.8	29.3	43	16.4	-74.4	75	25.4	-141.9	107	36.2	36.8
12	8.8	29.3	44	16.6	-74.4	76	25.6	-141.9	108	38	-1.3
13	9.6	29.3	45	16.8	-74.4	77	26	-106.6	109	38	-1.3
14	10	6.8	46	16.8	-74.4	78	26.2	-106.6	110	39.2	-19.7
15	10.2	6.8	47	16.8	-74.4	79	26.2	-106.6	111	39.4	-19.7
16	10.6	8.4	48	17.6	-149.3	80	26.4	-81.7	112	40	-21.7
17	11	8.4	49	17.6	-149.3	81	27	-55.7	113	40.4	-35.7
18	11.4	3.0	50	17.6	-149.3	82	27.2	-55.7	114	41.6	-43.4
19	13.2	-15.8	51	17.6	-149.3	83	27.2	-55.7	115	41.6	-43.4
20	13.6	-15.8	52	17.8	-149.3	84	27.2	-55.7	116	42.4	-47.5
21	13.8	-24.8	53	17.8	-149.3	85	27.6	-17.2	117	42.8	-52.0
22	14.6	-35.1	54	18.6	-156.6	86	28.2	0.2	118	42.8	-52.0
23	14.6	-35.1	55	18.6	-156.6	87	28.4	0.2	119	43	-52.0
24	14.6	-35.1	56	19.2	-187.2	88	28.4	0.2	120	44	-65.9
25	14.6	-35.1	57	19.4	-196.8	89	28.6	0.2	121	44.4	-65.9
26	14.6	-35.1	58	19.4	-196.8	90	29.4	80.5	122	45	-71.1
27	14.6	-35.1	59	19.6	-196.8	91	30.2	80.5	123	46.6	-78.3
28	14.8	-35.1	60	20.2	-213.3	92	31	71.7	124	47.8	-103.0
29	15.4	-57.3	61	20.4	-213.3	93	31.2	71.7	125	47.8	-103.0
30	15.4	-57.3	62	21.2	-221.3	94	32	88.0	126	48.8	-82.9
31	15.4	-57.3	63	21.4	-231.9	95	32	88.0	127	50.6	-81.8
32	15.4	-57.3	64	21.8	-231.9	96	32.8	90.4	128	52	-58.5

Que se observa en la siguiente figura:

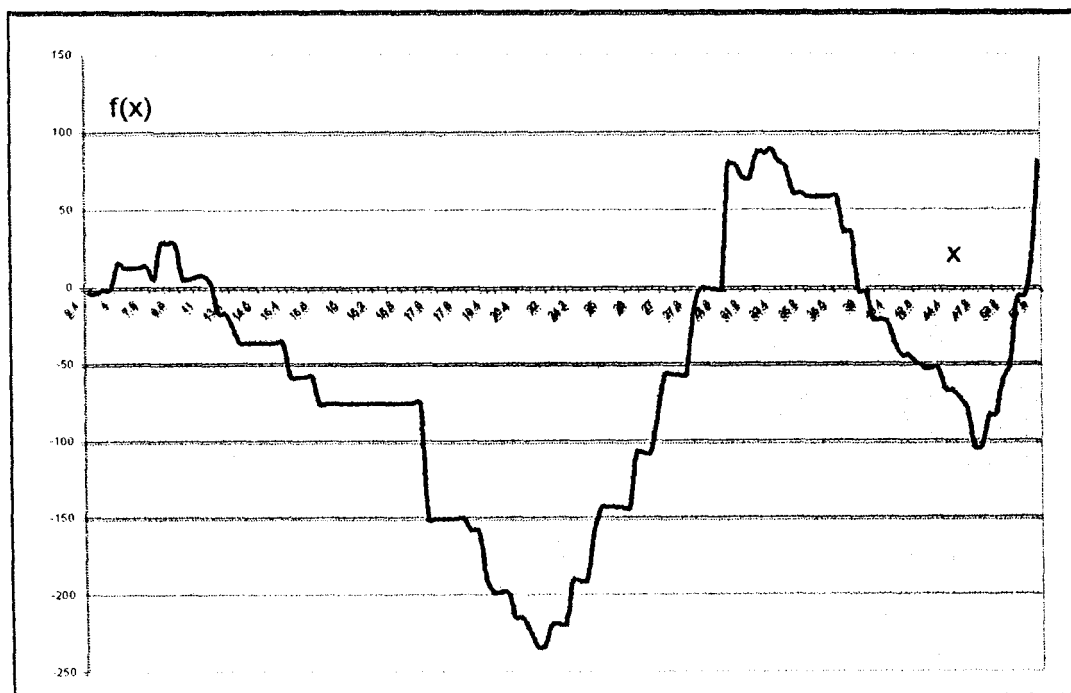


Figura 5.3 Accidentes de motocicleta estimado por Wavelet.

El comportamiento de los datos y la suavización de estos, constituyen el nuevo enfoque que brinda el modelo Wavelet Shrinkage.

Analizando los resultados se puede observar que la desviación estándar de los datos de la Wavelet estimada es menor que en la de los datos originales, en base a esta observación se puede decir que se ha reducido el ruido de la serie de datos, además es interesante mencionar que para el cálculo de el método Shrinkage realizado en un PC Pentium con

64RAM, 200MHZ de velocidad se tomo 2 horas en procesar el cálculo de este método.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

1. El modelo de la transformada de Wavelet aplicada en la estadística no paramétrica es de gran eficiencia en aplicaciones estadísticas, el cual permite realizar estimaciones aproximadas para suavizar datos no aleatorios.
2. A pesar de que el origen de la transformada de Wavelet estuvo principalmente orientado al tratamiento de señales o imágenes, también puede ser aplicado en el campo de las ciencia tan distintos, como es el problema de la estimación en la estadística.
3. Mediante la transformada de Wavelet se puede resolver uno de los problemas mas importantes de la estadística, el cual consiste en la eliminación del ruido aleatorio presente en una serie estadística. Este problema ha sido siempre de difícil tratamiento por parte de la estadística clásica pues requiere de la aplicación de filtros los cuales clásicamente

han utilizado las técnicas de Fourier , como el caso del Filtro Henderson 13, los cuales sin bien elimina parte del ruido son de difícil aplicación práctica.

4. La transformada de Wavelet de Haar permite expresar una función en términos de las funciones de escalonamiento obteniendo así la aproximación de la función real.

5. El método de reducción de datos en forma simplificada es el siguiente: Tener datos, aplicar la transformada discreta Wavelet, reducción de coeficientes, transformada inversa y la obtención de la Wavelet estimada.

RECOMENDACIONES

1. Es recomendable utilizar en el análisis de reducción de datos la Wavelet shrinkage para observar el comportamiento de los datos.
2. El método de Wavelet shrinkage es usado porque no existen supuestos acerca de la distribuciones de los datos, por lo tanto es recomendable usarlo para aproximar el comportamientos de los datos.

ANEXO

APÉNDICE A

Capítulo 3 sección 5

Algoritmo para graficar la Wavelet de Shannon.

```
Const pi = 3.14159265358979
```

```
Function F(As Double) As Double
```

```
F = Sin(pi * x) / (pi * x) 'función de escalonamiento
```

```
End Function
```

```
Private Sub CommandButton1_Click()
```

```
Dim j As Integer
```

```
Dim a As Double
```

```
Dim x As Double
```

```
j = 1
```

```
x = -6
```

```
Do
```

```
  a = j / 1000
```

```
  Worksheets("Hoja1").Rows(j).Columns(1) = x
```

```
  'función Wavelet
```

```
  Worksheets("Hoja1").Rows(j).Columns(2) = F(x - (1 / 2)) - (2 * F(2 * x - 1))
```

```
  x = a + x
```

```
  j = j + 1
```

```
Loop Until x >= 6.5
```

```
End Sub
```

APÉNDICE B

Capítulo 3 sección 6

Algoritmo de Lagarias-Daubechies

```
Private Sub Calculo_Click()
'Dim N As Integer
Dim vector() As Integer
Dim Dn As Integer
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim k As Integer
Dim P() As Double
Dim P1() As Double
Dim P2() As Double
Dim Vector_Val(1 To 100, 1 To 100) As Double
Dim x As Double
Dim esp As Integer
Dn = Int(Val(Worksheets("DAUB").Rows(100).Columns(100)))
    ReDim vector(1 To Dn) As Integer
For i = 1 To Dn
    vector(i) = Worksheets("DAUB").Rows(i).Columns(7)
Next
n = Int(Val(Worksheets("DAUB").Rows(101).Columns(100)))
' calculo sumatoria(i=1,Dn,Dn*2^-i)
Worksheets("T").Rows(500).Columns(1) = 0
For i = 1 To Dn
    Worksheets("T").Rows(500).Columns(1) = (vector(i) * 2 ^ (-i)) +
Worksheets("T").Rows(500).Columns(1)
Next
    x = Val(Worksheets("T").Rows(500).Columns(1))
ReDim P(1 To n, 1 To n) As Double
ReDim P1(1 To n, 1 To n) As Double
ReDim P2(1 To n, 1 To n) As Double
If vector(1) = 0 Then
'T CERO
For j = 1 To n
    For i = 1 To n
        P1(i, j) = Worksheets("T").Rows(i).Columns(j)
    Next
Next
Else
'T UNO
For j = 1 To n
    For i = 1 To n
        P1(i, j) = Worksheets("T").Rows(i + n + 1).Columns(j)
    Next
Next
End If
If vector(2) = 1 Then
'T UNO
For j = 1 To n
    For i = 1 To n
```

APÉNDICE B

```
P2(i, j) = Worksheets("T").Rows(i + n + 1).Columns(j)
Next
Next
Else
'T CERO
For j = 1 To n
    For i = 1 To n
        P2(i, j) = Worksheets("T").Rows(i).Columns(j)
    Next
Next
Next
End If
'MULTIPLICICO
For i = 1 To n
    For j = 1 To n
        P(i, j) = 0
        For k = 1 To n
            P(i, j) = P(i, j) + P1(i, k) * P2(k, j)
        Next
    Next
Next
'MUESTRO EL PRODUCTO
For j = 1 To n
    For i = 1 To n
        Worksheets("T").Rows(i + 2 * n + 2).Columns(j) = P(i, j)
    Next
Next
*****
*****          BUCLE          *****
*****
L = 3
Do
For j = 1 To n
    For i = 1 To n
        P1(i, j) = Worksheets("T").Rows(i + 2 * n + 2).Columns(j)
    Next
Next
If vector(L) = 0 Then
'T CERO
For j = 1 To n
    For i = 1 To n
        P2(i, j) = Worksheets("T").Rows(i).Columns(j)
    Next
Next
End If
If vector(L) = 1 Then
'T UNO
For j = 1 To n
    For i = 1 To n
        P2(i, j) = Worksheets("T").Rows(i + n + 1).Columns(j)
    Next
Next
```


APÉNDICE B

End If

'MULTIPLICACION

For i = 1 To n

For j = 1 To n

P(i, j) = 0

For k = 1 To n

P(i, j) = P(i, j) + P1(i, k) * P2(k, j)

Worksheets("T").Rows(i + 2 * n + 2).Columns(j) = P(i, j)

Next

Next

Next

'MUESTRO EL PRODUCTO

For j = 1 To n

For i = 1 To n

Worksheets("T").Rows(i + 2 * n + 2).Columns(j) = P(i, j)

Next

Next

L = L + 1

Loop Until L > Dn

'Ingreso en vector

esp = Int(Val(Worksheets("DAUB").Rows(102).Columns(100)))

i = 1

For j = esp To n + esp - 1

Worksheets("T").Rows(j).Columns(29) = x

Worksheets("T").Rows(j).Columns(30) = Worksheets("T").Rows(i + 2 * n + 2).Columns(3)

x = x + 1

i = i + 1

Next

esp = j

Worksheets("DAUB").Rows(102).Columns(100) = esp

End Sub

APÉNDICE C

Capítulo 3 sección 6

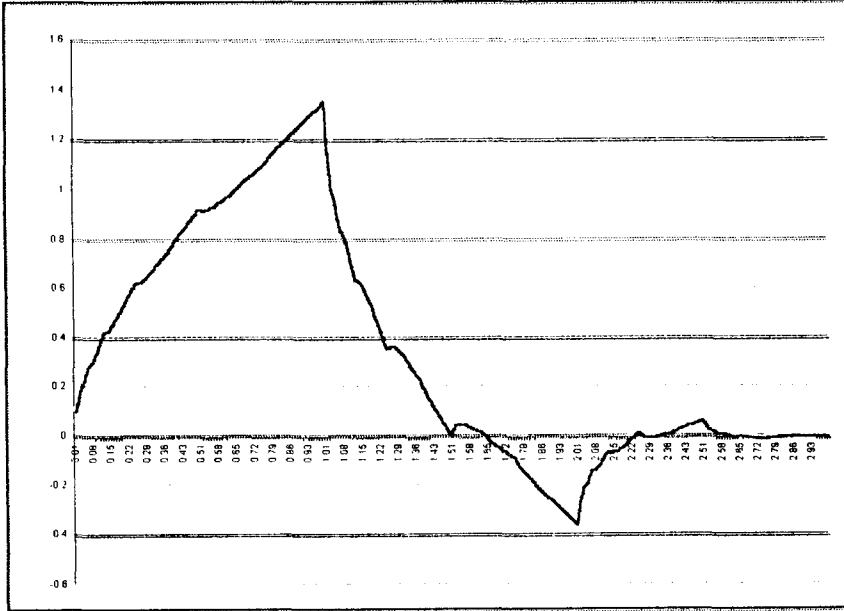
Algoritmo Diadico

```
Private Sub dyadxn_Click()
Dim vector() As Integer
Dim x As Double
Dim Dn As Integer
Dim n As Integer
Range("G1:G1000").Select
Range("G1:G1000").ClearContents
Range("h1:h1").Select
If Int(Worksheets("DAUB").Rows(102).Columns(100)) = 0 Then
Worksheets("DAUB").Rows(102).Columns(100) = 0
End If
n = Val(InputBox("DAUECHIES N=2,4,8"))
Worksheets("DAUB").Rows(105).Columns(100) = n
'x = Val(InputBox("preguntar x el decimal [0,1]"))
Dn = 20 ' Int(Val(InputBox("preguntar Dn la precision")))
Worksheets("DAUB").Rows(100).Columns(100) = Dn
    ReDim vector(1 To Dn) As Integer
    For i_tmp = 1 To 10
        x = i_tmp / 11
        dyad = 0
        y = x
        For i = 1 To Dn
            y = y * 2
            dyad = Int(y)
            y = y - Int(y)
            vector(i) = dyad
        Next
        For i = 1 To Dn
            Worksheets("DAUB").Rows(i).Columns(7) = vector(i)
        Next
        Call T_Click
        Call Calculo_Click
    Next
End Sub
```

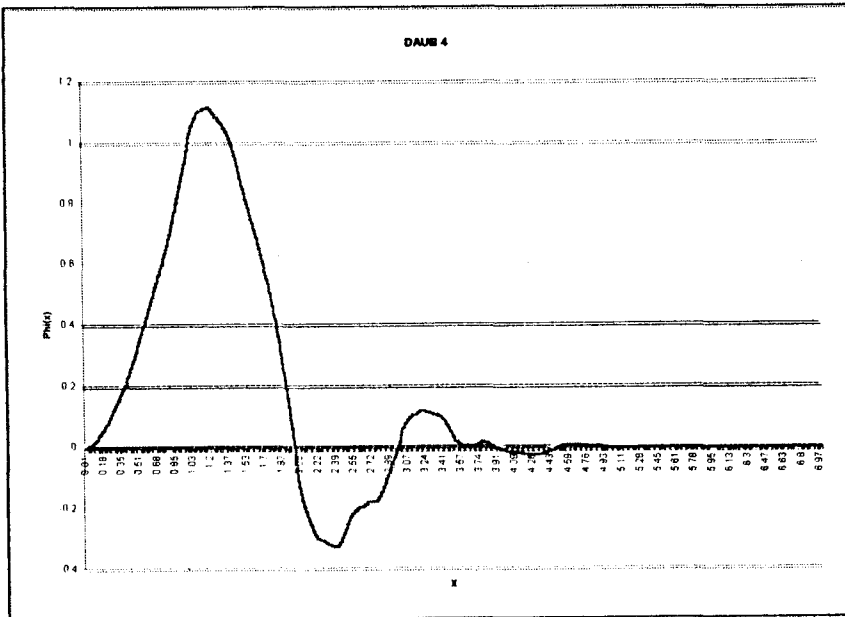
APÉNDICE D

Capítulo 3 sección 6

Gráficos de Daubechies 2



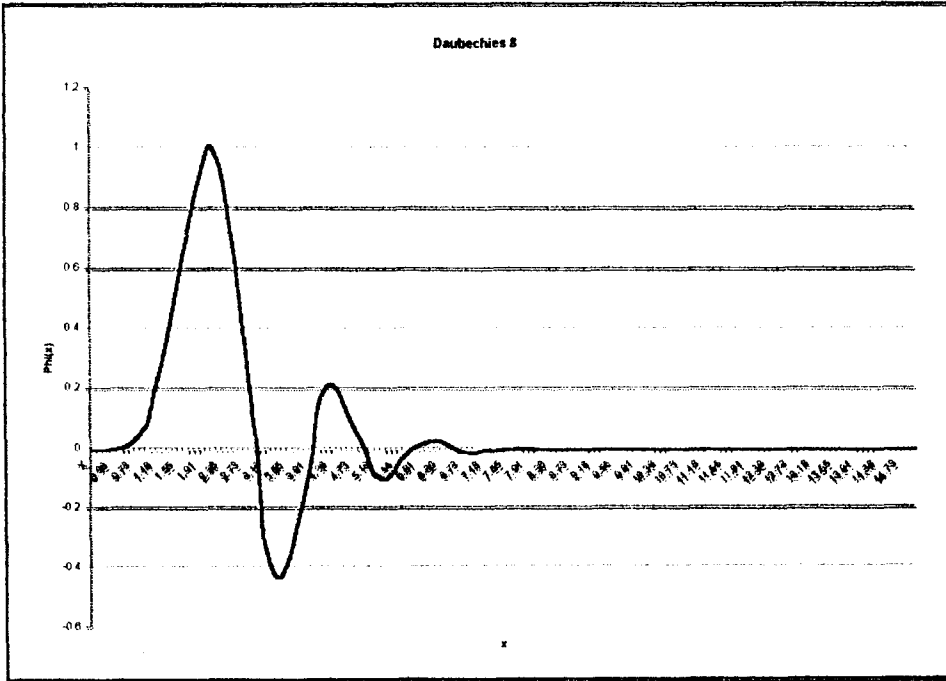
Gráficos de Daubechies 4



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE
 CANTILLANA
 C.T.B. - ESPINA

APÉNDICE D

Gráficos de Daubechies 8



APÉNDICE E

Capítulo 3 sección 6

Algoritmo cuadratura de Gauss

Const pi = 3.14159265358979

Function d_F(x As Double) As Double

If x >= 1 Or x <= 0 Then

d_F = 0

End If

If x >= 0 And x <= 1 Then

d_F = Sin(2.1 * pi / (x + 0.05)) * Sqr(x * (1 - x))

End If

End Function

Function d_Psi(x As Double) As Double

d_Psi = (1 - x ^ 2) * Exp(-x ^ 2 / 2)

End Function

Function f(x As Double) As Double

f = d_F(x) * d_Psi(x)

End Function

Function r(s As Integer, t As Integer) As Double

If s = 5 And t = 1 Then

r = 0.9061798459

End If

If s = 5 And t = 2 Then

r = 0.5384693101

End If

If s = 5 And t = 3 Then

r = 0

End If

If s = 5 And t = 4 Then

r = -0.5384693101

End If

If s = 5 And t = 5 Then

r = -0.9061798459

End If

End Function

Function Cnj(p As Integer, Q As Integer) As Double

If p = 5 And Q = 1 Then

Cnj = 0.236926885

End If

If p = 5 And Q = 2 Then

Cnj = 0.4786286705

End If

If p = 5 And Q = 3 Then

Cnj = 0.5688888889

APÉNDICE E

```
End If
If p = 5 And Q = 4 Then
    Cnj = 0.4786286705
End If
```

```
If p = 5 And Q = 5 Then
    Cnj = 0.236926885
End If
```

End Function

Private Sub cuadratura_Click()

```
Dim a As Double: Dim b As Double
Dim H1 As Double: Dim H2 As Double
Dim x As Double: Dim Y As Double
Dim J As Double: Dim JX As Double
Dim d1 As Double: Dim c1 As Double
Dim k1 As Double: Dim k2 As Double
Dim Q As Double: Dim m As Integer
Dim n As Integer: Dim i As Integer
Dim indicej As Integer: Dim espacio As Integer
Dim veces As Integer
```

```
Worksheets("datos").Rows(1).Columns(2) = "SOL"
```

```
For veces = 1 To 100
```

```
    a = 0: b = veces / 100
```

```
    m = 5
```

```
    espacio = 0
```

```
    H1 = (b - a) / 2:
```

```
    J = 0
```

```
    JX = 0
```

```
    For i = 1 To m
```

```
        x = ((b - a) * r(m, i) + (b + a)) / 2
```

```
        Q = f(x)
```

```
        JX = JX + Cnj(m, i) * Q
```

```
    Next
```

```
    J = H1 * JX
```

```
Worksheets("datos").Rows(2 + veces).Columns(2) = J
```

```
Worksheets("datos").Rows(2 + veces).Columns(1) = b
```

```
Next
```

End Sub

Private Sub doperic_Click()

```
Dim i As Integer
```

```
For i = 1 To 100
```

```
Worksheets("datos").Rows(2 + i).Columns(3) = d_F(i / 100)
```

```
Next
```

End Sub

APÉNDICE F

Capítulo 5 sección 5.2.2

Algoritmo Wavelet Shrinkage

Valor=\$F111*\$B111*(Kaj(\$F\$1,\$B\$1,G\$3,\$D111)+Kaj(\$F\$1,\$B\$1,G\$3,\$E111))

Function phi(n As Integer, x As Double, y As Double)

```
Dim a As String
Dim y As Double
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim m As Integer
```

```
If x < 0 Then
```

```
    x = -x
```

```
End If
```

```
a = "DATOS DAUB " & n
```

```
i = 1
```

```
j = 150
```

```
Do While i <= j
```

```
    m = (i + j) \ 2
```

```
    y = Val(Sheets(a).Columns(1).Rows(m))
```

```
    If x < y Then
```

```
        j = m - 1
```

```
    ElseIf x > y Then
```

```
        i = m + 1
```

```
    Else
```

```
        Exit Do
```

```
    End If
```

```
Loop
```

```
phi = Val(Worksheets(a).Columns(2).Rows(m))
```

End Function

Function ka(n As Integer, x As Double, y As Double) As Double

```
Dim k As Double
```

```
Dim i As Integer
```

```
k = 0
```

```
For i = 0 To n - 1
```

```
    k = k + phi(n, x - i) * phi(n, y - i)
```

```
Next
```

```
Ka = k
```

End Function

Function Kaj(n As Integer, i As Integer, x As Double, y As Double) As Double

```
y = y * (2 ^ j)
```

```
x = x * (2 ^ j)
```

```
Kaj = 2 ^ j * Ka(n, x, y)
```

End Function

DAUBECHIES 8

	x	Phi(x)		x	Phi(x)		x	Phi(x)
1	0.09	1.9313E-05	51	5.09	-0.07488251	101	10.09	5.2355E-05
2	0.18	0.00025096	52	5.18	-0.09234065	102	10.18	4.6176E-05
3	0.27	0.00111906	53	5.27	-0.09943505	103	10.27	5.9909E-06
4	0.36	0.00326117	54	5.36	-0.08911613	104	10.36	-1.1824E-05
5	0.45	0.00741195	55	5.45	-0.06528816	105	10.45	-1.2726E-05
6	0.55	0.01454167	56	5.55	-0.03707249	106	10.55	-6.8291E-06
7	0.64	0.02580855	57	5.64	-0.01524685	107	10.64	-9.4737E-06
8	0.73	0.04237737	58	5.73	0.00072814	108	10.73	-4.2835E-06
9	0.82	0.06541841	59	5.82	0.01210456	109	10.82	2.6629E-06
10	0.91	0.09631472	60	5.91	0.02046808	110	10.91	5.6989E-06
11	1.09	0.18885151	61	6.09	0.02592389	111	11.09	-7.0056E-07
12	1.18	0.25308086	62	6.18	0.02874088	112	11.18	-5.3101E-08
13	1.27	0.32893822	63	6.27	0.03041882	113	11.27	3.4118E-07
14	1.36	0.41489214	64	6.36	0.02499399	114	11.36	-3.9696E-07
15	1.45	0.5080584	65	6.45	0.01459248	115	11.45	-7.1671E-07
16	1.55	0.60530845	66	6.55	0.00344641	116	11.55	1.058E-07
17	1.64	0.70169206	67	6.64	-0.00413925	117	11.64	3.1045E-07
18	1.73	0.79300706	68	6.73	-0.00926876	118	11.73	1.0891E-07
19	1.82	0.87543237	69	6.82	-0.01129347	119	11.82	-1.7752E-07
20	1.91	0.94407832	70	6.91	-0.01013944	120	11.91	1.9662E-08
21	2.09	1.01038796	71	7.09	-0.0033479	121	12.09	2.8942E-08
22	2.18	0.99579205	72	7.18	-0.00291891	122	12.18	-4.3766E-08
23	2.27	0.94659802	73	7.27	-0.00366589	123	12.27	9.406E-09
24	2.36	0.86383877	74	7.36	-0.00292459	124	12.36	-1.1062E-08
25	2.45	0.75048361	75	7.45	-0.00133445	125	12.45	7.9692E-09
26	2.55	0.6135067	76	7.55	0.00023037	126	12.55	-9.3831E-09
27	2.64	0.46235759	77	7.64	0.00146424	127	12.64	-6.7451E-10
28	2.73	0.30305283	78	7.73	0.00289697	128	12.73	1.4252E-09
29	2.82	0.13955505	79	7.82	0.00351538	129	12.82	1.8709E-09
30	2.91	-0.02199439	80	7.91	0.00257428	130	12.91	-6.1301E-10
31	3.09	-0.28867906	81	8.09	-0.00055861	131	13.09	-3.3027E-11
32	3.18	-0.37366481	82	8.18	-0.00085242	132	13.18	7.6525E-11
33	3.27	-0.4205842	83	8.27	-0.00073064	133	13.27	-2.6538E-11
34	3.36	-0.42764929	84	8.36	-0.00053074	134	13.36	-1.6732E-11
35	3.45	-0.39809034	85	8.45	-0.00016313	135	13.45	-3.8519E-12
36	3.55	-0.34186431	86	8.55	0.00029123	136	13.55	-4.8402E-12
37	3.64	-0.27245595	87	8.64	0.00035097	137	13.64	-1.5879E-12
38	3.73	-0.19432429	88	8.73	2.8169E-06	138	13.73	-1.3277E-12
39	3.82	-0.1076955	89	8.82	-0.00033033	139	13.82	1.1057E-13
40	3.91	-0.01499681	90	8.91	-0.00027056	140	13.91	-3.1071E-13
41	4.09	0.14219518	91	9.09	3.8547E-05	141	14.09	-1.2711E-14
42	4.18	0.18177268	92	9.18	9.3281E-05	142	14.18	-2.7801E-15
43	4.27	0.21713357	93	9.27	0.00020374	143	14.27	8.0414E-16
44	4.36	0.21325057	94	9.36	0.00019631	144	14.36	-2.2058E-16
45	4.45	0.18427009	95	9.45	7.2988E-05	145	14.45	5.1621E-17
46	4.55	0.14171455	96	9.55	-9.5845E-05	146	14.55	-2.1113E-18
47	4.64	0.10030586	97	9.64	-0.00012805	147	14.64	-1.3362E-19
48	4.73	0.06162367	98	9.73	-9.1635E-05	148	14.73	-8.5759E-21
49	4.82	0.02332768	99	9.82	-3.6629E-05	149	14.82	2.2207E-23
50	4.91	-0.01602467	100	9.91	-1.5241E-05	150	14.91	-3.6919E-27

FILTROS WAVELETS (Daubechies)

DAUB 1 (Haar)

[0, 1] 0.707106781186547524400844362104849, 0.707106781186547524400844362104849

DAUB 2

[0, 3] 0.4829629131445341433748716, 0.836516303737807905575294, 0.224143868042013381025973, -
0.1294095225512603811744494

DAUB 3

[0, 5] 0.332670552950082615998512, 0.806891509311092576494494, 0.459877502118491570095152, -
0.135011020010254588696390, 0.085441273882026661692819, 0.0352262918857095366027407

DAUB 4

[0, 7] 0.2303778133088965, 0.7148465705529158, 0.630880767929859, -0.02798376941686011, -
0.1870348117190932, 0.0308413818355608, 0.03288301166688522, -0.01059740178506904

DAUB 5

[0, 9] 0.1601023979741924, 0.6038292697971881, 0.7243085284377715, 0.1384281459013217, -
0.2422948870663802, -0.03224486958463778, 0.07757149384004565, -0.006241490212798174, -
0.01258075199908194, 0.003335725285473757

DAUB 6

[0, 11] 0.11154074335011, 0.4946238903984554, 0.7511339080210982, 0.315250351709197, -
0.2262646939654429, -0.1297668675672638, 0.0975016055873231, 0.02752286553030565, -
0.03158203931748625, 0.0005538422011615105, 0.004777257510945544, -0.001077301085308486

DAUB 7

[0, 13] 0.07785205408500813, 0.3965393194819123, 0.7291320908462274, 0.4697822874051917, -
0.1439060039285563, -0.2240361849938672, 0.07130921926683042, 0.080612609151082, -
0.03802993693501439, -0.016574541630667, 0.01255099855609955, 0.0004295779729213739, -
0.001801640704047446, 0.0003537137999745171

FILTROS WAVELETS (Daubechies)

DAUB 8

[0, 15] 0.05441584224310704, 0.3128715909143165, 0.6756307362973218, 0.5853546836542239, -
0.01582910525637238, -0.2840155429615815, 0.0004724845739030209, 0.1287474266204823, -
0.01736930100181088, -0.04408825393079791, 0.01398102791739956, 0.00874609404740648, -
0.004870352993451852, -0.000391740373376942, 0.0006754494064506183, -0.0001174767841247786

DAUB 9

[0, 17] 0.03807794736388813, 0.2438346746126514, 0.6048231236902548, 0.6572880780514298,
0.1331973858249681, -0.2932737832793372, -0.0968407832230689, 0.148540749338104,
0.03072568147931585, -0.06763282906135907, 0.0002509471148277948, 0.02236166212368439, -
0.004723204757752752, -0.004281503682464633, 0.001847646883056686, 0.0002303857635232296, -
0.0002519631889427889, 0.00003934732031628112

DAUB 10

[0, 19] 0.02667005790054869, 0.188176800077648, 0.527201188931628, 0.6884590394535462,
0.2811723436606982, -0.2498464243271048, -0.1959462743773243, 0.127369340335694, 0.0930573646035142,
-0.07139414716638016, -0.0294575368218849, 0.03321267405931551, 0.003606553566951515, -
0.0107331754833277, 0.001395351747051327, 0.001992405295184184, -0.0006858566949593225, -
0.0001164668551292262, 0.0000935886703200315, -0.00001326420289451403

DAUB 11

[0, 21] 0.01869429776144806, 0.1440670211504498, 0.4498997643555165, 0.6856867749154562,
0.4119643689476272, -0.1622752450269621, -0.2742308468172826, 0.06604358819685894,
0.1498120124663909, -0.04647995511648684, -0.06643878569486228, 0.03133509021904213,
0.02084090436017028, -0.01536482090617611, -0.003340858873009247, 0.0049284176560525, -
0.0003085928588149355, -0.00089302325066525, 0.0002491525235524301, 0.00005443907469928305, -
0.00003463498418694142, 0.000004494274277230458

DAUB 12

[0, 23] 0.01311225795736534, 0.1095662728222715, 0.3773551352176745, 0.657198722584349,
0.5158864784293156, -0.04476388565908393, -0.3161784537592869, -0.02377925725693821,
0.1824786059298069, 0.00535956967427179, -0.0964321200976865, 0.0108491302560784,
0.04154627749559747, -0.01221864906995923, -0.01284082519846823, 0.00671149900888981,
0.002248607241020708, -0.002179503618657147, 0.000006545128213682533, 0.0003886530628261407, -
0.0000885041092094801, -0.00002424154575734139, 0.00001277695221955214, -0.000001529071758089919

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A.Antoniadis, G.Grégorie, and I.McKeague.Wavelet methods for curve estimation. J.Amer.Statist.Assoc., 89:1340-1353,1994.
- [2] Beran J. Fitting long-memory models by generalized linear regression.
- [3] Burt P.J. and E.H.Adelson. The Laplacian pyramid as a compact image code. IEEE trans.Comm., COM-31:532-540, 1983
- [4] D.Donoho "Nonlienaar Wavelet Methods for recovery of signals, densities, and spectra from indirect and noisy data", Procedente del simposio en matemáticas aplicada, Vol 47, I.Daubechies ed. Amer.Math.Soc., Providence, R.I., 1993, pp. 173-205.
- [5] Vidakovic Brani ,Statical Modeling by Wavelets, Willey inter-science, impreso en los estados unidos de norte América 1999.

Enlaces de Internet

<http://www.wavelet.org>

<http://www.wavbox.com>

<http://www.mathsoft.com/splus/splsprod/wavelets.html>

<http://store.wolfram.com/view/wavelet/>

<http://www-stat.stanford.edu/~wavelab/>