

ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

APLICACION DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA AL

PROCESO DE GRAFICACION DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

MONOGRAFIA

PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE

MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA

APLICADA AL NIVEL MEDIO

PRESENTADO POR:

TIPAN LUIS

Guayaquil - Ecuador

Marzo - 1994

DIRECTOR DE MONOGRAFIA:

MATEMATICO JORGE MEDINA.

DECLARACION

EXPRESA

" La responsabilidad por los hechos ideas y doctrinas expuestas en esta monografía, me corresponden exclusivamente, y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la ESPOL).

.....

Tipán Luis

INTRODUCCION

Esta monografía lo he realizado pensando en que sea utilizado por estudiantes de nivel secundario en el tratamiento sobre la representación gráfica de funciones de variable real. Aplicando el criterio de la primera y segunda derivada.

El capítulo comienza con teoremas y definiciones de valor medio, funciones crecientes y decrecientes, máximos y mínimos, valores críticos, concavidades y puntos de inflexión.

De los teoremas presentados en este trabajo se han demostrado algunos de ellos dejando los restantes para que demuestre el estudiante, siendo su demostración en forma similar. Pienso que está dentro de la capacidad del estudiante secundario.

Para cada una de las definiciones y teoremas se ha desarrollado ejemplos de representaciones gráficas generales y particulares, con todos los pasos seguidos hasta llegar a la representación gráfica de cada función.

05	AL PROCESO DE GRAFICACION DE FUNCIONES .	05
05	1.1 MAXIMOS Y MINIMOS.	05
05	1.2 VALORES EXTREMOS.	05
06	1.3 TEOREMA DE ROLLE.	06
09	1.4 TEOREMA DEL VALOR MEDIO.	09
11	1.5 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES.	11
12	1.6 FUNCION MONOTONA	12
13	1.7 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES.	13
16	1.8 VALORES CRITICOS.	16
17	1.9 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA MAXIMOS Y MINIMOS.	17
18	1.10 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA MAXIMOS Y MINIMOS.	18
22	1.11 CONCAVIDADES.	22
26	1.12 PUNTOS DE INFLEXION.	26
27	1.13 BIBLIOGRAFIA.	27

CONTENIDO

Pag.

1.- APLICACIONES DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA AL PROCESO DE GRAFICACION DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

Una aplicación importante de la primera y segunda derivada es el proceso de graficar una función de variable real cuando su grado es mayor a dos, nos dá información suficiente como para adquirir una buena idea de la gráfica de una función, trazando el menor número de puntos posibles. Es decir en que intervalos f creciente o decreciente, máximo o mínimo, si tiene concavidad hacia abajo o hacia arriba, como también los puntos de inflexión donde la gráfica cambia de concavidad.

1.1.- DEFINICION DE VALOR MINIMO LOCAL (o RALATIVO) DE UNA FUNCION f .

Sea f una función definida en un intervalo I y $c \in I$, entonces:

i) $f(c)$ es un valor mínimo de f si $f(c) \leq f(x) \quad \forall x \neq c$ en I .

1.2.- DEFINICION DE VALOR MAXIMO LOCAL (o RELATIVO) DE UNA FUNCION f .

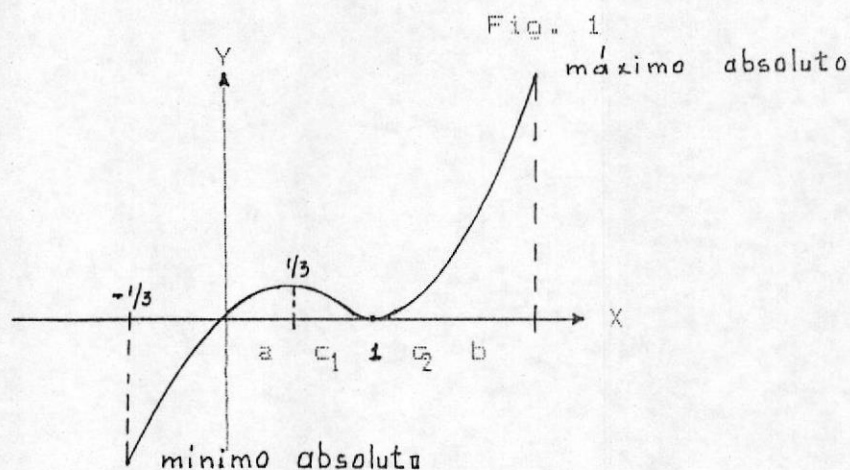
Sea f una función definida en un intervalo I y $c \in I$, entonces.

i) $f(c)$ es un valor máximo de f en I si,
 $f(c) \geq f(x), \quad \forall x \neq c$ en I .

1.3.- VALORES EXTREMOS DE UNA FUNCION f .

Los valores máximos y mínimos de una función en un intervalo I se llaman valores extremos de f .

REPRESENTACION GRAFICA



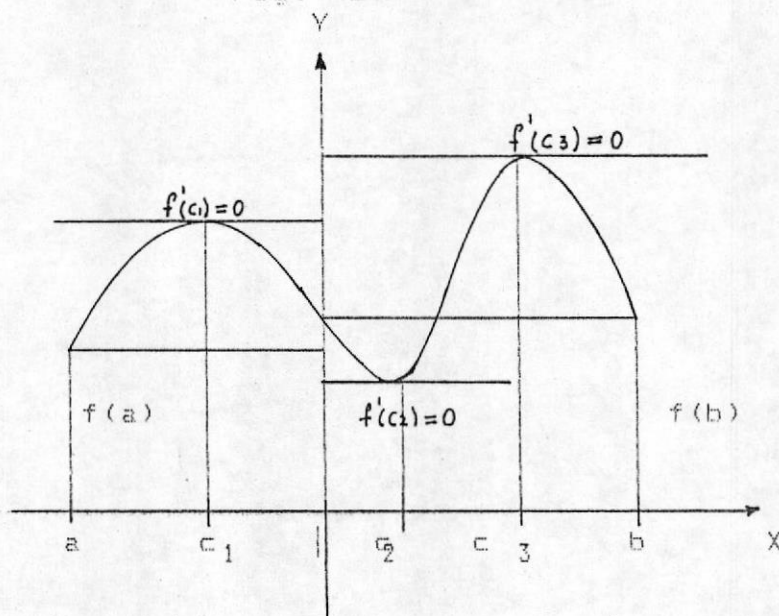
1.4.- TEOREMA DE ROLLE

Sea f continua en $[a; b]$ y derivable en $(a; b)$, si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en $(a; b)$ tal que $f'(c) = 0$. Realizaremos una representación gráfica de este teorema.

Si la representación gráfica de una función f continua en $[a; b]$ con puntos extremos en el eje X , en $P(a, 0)$ y $Q(b, 0)$, y si la curva tiene una recta tangente en cada punto **excepto** en los puntos extremos entonces debe existir al menos un punto de la curva en el que la recta tangente sea paralela al eje X , como se indica en la figura (2).

Notamos que si se cumple las condiciones del teorema de Rolle, dicho teorema nos garantiza la existencia de al menos un punto en el gráfico, cuya recta tangente sea paralela al eje X , pudiendo haber más de uno de tales puntos.

Fig. (2)



DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE ROLLE

Sea $f(a) = d = f(b) \implies$

1.- Si $f(x) = d$, para todo $x \in [a; b] \implies f$ es constante, esto implica que $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a; b)$, (la derivada de una constante es igual a cero).

2.- Si $f(x) > d$, para algún x del intervalo $(a; b)$, f tiene un valor máximo, en algún c del intervalo, como $f(c) > d$, tal máximo no ocurre en los puntos terminales, por tanto f tiene un valor máximo en el intervalo $(a; b)$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo, entonces c es un valor crítico de f , como f es derivable en c deducimos que $f'(c) = 0$.

3.- Si $f(x) < d$, para algún $x \in (a; b)$ y procediendo como en el paso 2 deducimos que $f'(c) = 0$.

Ejemplo: Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$

probar que $f'(x) = 0$, en algún punto intermedio de ellos.

SOLUCION: es derivable en toda la recta real,

igualando $f(x)$ a cero tenemos que:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 ; \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 ; \Rightarrow x=2 ; x = 1 ; \Rightarrow$$

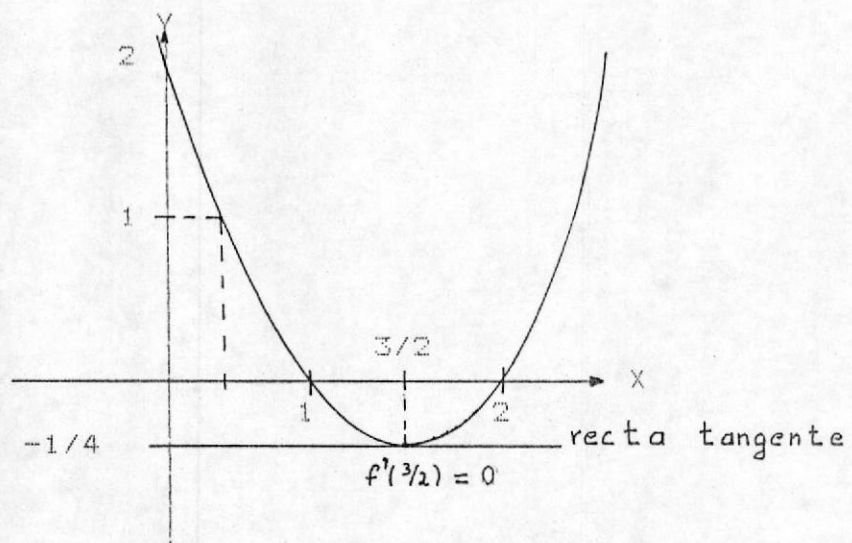
$$f(1) = f(2) = 0.$$

$f(1) = f(2) = 0$. Para calcular c resolvamos la ecuación $f'(x) = 0$, como sigue.

$$f'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/2, \text{ puesto que } 3/2 \text{ está en } (1,2) \text{ y } f'(3/2) = 0, \text{ concluimos que } c = 3/2.$$

Según el teorema de Rolle si f satisface sus condiciones debe haber al menos un punto entre a y b donde $f' = 0$. su representación gráfica lo podemos observar en la fig.3

fig.3



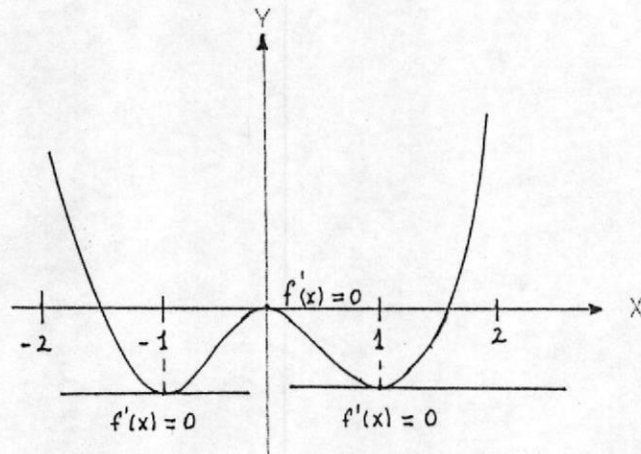
Ejemplo 2. Sea $f(x) = x^4 - 2x^2$. Hallar todas las c en el intervalo $(-2,2)$ tales que $f'(c) = 0$.

SOLUCION. Como $f(-2) = 8 = f(2)$ y F es derivable en (a,b) , el teorema de Rolle garantiza la existencia de al menos un c en $(-2,2)$ tal que $f'(c) = 0$, igualando a cero la derivada

se tiene.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x^2 = 0 \implies 4x(x-1) = 0 \implies x = \{0, 1, -1\}.$$

Así que el intervalo $(-2, 2)$ La derivada es cero en estos 3 puntos. Su representación gráfica lo podemos observar en la fig.4.



1.5 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS

Sea f una función tal que cumpla las siguientes condiciones:

- 1.- f sea continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.
- 2.- f sea derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

existe un número c tal que:

$$a < c < b \quad \text{y} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si en el teorema de Rolle se anula la hipótesis de que $f(a) = f(b)$ la conclusión no se cumple, como se indica en la figura 5. No existe en ese punto de la curva en que la recta tangente sea paralela al eje X . Sin embargo podemos observar que el segmento \overline{MN} cuyos extremos son los puntos $M[a, f(a)]$, $N[b, f(b)]$, desempeña un papel semejante al segmento \overline{PQ} , de la figura 3, enton-

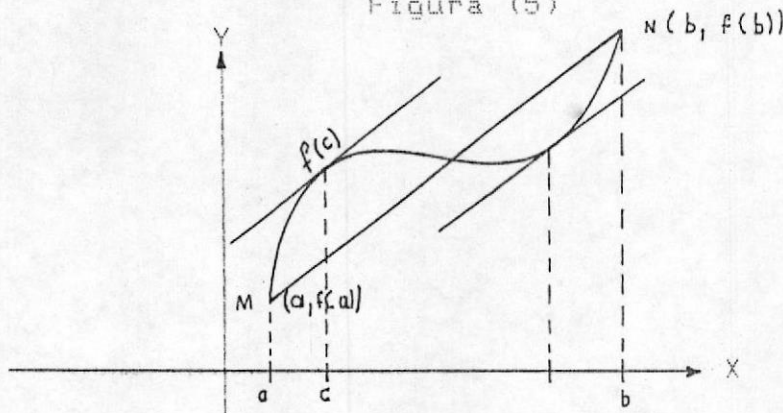
ces debe existir un punto en la representación gráfica de la figura 5 en la que la recta tangente sea paralela al segmento \overline{MN} . Puesto que la pendiente del

$$\overline{MN} \text{ es igual a : } \overline{MN} = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \Rightarrow \text{existe un}$$

punto de la gráfica en el cual la pendiente de la tangente

$$\text{es} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Figura (5)



Ejemplo: 2.- Si f está dado por $f(x) = x^2 + 2x + 1$:

$$1 < x < 4$$

Halle un número $c \in (1,4)$ tal que $f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$.

SOLUCION: Note que f satisface las condiciones del teorema 3

sobre $[1,4]$, por lo que debe existir el número c . Ahora bien

$$f'(x) = 2x + 2. \Rightarrow f(4) = 25 \text{ y } f(1) = 4 ; \text{ de ahí que}$$

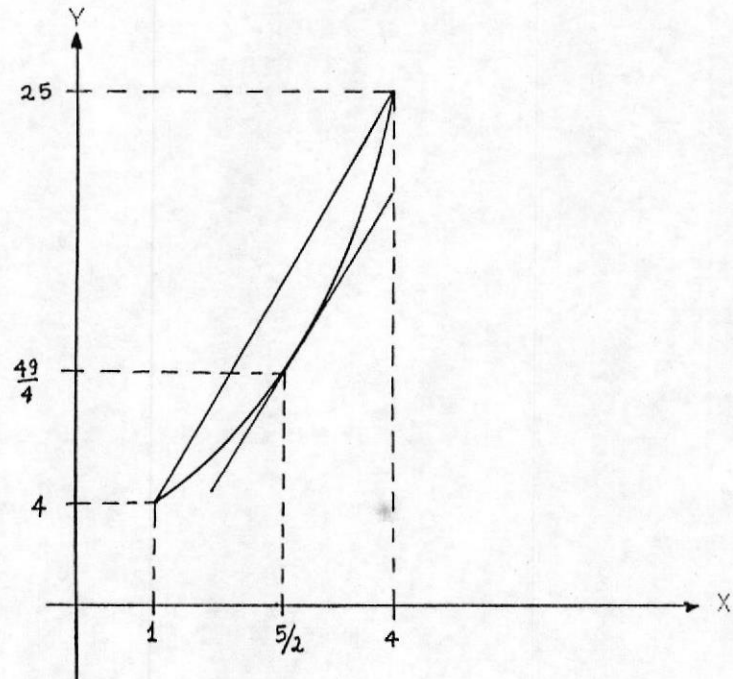
deseamos

$$\text{hallar } c \text{ tal que } 2c + 2 = (25 - 4)/3;$$

Resolviendo esta ecuación hallamos que $c = 5/2$, que es el número con las propiedades requeridas.

REPRESENTACION GRAFICA DE f

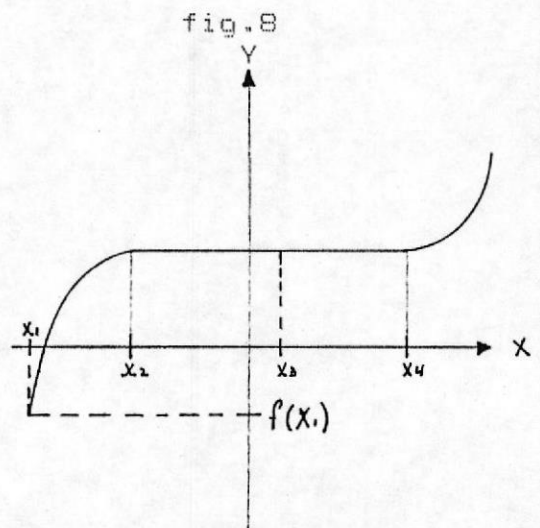
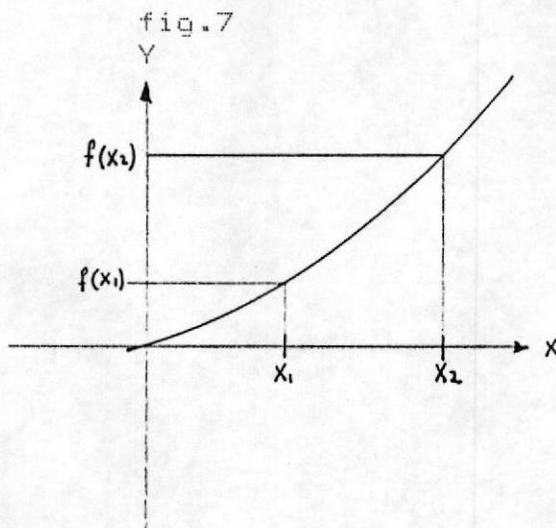
Fig. (6)

1.6.- FUNCIÓNES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$) una función real.

$$x \longrightarrow y = f(x).$$

DEFINICION 1.6.1- La función real f se dice que es creciente en I si y sólo si $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.



DEFINICION 1.6.2.- La función real f se dice que es:

decreciente en I si y sólo si $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow$

$f(x_1) \geq f(x_2)$

fig. 9

fig. 10

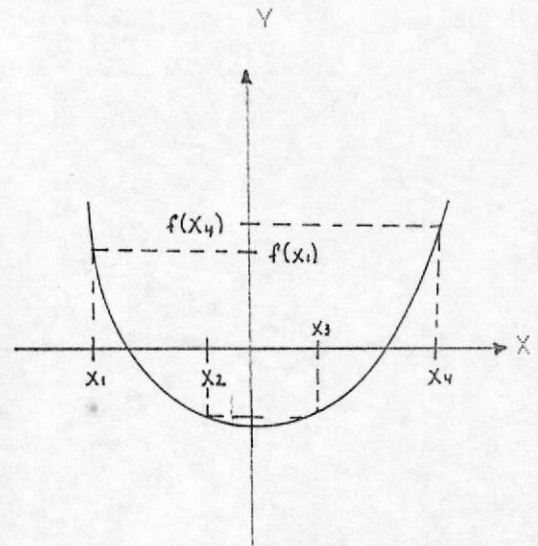
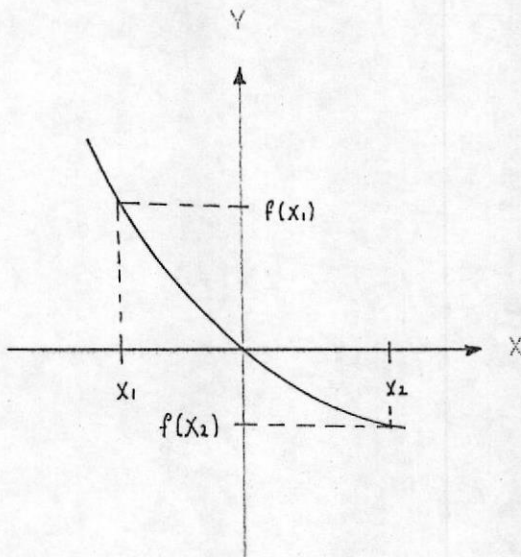
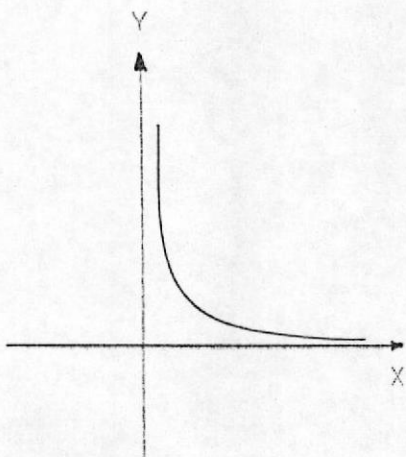
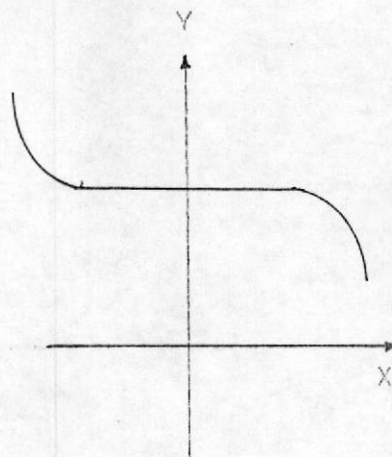


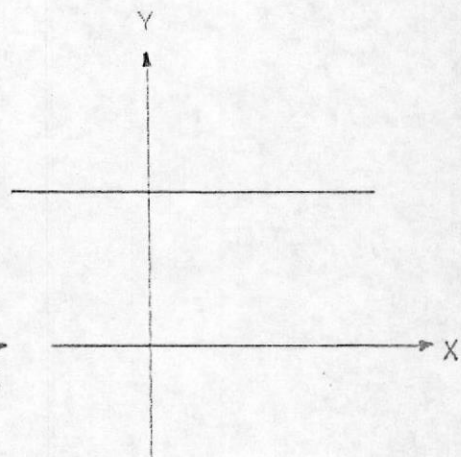
fig. 11



f es decreciente



g es decreciente



h es decreciente

1.7 FUNCION MONOTONA

DIFINICION 1.7.1.- f se dice que es monótona en I si es creciente o decreciente en I .

1.8 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA FUNCIONES
CRECIENTES Y DECRECIENTES

1.8.1. TEOREMA .- Si $f'(x) > 0$ sobre $(a; b)$ $\implies f$ es creciente sobre el intervalo abierto $(a; b)$.

1.8.2. TEOREMA .- Si $f'(x) < 0$ sobre el intervalo abierto (a, b) , $\implies f$ es decreciente sobre dicho intervalo.

1.8.3 TEOREMA .- Si $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a; b)$, $\implies f$ es constante en $(a; b)$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1.5.1

Para probar que f es creciente en $[a; b]$ debemos probar que si $a \leq x_1 < x_2 \leq b \implies f(x_1) < f(x_2)$.

Si $x_1 < x_2$ aplicando el teorema del valor medio para el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$ se tiene que existe un $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = (f(x_2) - f(x_1)) / (x_2 - x_1) \implies f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$. Como $x_1 < x_2$ se tiene que $x_2 - x_1 > 0$ y por hipótesis $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a; b)$, como en particular $c \in (a; b)$ se tiene entonces que $f'(c) > 0$, entonces $(x_2 - x_1) f'(c) > 0$, de donde $f(x_2) - f(x_1) > 0$, esto implica que $f(x_1) < f(x_2)$.

La demostración de este teorema es similar al teorema 1.8.1. con el sentido de la desigualdad invertida.

Para demostrar el teorema 1.5.3, que f es constante en todo el intervalo $[a; b]$ se debe probar que:

$$f(x) = f(a) \text{ (o } f(b)) \text{ para todo } x \in (a; b).$$

Sea $a < x \leq b$, luego por el teorema del valor medio para el intervalo $[a; x]$ se tiene que existe un $c \in (a; x)$ tal que:

$$f'(c) = (f(x) - f(a)) / (x - a).$$

como $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a; b)$ se tiene que en particular que $f'(c) = 0$; luego $f(x) - f(a) = 0$ con lo que $f(x) = f(a)$ para todo $x \in [a; b]$.

Ejemplo sea la función $f = \{(x,y) / Y = 3X^2 - X^3 \text{ } x \in \mathbb{R}\}$.

Determine los intervalos sobre los que f es creciente y decreciente. Obtener su representación gráfica.

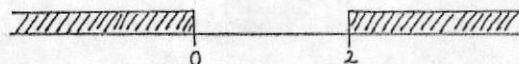
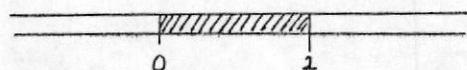
SOLUCION: Si $f(x) = 3X^2 - X^3 \Rightarrow f'(x) = 6X - 3X^2 = 3X(2-X)$.

1.- Si $f'(x) > 0 \Rightarrow 3x(2-x) > 0 \Rightarrow 3x > 0$ y $(2-x) > 0$ o $3x < 0$ y $(2-x) < 0 \Rightarrow (x > 0$ y $x < 2)$ o $(x < 0$ y $x > 2)$

fig.12

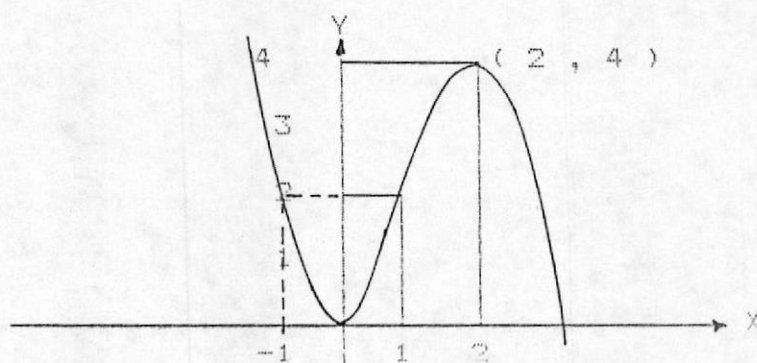
$$\text{sol} = 0 < x < 2$$

$$\text{sol} = \emptyset$$



por tanto f es creciente en el intervalo $(0; 2)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. Su representación gráfica está dada por la fig. 12, puesto que f es decreciente sobre $(-\infty; 0)$ y creciente sobre $[0; 2]$, no existe entonces intervalo abierto que contenga al cero, sobre el que f sea creciente (o decreciente). Por lo tanto f no es ni creciente ni decreciente en cero. Por razones semejantes f no es creciente ni decreciente en 2.

fig. 13



El teorema 1.8.1 que acabamos de demostrar es útil pero tiene algunas deficiencias, por ejemplo, en el caso de la función cuadrática.

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x.$$

Es negativa para $x \in (-\infty, 0)$, 0 para $x = 0$ y positiva para $x \in (0, +\infty)$,

y por el teorema 1.8.1 a 1.8.3 podemos asegurar que.

f decrece en $(-\alpha, 0)$ y crece en $(0, +\alpha)$.

Pero los resultados más precisos son.

f decrece en $(-\alpha, 0]$ y crece $[0, +\alpha)$.

Para obtener estos resultados necesitamos un teorema que se aplique a intervalos cerrados.

TEOREMA 1.8.5

Sea f continua en un intervalo cerrado I , entonces :

- i) Si $f'(x) > 0, \forall x \in I. \Rightarrow f$ es creciente en I .
- ii) Si $f'(x) < 0, \forall x \in I. \Rightarrow f$ es decreciente en I .
- iii) Si $f'(x) = 0, \forall x \in I. \Rightarrow f$ es constante en I .

Su demostración es similar a la del teorema 1.8.1.

1.9.- VALORES CRITICOS DE UNA FUNCION f

Para una función f cuyo dominio es el intervalo I , un valor $c \in I$ es un valor crítico de f si:

- 1.- $f'(c) = 0$, o
- 2.- $f'(c)$ no existe, o
- 3.- c es un valor extremo del intervalo I .

respecto al punto 3 debemos hacer las siguientes observaciones:

- i) Si $I = [a; b]$ $\Rightarrow a$ y b son valores críticos.
- ii) Si $I = [a; b)$ o si $I = [a; +\alpha)$ $\Rightarrow a$ es un valor crítico.

- iii) Si $I = (a ; b]$ o si $S = (- \infty ; b] \Rightarrow b$ es un valor crítico.
- iv) Si $I = (a ; b)$, a y b no son valores críticos, (los valores extremos de un intervalo abierto no son elementos del intervalo).

FORMA DE ENCONTRAR LOS VALORES CRITICOS DE f

Para encontrar los valores críticos de una función f se siguen los siguientes pasos.

- 1.- Dada la función f se halla la primera derivada $f'(x)$.
- 2.- Se iguala a cero la primera derivada, $f'(x) = 0$.

El conjunto solución son los valores críticos.

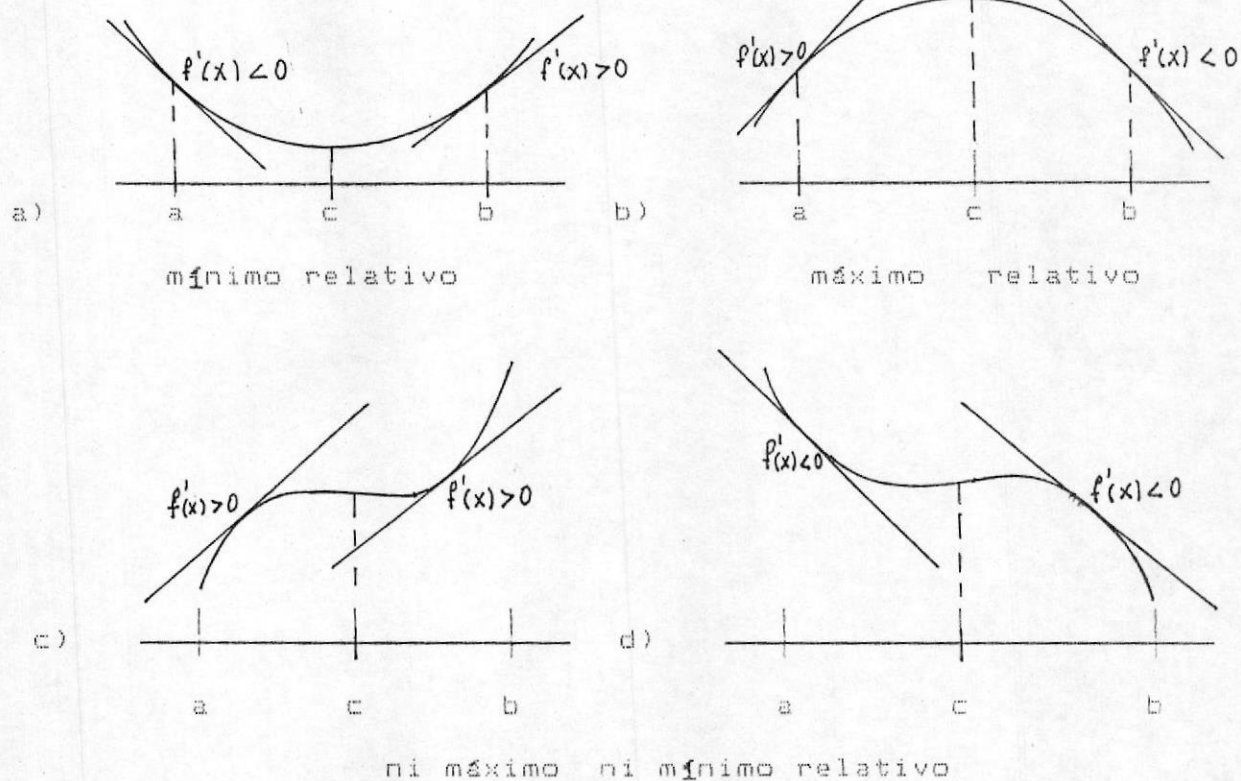
1.10.- CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION f .

Sea c un valor crítico de una función f continua en un intervalo abierto I que contiene a c . Si f es derivable en el intervalo, excepto a lo sumo en c , $f(c)$ puede clasificarse como sigue:

1.10.1 TEOREMA

- 1.- Si existe un intervalo $(c-d, c+d)$ tal que $f'(x) > 0, \forall x \in (c-d, c)$ y $f'(x) < 0, \forall x \in (c, c+d) \Rightarrow f(c)$ es un máximo local. Si ambas desigualdades se invierten, entonces $f(c)$ es un mínimo local. En la fig. 17 (a), (b), (c), (d) se ha realizado una representación gráfica del teorema.

fig. 14



DEMOSTRACION

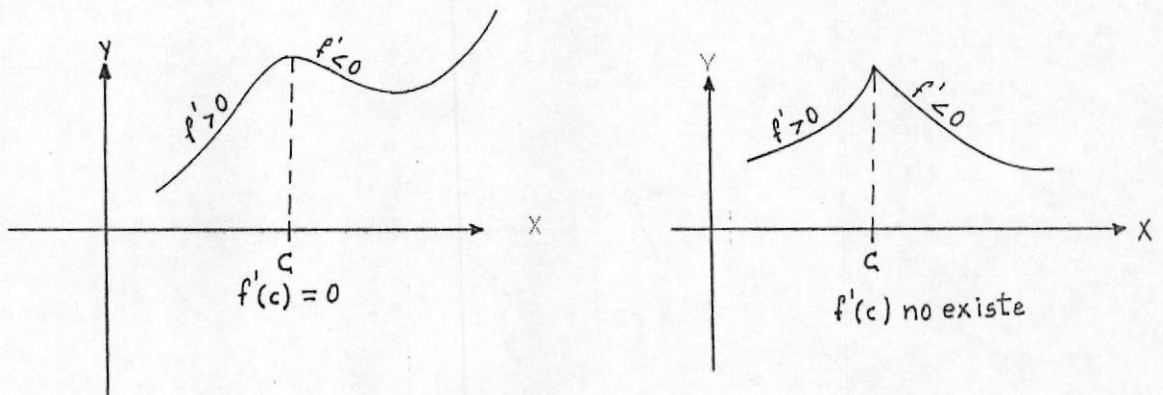
De los teoremas 1.8.1, 1.9.2 se tiene que f es creciente en $(a; b)$, puesto que $f'(x) > 0$, para todo x tal que $x < c$ y también se tiene que es decreciente en $(c; b)$ pues $f'(x) < 0$, para todo x tal que $x > c$ entonces $f(x) < f(c)$ para todo $x = c$ en

$(a; b)$ con lo que f tiene máximo relativo en c .

El significado geométrico lo podemos observar en la fig.19. Aquí tenemos graficada la función f que satisface la hipótesis.

En el intervalo $(a ; c)$ la pendiente de las rectas tangentes son positivas y en el intervalo $(c ; b)$ son negativas resulta claro entonces que en c existe el máximo relativo de f .

fig. 15



Ejemplo 1.- Aplicación del criterio de la primera derivada.

Hallar todos los máximos y mínimos relativos de la función $f = f(x) = x/2 - \sin(x)$, $x \in (0 ; 2\pi)$.

SOLUCION: $f'(x) = 1/2 - \cos x = 0$, hacemos $f' = 0$

$$\Rightarrow \cos x = 1/2.$$

$$\Rightarrow x = \pi/3, 5\pi/3 \quad \text{son los valores críticos}$$

Obtenemos los siguientes intervalos:

$$\text{intervalo} \quad 0 < x < \pi/3 \quad \pi/3 < x < 5\pi/3 \quad 5\pi/3 < x < 2\pi$$

$$\text{si } f'(x) > 0 \Rightarrow 1/2 - \cos x = 0 \Rightarrow f'(x) < 0,$$

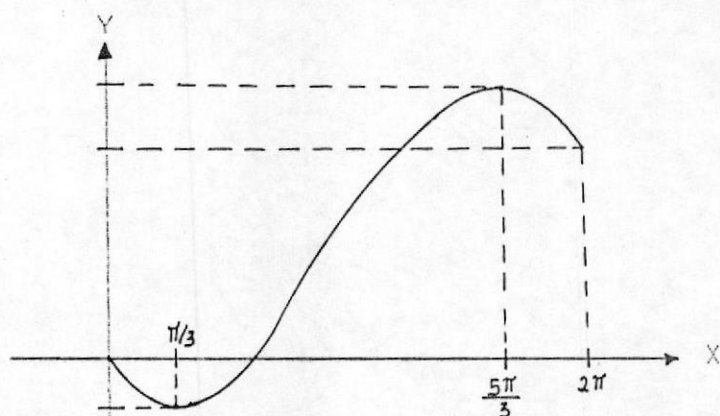
$$\forall x \in (0, \pi/3) \cup (5\pi/3, 2\pi) \text{ y } f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in (\pi/3, 5\pi/3)$$

Concluimos que hay un mínimo relativo en $x = \pi/3$ y un máximo relativo en $x = 5\pi/3$.

Su representación gráfica lo podemos observar en la fig. 16

fig. 16



1.11.- CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION f.

1.9.1.-TEOREMA.- Sea f una función tal que $f'(c) = 0$, tal que la segunda derivada de f exista en un intervalo abierto que contenga a c , entonces.

- 1.- Si $f''(c) > 0$, $\implies f(c)$ es un valor mínimo relativo de f
- 2.- Si $f''(c) < 0$, $\implies f(c)$ es un valor máximo relativo de f
- 3.- Si $f''(c) = 0$, \implies el criterio no decide.

DEMOSTRACION

Si $f''(c) > 0 \implies f''$ es la derivada de $f'(x)$ y por el teorema del valor medio, existe $d > 0$, tal que si: $c - d < X_1 < c < X_2 < c + d \implies f'(X_1) < f'(c) < f'(X_2)$ puesto que $f'(c) = 0 \implies f'(X) < 0 \forall X \in (c - d, c)$, $f'(x) > 0 \forall x \in (c, c + d) \implies f(c)$ es un mínimo local.

Ejemplo.- Utilizando el criterio de la segunda derivada, hallar los extremos relativos de $f(x) = -3x^5 + 5x^3$.

SOLUCION. Calculamos primero los valores críticos de f

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2) = 0.$$

entonces $X = \{-1, 0, 1\}$ son los valores críticos.

Como f' existe para todo x , esos son los únicos valores críticos y aplicando el criterio de la segunda derivada tenemos que: $f''(x) = 15(-4x^3 + 2x)$, entonces.

$$f''(c) > 0, \implies f''(-1) = 30 > 0: \implies \text{Mínimo relativo}$$

$$f''(c) > 0, \implies f''(0) = 0, \implies \text{el criterio no decide}$$

$$f''(c) > 0, \implies f''(1) = -30 \implies f(1) \text{ es máximo relativo}$$

Puesto que el criterio falla para el punto $(0, 0)$,

empleamos el criterio de la primera derivada de modo que

$(0, 0)$ no es extremo relativo.

NOTA: El criterio de la segunda derivada sólo puede ser utilizado si.

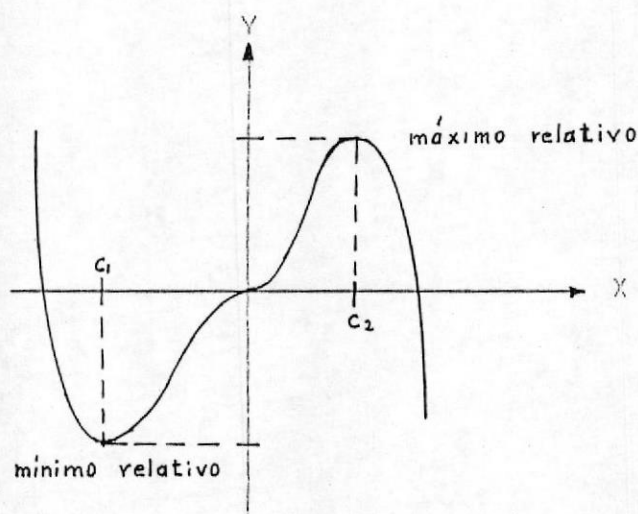
1.- f es dos veces derivable en un intervalo abierto que contiene a c .

$$2.- f'(c) = 0.$$

$$3.- f''(c) = 0.$$

La representación gráfica la podemos observar en la fig.17.

fig. 17

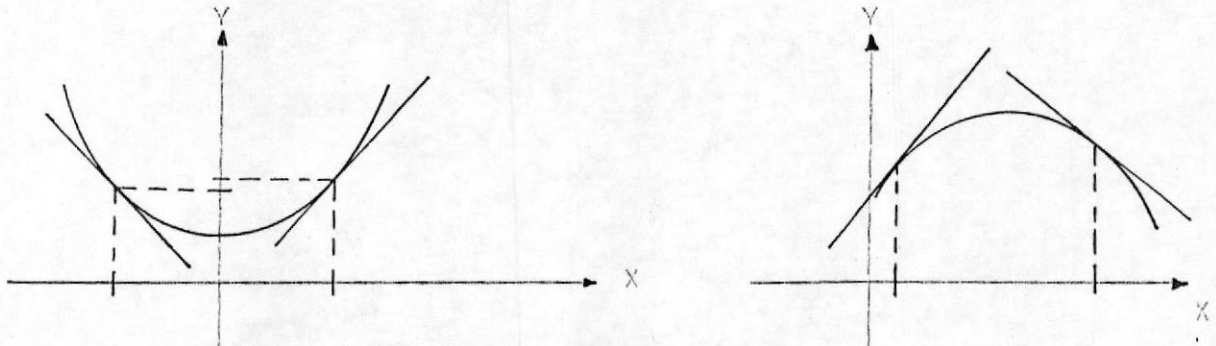


1.12.- CONCAVIDAD

DEFINICION.— Sea f derivable en un intervalo abierto $(a;b)$ diremos que la gráfica de f es cóncava hacia arriba si f' es creciente en ese intervalo y cóncava hacia abajo si f' es decreciente en ese intervalo.

En la fig. 19 se ha realizado la interpretación gráfica a definición dada.

fig. 18



CONCAVA HACIA ARRIBA f' CRECIENTE

CONCAVA HACIA ABAJO
 f' DECRECIENTE

De la fig. 22 podemos obtener la siguiente interpretación gráfica de la concavidad.

- 1.- Si una curva está por encima de sus rectas tangentes, es cóncava hacia arriba.
- 2.- Si una curva está por debajo de sus rectas tangentes, es cóncava hacia abajo.

A continuación daremos algunos ejemplos de concavidades.

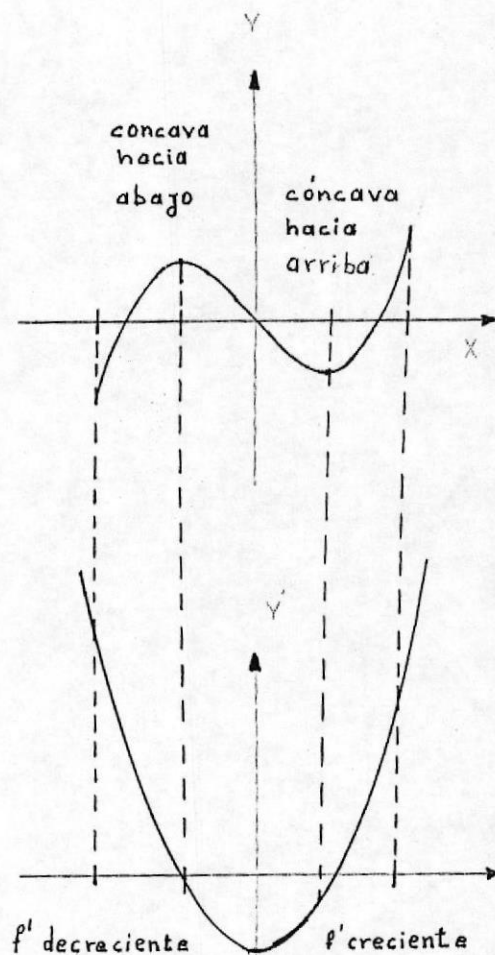
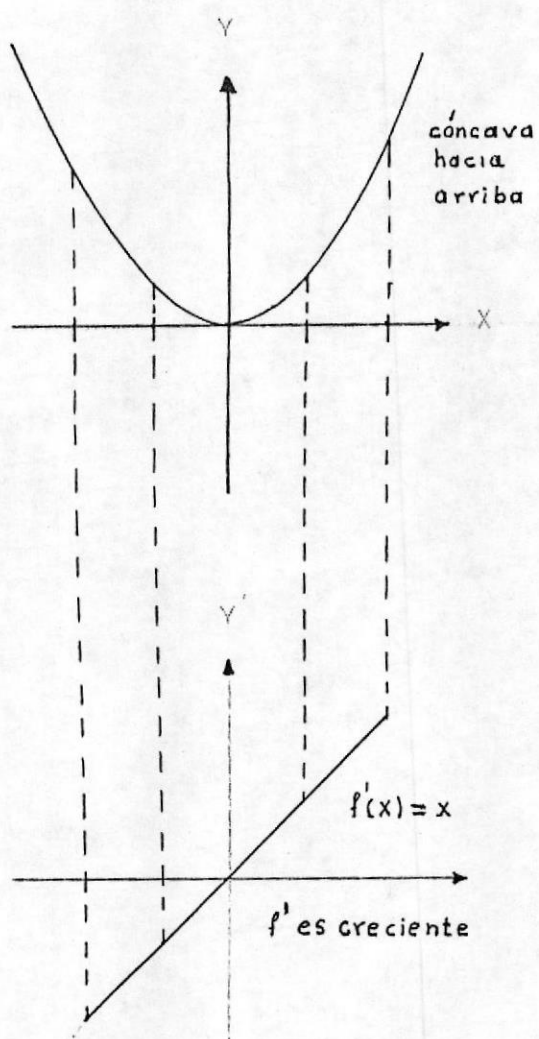
Ejemplo 1.- Comparación de las gráficas de f y f' .

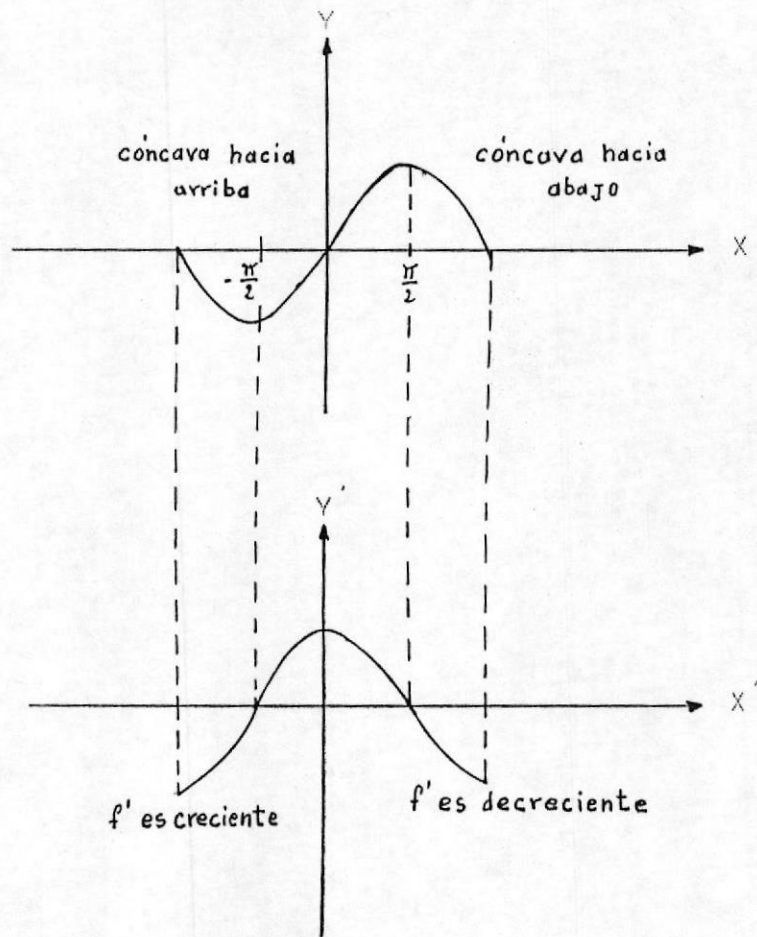
Para las funciones que se indican, dibujar las gráficas de f y f' para mostrar que f es creciente en los intervalos en que la gráfica de f es cóncava hacia arriba y que f' es decreciente en los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo.

a) $f(x) = x^2/2$ b) $f(x) = (x^3 - 3x)/3$ c) $f(x) = \text{sen } x$.

para $x \in \mathbb{R}$.

SOLUCION. VER LA fig. 23





1.13.- CRITERIO DE CONCAVIDAD

TEOREMA 1.13.1.- Sea f una función cuya segunda derivada existe en el intervalo abierto $(a; b)$ entonces:

1.- Si $f''(x) > 0$, para todo $x \in (a; b) \implies f'$ es creciente en ese intervalo $\implies f$ es cóncava hacia arriba en (a, b) .

$f''(x) < 0$, para todo $x \in (a; b) \implies f$ es cóncava hacia abajo.

DEMOSTRACION

Se deduce del teorema 3 y 4 sobre las funciones crecientes y decrecientes y de la definición de concavidad dada.

Nótese que no se definió concavidad para rectas, es decir una recta no es cóncava hacia arriba ni hacia abajo.

Conclusión.- Si $f''(x) = 0$, para todo $x \in (a ; b)$ entonces f

1.14.- PUNTO DE INFLEXION

1.14.1 DEFINICION.- Si la gráfica de una función continua posee recta tangente en un punto donde la concavidad cambia de sentido, llamamos a ese PUNTO DE INFLEXION.

teorema 1,14.1 : 9.- PUNTOS DE INFLEXION.- Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f , entonces o es

$$f''(c) = 0, \text{ o } f'' \text{ no esta definida en } X = c.$$

Ejemplo: Hacer la representación gráfica de

$$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 1,$$

SOLUCION derivando dos veces, tenemos:

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x.$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6x - 6, \text{ o } 6(2x - 1)(x + 1)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow$$

Los posibles puntos de inflexión son $X = -1$ y $X = 1/2$.

$\Rightarrow f''(-1) = 0$ y $f''(1/2) = 0$ concluimos que

ambos son puntos de inflexión, obteniendo los siguientes

INTERVALOS $-\infty < X < -1$ $-1 < X < \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} < X < \infty$

Sobre los que debemos realizar el análisis

$$f''(x) > 0 \implies (2X - 1)(X + 1) > 0.$$

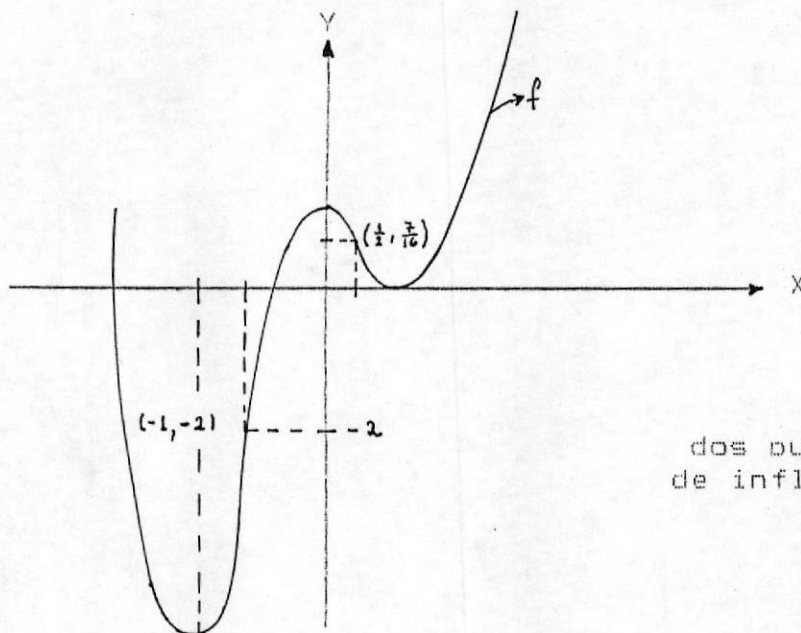
$$\implies \{ (2X - 1) > 0 \text{ y } (X + 1) > 0 \} \text{ o } \{ (2X - 1) < 0 \text{ y } (X + 1) < 0 \}$$

$$\implies (X > 1/2 \text{ U } X > -1) \text{ o } (X < 1/2 \text{ y } X < -1) \implies f \text{ es c\u00f3ncava hacia arriba en el intervalo } (-\infty, -1) \text{ U } (1/2, +\infty).$$

f es c\u00f3ncava hacia abajo en el intervalo $(-1, 1/2)$

Su representaci\u00f3n gr\u00e1fica lo podemos observar en la fig.20

fig 20



dos puntos
de inflexi\u00f3n

BIBLIOGRAFIA

FULKS W. 1991 CALCULO AVANZADO EDT. LIMUSA MEXICO.

TAYLOR W. 1981 CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EDT. LIMUSA
MEXICO.

ARROBA Y L. 1982 ANALISIS MATEMATICO EDT. U. CENTRAL DEL
ECUADOR QUITO.

AYRES F. 1976 ANALISIS MATEMATICO EDT. CARVAJAL COLOMBIA.

EINAR S. 1976 CALCULUS EDT. REVERTE S.A ESPAÑA.