ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

Instituto de Ciencias Matemáticas

"Cálculo Actuarial con cadenas de Markov. Una Aplicación"

TESIS DE GRADO

Previa a la obtención del Título de:

INGENIERO EN ESTADISTICA INFORMATICA

Presentada por:

José Xavier Cabezas García

GUAYAQUIL - ECUADOR

AÑO

2000

AGRADECIMIENTO

A mi Padre, a mi Madre y a mi hermano, por su continuo esfuerzo y sacrificio;

A Lena Freire, por darme apoyo, cariño y comprensión en difíciles momentos;

Al Mat. Fernando Sandoya, Director de Tesis, por su invaluable ayuda.

DEDICATORIA

A Dios;

A mi abuelita Rosa;

A mi abuelita Geoconda;

A mi papá, mamá y hermano

Jorge, Celeste y Jorge Xavier;

A mis tíos y primos;

A mis abuelos

Washington y Manuel

A todos los que forman parte

de mi vida.

TRIBUNAL DE GRADUACION

Ing. Félix Ramírez
DIRECTOR DEL INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

Mat. Fernando Sandoya
DIRECTOR DE TESIS

Ing. Luis Castro Iturralde
VOCAL

Ing. Alfredo Torres
VOCAL

DECLARACION EXPRESA

"La responsabilidad del contenido de esta Tesis de Grado, me corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL"

(Reglamento de Graduación de la ESPOL)

Xavier Cabezas G.

Xavier Cabezas G.

RESUMEN

La forma actual de analizar los problemas actuariales (forma clásica), olvida ciertos aspectos, que la hacen ineficiente, como por ejemplo, el no tomar en cuenta cuánto tiempo una persona, desde que adquirió un seguro contra accidentes, permaneció libre de los mismos y cuánto tardó en que le ocurriera un accidente. Imaginémonos el hecho de calcular las probabilidades de pasar de sano a enfermo. Esto representa un muy complicado cálculo que involucra parámetros difíciles de calcular, y que nos lleva a perder tiempo y dinero. Considerando lo expuesto, comenzando la economía del seguro y la teoría del riesgo en el **Capítulo 1**; luego de la definición de procesos estocásticos, justificamos la existencia de espacios y distribuciones finito dimensionales y explicamos las propiedades básicas de los procesos de Markov en el **Capítulo 2.** A continuación, en el **Capítulo 3** estudiamos las fuerzas de transición en intervalos de tiempo discretos, que nos servirán para la determinación de probabilidades en tiempo continuo. También analizamos lo más importante del método, que es el tomar en cuenta el tiempo de duración dentro de un estado determinado y la dependencia del mismo en el cálculo de probabilidades de transición, Finalmente en el **Capítulo 4** terminamos con una muestra de la aplicabilidad

del método en problemas ecuatorianos, con una pequeña aplicación del mismo.

INDICE GENERAL

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE TABLAS

INTRODUCCION

sociedad ecuatoriana no posee suficientes referencias acerca de la cia actuarial, así como de sus aportes y aplicaciones en la vida liana.

xcepción de los expertos, pocas personas conocen que los cálculos ariales están ligados a los seguros de personas, bienes o servicios, y sobre la base de ellos se establecen las primas, los riesgos, tiempos de o utilidad esperados, etc., por citar algunas situaciones. Justamente, la a actual de analizar esas situaciones olvida ciertos momentos rtantes de aquéllas, en el lapso de tiempo desde su origen hasta su nino.

el Análisis Markoviano se resaltan las virtudes de un método moderno explora exhaustivamente las situaciones mencionadas anteriormente y formula matemáticamente. Este método fue propuesto en el año 1994 por investigador canadiense y es ampliamente desarrollado y aplicado en a tesis.

aplicación del método se presenta como un aporte a las ciencias ariales, con el objeto de que las compañías aseguradoras del país se nten en este marco teórico y den respuestas más prácticas y coherentes ro del mundo de los seguros.

Capítulo 1

EORIA ACTUARIAL

.1 Economía del Seguro y Teoría del Riesgo

1.1.1 Introducción

Es fácil darnos cuenta que todas las personas desearían conocer el futuro, sobre todo cuando hay que tomar decisiones financieras. Sin embargo, la experiencia nos ha enseñado que las expectativas hechas al respecto algunas veces no se hacen realidad.

Regularmente esto sucede debido a que los planes se frustran porque se construyen sobre suposiciones poco realistas, y muchas veces algunas circunstancias fortuitas ayudan a que esto no se cumpla.

Las operaciones de seguros se diseñan para protegerse contra posibles pérdidas financieras que podrían resultar por estos sucesos aleatorios que interfieren en los planes de los individuos. Es fácil conocer las limitaciones básicas de la protección por medio de seguros. La primera limitación es que hay que separar las consecuencias de pérdidas debido a sucesos aleatorios que pueden medirse en términos monetarios y en las que no.

Por ejemplo, el dolor y el sufrimiento pueden ser ocasionados por un suceso aleatorio. Sin embargo, las coberturas de aseguración que se diseñaron para compensar el dolor y el sufrimiento, frecuentemente han sido puestas en duda por la dificultad de medir tal pérdida en unidades monetarias. Por otra parte, las pérdidas económicas pueden ser ocasionadas por sucesos tales como cuando el dueño de alguna propiedad la incendia por voluntad propia, mientras los términos monetarios de tales pérdidas pueden ser fáciles de definir, los sucesos no son asegurables a causa de la naturaleza no aleatoria de las pérdidas.

Una segunda limitación básica es que asegurarse no reduce directamente la probabilidad de pérdida. Sin embargo, un sistema bien diseñado de aseguración, frecuentemente proveerá incentivos financieros por tan solo el hecho de prever las posibles pérdidas.

Varios ejemplos de situaciones donde eventos aleatorios pueden ocasionar pérdidas financieras son presentados a continuación:

- La destrucción de una propiedad por un incendio o una tormenta, comúnmente se considera un suceso aleatorio en el cual la pérdida puede medirse en términos monetarios.

- Una demanda de daño impuesto por una corte como resultado de un acto negligente, se considera frecuentemente un suceso aleatorio con una muy probable pérdida monetaria.

- La prolongación de una enfermedad, se considera un evento aleatorio que puede interpretarse como la pérdida monetaria por gastos extras de medicamentos.

Estos ejemplos se diseñan para ilustrar la siguiente definición: Un sistema de aseguración es un mecanismo para reducir el impacto financiero adverso de sucesos aleatorios que impiden el cumplimiento de expectativas razonables.

1.1.2 Teoría de la Utilidad

Por este principio, cualquier individuo al que llamaremos (Id) estaría indiferente entre asumir la pérdida aleatoria X y pagar la cantidad $E[X]$ que es el valor esperado de esta pérdida. De la misma manera, (Id) estaría dispuesto a pagar hasta $E[Y]$ para participar en un negocio con el resultado final aleatorio Y. En la economía, el valor esperado de perspectivas aleatorias con pagos monetarios se llama frecuentemente valor actuarial de la perspectiva.

Ahora estudiaremos otro enfoque para explicar por qué (Id) podría estar dispuesto a pagar más del valor esperado. Primero asumiremos simplemente que el valor o utilidad que (Id) adjunta a la riqueza de cantidad w_i, medida en unidades monetarias, puede especificarse en forma de una función llamada función de utilidad $u(w_i)$.

Se demostrará a continuación un procedimiento por el cual algunos valores de esta función pueden ser determinados. Para esto supondremos que (Id) tiene una riqueza (cantidad de dinero) actual w_i de w_2, también que $u(w_2)=0$ y que si $w_1=0$, entonces existe $u(w_1)$ ver **Figura 1.1.2.1**

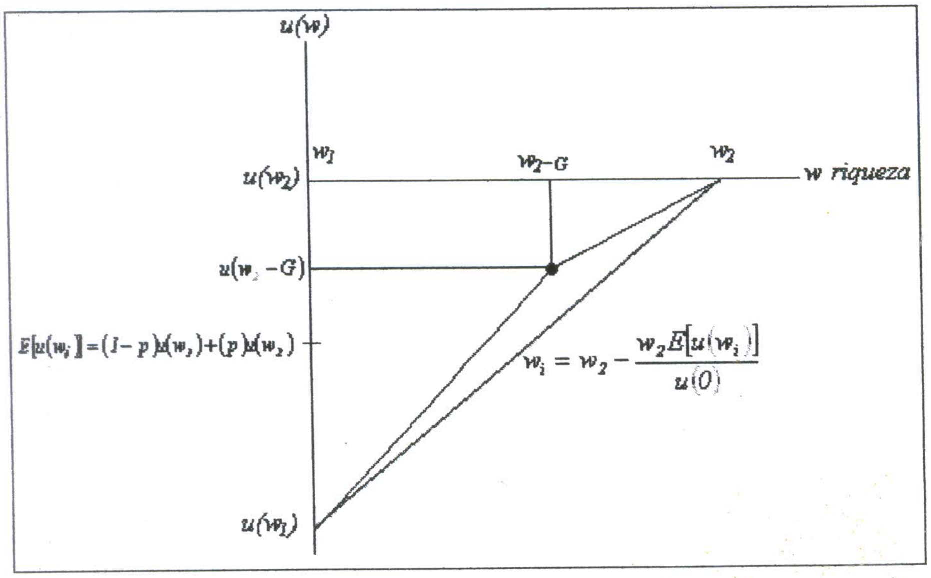


Figura 1.1.2.1 Gráfico de una Función de Utilidad $u(w)$

Supongamos que nos enfrentamos a una pérdida de w_2 con probabilidad p, y que permanecerá a su nivel actual de riqueza con la probabilidad $1-p$, tendríamos por lo tanto lo siguiente:

$$u(w_2-G)=E[u(w_i)], \text{ donde } w_1 \le w_i \le w_2 \qquad \textbf{(1.1.2.1)}$$

Donde G es el máximo monto que (Id) estaría dispuesto a pagar por la protección de un seguro contra esta posible pérdida aleatoria y $E[u(w_i)] = (1-p)u(w_1) + (p)u(w_2)$, donde $u(w_2) \leq u(w_i) \leq u(w_1)$ entonces:

$$u(w_2 - G) = (1-p)u(w_1) + (p)u(w_2) \qquad \textbf{(1.1.2.2)}$$

En la **Figura 1.1.2.1**, hemos supuesto que $u(w_i)$ está definida por la siguiente ecuación lineal:

$$w_i = w_2 - \frac{w_2 u(w_i)}{u(0)}, \text{ donde } w_1 \leq w_i \leq w_2 \qquad \textbf{(1.1.2.3)}$$

Cambiando $u(w_i)$ por $E[u(w_i)]$, se hallaría que el valor correspondiente a $w_2 - G$, es:

$$w_i = w_2 - \frac{w_2 E[u(w_i)]}{u(0)}, \quad \forall\ w_1 \leq w_i \leq w_2 \qquad \textbf{(1.1.2.4)}$$

En la cual $E[u(w_i)] = (p)(w_2) + (1-p)(w_1)$, siendo en este caso $E[u(w_i)] = (p)(w_2)$. Pero por supuesto esto es, si la función de utilidad $u(w_i)$ es lineal, lo que quiere decir que:

$$u(E[w_i]) = E[u(w_i)] \qquad \textbf{(1.1.2.5)}$$

Entonces se dice que (Id) es indiferente al riesgo. Pero si (Id) establece que estaría dispuesto a pagar una cantidad $G1$ mayor a la cantidad G obtenida en el caso visto anteriormente, tendríamos que, $u(w_2 - G1) > (p)u(w_2)$, lo que significa que $w_2 - G1 > E[w_i]$ y de acuerdo a esto, tendríamos el punto $(w_2 - G1, (p)u(w_2))$.

Luego, podemos volver a repetir el mismo procedimiento pero ahora $w_1 = w_2 - G1$ y debemos preguntarle a (Id), con estos nuevos puntos, qué cantidad de dinero, estaría dispuesto a pagar para protegerse contra la pérdida aleatoria w_2 con probabilidad p.

Después de que el tomador de decisiones ha determinado la función de utilidad por el método planteado, la función puede usarse para comparar dos perspectivas económicas aleatorias. Las perspectivas serán denotadas por las variables aleatorias X y Y.

Lo que buscamos es una regla de decisión que será uniforme con las preferencias ya obtenidas en la determinación de la función de utilidad. Así si (Id), el tomador de decisiones, tiene una riqueza w

medida en términos monetarios, y debe comparar las perspectivas aleatorias X y Y, el tomador de decisiones seleccionará X siempre que:

$$E[u(w+X)] > E[u(w+Y)] \tag{1.1.2.6}$$

y el tomador de decisiones será indiferente entre X y Y si

$$E[u(w+X)] = E[u(w+Y)] \tag{1.1.2.7}$$

Aunque el método de obtención y utilización de la función de utilidad puede parecer plausible, está claro que el desarrollo informal debe ser aumentado por una cadena más rigurosa de razonamientos. Si necesitamos comprender el papel económico de solicitar un seguro, tal estructura es necesaria.

Un resumen de las principales características de esta teoría sigue a continuación:

a) La teoría de utilidad se construye asumiendo la existencia de distribuciones de probabilidad. Una función de utilidad debería no da a conocer resultados inesperados. En definitiva una descripción numérica de las preferencias existentes.

b) Una función de utilidad no necesita y de hecho no puede ser determinada singularmente. Por ejemplo, si:

$$u^*(w) = au(w) + b \text{, donde } a > 0$$

Entonces

$$E[u(X)] > E[u(Y)]$$

Es equivalente a:

$$E[u^*(X)] > E[u^*(Y)]$$

Esto significa que las preferencias de orden se conservan cuando la función de utilidad es una transformación lineal creciente de la forma original. En la **Figura 1.2.1** se eligieron 2 puntos arbitrariamente.

c) Supongamos que la función de utilidad es lineal, entonces

$$u(w) = aw + b \text{, donde } a > 0$$

Entonces si $E[X] = \mu_x$ y $E[Y] = \mu_y$, tenemos:

$$E[u(X)] = a\mu_x + b > E[u(Y)] = a\mu_y + b$$

Si y solo si $\mu_X > \mu_Y$. Lo cual significa que, para las funciones de utilidad lineales, las preferencias para las distribuciones de probabilidad de resultados están en el mismo orden de los valores esperados de las distribuciones que están siendo comparados.

1.1.3 Aseguramiento y Utilidad

Supongamos que un individuo (Id) posee una propiedad que puede dañarse o destruirse en el próximo período de contabilidad. La pérdida, que puede ser 0, es una variable aleatoria que la denotaremos por X. Se supondrá que la distribución de probabilidad de X es conocida.

Entonces $E[X]$, la pérdida esperada en el próximo período, puede interpretarse como la pérdida promedio a largo plazo si el experimento de exponer la propiedad al daño posible, puede observarse bajo condiciones idénticas muchas veces. Es claro que este conjunto a largo plazo de ensayos no podría ser desempeñado por (Id).

Suponga que una organización de seguros **(el asegurador)** se estableció para ayudar a reducir las consecuencias financieras del daño o la destrucción de las propiedades. El asegurador emitiría contratos **(pólizas)** que prometen pagar al propietario de un bien una suma definida igual o menor que la de la pérdida financiera si la propiedad se dañara o destruyera durante el período de vigencia de la póliza. El pago eventual vinculado a la cantidad de la pérdida se llama un pago de reclamo. De la misma manera, el dueño de la propiedad **(asegurada)** paga una suma de dinero llamada prima.

El monto de la prima a pagar se determina siguiendo un principio económico de decisión para cada uno de los aseguradores y asegurados.

Algo que sería mutuamente ventajoso para el asegurado es si la prima exigida por el asegurador es menor que el máximo monto que el asegurado (dueño de una propiedad) estaría dispuesto a pagar por el seguro.

Dentro de la gama de resultados financieros para una póliza de seguro individual, una posibilidad es que la función de utilidad del asegurador sea aproximada por una línea recta. En este caso, el asegurador adoptaría el principio del valor esperado, como se indicó en la **Capítulo 1.1.2**, observación 3. Lo que significa que, el asegurador colocaría el precio básico para la cobertura de aseguración completa como la pérdida esperada, $E[X]=\mu$ .En este caso μ se denomina **prima única pura** para el primer periodo de la póliza de seguro.

Para cubrir gastos fijos y variables y tener alguna seguridad contra la experiencia adversa de una pérdida, el asegurador podría incrementar el monto de la prima única pura, por ejemplo, la prima denotada por H, podría ser dada por:

$$H=\mu(1+\theta)+c \qquad \theta>0,\ c>0$$

En esta prima denominada prima bruta, $\mu\theta$ está asociada con gastos que varían con las pérdidas esperadas y con el riesgo que sabemos de la experiencia obtenida. La constante c provee gastos esperados que no varían con las pérdidas, sino que dependen de costos fijos. Luego ilustraremos otros principios económicos para primas determinantes que pueden ser adoptados por el asegurador.

Ahora aplicaremos la Teoría de Utilidad a los problemas de decisión enfrentados por el propietario de un bien que está sujeto a una pérdida. El propietario de este bien tiene una función de utilidad $u(w)$ donde la riqueza w se mide en términos monetarios. El propietario enfrenta una pérdida posible debido a sucesos aleatorios que pueden dañar la propiedad. La distribución de la pérdida aleatoria X es conocida. Tal como en:

$$u(w_2 - G) = (1 - p)u(w_1) + (p)u(w_2)$$

El propietario estaría indiferente entre pagar una cantidad G al asegurador, teniendo el asegurador que asumir la pérdida financiera aleatoria, y enfrentar el riesgo él mismo. Esta situación puede ser vista como:

$$u(w - G) = E[u(w - X)] \qquad \textbf{(1.1.3.1)}$$

Donde el lado derecho de la ecuación representa la utilidad esperada de no adquirir el seguro cuando la actual riqueza del propietario es w y el lado izquierdo de la ecuación representa el valor esperado de pagar G para la protección financiera completa.

Si el propietario tiene una función lineal de utilidad creciente,

$$u(w) = bw + d\ ;\ b > 0$$

El propietario adoptará el principio del valor esperado. En este caso **(1.1.3.1)** será:

$$u(w-G) = b(w-G) + d = E[u(w-X)] = E[b(w-X) + d]$$

$$b(w-G) + d = b(w-\mu) + d$$

$$G = \mu$$

Lo que quiere decir que si el propietario tiene una función de utilidad lineal creciente, la decisión que tomará al respecto éste individuo, será indiferente entre la aseguración completa y ninguna aseguración.

El asegurador al término de un largo periodo de tiempo, podría cobrar más que el valor de las pérdidas esperadas del propietario del bien. Por lo tanto en este caso, parece entonces que hay poca oportunidad para un contrato de aseguración mutuamente ventajosa.

Si un contrato de aseguración está por darse, el asegurador debería cobrar una prima excesivamente más grande que las pérdidas esperadas del posible asegurado, con el fin de evitar el problema de recibir un pago por parte del asegurado insuficiente para tal cobertura. Es evidente entonces que el propietario de un bien, no puede tener una función de utilidad lineal.

Un individuo debe estar dispuesto a adquirir un seguro para enfrentar la posible pérdida de un bien de su pertenencia y pagar más del valor de perder la propiedad, o menos, o simplemente no toma el seguro, esto implica que la función de utilidad pueda poseer muchas formas como por ejemplo: cuadrática, exponencial, logarítmica o de alguna otra forma particular.

También, no estaría mal suponer que $u(w)$ es una función creciente ya que esto significaría que a mayor riqueza mayor utilidad, aunque sin embargo, lo contrario no es imposible.

La función de utilidad aproximada de la **Figura 1.1.2.1** consiste en segmentos de recta con pendiente positiva. Esto es $\frac{d^2u(w)}{dw^2} \leq 0$. Si estas ideas se extienden para otras funciones, entonces tenemos que $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$, la segunda desigualdad indica que $u(w)$ es una función creciente cóncava hacia abajo.

Cuando se usa funciones de utilidad creciente cóncavas hacia abajo, haremos uso de la desigualdad de **JENSEN**. Esta desigualdad afirma lo siguiente:

$$E[u(X)] \leq u(E[X]) \qquad \textbf{(1.1.3.2)}$$

Donde X es una variable aleatoria que representa a $a \leq w_i \leq b$, ver **Figura 1.1.3.1**.

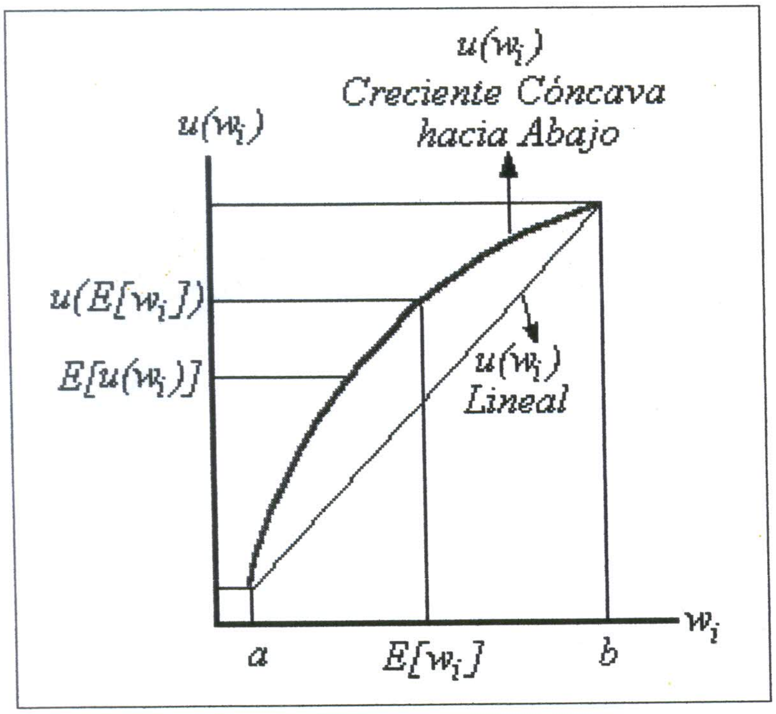


Figura 1.1.3.1 $u(w)$ que cumple con $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$

Ahora bien, si $E[X] = \mu$ existe, se considera la línea tangente $y = u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu)$, en el punto $[\mu, u(\mu)]$. Sí $u(w)$ cumple la desigualdad de Jensen, entonces está claro que el gráfico de esta función de utilidad quedará debajo de la línea tangente antes mencionada y, por lo tanto tenemos que:

$$u(w) \leq u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu) \qquad \textbf{(1.1.3.3)}$$

En la **Figura 1.1.3.2** se esquematiza esta situación de una manera muy clara.

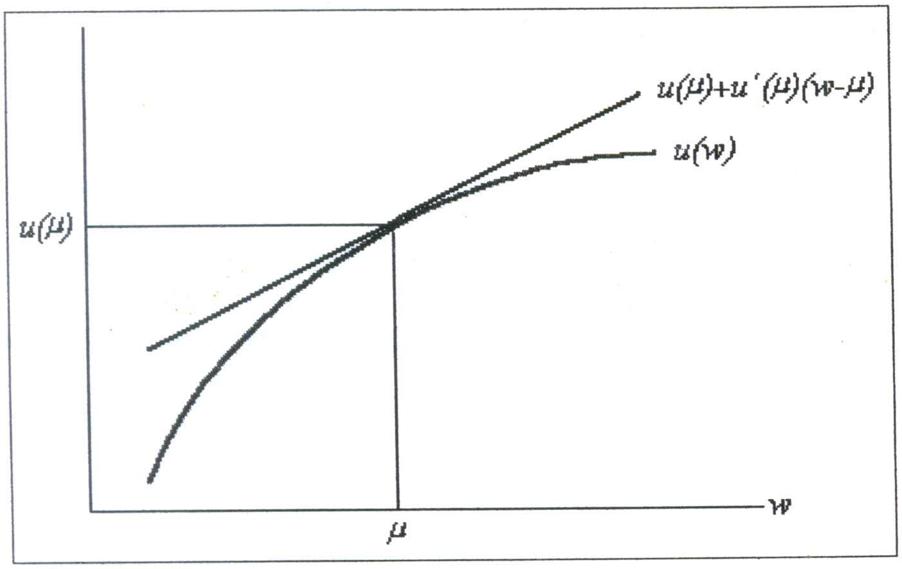


Figura 1.1.3.2 Recta tangente a $u(w)$ creciente cóncava hacia bajo

Entonces si aplicamos el valor esperado a los dos lados de la desigualdad **(1.1.3.3)** y reemplazado el valor de w por X. Tendremos entonces que $E[u(X)] \leq u(\mu)$, y la desigualdad de Jensen ha sido demostrada para este caso a partir de la **Figura 1.1.3.2**.

Supongamos que las preferencias de un individuo, son tales que $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$, es decir una función de utilidad creciente cóncava hacia abajo. Aplicando la desigualdad de Jensen a **(1.1.3.1)** tenemos que:

$$u(w - G) = E[u(w - X)] \leq u(w - \mu) \qquad \textbf{(1.1.3.4)}$$

Pero **(1.1.3.4)** implica que $w - G \leq w - \mu$, o $G \geq \mu$. En términos económicos, se ha encontrado que si $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$, cualquier persona en capacidad de tomar una decisión, pagará una cantidad mayor a la pérdida esperada. Entonces se dirá que el tomador de decisiones es **adverso al riesgo** ver **Figura 1.1.3.3**. Si G es por lo menos igual a la prima exigida por el asegurador, existe una oportunidad para una póliza de seguro mutuamente ventajosa, esto solo sucede si $u(w)$ es lineal.

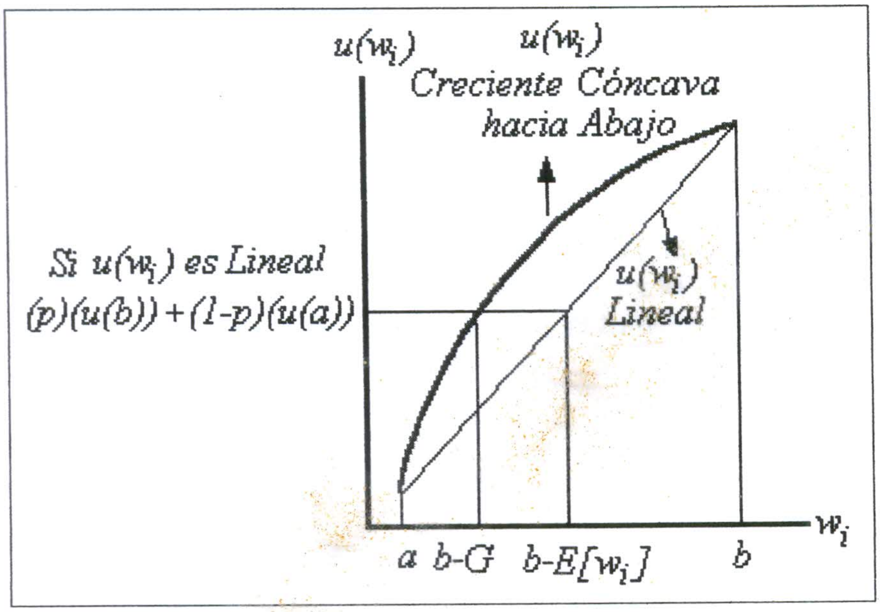


Figura1.1.3.3 Función de utilidad que representa a un individuo adverso al riesgo, donde b es la cantidad de riqueza w_i actual

Una persona Propensa al riesgo será entonces, aquella que pagaría una cantidad G de dinero menor que el valor esperado de la pérdida, es decir su función de utilidad sería creciente cóncava hacia arriba, ver **Figura 1.1.3.4**.

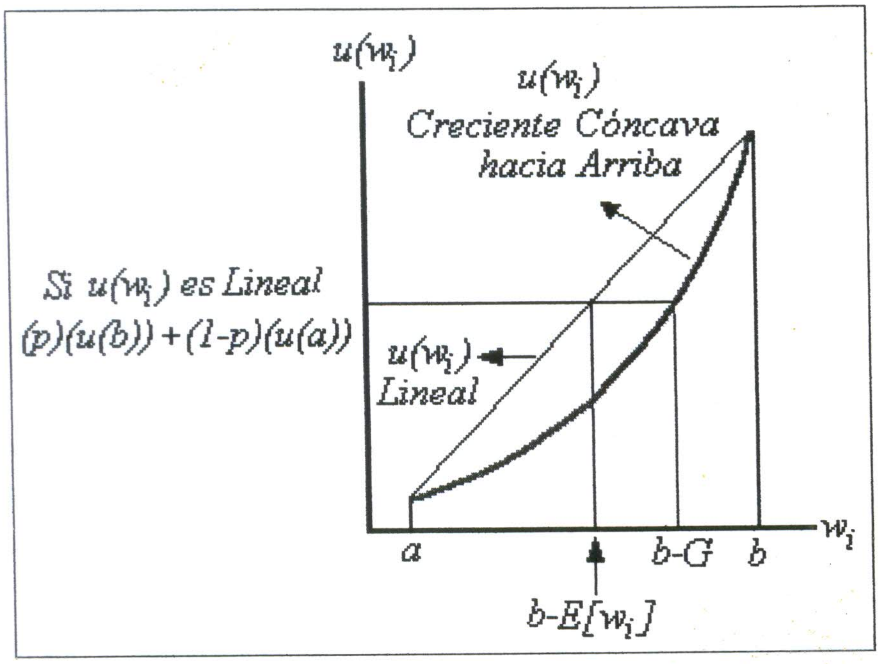


Figura1.1.3.4 Función de utilidad que representa a un individuo propenso al riesgo, donde b es la cantidad de riqueza w_i actual

Esto quiere decir que $u'(w) < 0$ y $u''(w) > 0$, por lo tanto se deduce que:

$$E[u(X)] \geq u(E[X]) \qquad \textbf{(1.1.3.5)}$$

Ahora usemos una función de utilidad general para el asegurador. Si denotamos con $u_1(w)$ a la función de utilidad del asegurador y con w_1 a la riqueza actual del asegurador medida en términos monetarios, entonces la prima mínima aceptable H para asumir una pérdida aleatoria X, desde el punto de vista del asegurador, puede determinarse como:

$$u_1(w_1) = E[u_1(w_1 + H - X)] \qquad \textbf{(1.1.3.6)}$$

El lado derecho de **(1.1.3.6)** es la utilidad esperada asociada con el cobro de la prima H y el pago de la pérdida aleatoria X. En otras palabras, el asegurador es **indiferente** entre quedarse como está actualmente o proveer aseguración para una pérdida X recibiendo una prima H. Si el asegurador es adverso al riesgo, $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$, nosotros podemos usar la desigualdad de Jensen para poder escribir que:

$$u_1(w_1) = E[u_1(w_1 + H - X)] \leq u_1(w_1 + H - \mu) \qquad \textbf{(1.1.3.7)}$$

Así, podemos concluir entonces que $H > \mu$. Si G, representa el resultado obtenido por el posible asegurado, resolviendo **(1.1.3.4)**, es tal que, $G \geq H \geq \mu$, entonces es factible una póliza de seguro, esto significa que la utilidad esperada de ninguna de las dos partes del contrato disminuirá.

La determinación de $u_1(w)$, que es la función de utilidad del asegurador, podría ser complicada, si por ejemplo éste asegurador no es un individuo sino una asociación, corporación o agencia de gobierno. Una de las responsabilidades del proyecto es la formulación de un conjunto coherente de preferencias para diversas empresas riesgosas a las cuales se podría ofrecer aseguración. Estas preferencias pueden involucrar compromisos entre actitudes conflictivas hacia el riesgo entre los grupos de accionistas.

Utilicemos una función elemental para ilustrar las propiedades de las funciones de utilidad. Como vimos, es aceptable pensar que la mayoría de los casos de seguros, involucran funciones de utilidad crecientes y cóncavas; por esto, presentamos una de las más comunes funciones de utilidad, la exponencial.

Una función de utilidad exponencial es de la forma:

$$u(w) = -e^{-a\,w}, \qquad a > 0$$

Y posee varios aspectos interesantes:

Primero $u'(w) = a\,e^{-a\,w} > 0$ y $u''(w) = -a^2 e^{-a\,w} < 0 \qquad \forall w \in R$

Por lo tanto, $u(w)$ es la función de utilidad de un individuo adverso al riesgo.

Segundo $E\left[-e^{-aX}\right] = -E\left[e^{-aX}\right] = -M_X(-a)$.

Que es lo mismo, buscar la función generadora de momentos de *X*.

Tercero $-e^{-a(w-G)} = E\left[-e^{-a(w-X)}\right]$, entonces $e^{aG} = M_X(a)$, por lo tanto $G = \dfrac{\ln M_X(a)}{a}$, es decir, las primas G de aseguración no dependen de la riqueza de un individuo con función de utilidad exponencial. Pues como se puede observar G no depende de w. La comprobación para el asegurador es hecha sustituyendo la función de utilidad exponencial con parámetro a_1 en **(1.1.3.6)**, $-e^{-a_1 w_1} = E\left[-e^{-a_1(w_1+H-X)}\right]$, entonces $-e^{-a_1 w_1} = -e^{-a_1(w_1+H)} M_X(a_1)$, por lo tanto $H = \dfrac{\ln M_X(a_1)}{a_1}$.

.2 Modelos de la Matemática Actuarial

1.2.1 Introducción a los Fenómenos Actuariales

Un fenómeno actuarial es fundamentalmente aleatorio, y los sucesos que implican pueden ser interpretados en términos monetarios, como ya se dijo en la sección anterior las personas desearían saber cuando les ocurrirá un accidente, con el fin de poder enfrentarlo con un plan de contingencia, y evitarse el tener que pagar un seguro contra accidente por ejemplo, pero como se sabe esto es imposible, en definitiva un fenómeno actuarial, puede ser definido por:

$$x = g(w)$$

Donde w son los valores aleatorios dentro de un espacio Ω que contiene todos los posibles sucesos y x el valor financiero que le corresponde.

El objetivo de la Ciencia Actuarial es el de valorizar las consecuencias financieras de un suceso, partiendo del conocimiento de su probabilidad, el fenómeno actuarial nos obliga al conocimiento del correspondiente espacio de probabilidad, es decir de su función de distribución.

La edad en un ser humano es su tiempo **biológico** o **biométrico**, el cual transcurre dentro del tiempo **físico**, que es el tiempo del calendario. Esta diferencia se resalta debido a que el tiempo biológico es el parámetro fundamental usado en los cálculos actuariales y por el cual varían los valores económicos obtenidos a partir de los mismos.

La formulación de un modelo de tiempo biométrico requiere previamente la exposición de algunos principios fundamentales

PRINCIPIO DE HOMOGENEIDAD

Este principio afirma que los individuos dentro de un grupo en el que se va a definir fenómenos de supervivencia tienen la misma función de distribución de probabilidad para la variable edad de muerte, lo que significa que el grupo es homogéneo, es decir todos los individuos dentro de un estudio actuarial y que tengan la misma edad, tendrán la misma probabilidad de sobrevivir a una determinada edad, de lo que se deduce que la función relacionada es biyectiva.

PRINCIPIO DE INDEPENDENCIA

Sostiene que la probabilidad de que un individuo alcance cierta edad, no depende de que otro integrante del estudio actuarial sobreviva o muera, lo que quiere decir que las variables que intervienen en la obtención de resultados son estocásticamente independientes; por ejemplo, esto se refiere también a que si hablamos de seguros contra enfermedad, omitimos la situación de que una persona contagie a otra.

PRINCIPIO DE ESTACIONARIEDAD

Establece que en las consideraciones y formulaciones que se hagan para bienes o seres humanos, solamente interviene el tiempo de vigencia o el tiempo biológico, respectivamente.

Estos tres principios pueden expresarse en la siguiente probabilidad:

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) \ldots P(X_n \leq x_n)$$

Que es la probabilidad de que n individuos mueran a las edades $x_1, x_2, \ldots x_n$, donde $X_1, X_2, \ldots X_n$, son las variables que representan la edad de muerte.

Como se puede apreciar, esta probabilidad cumple con los principios de homogeneidad porque las distribuciones marginales tienen la misma característica, cumple también con la de independencia ya que la distribución conjunta es la multiplicación de las distribuciones marginales, y el principio de estacionariedad porque esta expresión no depende del tiempo físico sino solo de la variable edad de muerte, que es definida formalmente en la siguiente sección.

1.2.2 Función de Supervivencia

Definamos la edad de muerte de un recién nacido por X como una variable aleatoria continua, y la función de probabilidad de densidad acumulada por:

$$F(x) = Pr(X \leq x) \qquad x \geq 0 \tag{1.2.2.1}$$

La cual es la probabilidad de que la edad de muerte de un recién nacido sea menor o igual a x.

Por lo tanto podemos escribir a la función de supervivencia acumulada como:

$$s(x) = 1 - F(x) = Pr(X > x) \qquad x \geq 0 \qquad \textbf{(1.2.2.2)}$$

De acuerdo con la definición de la función de muerte podríamos decir también que $F(0) = 0$, lo que implicaría que $s(0) = 1$, esto significa que no se considerarán las muertes ocurridas antes de nacer, como un aborto por ejemplo.

La probabilidad de que un individuo muera entre las edades x y z es:

$$Pr(x < X \leq z) = F(z) - F(x) = s(x) - s(z) \qquad \textbf{(1.2.2.3)}$$

Y en el caso de tratarse de una distribución continua esta probabilidad será:

$$Pr(x < X \leq z) = F'(x)h + O(h) \qquad \textbf{(1.2.2.4)}$$

Esto quiere decir que la $Pr(x < X \leq z) \to f(x)h$ con la misma rapidez de convergencia que la de $h \to 0$, $f(x)$ es la función de densidad de probabilidades de x.

Podemos decir también que la probabilidad de que un recién nacido muera entre las edades x y z es:

$$Pr(x < X \leq z \mid X > x) = \frac{F(z) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{s(x) - s(z)}{s(x)} \qquad \textbf{(1.2.2.5)}$$

1.2.3 Tiempo de Muerte

El símbolo (x) puede ser llamado edad x de vida, por lo tanto el tiempo de vida futuro de (x) será $X - x$ al que se representará con $T(x)$.

Usaremos también la siguiente notación:

$$_{t}q_{x} = Pr[T(x) \leq t] \qquad t \geq 0 \qquad \textbf{(1.2.3.1)}$$

que puede ser interpretada como la probabilidad de que un individuo de edad (x) muera dentro de t años, de aquí podemos entonces definir también:

$$_{t}p_{x} = 1 - {}_{t}q_{x} = Pr[T(x) > t] \qquad t \geq 0 \qquad \textbf{(1.2.3.2)}$$

que es la probabilidad de que un individuo de edad (x) sobreviva a la edad $x+t$, y por lo tanto:

$$_{x}p_{0}=s(x) \qquad x\geq 0$$

Para representar la probabilidad de que un individuo de edad (x) alcance la edad $x+t$ y muera dentro de u años se usa la notación:

$$\begin{aligned} {}_{t|u}q_{x} &= Pr[t<T(x)\leq t+u] \\ &= {}_{t+u}q_{x}-{}_{t}q_{x} \\ &= {}_{t}p_{x}-{}_{t+u}p_{x} \end{aligned} \qquad \textbf{(1.2.3.3)}$$

Dentro de la notación actuarial el valor 1 para el tiempo, dentro de las expresiones definidas es omitido, así por ejemplo para $u=1$ tenemos que ${}_{t|u}q_{x}$ será representado como ${}_{t|}q_{x}$; igual sucede con las otras representaciones.

Podemos expresar también a ${}_{t}p_{x}$ y ${}_{t}q_{x}$, en términos de la función de supervivencia $s(x)$, de la siguiente forma:

$$Pr[x < X \leq x+\Delta x \mid X > x] = \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{1-F(x)}$$

Como se sabe $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ es $F'(x)=f(x)$, cuando $\Delta x \to 0$, que es la función de densidad de probabilidades de la variable aleatoria continua edad de muerte, tendríamos que $F(x+\Delta x)-F(x)=f(x)\Delta x$, entonces se tiene:

$$Pr[x < X \leq x+\Delta x \mid X > x] = \frac{f(x)\Delta x}{1-F(x)}$$

La función $\frac{f(x)}{1-F(x)}$, se interpreta para cada edad x como la fuerza de mortalidad a esta edad, y es denotada por u_x, tenemos entonces que:

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{-s'(x)}{s(x)} \qquad \textbf{(1.2.4.1)}$$

Debido a las propiedades de $f(x)$ y de $1-F(x)$, se tiene que $\mu_x \geq 0$.

$$ {}_{t}p_{x} = \frac{{}_{x+t}p_{0}}{{}_{x}p_{0}} = \frac{s(x+t)}{s(x)} \qquad \textbf{(1.2.3.4)} $$

$$ {}_{t}q_{x} = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} \qquad \textbf{(1.2.3.5)} $$

En la que **(1.2.3.5)** es igual a **(1.2.2.5)** con $z = x + t$, y a partir de **(1.2.3.3)** podemos obtener que:

$$ {}_{t|u}q_{x} = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} $$

$$ = \frac{s(x+t)}{s(x+t)} \frac{s(x+t) - s(s+t+u)}{s(x)} $$

$$ = \frac{s(x+t)}{s(x)} \frac{s(x+t) - s(s+t+u)}{s(x+t)} $$

$$ = {}_{t}p_{x\ u}q_{x+1} \qquad \textbf{(1.2.3.6)} $$

1.2.4 Fuerza de Mortalidad

A partir de la ecuación **(1.2.2.5)** podemos escribir lo siguiente, para $z = x + \Delta x$:

Se pueden obtener otras expresiones importantes en el cálculo actuarial y que serán utilizadas en capítulos posteriores, donde se requerirá a la función se supervivencia $s(x)$, en función de μ_x.

Cambiando x por y, obtendremos:

$$\mu_y = \frac{-s'(y)}{s(y)}$$

despejando $-\mu_y d_y$

$$-\mu_y d_y = d\, ln\, s(y)$$

Integrando esta expresión entre x y $x+n$, se tendría:

$$-\int_x^{x+n} \mu_y d_y = ln\left[\frac{s(x+n)}{x}\right] = ln\,{}_n p_x$$

Cambiando a la notación de Euler

$$ {}_n p_x = exp\left(-\int_x^{x+n} \mu_y d_y\right) \qquad \textbf{(1.2.4.2)}$$

Si $s = y - x$ tendríamos:

$$ {}_n p_x = exp\left(-\int_0^n \mu_{x+s} d_s \right) \qquad \textbf{(1.2.4.3)} $$

En particular:

$$ {}_x p_0 = s(x) = exp\left(-\int_0^x \mu_s d_s \right) \qquad \textbf{(1.2.4.4)} $$

Podemos escribir también que:

$$ F(x) = 1 - s(x) = 1 - exp\left(-\int_0^x \mu_s d_s \right) \qquad \textbf{(1.2.4.5)} $$

y

$$ F'(x) = f(x) = exp\left(-\int_0^x \mu_s d_s \right) u_x = {}_x p_0 \mu_x \qquad \textbf{(1.2.4.6)} $$

Además, la función acumulada y la función de densidad de probabilidades para $T(x)$, son respectivamente $G(t)$ y $g(t)$, por lo visto anteriormente en **(1.2.3.1)**, $G(t)={}_tq_x$, por lo tanto como $G'(t)=g(t)$, entonces:

$$g(t)=\frac{d}{dt}{}_tq_x=\frac{d}{dt}\left[1-\frac{s(x+t)}{s(x)}\right]=\frac{s(x+t)}{s(x)}\left[-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}\right]$$

$$g(t)={}_tp_x\mu_{x+t} \qquad t\geq 0 \qquad \textbf{(1.2.4.7)}$$

De **(19)**,

$$\frac{d}{dt}{}_tq_x=\frac{d}{dt}(1-{}_tp_x)=-\frac{d}{dt}{}_tp_x={}_tp_x\mu_{x+t} \qquad \textbf{(1.2.4.8)}$$

La probabilidad de que una persona sobreviva a una edad avanzada, hablando de edades superiores a 70 años, es baja, por lo menos podemos pensarlo de esa manera, según el promedio de vida en nuestro país. De cualquier forma si un individuo que ha alcanzado la edad x, puede sobrevivir a una edad $x+n$, siempre y cuando $x+n$ no sea muy grande. En definitiva si n tiende al infinito ${}_np_x$ tiende a 0, esto puede escribirse como:

$$\lim_{n\to\infty}{}_np_x=0$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty}(-\log {}_n p_x)=\infty$ lo que quiere decir que $\lim_{n\to\infty}\int_x^{x+n}\mu_y d_y=\infty$

1.2.5 Referencias a las Tablas de Mortalidad

Dentro del estudio de la Ciencia Actuarial es necesario tabular ciertos parámetros como ${}_t p_x$ o ${}_t q_x$, dentro de una Tabla a la que llamamos Tabla de Mortalidad o Tablas de Vida según el punto de vista en el cual se lo vea.

Sin embargo, no solo estos dos parámetros servirán para el cálculo actuarial, sino también podríamos querer saber, por ejemplo, el número esperado se sobrevivientes a una edad específica x, para esto llamaremos como l_0 al número de recién nacidos de un cierto grupo poblacional, lo que implica que cada variable edad de muerte de un recién nacido, tiene una distribución especificada por la función de supervivencia $s(x)$.

Definamos como $\ell(x)$ al número de supervivientes a la edad x de la cohorte, y a los subconjuntos de recién nacidos los llamaremos por $j=1,2,....,l_0$, tendremos entonces que:

$$\ell(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

donde I_j es un indicador para los supervivientes de vida j, el cual es:

$$I_j = \begin{cases} 1 & \textit{si los j sobreviven a la edad x} \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Notamos que $E[I_j] = s(x)$, entonces:

$$E[\ell(x)] = \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j] = l_0 s(x)$$

Según lo expuesto anteriormente, $E[\ell(x)] = l_x$ es decir, l_x es el valor esperado del número de sobrevivientes a la edad x de un grupo de recién nacidos l_0. Podemos escribir entonces que:

$$l_x = l_0 s(x) \qquad \textbf{(1.2.5.1)}$$

Como podemos suponer también que los indicadores I_j son mutuamente independientes, concluimos entonces que $\ell(x)$ tiene una distribución binomial con parámetros $n = l_o$ y $p = s(x)$.

Ahora definamos como ${}_nD_x$ al número de muertes ocurridas entre las edades x y $x+n$, y representaremos con ${}_nd_x$ a su valor esperado, es decir ${}_nd_x = E[{}_nD_x]$.

Como ya lo hemos visto, un recién nacido tiene probabilidad de muerte entre las edad x y $x+n$ dada por $s(x)-s(x+n)$, tendríamos por lo tanto:

$$ {}_nd_x = l_0[s(x)-s(x+n)] $$

entonces:

$$ {}_nd_x = l_x - l_{x+n} \qquad \textbf{(1.2.5.2)} $$

Sabemos que $l_x = l_0 s(x)$, además de que $s(x) = {}_xp_0$; debido a esto podemos escribir lo siguiente:

$$l_x = l_0 \, exp\left(-\int_0^x \mu_y d_y\right)$$

$$l_{x+n} = l_x \, exp\left(-\int_x^{x+n} \mu_y d_y\right)$$

$$l_x - l_{x+n} = \int_x^{x+n} l_y \mu_y d_y = {}_n d_x \qquad \textbf{(1.2.5.3)}$$

1.2.6 Mortalidad en Grupos Homogéneos

Consideremos un grupo de individuos con características homogéneas que los hace similares entre sí, entonces, podemos referimos a la edad de un grupo, como una variable aleatoria, así como las probabilidades de muerte y sobrevivencia en una determinada edad.

Un grupo de individuos pueden representarse dentro de un grupo homogéneo como:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots., x_n$$

Donde éstas variables representan las cabezas de edades del grupo, si todas estas cabezas de edades sobreviven, nos referimos a la sobrevivencia del grupo. De igual forma, si una de las cabezas de edad muere, entonces nos referimos a la “muerte” del grupo en su definición original, transformándose así en un nuevo grupo, lo que significa que el tiempo de vida del grupo es el tiempo transcurrido desde que se conformó el grupo, y la edad de muerte no es otra cosa que el tiempo en que desaparece una de sus cabezas de edad.

Por el principio de independencia tenemos que la probabilidad de que un grupo alcance la edad t es:

$$ {}_tp_{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n} = {}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\,{}_tp_{x_3}\cdots{}_tp_{x_n} = \prod_{i=1}^{n}\frac{s(x_i+t)}{s(x_i)} \qquad \textbf{(1.2.6.1)} $$

Por lo tanto, la probabilidad de que un grupo con cabezas de edad $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ muera a la edad t, en otras palabras la probabilidad de que una de las cabezas de edad de este grupo desaparezca es:

$$ {}_tq_{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n} = 1 - {}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\,{}_tp_{x_3}\cdots{}_tp_{x_n} = 1-\prod_{i=1}^{n}\frac{s(x_i+t)}{s(x_i)} \qquad \textbf{(1.2.6.2)} $$

Donde esta expresión representa la función acumulada para la variable edad de muerte ζ del grupo, Entonces si $p(\zeta \le t) = \Phi(t)$, tendríamos por consiguiente que la probabilidad de que un grupo de edad muera entre las edades t y Δt, será entonces definida por:

$$\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)=\Phi'(t)\Delta t+0(\Delta t)$$

Y la misma probabilidad pero con la condición de que el grupo supere la edad t , vendría dado por la siguiente expresión:

$$\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{1-\Phi(t)}=\frac{\Phi'(t)\Delta t}{1-\Phi(t)}+0(\Delta t)$$

Por lo visto anteriormente $\frac{\Phi'(t)\Delta t}{1-\Phi(t)}$, representa la fuerza de mortalidad del grupo homogéneo es decir:

$$\mu_{x_1+t,x_2+t,x_3+t,\ldots,x_n+t}=\frac{\Phi'(t)\Delta t}{1-\Phi(t)}$$

Ahora, podemos expresar a $\Phi(t)$ como:

$$\Phi(t)=1-\prod_{i=1}^{n}\frac{1-F(x_i+h)}{1-F(x_i)}$$

Se puede escribir entonces:

$$\Phi'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{F'(x_i+t)}{1-F(x_i)}\prod_{j\neq i}\frac{1-F(x_j+t)}{1-F(x_j)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{F'(x_i+t)}{1-F(x_i+t)}[1-\Phi(t)]$$

Debido a esto, podemos deducir una relación entre la fuerza de mortalidad del grupo y las fuerzas de mortalidad de cada una de las cabezas de edad $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ reescribiendo $\mu_{x_1+t,x_2+t,x_3+t,\ldots,x_n+t}$ como:

$$\mu_{x_1+t,x_2+t,x_3+t,\ldots,x_n+t}=\frac{\Phi'(t)}{1-\Phi(t)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{F'(x_i+t)}{1-F(x_i+t)}[1-\Phi(t)]}{1-\Phi(t)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{F'(x_i+t)}{1-F(x_i+t)}$$

Tenemos entonces:

$$\mu_{x_1+t,x_2+t,x_3+t,\ldots,x_n+t}=\sum_{i=1}^{n}\mu_{x_i+t} \qquad \textbf{(1.2.6.3)}$$

Es decir

$$\mu_{x_1+t,x_2+t,x_3+t,\ldots,x_n+t}=\mu_{x_1+t}+\mu_{x_2+t}+\mu_{x_3+t}+\ldots+\mu_{x_n+t}$$

Lo cual significa que la fuerza de mortalidad del grupo es igual a la suma de la fuerza de mortalidad de cada una de las cabezas de edad que pertenecen al mismo.

1.2.7 Probabilidades en Tablas Ultimadas y de Grupos Seleccionados

La función de supervivencia para construir una tabla de mortalidad, se ve algunas veces afectada por informaciones adicionales, que podrían llevarnos a que al evaluar las probabilidades basadas en el tiempo de vida futura de un individuo, la función de supervivencia sea no apropiada; para mostrar esto, supongamos que una persona (x) tiene cáncer, éste hecho nos hace pensar que el tiempo de vida futura de (x) es diferente a la de alguien que no tiene ésta enfermedad. En este caso, la función de supervivencia elegida para (x), debe considerar la situación mencionada.

El modelo completo para un subgrupo especial seleccionado, que pertenece a un grupo general, es un conjunto de funciones de supervivencia. Una función para cada edad, que reconozca una información determinada, puede ser descrito por medio de una función general de dos variables; la primera es la edad a la que por ejemplo se adquiere un seguro o enfermedad $[x]$, y la segunda variable, es el tiempo de duración de la póliza o la enfermedad t.

Al tiempo t lo denominaremos periodo selecto, dentro del cual las probabilidades, para el subgrupo seleccionado, son encontradas a partir de la función de supervivencia bivariada descrita anteriormente, y después de este número de años, la función de supervivencia $S(x)$ general, puede ser utilizada para todo el grupo.

Para una duración mayor o igual a t, podemos decir que:

$$q_{[x-j]+t+j} \cong q_{[x]+t} \cong q_{x+t} \quad \forall\ j \geq 0 \qquad \textbf{(1.2.7.1)}$$

Es decir, si $t = 15$ escribiremos, para alguna edad x

$$q_{[x-2]+17} \cong q_{[x]+15} \cong q_{x+15}$$

Esto es debido a que las columnas de datos dentro de una tabla de mortalidad, a una duración $t + j$ se describen por la función de supervivencia general $S(x)$, y son llamadas Columnas Ultimadas.

Si una Tabla además de tomar edades dentro del periodo selecto, toma en cuenta tiempos mayores a t, es decir $t+j$, es conocida como Tabla Ultimada y de Grupos Seleccionados.

A continuación se presenta una figura que ejemplifica lo expuesto anteriormente, para un tiempo de duración (selección) de 15 años, las edades de $30, 31, 32, 33, 34$ tienen probabilidades de muerte con ciertas características.

En la **Figura 1.2.7.1** notamos por ejemplo que la probabilidad de $q_{[31]+16} = q_{47}$, ya que ha transcurrido un tiempo mayor que el tiempo seleccionado y que $q_{[30]+1} \neq q_{31}$, por que tan solo han pasado un año desde la edad seleccionada y no ha pasado el tiempo de duración

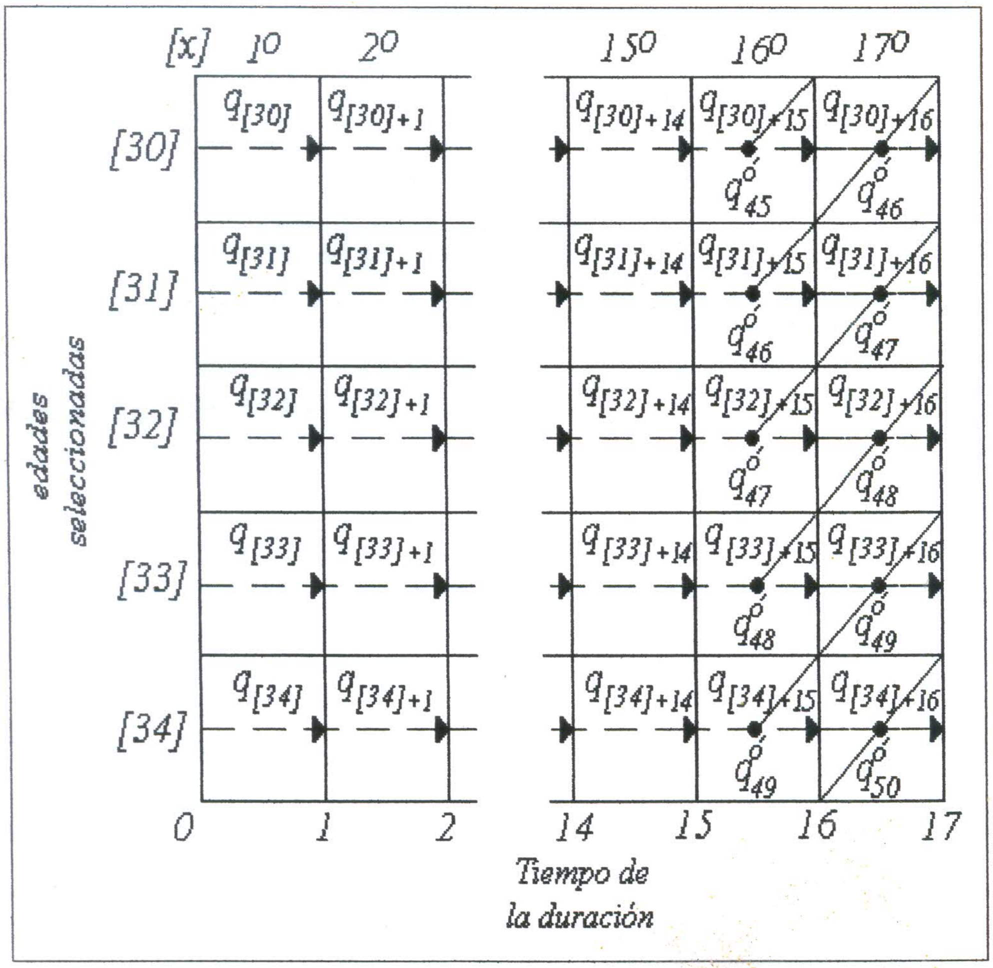


Figura1.2.7.1 Representación para 15 años de periodo seleccionado, de probabilidades de muerte.

Capítulo 2

PROCESOS DE MARKOV

2.1 Introducción

Dentro de este mundo, cuyos cambios son cada vez más acelerados, los fenómenos concernientes a éstos son totalmente impredecibles, ni siquiera los más evolucionados adelantos tecnológicos pueden encontrar las bases de los hechos antes mencionados, que evidentemente tienen origen aleatorio. Por ejemplo, nadie desea salir lastimado cuando conduce su auto hacia su lugar de trabajo, pero si esto ocurre, no podemos culparnos de aquello; no sabíamos que ocurriría; esto es un suceso aleatorio, y un suceso aleatorio forma parte de una estructura aleatoria.

Supongamos la existencia de cierto fenómeno, cuyos sucesos o eventos se dan en distintos instantes los representaremos como:

$$S_1, S_2, \ldots. S_n$$

Definamos algunas operaciones con estos sucesos del fenómeno estudiado cuyos resultados sean también sucesos del mismo, con el fin de formar un álgebra de sucesos:

Contraposición. Si tenemos un suceso S_i, definamos el suceso $\overline{S_i}$, que identificará lo que no es S_i, o el complemento de S_i.

Unión. Tomamos dos sucesos S_i y S_j representamos el suceso unión como $S_i \cup S_j$, que ocurre cuando se presenta S_i ó se presenta S_j.

Intersección. Tomamos dos sucesos S_i y S_j, representamos el suceso intersección como $S_i \cap S_j$, y ocurre cuando los dos sucesos se presentan al mismo tiempo.

Condicional. Tomamos dos sucesos S_i y S_j representamos el suceso condicional como S_i/S_j, y ocurre cuando se presenta el suceso S_i habiéndose ya presentado S_j.

A toda la familia de sucesos o eventos la representaremos con Ψ y determinaremos cual es su estructura conjuntamente con las operaciones definidas anteriormente entre ellos.

Definamos también un espacio Ω denominado espacio muestral, el cual también es un suceso y recoge todas las posibilidades del fenómeno.

Ahora, podemos decir por lo antes mencionado que se deberán cumplir las siguientes propiedades:

1. $\Omega \in \Psi$

2. $S_i \in \Psi \Rightarrow \overline{S}_i \in \Psi$

3. $\left[(S_i y S_j) \in \Psi \right] \Rightarrow \left[S_i \cup S_j \in \Psi \right]$

4. $\left[(S_i y S_j) \in \Psi \right] \Rightarrow \left[S_i \cap S_j \in \Psi \right]$

Si la 3ª propiedad es generalizada para todos los sucesos pertenecientes al fenómeno, tendríamos que:

5. $[S_i \in \Psi] \Rightarrow \left[\bigcup_{i=1}^{n} S_i \in \Psi\right]$, $\forall i = 1,2,\ldots\ldots,n,\ldots.$

Una familia de subconjuntos del conjunto Ω, que cumple las propiedades 1, 2, 3, 4, 5 se denomina Clase Completamente aditiva o Algebra de Borel, y si cumple solo las cuatro primeras solo la llamaremos Clase Aditiva.

Al Algebra de Borel la representaremos con Σ y podemos decir entonces en conclusión que se constituye a partir de la familia Ψ, con las operaciones de unión, intersección y complemento en un número finito o infinito numerable. Luego de haber definido el Algebra de Borel, definamos ahora como estructura aleatoria al par formado por (Ω,Σ).

Necesitaremos encontrar una medida $\mu(S_i)$ que podamos utilizar dentro de esta estructura aleatoria, que debido a su origen aleatorio deberá ser una medida de la aleatoridad, entonces esta medida es una función definida sobre un Algebra de Borel, y que cumple con las siguientes propiedades:

1. $\mu(S_i) \geq 0$

2. La medida de la unión finita o infinita numerable de sucesos es menor o igual que la suma de las medidas de los respectivos sucesos $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i)$, y la igualdad sucederá cuando los conjuntos sean disjuntos, es decir $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i)$ si $S_i \cap S_j = \phi$ $\forall(i \neq j)$.

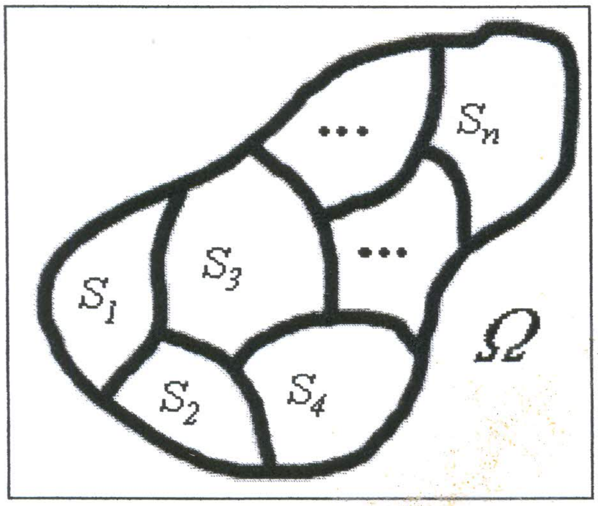


Figura 2.2.1 Espacio Muestral Ω

Ya que Ω es el conjunto que comprende todos los posibles resultados del fenómeno, podemos considerar que la medida del evento universal es 1, esto es $\mu(\Omega) = 1$ y que por la definición de $\mu(S_i)$ podemos afirmar que la medida de los subconjuntos de Ω será mayor o igual a 0, y menor o igual que 1.

$$0 \leq \mu(S_i) \leq 1$$

Así, a la probabilidad sobre los eventos podemos considerarla como una función de medida, y si lo es debe cumplir con lo siguiente:

1. $P(\Omega) = 1$

2. $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(S_i) \quad si \quad S_i \cap S_j = \phi \ \forall i \neq j$

De acuerdo a esto denominaremos estructura aleatoria probabilizable, espacio probabilístico o estructura estocástica a una estructura aleatoria en la que puedan determinarse probabilidades para los sucesos que se encuentren en un fenómeno cualquiera, y está representado por la terna (Ω, Σ, P), donde P es la función o medida de probabilidad.

Lo que nos interesa, para tener un cercano significado de los acontecimientos que suceden todos y cada uno de los días de nuestra vida, es determinar las probabilidades y así obtener una medida de verosimilitud de cada suceso, como en el ejemplo del automóvil.

2.2 Procesos Estocásticos

Un proceso estocástico se comprende como un fenómeno aleatorio definido en un ambiente cambiante, es decir un concepto basado en términos temporales, definamos entonces los siguientes elementos:

ξ_t, donde $t \in [t_0, T]$, t_0 y T podrían ser iguales a $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente.

Si representamos los sucesos elementales de un fenómeno aleatorio como μ se podría considerar a ξ_t como una función de este parámetro conjuntamente con t luego, podemos decir entonces que:

$$\xi_t = X(\mu, t) \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

Llamaremos sucesos o puntos elementales del proceso a todas las funciones de t, es decir, a todas las trayectorias posibles dentro de la relación **(2.2.1)**

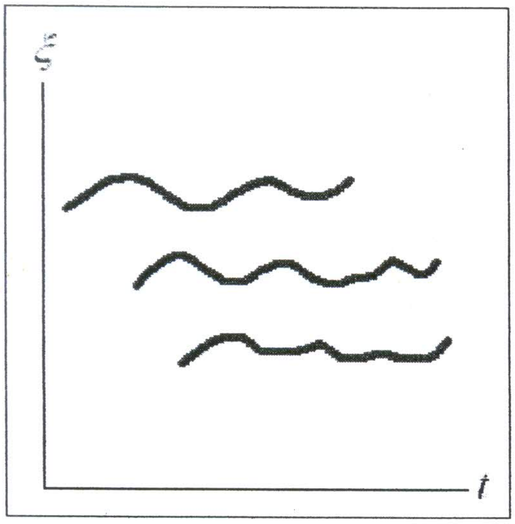


Figura 2.2.1 Trayectorias posibles dentro de $\xi_t = X(u,t)$

Si deseamos un proceso estocástico necesitamos conocer las probabilidades, y ya que estamos dentro del álgebra de Borel, podemos pensar que sí es posible hallar los intervalos en el proceso sobre los cuales tendrían que definirse las probabilidades.

Consideremos un valor dentro de $[t_0, T]$ al que llamaremos t_1 y al que le hacemos corresponder dos números a_1 y b_1, dentro de las trayectorias del proceso, donde estarán un grupo de curvas, las cuales cumplirán las siguientes condiciones:

$$a_1 < x_{t_1} \leq b_1 \tag{2.2.2}$$

Tenemos ahora el intervalo (a_1, b_1), definido por t_1 como el conjunto de curvas que cumplan la condición **(2.2.2)**, este intervalo se denominará base unidimensional.

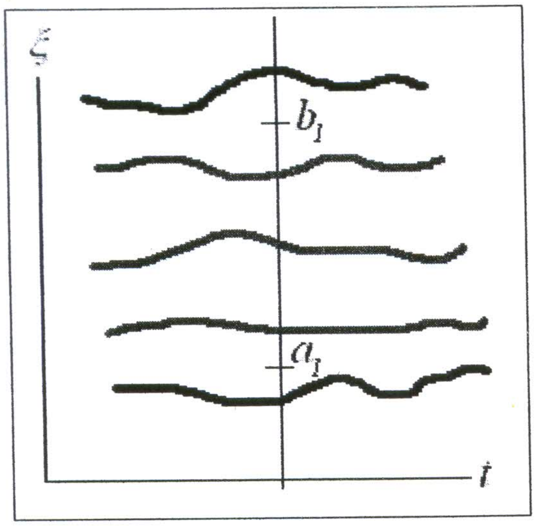


Figura 2.2.2 Conjunto de curvas que cumplen la condición $a_1 < x_{t_1} \leq b_1$

De la misma forma, podemos definir el intervalo de base r como el conjunto de curvas que cortan a las r perpendiculares en los tiempos $t_1, t_2, ..., t_r$, por lo tanto tendríamos que:

$$\begin{cases} a_1 < x_{t_1} \leq b_1 \\ a_2 < x_{t_2} \leq b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_r < x_{t_r} \leq b_r \end{cases}$$

En este conjunto de intervalos podemos definir las distintas operaciones que nos conducirán al Algebra de Borel y podemos entonces referirnos a las probabilidades de los sucesos, quedando definida así la dimensión estocástica del proceso.

2.3 Espacios y Distribuciones Finito Dimensionales

Si tenemos la variable ξ_t y consideramos los siguientes valores $t(t_1),(t_1,t_2),\ldots\ldots,(t_1,t_2,\ldots\ldots,t_n)$, podríamos tener ξ_{t_i} y al considerar un cierto valor x_i, podemos establecer que $P(\xi_{t_i} \leq x_i) = F_{t_i}(x_i)$, donde $F_{t_i}(x_i)$ es la distribución acumulada marginal de ξ_{t_i}, $i = 1,2,3,\ldots\ldots,n$.

De la misma forma, podríamos llegar a formar la distribución acumulada conjunta n-dimensional como:

$$P(\xi_{t_1} \leq x_1; \xi_{t_2} \leq x_2; \ldots\ldots; \xi_{t_n} \leq x_{t_n}) = F_{t_1,t_2,\ldots\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

De acuerdo a esto denominaremos espacios finito dimensionales a los definidos por las bases, y distribuciones finito dimensionales, a las que corresponden a los espacios. Está claro que dado un proceso estocástico $\xi_t = X(\mu, t)$ pueden deducirse de él las distribuciones finito dimensionales; por ejemplo si tenemos el proceso

$$\xi_t = \mu_t$$

Para cada valor de μ existirá una recta que pasa por el punto $t = 0$ y cuya inclinación viene dada por dicho coeficiente μ .

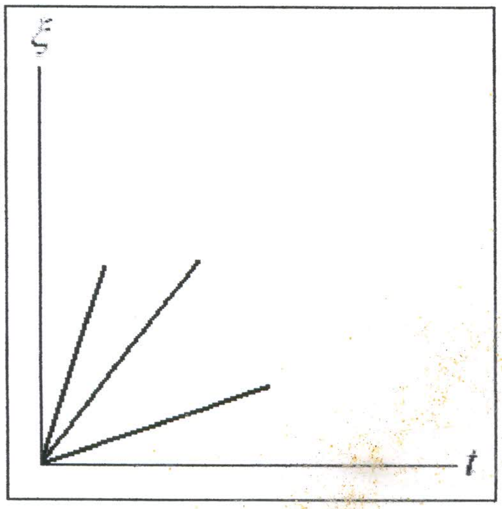


Figura 2.3.1 Rectas cuya inclinación está dada por el coeficiente μ

Si la función de densidad de probabilidad de μ tuviese la forma $\varphi(\mu)$, la densidad marginal para t_i será:

$$\varphi\left(\frac{x_i}{t_i}\right)\frac{1}{t_i} = f_t(x_i)$$

y la función de distribución acumulada estará dada entonces por:

$$F_{t_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f_{t_i}(x)dx$$

y lo mismo se tendría para cualquier número de dimensiones.

Pero esto no es suficiente para definir un proceso estocástico, deberán además cumplirse las condiciones de consistencia de Kolmogorov:

1. $F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{ti_1,ti_2,\ldots,ti_n}(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$

2. $\lim_{x_n \to \infty} F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$

A continuación centraremos nuestro análisis en una clase especial de procesos estocásticos, los procesos de Markov.

2.4 Propiedades Básicas de los Procesos de Markov

Empezaremos presentando a $X(t)$ como la representación del estado de un individuo al tiempo (edad) $t \geq 0$. Denotaremos un proceso estocástico por $\{X(t), t \geq 0\}$.

Suponiendo que existe un número finito de estados $1,2,3,....,k$, entonces podemos decir que el proceso tiene un espacio de estados $\{1,2,3,....,k\}$, decimos entonces que el proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ es un Proceso de Markov, si para todo $s,t \geq 0$ además de $i, j, x(u) \in \{1,2,3,....,k\}$, ocurre que:

$$P\{X(s+t)=j / X(s)=i, X(u)=x(u),\quad 0 \leq u < s\} = P\{X(s+t)=j / X(s)=i\} \quad \textbf{(2.4.1)}$$

Lo que quiere decir que el estado de un individuo en el tiempo (edad) $s+t$, depende solo del estado en el tiempo (edad) s y no de los estados en los instantes anteriores $0 \leq u < s$, dicha propiedad se suele denominar propiedad de pérdida de memoria del proceso.

Hay que anotar que los procesos de Markov pueden tener infinitos estados, como por ejemplo la distribución **Poisson** con función de probabilidad descrita en **(2.4.2)** que representa un proceso estocástico con un número infinito de estados, donde n representa un número de sucesos entre 0 y t, los estados del sistema en cualquier tiempo t están representados por $n = 0,1,2,3,....$

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, n = 0,1,2,.... \quad \textbf{(2.4.2)}$$

Sin embargo debido a que los estados de un individuo de edad t pueden ser fácilmente identificables y finitos podemos tomar la definición de Procesos de Markov mencionada anteriormente.

2.4.1 Cadenas de Markov

Una Cadena de Markov es un caso especial de los Procesos de Markov. Se utiliza para estudiar el comportamiento de ciertos sistemas estocásticos a corto y largo plazo.

Si se tiene un conjunto $S = \{1,2,3,....,k\}$, donde $\{1,2,3,....,k\}$ son un número finito de estados, de un sistema en un tiempo (edad) $t \geq 0$ cualquiera, una probabilidad $p = p_i(t)$ donde $i \in S$, es la probabilidad de que un individuo, se encuentre en el estado i, en el tiempo (edad) t.

Definimos además como $p_j^{(s)}$ $(j = 1,2,3,....,k)$ a las probabilidades absolutas de que el sistema se encuentre en el estado $1,2,3,....,k$ en el tiempo (por ejemplo la edad a la cual por ejemplo un individuo adquiere un seguro de vida) $t_s \geq 0$, donde obviamente:

$$\sum_{j \in S} p_j^{(s)} = 1$$

Se define entonces la matriz estocástica $P = p_{ij}(s, s+t)$, donde $i, j \in S$, cuyos valores son llamados ***probabilidades de transición*** de un tiempo s a un tiempo $s+t$. Es decir:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & \cdot & \cdot & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & \cdot & \cdot & p_{2k} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & \cdot & \cdot & p_{3k} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & \cdot & \cdot & p_{4k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & p_{k2} & p_{k3} & p_{k4} & \cdot & \cdot & p_{kk} \end{pmatrix}$$

Con $\sum_{j \in S} p_{i_s j_s}(s, s+t) = 1 \quad \forall i \in S$

Entonces, suponiendo que el sistema es Markoviano, la sucesión de variables aleatorias $X(t)$, con $t \geq 0$, es una **Cadena de Markov** (finita y homogénea) con un espacio de estados S y una matriz de transición P, junto con las probabilidades iniciales $p_j^{(s)}$ $(j = 1,2,3,\ldots,k)$.

2.5 Probabilidades Absolutas y de Transición

Mencionemos el siguiente ejemplo de estados $X(t)$ de un individuo de edad t:

Cuando un individuo:

1. Se encuentra en buen estado de salud; podemos hacer que el estado $X(t) = 1$
2. Si tiene alguna incapacidad física; $X(t) = 2$
3. Si muere; $X(t) = 3$

Tendremos entonces un proceso multiestados de tres estados con sus respectivas transiciones, ver **Figura 2.5.1**

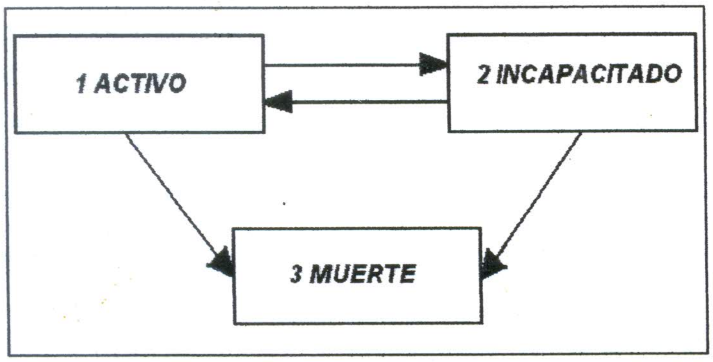


Figura 2.5.1 Esquema de transición de tres estados

Considerando este proceso de tres estados, la suposición de Markov de pérdida de memoria podría ser inapropiada, porque por ejemplo la futura recuperación de este individuo de edad *t*, recientemente incapacitado difiere de la recuperación de un individuo que ha estado incapacitado durante un largo período de tiempo y por lo tanto no satisface la proposición **(2.4.1)**, además de que la probabilidad de retornar al estado Activo podría ser diferente a la de ir de Activo a Incapacitado, ya que puede la Incapacidad prolongarse por un tiempo que no puede ser determinado, esto puede ser superado tomando en cuenta qué tanto depende permanecer en un estado por un intervalo de tiempo determinado, es decir la duración en el mismo, en la transición hacia otro; este caso es tratado en el siguiente capítulo.

La probabilidad:

$$p_{ij}(s,s+1) \equiv P\{X(s+1)=j\,/\,X(s)=i\}, \qquad i,j \in \{1,2,3,\ldots,k\},$$

se define como **probabilidad de transición**, la cual representa la probabilidad condicional de que el sistema este en j en $s+1$ dado que estaba i en s, esta probabilidad también se denomina probabilidad de transición de un paso, una probabilidad de transición de m pasos sería entonces generalizada como:

$$p_{ij}(s,s+m) \equiv P\{X(s+m)=j\,/\,X(s)=i\}$$

Que es la probabilidad de pasar del estado i al estado j en exactamente m transiciones (m puede también interpretarse como m intervalos de tiempo).

Es importante definir también que:

$$p_{ij}(s,s+0)=\delta_{ij}$$

Donde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ,si\ i=j \\ 0 & ,si\ i \neq j \end{cases}$$

Si tenemos las probabilidades iniciales $p_j^{(s)}$ $(j = 1,2,3,....,k)$, podemos determinar las probabilidades absolutas del sistema después de un número especificado de transiciones, lo que se observa a continuación.

Sean $p_j^{(s+n)}$ las probabilidades absolutas del sistema después de n transiciones en el tiempo $s+n$, entonces la expresión general para $p_j^{(s+n)}$ en términos de $p_j^{(s)}$ se puede determinar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p_j^{(s+1)} &= p_1^{(s)} p_{1j}(s,s+1) + p_2^{(s)} p_{2j}(s,s+1) + p_3^{(s)} p_{3j}(s,s+1) + \ldots \\ &= \sum p_i^{(s)} p_{ij}(s,s+1) \end{aligned}$$

Se puede inferir de esta ecuación lo siguiente:

$$\begin{aligned} p_j^{(s+2)} &= \sum_i p_i^{(s+1)} p_{ij}(s+1,s+2) = \sum_i \left(\sum_k p_k^{(s)} p_{ki}(s,s+1) \right) p_{ij}(s+1,s+2) \\ &= \sum_k p_k^{(s)} \left(\sum_i p_{ki}(s,s+1) pij(s+1,s+2) \right) = \sum_k p_k^{(s)} p_{kj}(s,s+2) \end{aligned}$$

Donde:

$$p_{kj}(s,s+2)=\sum_{i\in S}p_{ki}(s,s+1)p_{ij}(s+1,s+2)$$

Es la probabilidad de transición de dos pasos, es decir, la probabilidad de pasar del estado k al estado j en exactamente dos transiciones (dos intervalos de tiempo).

Se puede demostrar por inducción que:

$$p_j^{(s+n)}=\sum_{i\in S}p_i^{(s)}\left(\sum_{k\in S}p_{ik}(s,s+n-1)p_{kj}(s+n-1,s+n)\right)=\sum_{i\in S}p_i^{(s)}p_{kj}(s,s+n)$$

En la cual:

$$p_{ij}(s,s+n)=\sum_{k\in S}p_{ik}(s,s+n-1)p_{kj}(s+n-1,s+n)$$

Que es la probabilidad de transición de n pasos, es decir, es la probabilidad de pasar del estado i al estado j en exactamente n transiciones.

Por lo mostrado anteriormente, la probabilidad de transición de dos pasos es:

$$p_{ij}(s,s+2)=\sum_{k\in S}p_{ik}(s,s+1)p_{kj}(s+1,s+2)$$

Entonces, $p_{ij}(s,s+2)$ es el cuadrado de la matriz de transición $P=p_{ij}(s,s+1)$, donde $t=1$ para este ejemplo.

Se lo puede apreciar claramente si desarrollamos la sumatoria

Para $i=1$ ***y*** $j=1$**, *donde*** $i,j\in S=\{1,2,3,....,k\}$

$p_{11}(s,s+1)p_{11}(s+1,s+2)+.....+p_{1k}(s,s+1)p_{k1}(s+1,s+2)$

.

.

.

.

.

Para $i=k$ ***y*** $j=k$**, *donde*** $i,j\in S=\{1,2,3,....,k\}$

$p_{k1}(s,s+1)p_{1k}(s+1,s+2)+.....+p_{kk}(s,s+1)p_{kk}(s+1,s+2)$

Como se observa, ésto es el cuadrado de la matriz P, $P^2=PP$

$$P^2 = \begin{pmatrix} \sum_{k \in S} p_{1k}(s,s+1)p_{k1}(s+1,s+2) & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & \sum_{k \in S} p_{kk}(s,s+1)p_{kk}(s+1,s+2) \end{pmatrix}$$

Esta es entonces la matriz de transición del estado i al estado j del instante s al instante $s+2$.

Aplicando la identidad de la multiplicación entre matrices, se tendría que $P^{t+u} = P^t P^u$, donde P^0 es la matriz identidad, cuyos valores son $p_{ij}(s,s+0) = \delta_{ij}$ y $P^t = p_{ij}(s,s+t)$, $P^u = p_{ij}(s,s+u)$, donde las P_{ij} vienen dadas por las ecuaciones:

$$p_{ij}(s,s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s,s+t-1)p_{kj}(s+t-1,s+t)$$

$$p_{ij}(s,s+u) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s,s+u-1)p_{kj}(s+u-1,s+u)$$

Con lo que se tiene el sistema de ecuaciones:

$$p_{ij}(s,s+t+u) = \sum_{l=1}^{k} p_{il}(s,s+t)p_{lj}(s+t,s+t+u), \quad i,j \in \{1,2,\ldots,k\} \quad \textbf{(2.5.1)}$$

A esta ecuación se la conoce con el nombre de **CHAPMAN-KOLMOGOROV**

La probabilidad de transición $p_{ij}(s, s+t)$ puede interpretarse como la probabilidad ${}_{t}p_{s}^{ij}$, que es el símbolo utilizado en Matemáticas Actuariales para determinar la probabilidad de que un individuo de edad s en el estado i alcance la edad t en el estado j.

Ahora definiremos en forma vectorial las probabilidades absolutas:

$$p^{(s+n)} = \left\{p_1^{(s+n)}, p_2^{(s+n)}, p_3^{(s+n)}, \ldots, p_k^{(s+n)}\right\}$$

De acuerdo a lo mencionado anteriormente:

$$p^{(s+n)} = p^{(s)} P^{n}$$

Es importante señalar que las matrices P^n, donde $n \geq 0$, son estocásticas.

Por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij}(s,s+t)=1 \qquad \text{Para toda } t \geq 0$$

Además, supongamos la existencia del límite:

$$\mu_{ij}(t)=\lim_{h\to 0^+}\frac{p_{ij}(t,t+h)-\delta_{ij}}{h} \qquad i,j \in \{1,2,3,...\}$$

Entonces, si $i \neq j$, $\mu_{ij}(t)$ representará la fuerza de transición del estado i al estado j.

Recordemos de la Matemática Actuarial que la Fuerza de Mortalidad de un individuo de edad x, μ_x, definida en el **Capítulo 1** representa la fuerza de mortalidad, en la que:

$$Pr[x < X \leq x+\Delta x / X > x]=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{1-F(x)}$$

Donde $F'(x)=f(x)$, representa la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria edad de muerte.

En este caso $F(x)$ es δ_{ij}, porque $p_{ij}(t,t+h)$ podría ser considerada como la probabilidad de transición del estado Vivo $X(t)$ en la edad t al estado Muerte $X(t+h)$ en la edad $t+h$ y recordemos además que $p_{ij}(t,t+0)=\delta_{ij}$.

Pero aquí μ_{ij} representa la fuerza de transición del estado i al estado j, pudiendo existir muchos estados, como por ejemplo. Vivo, Muerto, Enfermo, Discapacitado, etc.; es decir, hemos llegado a una generalización del concepto de fuerza de mortalidad, lo cual nos será muy útil para el desarrollo posterior de este trabajo de investigación.

El entorno en el cual podemos usar las fuerzas de transición μ_{ij} será el mismo que se usa para la fuerza de mortalidad μ_x, observando además que algunas transiciones no son posibles, por ejemplo si el individuo está en el estado de muerte, no existe transición a otro estado.

Finalmente podemos acotar que las fuerzas de transición y las probabilidades de transición son ahora relacionadas por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s,s+t)=\sum_{l=1}^{k} p_{il}(s,s+t)\mu_{lj}(s+t)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{ij}(s,s+t)=-\sum_{l=1}^{k} \mu_{il}(s)p_{lj}(s,s+t)$$

el siguiente Capítulo, se desarrolla un modelo de matemáticas actuariales partir de las Cadenas de Markov y se obtienen importantes observaciones sde las aplicaciones numéricas.

Capítulo 3

CALCULO ACTUARIAL USANDO UN MODELO DE MARKOV

3.1 Fuerzas Constantes de Transición

Antes hablamos de los procesos de Markov Homogéneos, es decir de procesos de Markov en los que las probabilidades de transición y las fuerzas de transición definidas no dependen del tiempo en que se encuentren, podemos decir entonces que la probabilidad de transición de un paso es la misma para cualquier edad s.

Entonces la probabilidad $p_{ij}(s, s+t)$ puede ser escrita como $p_{ij}(t)$, de igual forma podemos actuar con las fuerzas de transición; es decir, podemos escribir $\mu_{ij}(t) = \mu_{ij}$, para cualquier t.

Las fuerzas de transición pueden ser consideradas matricialmente como los valores dentro de una matriz Q de $k \times k$ estados y la función de probabilidades de transición como ya lo hemos visto puede ser expresada en la forma matricial $P(t)$

Así, podemos entonces expresar en forma matricial las ecuaciones de Chapman-Kolmogorof como:

$$P(t+u) = P(t)P(u) \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

y las ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s, s+t) = \sum_{l=1}^{k} p_{il}(s, s+t)\mu_{lj}(s+t)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{ij}(s, s+t) = -\sum_{l=1}^{k} \mu_{il}(s) p_{lj}(s, s+t)$$

quedan expresadas como el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(t) = \sum_{l=1}^{k} p_{il}(t)\mu_{lj}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{ij}(t) = -\sum_{l=1}^{k} \mu_{il} p_{lj}(t)$$

que matricialmente puede expresarse como:

$$\begin{cases} P'(t) = P(t)Q \\ P'(t) = QP(t) \end{cases}, \text{ donde } P(0) = I \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

resolviendo este sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo lineal de primer orden, por la fórmula de Abel, se tiene la solución:

$$P(t) = ce^{Qt}$$

Como $P(0) = I$, se tiene que $c = 1$, por tanto:

$$P(t) = e^{Qt}$$

Desarrollando e^{Qt} en serie de Taylor obtenemos:

$$P(t) = e^{Qt} = I + Qt + \frac{Q^2t^2}{2!} + \ldots\ldots \qquad \textbf{(3.1.3)}$$

Ahora bien, si la matriz Q tiene distintos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_k$, podemos decir que es diagonalizable por lo tanto $Q = ADA^{-1}$ donde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_k)$ y A es la matriz de los vectores propios asociados con los valores propios λ_i.

Entonces, tenemos reemplazando en **(3.1.3)** que $P(t) = e^{Qt} = e^{ADA^{-1}} = e^{A diag(\lambda_1, ..., \lambda_k) A^{-1}}$, por lo tanto:

$$P(t) = A diag(e^{\lambda_1 t}, ...e^{\lambda_k t}) A^{-1} \qquad \textbf{(3.1.4)}$$

de donde podemos escribir que los valores de la matriz $P(t)$ son:

$p_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{k} a_{in} v_{nj} e^{\lambda_n t}$, donde v es la entrada de la matriz $V = A^{-1}$ **(3.1.5)**

Si los vectores propios no son distintos, puede utilizarse la descomposición canónica de Jordan, que consiste en el cálculo de un vector característico generalizado, por ejemplo si tenemos una matriz M cuadrada de $2x2$, con un valor característico de multiplicidad algebraica 2, no existirá otro vector propio que v_1, entonces se calcula el siguiente sistema de ecuaciones para hallar el segundo vector propio v_2 que se necesita:

$$(M+I)v_2 = v_1$$

En conclusión, al encontrar los valores propios y los vectores propios de la matriz de las fuerzas de transición Q, podemos determinar con mayor facilidad la Matriz $P(t)$.

3.2 Fuerzas Constantes de Transición en Intervalos Discretos

Hemos asumido que las fuerzas de transición de estados son constantes con respecto al tiempo, lo cual nos permite expresar las funciones de probabilidad de transición de manera mas sencilla en función de t.

Sin embargo, en la práctica de aplicaciones actuariales no es tan bueno esto, más bien se necesita de fuerzas de transición que varíen con el tiempo (es decir con la edad de un individuo), podemos lograr esto usando fuerzas de transición constantes solo en intervalos discretos de tiempo pequeños.

Definamos $\mu_{ij}(t)=\mu_{ij}^{(m)}$ si $[t_{m-1},t_m)$, para $m=1,2,....$,donde $t_0=0$

Definamos también $p_{ij}^{(m)}(t)$ como la función de probabilidad de transición asociada con el intervalo de tiempo $[u,u+t)$ contenido dentro del intervalo $[t_{m-1},t_m)$

Expresando esto de forma matricial tendremos las matrices $Q^{(m)}$ y $P^{(m)}$. Definimos también m_t como el entero que hace que $t_{m_t-1} \leq t < t_{m_t}$, podemos entonces ahora afirmar lo siguiente:

$$P(s,t)=P^{(m_s)}(t_{m_s}-s)P^{(m_s+1)}(t_{m_s+1}-t_{m_s})\ldots P^{(m_t)}(t-t_{m_t-1}) \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

Como se ve claramente en la **Figura 3.2.1** el intervalo de tiempo continuo entre s y t ha sido discretizado en intervalos continuos tal como se ve en el gráfico, de tal manera que cada intervalo de tiempo esté representado por fuerzas y probabilidades de transición constantes.

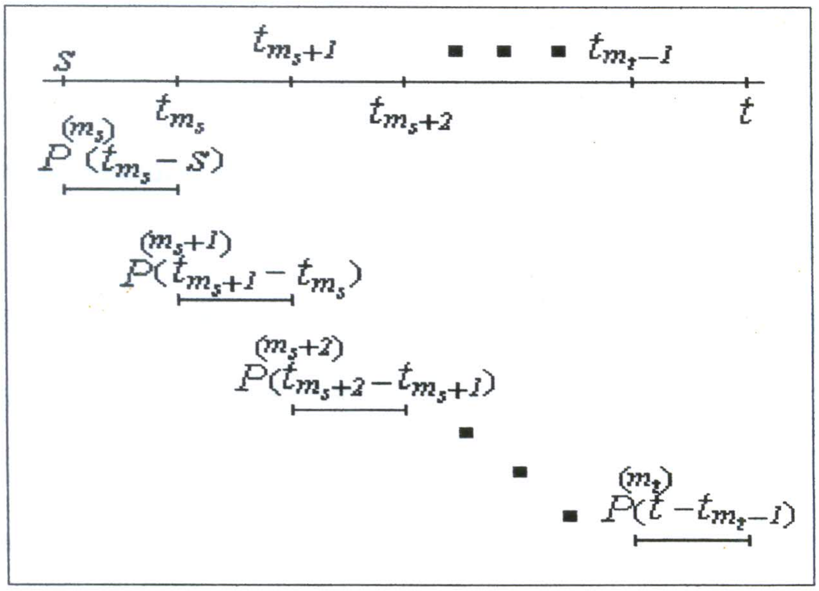


Figura 3.2.1 Esquema de Fuerzas de Transición Discretizadas, Constantes en Intervalos de Tiempo

La ecuación **(3.2.1)** no es otra cosa, que la representación matricial de $p_{ij}(s,s+t)$, como vimos en el capítulo anterior, tratamos la función de probabilidades de transición y las fuerzas de transición de forma homogénea; ahora discretizando el tiempo entre s y t, el valor de $P(s,t)$ puede ser hallado para cualquier punto en el tiempo que sea tomado como inicio. Las muchas aplicaciones Actuariales exigen que se cumpla esta restricción.

3.3 Dependencia de la Duración en un Estado E_i

3.3.1 Introducción

Un individuo de edad media puede padecer la misma enfermedad que un individuo de edad avanzada; sin embargo, la probabilidad de muerte para el primer caso será más baja que para el segundo. Así también, si alguien sufre de alguna enfermedad por largo tiempo evidentemente la probabilidad de que se cure pronto es más alta que la de alguien que recién adquiere la enfermedad, por supuesto si la enfermedad es curable. En caso contrario la probabilidad de muerte es 1, pero en general esta probabilidad cambia según el tiempo de transcurrida la enfermedad. Además, también cambia la edad del individuo. Estos aspectos no han sido considerados en las secciones anteriores, pero es necesario considerarlas ya que las aplicaciones actuariales en modelos de 3 estados donde uno de ellos es la incapacidad (enfermedad), requiere de una aproximación donde se analice estos aspectos.

En el capítulo anterior se mencionó que el modelo de tres estados de la **Figura 2.5.1** puede ser representado por fuerzas de transición y funciones de probabilidades de transición, pero para algunas aplicaciones actuariales, estas suposiciones pueden tener algunas fallas, tal como la duración del tiempo desde que se ingresa a un estado cualquiera hasta que deja de estar en el mismo. Si se toma como referencia el ejemplo citado de tres estados, el tiempo en comenzar el estado 2 de incapacidad hasta volver al estado 1 de activo, puede influenciar en las probabilidades de transición.

El tiempo de duración de un seguro de vida, por ejemplo, además de la edad alcanzada por un individuo, influye en qué tan cerca de salir de un estado se encuentra, así como que tan cerca de ingresar a otro está, y a su vez al estar ahí, cuánto tardará en salir del mismo.

Al modelo que toma en cuenta este aspecto lo denominaremos Modelo Semi_Markov.

3.3.2 El Modelo General de Semi-Markov

Por lo mencionado anteriormente podemos describir el Modelo de Semi-Markov en términos de fuerzas de transición.

Para lograr nuestro objetivo, utilizaremos el símbolo $\mu_{ij}(t,u)$, que representará la fuerza de transición del estado i al estado j al tiempo (edad) t de un individuo que ha estado en el estado i por un periodo de tiempo u; entonces, las funciones de probabilidad de transición requieren una definición más complicada que verifique el tiempo de entrada al estado i.

Sin embargo, la definición de un modelo estocástico de estas características nos lleva a unas expresiones poco convenientes para las probabilidades, que se necesitan para la obtención de valores actuariales. En lo posterior, presentaremos una simplificación para estas expresiones.

Un modelo simple basado en la **Figura 2.5.1** deja a éste en tan solo dos estados; por supuesto, reduciendo al grupo de edad seleccionado en individuos jóvenes y de mediana edad, ya que el porcentaje de mortalidad es bajo en estos casos, se supone que la transición a la muerte podría ser ignorada y que las fuerzas de transición desde el estado de incapacidad (enfermedad) son independientes de la edad alcanzada.

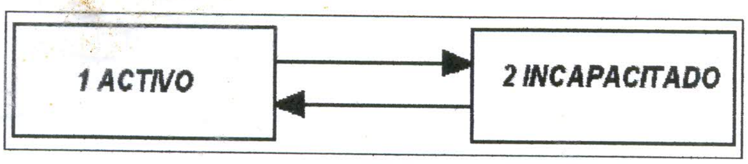


Figura 3.3.2.1 Esquema de Transición de 2 Estados

Pero lo que se necesita es un modelo más general, que implique multiestados y que tome en cuenta el tiempo dentro de los estados seleccionados. Por lo visto, se requerirá de algunas formas de simplificación del modelo; es decir, necesitamos una aproximación, para representarlo como un simple proceso de Markov.

3.3.3 Aproximación por un Modelo de Markov

Tomemos un estado cualquiera de una persona (x); por ejemplo, el hecho de que (x), sufra un accidente y sufra una fractura en el tobillo, para su recuperación total; es decir, para que ya no esté "enfermo", debe pasar por varias etapas que las podemos generalizar en dos: etapa 1 de atención medica y etapa 2 de recuperación, en otras palabras, el estado de enfermedad se lo ha dividido en dos subestados. Esta es una alternativa para analizar la duración de dependencia en un estado.

En el modelo de seguros para incapacidad de la **Figura 2.5.1** esto puede lograrse utilizando la fuerza de transición desde el estado 2 de incapacidad, la cual depende del tiempo desde que ocurrió esta incapacidad (enfermedad) y por tanto podemos representar el estado E_2 por dos subestados: **no estable** y **estable**.

El estado no estable podría ser cuando un individuo recién adquiere la enfermedad y la fuerza de transición es medianamente alta para regresar al estado E_1 de actividad, como también para ir al estado E_3 de muerte.

Mientras que el subestado estable puede ser concebido como el estado en el que está el individuo luego de cierto tiempo desde que se inició la enfermedad; es decir, el período de cura o recuperación.

Puede ocurrir que se pase de un estado no estable a un estado estable, si esto sucede evidentemente la fuerza de mortalidad disminuye, y la fuerza de transición aumenta.

La generalización del estado de incapacidad no necesariamente puede ser de dos subestados sino que también puede ser de más de dos, si es necesario.

Este procedimiento de dividir estados en subestados, nos permite aproximar alguna distribución para una combinación de etapas en paralelo o en serie, tal como se muestra en las **Figura 3.3.3.1 (a) y (b)**, donde el tiempo que se permanece en cada etapa puede estar distribuido exponencialmente.

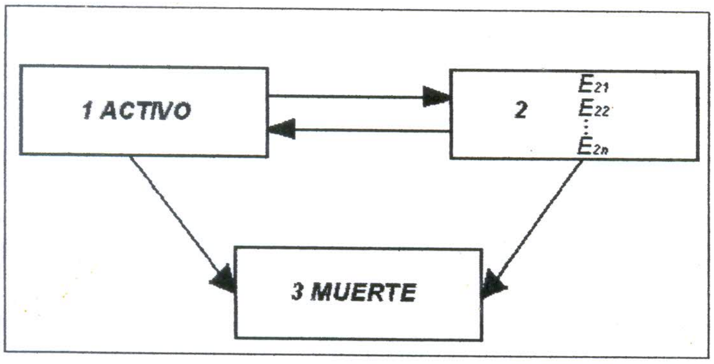


Figura 3.3.3.1 (a) Subestados en Paralelo

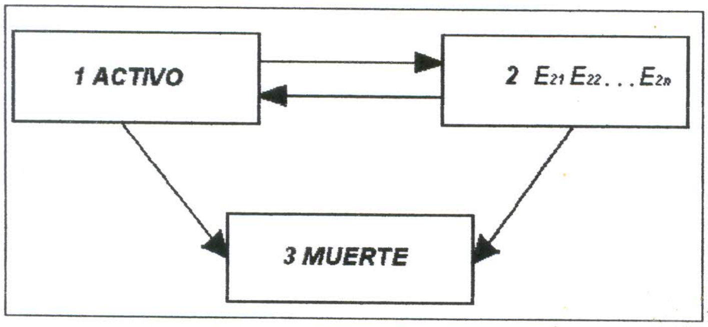


Figura 3.3.3.1 (b) Subestados en Serie

Se tiene ahora que $\mu(t)$, $t \geq 0$ es una función continua que representa la fuerza de mortalidad para un grupo de edades dados, donde t es el tiempo de la póliza de seguro, además tenemos de **(1.2.4.4)** que $S(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)ds}$, la cual es una representación de la función de supervivencia $S(t)$ correspondiente.

Así, se podría construir un proceso de Markov con tiempo homogéneo con una función de supervivencia que converja a $S(t)$. Y tendríamos entonces, que cualquier individuo se mueve durante su vida, dentro de un modelo multiestados con un número de estados 1,2,3,.... en sucesión hasta que su muerte ocurra.

La fuerza de transición total desde cada estado, es decir conjuntamente fuerza de transición y fuerza de mortalidad, la llamaremos λ en cada punto en el tiempo, y la fuerza de mortalidad estando en el estado E_i es $\mu(i/\lambda)$. Por lo tanto, si λ es la fuerza de mortalidad total, entonces $\lambda - \mu(i/\lambda)$ representa la fuerza de transición desde el estado E_i al estado E_{i+1}.

Ya que el tiempo transcurrido dentro de cada subestado lo supondremos distribuido exponencialmente, cada evento en el tiempo puede ser representado por un proceso Poisson, donde cada individuo o bien muere, o bien se mueve hacia un nuevo estado.

Si representamos con $N(t)$ al número de eventos dentro del intervalo de tiempo $(0,t]$, y con $I(t)$ a la función cuyo valor es 1 si el individuo sobrevive al tiempo t, y 0 si no sucede así; entonces:

$$P(N(t)=n)=\frac{(\lambda\ t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Y tenemos también,

$$P(I(t)=1/N(t)=n)=\begin{cases} 1 & n=0 \\ \Pi_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda-\mu(i/\lambda)}{\lambda} & n=1,2,\ldots \end{cases}$$

$$P(I(t)=1,N(t)=n)=\begin{cases} e^{-\lambda t} & n=0 \\ \dfrac{(\lambda\ t)^n e^{-\lambda t}}{n!}\Pi_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda-\mu(i/\lambda)}{\lambda} & n=1,2\ldots \end{cases}$$

y que,

$$p(I(t)=1)=e^{-\lambda t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda\ t)^n e^{-\lambda t}}{n!}\Pi_{i=1}^{n}\frac{\lambda-\mu(i/\lambda)}{\lambda}$$

Ahora podemos representar un modelo de dos estados: vida y muerte en uno de tres, separando el estado VIDA de la **Figura 3.3.3.2** en dos subestados llamados SELECTO y ULTIMO.

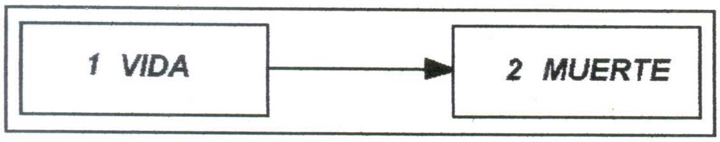


Figura 3.3.3.2 Modelo de 2 estados, VIDA y MUERTE

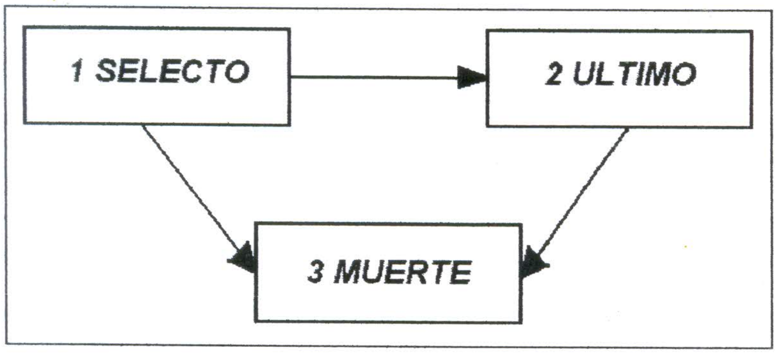


Figura 3.3.3.3 Modelo de 3 estados, SELECTO y ULTIMO

Tomando como referencia el gráfico podemos decir que, la probabilidad de supervivencia para un grupo determinado es:

$$p_{11}(t)+p_{12}(t)=e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t}+\int_0^t e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})x}\mu_{12}e^{-\mu_{23}(t-x)}dx$$

$$=e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t}+\frac{\mu_{12}e^{-\mu_{23}t}\left[1-e^{-(\mu_{12}+\mu_{13}-\mu_{23})t}\right]}{\mu_{12}+\mu_{13}-\mu_{23}}$$

$$=\frac{(\mu_{13}-\mu_{23})e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t}+\mu_{12}e^{-\mu_{23}t}}{\mu_{12}+\mu_{13}-\mu_{23}} \qquad \textbf{(3.3.3.1)}$$

Y la correspondiente fuerza de mortalidad será entonces:

$$\mu(t) = -\frac{\frac{d}{dt}\left[p_{11}(t) + p_{12}(t)\right]}{p_{11}(t) + p_{12}(t)}$$

$$= \frac{(\mu_{23} - \mu_{13})(\mu_{12} + \mu_{13})e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})} - \mu_{12}\mu_{23}e^{-\mu_{23}t}}{(\mu_{23} - \mu_{13})e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})} - \mu_{12}e^{-\mu_{23}t}} \qquad \textbf{(3.3.3.2)}$$

Debemos entonces elegir los mejores estimadores para la fuerzas de mortalidad μ_{ij}, que mejor represente la selección para el grupo de seleccionados, basados en la **Figura 3.3.3.3**

Tal como analizamos en la Sección **1.2.7**, las probabilidades y las inferencias sobre éstas, estarán sujetas a la teoría de Grupos Selectos.

Con esta información, podemos aplicar lo expuesto a cualquier tabla ultimada y de grupos seleccionados.

En nuestro país no existen tablas ultimadas y de grupos seleccionados, y es por este motivo que los ejemplos numéricos del próximo capítulo de esta investigación, estarán basados en una Tabla de Mortalidad Extranjera.

Capítulo 4

4 APLICACIÓN NUMERICA

4.1 Introducción

Todos los resultados obtenidos en el **Capítulo 3**, pueden concatenarse de tal manera que nos conduzcan hacia un procedimiento de cálculo de probabilidades, mucho más sencillo que el de encontrarlas por medio de la función l_x de un grupo seleccionado, y que se encuentra dentro de una Tabla Ultimada y de Grupos Seleccionados.

En nuestro país es poco probable encontrar Tablas de Mortalidad, pues las que aplican las compañías aseguradoras son en general extranjeras, peor aún las Tablas de Grupos Seleccionados no existen, es por esto que vamos a considerar para esta aplicación, la **TABLA I** que contiene probabilidades de mortalidad y los valores correspondientes a la función $l_{[x]+t}$, la cual es un extracto de la original llamada "Tabla Inglesa de Mortalidad para los Seguros" publicada por el Instituto de Actuarios de Estados Unidos.

TABLA I

Extracto de la Tabla Inglesa de Mortalidad para los Seguros.
Publicada por el Instituto de Actuarios

	(1)	*(2)*	*(3)*	*(4)*	*(5)*	*(6)*	*(7)*
[x]	**q[x]**	**q[x]+1**	**qx+2**	**l[x]**	**l[x]+1**	**lx+2**	**X+2**
30	0.0004376	0.0005737	0.0006988	33829	33814	33795	32
31	0.0004532	0.0005992	0.0007381	33807	33791	33771	33
32	0.0004771	0.0006344	0.0007900	33784	33767	33746	34
33	0.0005096	0.0006800	0.0008557	33760	33742	33719	35
34	0.0005511	0.0007365	0.0009366	33734	33715	33690	36

Encontraremos aproximaciones para las fuerzas de mortalidad $\mu_{ij}^{(x)}$ de un grupo de individuos a la edad $[x, x+1)$, que se rigen por un proceso multiestados, basados en la teoría de la Aproximación de un Modelo de Semimarkov, por medio del método de los mínimos cuadrados; luego, hallaremos la matriz de probabilidades de transición $P^{(x)}(1)$, para con ésta encontrar matrices de probabilidad en intervalos mayores a 1 con $P(s+t)$.

4.2 Aplicación

Consideremos el proceso de tres estados de la **Figura 3.3.3.3** para describir la mortalidad del grupo selecto, suponiendo que las fuerzas de transición son constantes en el intervalo de tiempo $[x, x+1)$.

Para estimar $\mu_{12}^{(x)}$, $\mu_{13}^{(x)}$, $\mu_{23}^{(x)}$, necesitaremos de las distintas fuerzas de mortalidad de la **TABLA I**, a las que llamaremos valores tabulados, para las distintas duraciones de una póliza de seguros, dadas para, $t = 0, 1$ por:

$$\mu_{[x-t]+t+1/2}^{T} = -\ln\left(1 - q_{[x-t]+t}^{T}\right) \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

y para $t > 1$ por la fuerza de mortalidad ultimada

$$\mu_{x+1/2}^{T} = -\ln\left(1 - q_{x}^{T}\right) \qquad \textbf{(4.2.2)}$$

Donde T representa el valor tabulado.

La fuerza de mortalidad tabulada se incrementa durante los dos períodos selectos $[0,1)$ y $[1,2)$, y permanece constante después, ésta característica no es considerada en nuestra correspondiente fuerza de mortalidad $\mu^{(x)}(t)$, que se encuentra determinada por la ecuación **(3.3.3.2)**.

PARA LA EDAD $x=32$

TABLA II

Datos Tabulados para $t = 2$, y $x = 32$
con la ecuación **(4.2.1)**

Edad x=32	
Duración	***Datos Tabulados***
0.5	0.000477224
1.5	0.000599420
Ultimada	0.000699064

Por ejemplo, el primer valor de la **TABLA II**, es obtenido al evaluar (4.2.1) para $t = 0$:

$$\mu^{T}_{[32]+1/2} = -ln\left(1 - q^{T}_{[32]}\right)$$

El incluir $1/2$ en **(4.2.1)** y **(4.2.2)**, es para poder determinar un estimador para $\mu^{(32)}_{13}$, ya que cuando $t = 0$, $\mu(t) = \mu_{13}$, El estimador para $\mu_{23}^{(32)}$ supondremos que es el valor tabulado Ultimate de la **TABLA II**.

Sólo nos faltaría estimar $\mu_{12}^{(32)}$, que lo obtendremos al minimizar las desviaciones cuadradas de $\mu^{(32)}(t)$, con la ayuda del computador, es decir minimizamos:

$$\sum_{t=0}^{1}\left[\mu^{T}_{[32-t]+t+1/2} - \mu^{(32)}(t+1/2)\right]^{2}$$

Con ayuda de la expresión **(3.3.3.2)**, para la regresión no lineal.

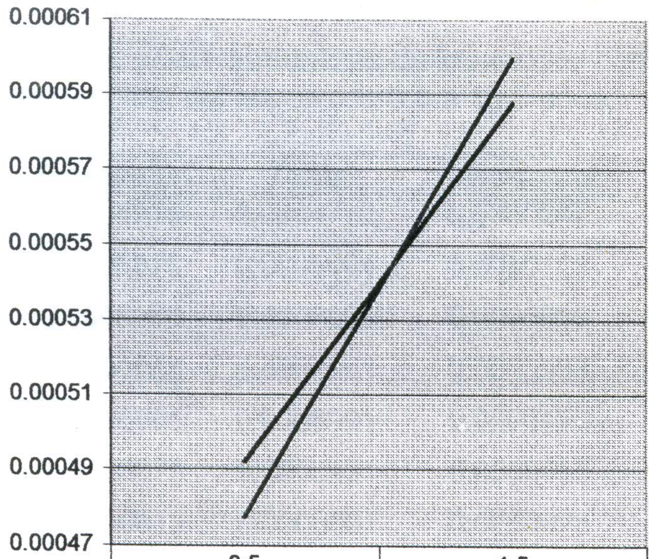
El resultado obtenido es el siguiente:

TABLA III

Estimadores de la Fuerza de Mortalidad para $x = 32$

$\mu^{(32)}_{12}$	$\mu^{(32)}_{13}$	$\mu^{(32)}_{23}$
0.623114499	0.000416126	0.000699064

La parte sombreada representa el valor estimado, con una tolerancia utilizada igual a **0.0001**.



	0.5	1.5
Modelo de Markov	0.000491925	0.000587597
Tabla de Mortalidad	0.000477224	0.00059942

Figura 4.2.1 Comparación de la Fuerza de Mortalidad a la edad de 32 años, dentro del Periodo Selecto de 0.5 a 1.5

En la **Figura 4.2.1**, vemos que tenemos aproximaciones de nuestro Modelo de Markov bastante cercanas a los valores tabulares.

En la **TABLA IV**, se presentan aproximaciones de las fuerzas de mortalidad cuando la póliza del seguro tiene una duración de 0.5 a 10.5 años, graficados en la **Figura 4.2.2**

TABLA IV

Para $x = 32$. Comparación de Fuerzas de Mortalidad con duración de la póliza del seguro de 0.5 a 10.5 años

Duración	*Estimación*	*Tabla*	*|Diferencia|*
0.5	0.0004919	0.0004772	0.0000147
1.5	0.0005876	0.0005994	0.0000118
2.5	0.0006386	0.0006991	0.0000605
3.5	0.0006658	0.0006991	0.0000333
4.5	0.0006801	0.0006991	0.0000190
5.5	0.0006875	0.0006991	0.0000116
6.5	0.0006913	0.0006991	0.0000078
7.5	0.0006931	0.0006991	0.0000060
8.5	0.0006938	0.0006991	0.0000053
9.5	0.0006940	0.0006991	0.0000051
10.5	0.0006939	0.0006991	0.0000052

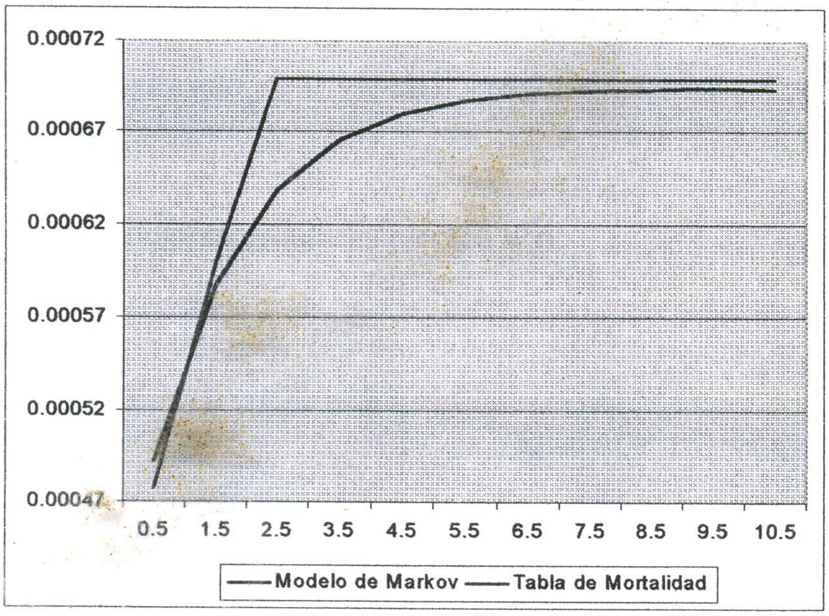


Figura 4.2.2 Comparación de las fuerzas de Mortalidad hasta 10.5 años

Con estos estimadores de la fuerza de mortalidad podemos armar la matriz Q del **Capítulo 3.1**; y luego, hallando sus valores y vectores propios, obtenemos la matriz de probabilidades de transición $P^{(32)}(1)$ con **(3.1.4)**.

Para el modelo de tres estados de la figura **(12.2)**, tenemos que:

$$Q^{(x)} = \begin{bmatrix} -\left(\mu_{12}^{(x)} + \mu_{13}^{(x)}\right) & \mu_{12}^{(x)} & \mu_{13}^{(x)} \\ 0 & -\mu_{23}^{(x)} & \mu_{23}^{(x)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los valores propios para $Q^{(x)}$ serán entonces:

$$\lambda_1 = -\mu_{23}^{(32)} \qquad \lambda_2 = -\left(\mu_{12}^{(32)} + \mu_{13}^{(32)}\right) \qquad \lambda_3 = 0$$

Y los correspondientes vectores propios son:

$$v1 = \begin{bmatrix} -\mu_{12}^{(x)} / -\mu_{12}^{(x)} - \mu_{13}^{(x)} + \mu_{23}^{(x)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $x = 32$, tendremos entonces que los valores y vectores propios son los siguientes:

TABLA V

Valores propios de Q

λ_1	λ_2	λ_3
-0.00069906	-0.62353062	0

$$v1 = \begin{bmatrix} 1.0004543 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Presentamos ahora la matriz $P^{(32)}(1)$, definida por $P(t) = Adiag(e^{\lambda_1 t},....e^{\lambda_k t})A^{-1}$, para $t = 1$, donde t representa 1 año después de la edad x, es decir, estas probabilidades están dentro del intervalo $[x, x+1)$ donde las fuerzas de mortalidad son constantes.

$$\begin{bmatrix} 1.0004543 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9993012 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5360485 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1.000454 & 0.0004543 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{(32)}(1)=\begin{bmatrix} 0.5360485 & 0.4634631 & 0.0004884 \\ 0 & 0.9993012 & 0.0006988 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con un procedimiento similar tenemos que para $x = 33$ y $x = 34$, los resultados obtenidos son los siguientes:

PARA LA EDAD x=33

TABLA VI

Datos Tabulados para $t = 2$, y $x = 33$
con la ecuación **(4.2.1)**

Edad x=33	
Duración	***Datos Tabulados***
0.5	0.000509740
1.5	0.000634661
Ultimada	0.000738403

La parte sombreada de la **TABLA VII**, representa el valor estimado, con una tolerancia utilizada igual a **0.0001**.

TABLA VII

Estimadores de la Fuerza de Mortalidad para $x = 33$

$\mu^{(33)}_{12}$	$\mu^{(33)}_{13}$	$\mu^{(33)}_{23}$
0.625918755	0.000447279	0.000738403

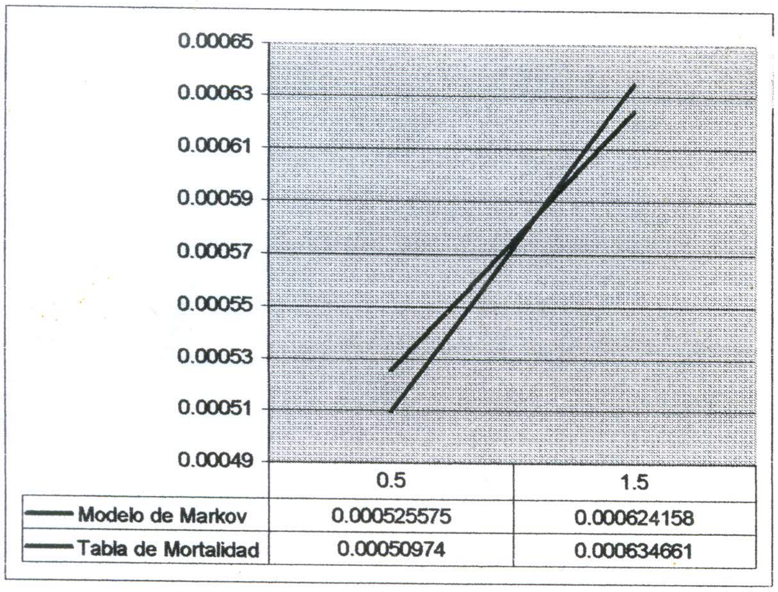


Figura 4.2.3 Comparación de la Fuerza de Mortalidad a la edad de 33 años, dentro del Periodo Selecto de 0.5 a 1.5

TABLA VIII

Para $x = 33$. Comparación de Fuerzas de Mortalidad con duración de la póliza del seguro de 0.5 a 10.5 años

Duración	***Estimación***	***Tabla***	***|Diferencia|***
0.5	0.0005256	0.0005097	0.0000159
1.5	0.0006242	0.0006347	0.0000105
2.5	0.0006766	0.0007384	0.0000618
3.5	0.0007044	0.0007384	0.0000340
4.5	0.0007189	0.0007384	0.0000195
5.5	0.0007265	0.0007384	0.0000119
6.5	0.0007303	0.0007384	0.0000081
7.5	0.0007320	0.0007384	0.0000064
8.5	0.0007327	0.0007384	0.0000057
9.5	0.0007329	0.0007384	0.0000055
10.5	0.0007327	0.0007384	0.0000057

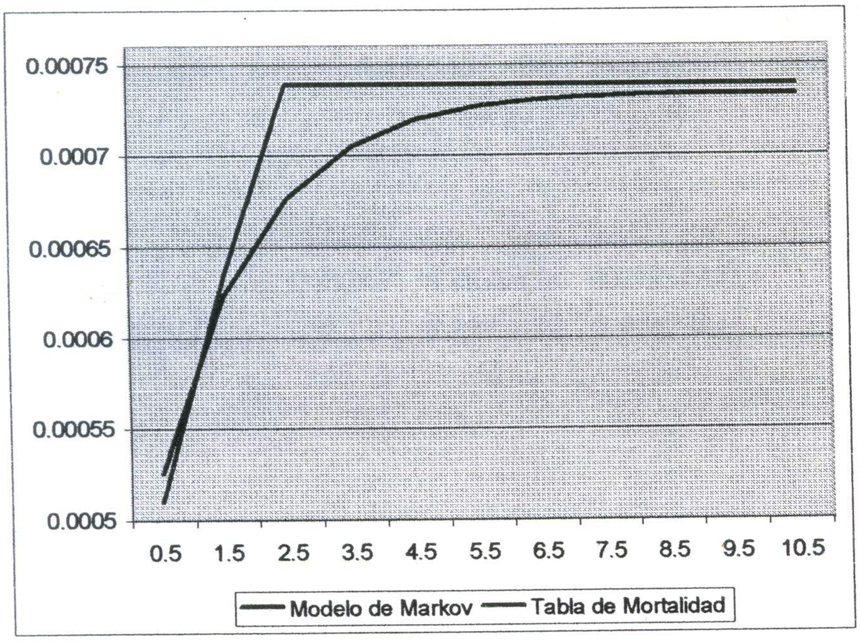


Figura 4.2.4 Comparación de las fuerzas de Mortalidad hasta 10.5 años

TABLA IX

Valores propios de $Q^{(33)}$

λ_1	λ_2	λ_3
-0.0007384	-0.62636603	0

Los vectores propios y la Matriz $P^{(33)}(1)$ se detallan a continuación:

$$v1 = \begin{bmatrix} 1.0004653 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0004653 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9992619 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5345307 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1.000465 & 0.0004653 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{(33)}(1) = \begin{bmatrix} 0.5345307 & 0.4649474 & 0.0005219 \\ 0 & 0.9992619 & 0.0007381 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PARA LA EDAD x=34

TABLA X

Datos Tabulados para $t = 2$, y $x = 34$
con la ecuación **(4.2.1)**

Edad x=34	
Duración	***Datos Tabulados***
0.5	0.000551322
1.5	0.000680241
Ultimada	0.000790352

La parte sombreada de la **TABLA XI**, representa el valor estimado, con una tolerancia utilizada igual a **0.0001**.

TABLA XI

Estimadores de la Fuerza de Mortalidad para $x = 34$

$\mu^{(34)}_{12}$	$\mu^{(34)}_{13}$	$\mu^{(34)}_{23}$
0.618545865	0.000486862	0.000790352

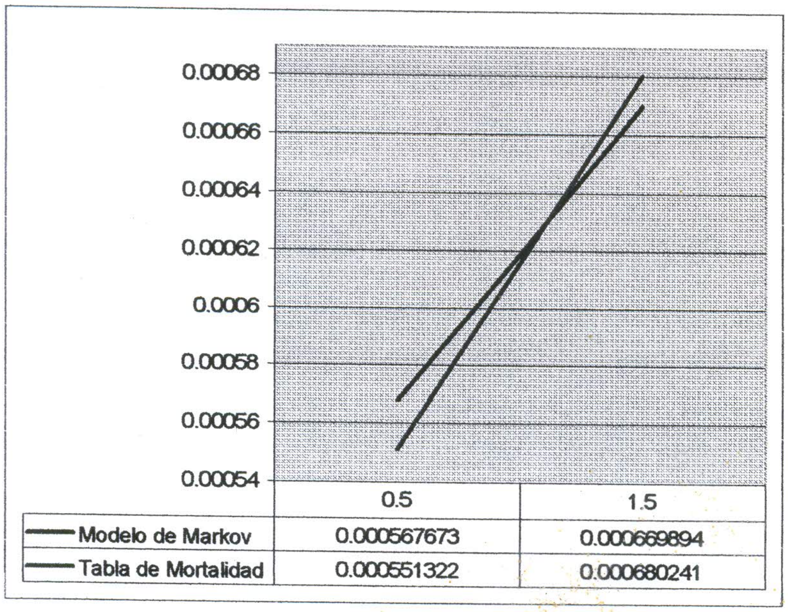


Figura 4.2.5 Comparación de la Fuerza de Mortalidad a la edad de 34 años, dentro del Periodo Selecto de 0.5 a 1.5

TABLA XII

Para $x = 34$. Comparación de Fuerzas de Mortalidad con duración de la póliza del seguro de 0.5 a 10.5 años

Duración	Estimación	Tabla	|Diferencia|
0.5	0.0005677	0.0005513	0.0000164
1.5	0.0006699	0.0006802	0.0000103
2.5	0.0007246	0.0007904	0.0000658
3.5	0.0007538	0.0007904	0.0000366
4.5	0.0007692	0.0007904	0.0000212
5.5	0.0007773	0.0007904	0.0000131
6.5	0.0007813	0.0007904	0.0000091
7.5	0.0007832	0.0007904	0.0000072
8.5	0.0007839	0.0007904	0.0000065
9.5	0.000784	0.0007904	0.0000064
10.5	0.0007838	0.0007904	0.0000066

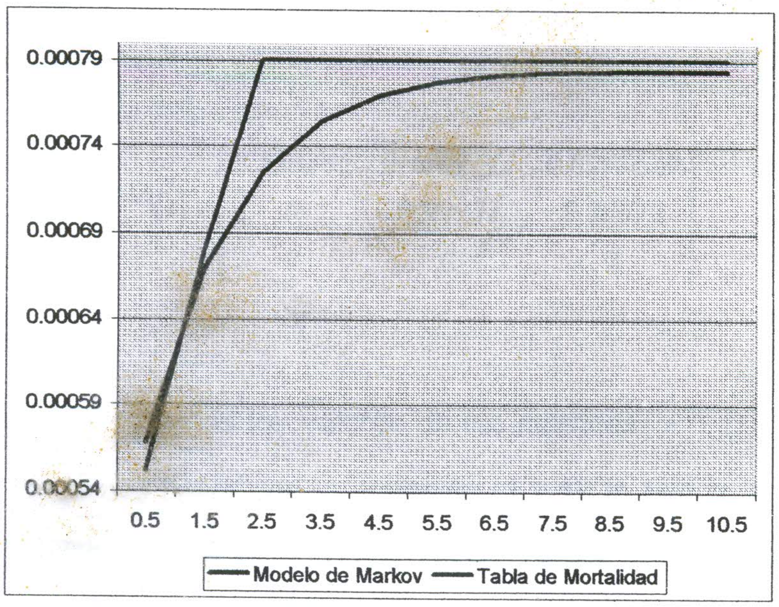


Figura 4.2.6 Comparación de las fuerzas de Mortalidad hasta 10.5 años

TABLA XIII

Valores propios de $Q^{(34)}$

λ_1	λ_2	λ_3
-0.00079035	-0.61903273	0

Los vectores propios y la Matriz $P^{(34)}(1)$ son los que siguen:

$$v1 = \begin{bmatrix} 1.0004909 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0004909 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.99921 & 0 & 0 \\ 0 & 0.538465 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1.000491 & 0.0004909 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{(34)}(1) = \begin{bmatrix} 0.538465 & 0.4609711 & 0.0005639 \\ 0 & 0.99921 & 0.00079 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, ya que tenemos los valores de las matrices, $P^{(32)}(1)$, $P^{(33)}(1)$, $P^{(34)}(1)$, podemos hallar con la ecuación **(3.2.1)**, la Matriz $P(32,34)$ y $P(32,35)$, para poder ilustrar la proximidad con los valores reales.

$$P(32,34)=\begin{bmatrix} 0.286534406 & 0.712355372 & 0.001110222 \\ 0 & 0.998563566 & 0.001436434 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(32,35)=\begin{bmatrix} 0.154288757 & 0.843876665 & 0.001834578 \\ 0 & 0.997774661 & 0.002225339 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La **TABLA XIV**, muestra las probabilidades de supervivencia, de un individuo que se asegura a los 32 años.

TABLA XIV

Comparación de Probabilidades de Supervivencia

t	$_tp^T_{[32]}$	$1\text{-}p_{13}(32,32+t)$	$\lvert Diferencia \rvert$
1	0.99952289	0.999511625	0.000011265
2	0.998875207	0.998889778	0.000014571
3	0.998076012	0.998165422	0.000089410

La probabilidad $_2p^T_{[32]}$, por ejemplo, es obtenida de la **TABLA I**, de la siguiente manera:

$$_2p^T_{[32]}=\frac{l_{34}}{l_{[32]}}=\frac{33746}{33784}=0.998875207$$

Como vemos, el valor de los datos de nuestro Modelo de Markov son muy cercanos a los obtenidos de la Tabla de Mortalidad, concluyendo entonces que el Modelo propuesto nos sirve para estimar valores de probabilidad bastante aproximados a los reales y además, toma en cuenta la duración dentro del estado de **VIDA**, separándolo en dos estados, **SELECTO** y **ULTIMO**, donde el primero tiene una duración de t años.

BIBLIOGRAFIA

1. Sociedad de Actuarios. Matemáticas Actuariales, Estados Unidos 1994. Páginas 1-50

2. Bruce L. Jones, Actuarial Calculations using a Markov Model, Iowa Canadá 1994. Páginas 1-29

3. Richard I. Burden, J. Douglas Faires. Análisis numérico, Editorial Iberoamérica, Estados Unidos 1985. Páginas 318-373

4. Richard L. Scheaffer, James T. McClave, Probabilidad y Estadística para Ingeniería. Editorial Iberoamérica, Estados Unidos 1993. Páginas 24-113

5. Angle Vera Pérez Estadística. Aplicaciones econométricas y actuariales. Ediciones Pirámide 1981. Páginas.188-280

CONCLUSIONES

1. Problemas Actuariales considerados por medio de procesos multiestados, hace más fácil los cálculos de probabilidades de transición, que por medio de las Tablas de Mortalidad para Grupos Seleccionados, ya que representamos de forma matricial los valores de las fuerzas de transición de los distintos estados, haciendo visible las probabilidades de pasar de un estado a otro, sin recurrir al cálculo matemático con la función l_x.

2. En el área de seguros de vida, cálculo de anualidades y primas netas usualmente se estudian grupos generales de personas, que pueden ser divididos en subgrupos que presenten una característica específica, si aquellos son analizados por medio de técnicas actuariales, los resultados obtenidos son más seguros y confiables porque las probabilidades de vida o muerte de los individuos del nuevo grupo homogéneo, son evidentemente más exactas, con respecto a su característica común. Por ejemplo, la probabilidad de supervivencia de un conjunto de personas de 25 años que padecen una enfermedad terminal, está claro que es más baja comparada con el valor del mismo cálculo con individuos de la misma edad pero sin esta particularidad.

3. El Modelo Propuesto toma en consideración el tiempo de permanencia dentro de un estado determinado, lo que nos ayuda a determinar probabilidades de transición que dependen de una variable de espera que podría tener una distribución exponencial y por lo tanto es posible estudiar el número de eventos futuros por medio de un proceso de Poisson, donde los eventos son los saltos de un estado a otro hasta llegar a la muerte.

4. Por el mismo hecho de no existir suficiente cultura actuarial en el país no se encuentran estudios referenciales acerca de grupos humanos específicos, que sean bases de futuros estudios para poder construir tablas de mortalidad de grupos selectos, si por ejemplo hubieran estadísticas de personas con edad comprendida entre los 30 y 60 años que trabajan en fábricas industriales y que sufren accidentes laborales, se pudiera entonces construir tablas de grupos seleccionados con la finalidad de estudiar los efectos en el cálculo de fondos de pensión.

RECOMENDACIONES

1. Deberían ser construidas Tablas de Mortalidad Generales y de Grupos Seleccionados, ya que en nuestro país no existen y las utilizadas por las compañías aseguradoras locales, generalmente son Tablas mexicanas o españolas, esto es debido a que las ciencias actuariales no han sido completamente desarrolladas en nuestro medio. El hecho de utilizar funciones de probabilidades de supervivencia que no corresponden a la realidad ecuatoriana implica mucho más riesgo en las inversiones de contratos de seguros de cualquier índole. Por citar un ejemplo, la tasa de mortalidad infantil en el Ecuador es mayor que la de España, evidentemente esto sucede por las condiciones de vida de ambos países.

2. Recomiendo al Instituto de Ciencias Matemáticas crear, mantener y actualizar constantemente, una biblioteca, a la que cada estudiante o profesional o cualquier interesado, tenga acceso a información referente a las ciencias actuariales, porque en el desarrollo de este trabajo tuve inconvenientes al momento de conseguir fuentes bibliográficas.

3. Por parte de grupos organizados, por ejemplo, los colegios de profesionales, pueden hacer estudios relacionados con cada una de las

ramas de la ciencia, con el fin de recolectar información para un futuro desarrollo de tablas de mortalidad para grupos selectos.