



ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL
Instituto de Ciencias Matemáticas

"Construcción de una Tabla de Mortalidad para la Población
Ecuatoriana"

T E S I S D E G R A D O

**Previa a la obtención del Título de:
INGENIERO EN ESTADISTICA INFORMATICA**

Presentada por:

Javier Fernando Sánchez Nevárez



GUAYAQUIL - ECUADOR

A Ñ O

2 0 0 0

AGRADECIMIENTO

**A mis maestros, a mi familia, que
en todo momento me brindaron su
apoyo para continuar, y a Dios.**

DEDICATORIA

A MI ESPOSA

AMI HIJA

A MIS PADRES

A MIS HERMANOS

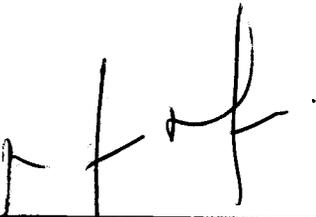
TRIBUNAL DE GRADO



M.Sc. Fabio Alvarez Zamora
SUBDIRECTOR
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS



Mat. Fernando Sandoza Sánchez
DIRECTOR DE TESIS



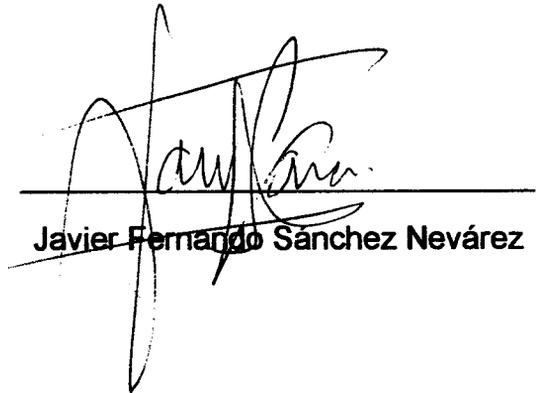
M.Sc. Margarita Martínez Jara
VOCAL



Ing. Alfredo Govea Maridueña
VOCAL

DECLARACIÓN EXPRESA

“La responsabilidad del contenido de esta Tesis de Grado, me corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la Escuela Superior Politécnica del Litoral”



Javier Fernando Sánchez Nevárez

RESUMEN

El presente trabajo muestra de manera sistemática el desarrollo de una tabla actuarial para la población ecuatoriana en general, y para la población, tanto masculina como femenina, las que fueron construidas en base a los datos empíricos demográficos del Ecuador, fundamentado en la teoría actuarial.

En los primeros capítulos se busca explicar las bases teóricas actuariales que conllevan a la construcción de las tablas, para luego en los capítulos posteriores, implementar la teoría y llegar a los resultados correspondientes.

Además se incluye en este estudio, un análisis comparativo entre las tablas resultantes. Se exponen también algunos modelos analíticos clásicos y se implementa el modelo de Makeham para obtener una tabla de mortalidad en base a este modelo.

ÍNDICE GENERAL

	Pág.
RESUMEN	VI
INDICE GENERAL	VII
1. INTRODUCCIÓN	10
2. IMPORTANCIA DE LA MATEMÁTICA ACTUARIAL	14
2.1. Generalidades.....	14
2.2. La esperanza matemática de la utilidad	16
2.3. Los seguros.....	20
3. MARCO TEÓRICO EN LA CONSTRUCCIÓN DE UNA TABLA DE MORTALIDAD..	23
3.1. La función de supervivencia.....	23
3.2. Tiempo de vida futura para un individuo de edad x	25
3.3. Fuerza de mortalidad.....	27
3.4. Funciones básicas de una tabla de mortalidad.....	30
3.4.1. Número esperado de sobrevivientes	30
3.4.2. Número total de años vividos	33
3.4.3. Esperanza de vida abreviada y completa	33
3.4.4. Número total esperado de años de supervivencia	35
3.5. Algunas leyes de mortalidad conocidas.....	36
3.5.1. Modelo de Gompertz.....	36
3.5.2. Modelo de Makeham	37
3.5.3. Modelo ampliado de Makeham.....	43
3.6. Descripción de la base de datos.....	46

3.6.1. Omisión de personas..	47
3.6.1.1 Omisión completa de áreas geográficas..	48
3.6.1.2 Omisión de personas aisladas.....	48
3.6.1.3 Omisión completa de viviendas.....	48
3.6.2. Mala declaración de la edad.....	48
4. CONSTRUCCION DE LA TABLA DE MORTALIDAD PARA LA POBLACIÓN ECUATORIANA..	49
4.1. Ajuste preliminar de datos.....	49
4.1.1. Interpolación cúbica segmentaria.....	55
4.2. Estimación de los parámetros utilizando las estadísticas demográficas	58
4.3. Tablas de mortalidad.....	62
4.3.1. Tabla de mortalidad de la población ecuatoriana general.	62
4.3.2. Tabla de mortalidad de la población masculina del Ecuador....	67
4.3.3. Tabla de mortalidad de la población femenina del Ecuador.....	71
4.4. Análisis comparativo de los datos.....	76
4.5. Construcción de una tabla de mortalidad utilizando el modelo de Makeham.....	80
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	84
5.1 Conclusiones.....	84
5.2 Recomendaciones.....	86

ANEXOS

BIBLIOGRAFIA

CAPITULO 1

1 INTRODUCCIÓN

Los seguros se perfilan como **tales** desde la Baja Edad Media, como consecuencia del tráfico marino, ya que este era el principal medio de transporte para la comercialización de productos en lugares distantes, de tal manera que con cierta regularidad sufrían naufragios, perdiéndose la embarcación con toda su carga, entonces apareció una especie de seguros para prevenir las posibles pérdidas. Así, es natural que la cuna de estos seguros de transporte fueran las ciudades marítimas italianas, donde el tráfico de navíos era frecuente.

La ley más antigua que se conoce relativa a los contratos de seguros data del 22 de Octubre de 1369, sin embargo algunos estudiosos indican que la ciencia actuarial como tal tiene sus inicios en 1693, año en el cual Edmund **Halley** publicó un **artículo** titulado “Un Estimado del Grado de Mortalidad de la Humanidad, Obtenidas de Varias Tablas de Edades y Funerales en la

Ciudad de Breslau” , publicación que provocó mucho interés por sus sorprendentes ideas y notaciones modernas. No obstante, la gran cantidad de datos que era necesario procesar para la obtención de una tabla de mortalidad, hizo que la esta ciencia tenga un gran desarrollo en la época moderna.

En los primeros pasos de la invención del chip, los actuarios, con sistemas primitivos de computación, ponían mayor énfasis en el manejo y control de los sistemas de seguros; hoy en día, en una época en que contamos con computadoras que nos ofrecen un alto rendimiento y velocidad en los cálculos y manejo de datos, de tal manera que ahora se tienen grandes ventajas. Así, el enfoque hoy en día es poner más atención en dar creativas soluciones a las demandas de la sociedad, que busca seguridad financiera.

Los modelos construidos en los inicios de la ciencia actuarial todavía son usados, sin embargo, el medio en el cual esta se desenvuelve, sigue cambiando y es necesario revisar periódicamente los fundamentos de la misma en respuesta a esos cambios.

Una tabla de mortalidad es un componente **indispensable** para muchos modelos actuariales, ya que en ellas se encuentran tabulados parámetros de interés, **tales** como: número de sobrevivientes, número de muertes, probabilidades de muerte y sobrevivencia, por años individuales o grupos de

edad, y otros que veremos en el transcurso de este trabajo con la finalidad de obtener los valores de las rentas de supervivencia y seguros en términos monetarios.

Para la construcción de una tabla de mortalidad la unidad estadística mínima es el individuo, tratado como un elemento de una población específica, en este caso, de la población del Ecuador.

La importancia de la ciencia actuarial es indiscutible en los tiempos modernos donde la prevención juega un papel preponderante en los negocios y la vida moderna. En este trabajo se mencionarán algunos puntos importantes sobre la importancia económica de las matemáticas actuariales, luego se desarrollará la base de la teoría actuarial direccionada a la construcción de las tablas actuariales así como las facetas de construcción de las mismas, para luego poner en práctica todas estas fases y llegar así a construir una tabla de mortalidad para la población ecuatoriana derivada de los cálculos apoyados en las estadísticas de nacimientos y defunciones, y en los datos poblacionales del censo de población de 1990.

Asimismo, se presenta en este trabajo, los resultados de la **mortalidad** de un individuo ecuatoriano en general, y desagregado según el sexo, lo que permite hacer comparaciones sobre la población masculina y femenina.

Por último es importante observar que las tablas encontradas son válidas únicamente para la población ecuatoriana, y sobre la base de los datos del último censo de población hecho en el año de 1990. Se hace además, un análisis comparativo de los patrones de mortalidad y supervivencia entre los grupos según el sexo, y de la población ecuatoriana en general con una tabla de mortalidad norteamericana.

CAPITULO 2

2 IMPORTANCIA DE LA MATEMATICA ACTUARIAL

2.1 Generalidades

El mundo financiero de hoy ofrece una gran variedad de instrumentos que implican riesgo, y la generación de obligaciones y derechos a futuro. Los eventos fortuitos dan lugar muchas veces a frustrar planes de negocios, sin embargo, las consecuencias de esos eventos aleatorios que pueden ser medidos en términos monetarios, pueden ser reducidas mediante las operaciones de seguros.

La necesidad de los seguros en las sociedades modernas se ha incrementado **y**, en respuesta, nuevos sistemas de seguridad social y beneficios para los empleados de las empresas han sido construidos.

Las personas o las organizaciones siempre tienen planes y expectativas sobre el camino que deben seguir en su vida. Sin embargo esos planes

pueden ser frustrados ocasionalmente porque estos han sido impulsados bajo suposiciones poco realistas. En otras situaciones, interfieren circunstancias fortuitas.

La matemática actuarial se define como la rama del conocimiento que trata con las matemáticas de los seguros y las pensiones, que tiene por objeto asegurar la correcta evaluación de los riesgos y la suficiencia de las primas, aportaciones y provisiones necesarias para el pago de obligaciones y beneficios futuros, basada en el uso del criterio de la esperanza matemática de la utilidad. Así, la matemática actuarial nos da las herramientas para diseñar sistemas de aseguramiento nos protejan de los daños financieros producidos por estos eventos.

Algunos ejemplos donde los eventos aleatorios podrían causar pérdidas financieras son:

- La destrucción de propiedades por incendios es generalmente considerado como un evento aleatorio, y este puede ser medido en términos monetarios.
- Una pérdida financiera como resultado de negligencia.
- Pérdida de vidas humanas de las cuales dependen instituciones o familias.

- Un individuo que sobrevive a una edad avanzada, el cual necesita medir los costos de lo que le resta de vida para poder ser cubiertos.

Sin embargo, debemos comprender que implementar un plan de protección por medio de seguros tiene sus limitaciones. Los seguros están diseñados para reducir todas esas pérdidas posibles que pueden ser expresadas en términos monetarios. Otro tipo de pérdidas podrían ser relevantes, pero no manejables por un sistema de seguros para reducir su impacto. Por ejemplo el dolor y el sufrimiento pueden ser causados por eventos aleatorios, no obstante, los planes de seguros no han sido posibles por la dificultad de medir dicha pérdida en unidades monetarias.

Una segunda limitación es que los seguros no reducen directamente la probabilidad de pérdida. La presencia de un seguro contra incendios, no reduce la probabilidad de que suceda el evento. Sin embargo, un sistema de seguros a menudo nos provee de incentivos financieros para superar la pérdida económica.

2.2 La esperanza matemática de la utilidad

No podemos prever los acontecimientos que de alguna manera podrían interferir con los planes o con el normal flujo de caja, entonces es importante determinar cómo pueden decidirse las inversiones en presencia de flujos

aleatorios. Para esto es preciso contar con una teoría que tome en cuenta la esperanza matemática de los recursos y el riesgo asumido para la obtención de ellos.

Una solución al problema es definir el valor esperado de un proyecto económico, el cual, como en la mayoría de los proyectos, está sometido al factor incertidumbre. Así, por el principio de los valores esperados, la distribución de los posibles sucesos (y como consecuencia de esto, el planteamiento de muchos escenarios con la finalidad de tomar decisiones), puede ser reemplazado por un solo valor, el valor esperado de los flujos monetarios. En economía, el valor esperado de los flujos aleatorios de pagos monetarios en un proyecto es llamado *valor actuarial* del proyecto.

Para desarrollar una teoría de decisión racional en un ambiente de incertidumbre, es necesario establecer algunas hipótesis con respecto al comportamiento individual. Si se supone que todos los **decisores** prefieren tener más que menos, esto es llamado por algunos autores “axioma de no saciedad”, entonces es todo lo que se precisa para fundamentar la utilización de la esperanza matemática de la utilidad como criterio de elección en un futuro aleatorio y determinar una función de utilidad del **decisor**.

Según lo explicado, los **decisores** tratarán de maximizar la esperanza matemática de la utilidad. El axioma de no saciedad implica que todas las funciones de utilidad deben ser monótonas crecientes, lo que da a lugar que la utilidad marginal sea siempre positiva, esto es, $u'(r) > 0$, donde $u(r)$ representa la función de utilidad al disponer de una cantidad de recursos r .

Cuando la función de utilidad es cóncava y la utilidad marginal con respecto a los recursos es creciente, $u''(r) < 0$, y se dice que se tiene aversión al riesgo, es decir que el **decisor** recibe más utilidad esperada del valor actuarial del juego obtenido con certidumbre.

Cuando la función de utilidad es convexa y la utilidad marginal con respecto a los recursos es creciente $u''(r) > 0$, y se **dice** que el inversor tiene propensión al riesgo. Finalmente si la función de utilidad crece de manera constante, entonces, se trataría de una recta, y se dice que tiene indiferencia hacia el riesgo.

Como ejemplo, podríamos suponer entonces que sin tenemos una inversión/ de **S/** 1'000.000 y si la probabilidad de perderlos es 0.1 entonces deberíamos pagar por un seguro **S/** 100.000, sin embargo al pagar ese monto el valor de retorno de nuestra inversión sería $1'000.000 - 100.000 = 900.000$, entonces no hemos asegurado la totalidad de nuestro capital.

Construyamos ahora una función de utilidad $u(w)$ lineal para nuestro problema, donde w es el monto de nuestra inversión, y determinemos arbitrariamente el punto $w=0$ y uno adicional de un monto de inversión w en particular, además $u(1'000.000) = 0$ y $u(0) = -1$, de tal manera que la función está bien definida.

Entonces la pregunta que nos deberíamos hacer es: Cuál es el máximo valor que estaríamos dispuestos a pagar para asegurar la totalidad del capital? Es decir, para qué valor de X se da lo siguiente:

$$u(1'000.000 - X) = 0.7 u(1'000.000) + 0.9 u(0)$$

Lo mismo es decir lo siguiente: Cuál es el máximo monto que se pagaría para un seguro completo en una situación en donde podemos perder un valor de inversión w_1 con una probabilidad de p o retener el valor de inversión, esto es no invertir, asociado a probabilidad de $(1-p)$. La solución es encontrar el valor de X tal que:

$$u(w_1 - X) = (p) u(w_1) + (1-p) u(0).$$

Esta función también puede ser usada para comparar dos o más prospectos económicos aleatorios que pueden ser denotados por la variables aleatorias X , Y se puede rechazar un prospecto Y a favor de el

otro X si

$$E[u(w + X)] > E[u(w + Y)]$$

Esta teoría es usada así por las compañías aseguradoras para hacer el cálculo de primas que un asegurado tendría que pagar por un seguro, así la teoría de la utilidad es de suma importancia para los sistemas de seguros.

2.3 Los seguros

A nivel mundial, las ciencias actuariales se identifican con el negocio de seguros, los sistemas de pensiones y programas de beneficios para empleados, la seguridad social, los sistemas provisionales de salud y, en forma más general, con negocios en los que se requiere administrar financieramente el riesgo.

Las operaciones de seguros se encargan de evaluar las consecuencias financieras de los múltiples riesgos que enfrentan los individuos, las colectividades, las empresas y la sociedad en general, con objeto de diseñar mecanismos idóneos para financiar el impacto de estos eventos y calcular el precio o costo de las transferencias de riesgo o los fondos

correspondientes.

Así, un sistema de seguros es un mecanismo para reducir el impacto financiero de eventos aleatorios, de tal manera que los resultados sean razonablemente esperados. La justificación económica de tener un sistema de seguros es que esto contribuye a que los planes no sean frustrados por eventos fortuitos. Tales sistemas contribuyen también al crecimiento de productividad por **incentivar** a las empresas o a los individuos para tomar decisiones o invertir en proyectos en los que de otra manera, si fracasan, incurrirían en costos muy grandes. El desarrollo de seguros marinos para reducir el impacto financiero de los peligros del océano es un ejemplo de esto. El comercio exterior así es más especializado y productivo al ser los socios mutuamente beneficiados por un sistema de seguro que cubra posibles pérdidas.

Para examinar el rol de los seguros en la economía utilicemos la siguiente ilustración: consideremos un propietario de algún bien que puede ser destruido en un periodo determinado. El monto de la pérdida, que podría ser 0, es una variable aleatoria que la vamos a denotar por X . Vamos a asumir que la distribución de X es conocida. Entonces $E[X]$, la pérdida esperada en el siguiente periodo puede ser interpretada como la pérdida promedio a largo plazo, al ser expuesta la propiedad a la destrucción en varios experimentos

bajo idénticas condiciones.

Supongamos que una compañía aseguradora (Asegurador) es contratada para ayudar a reducir el impacto de las consecuencias financieras que tendría el dueño de la propiedad (Asegurado) en el caso de que ocurriese un evento que destruyese su propiedad. El asegurador establece un contrato en el cual se compromete a pagar al asegurado un monto definido igual o menor al de la pérdida financiera si la propiedad fuera destruida durante el periodo del contrato. En cambio por el compromiso adoptado por el asegurador, el asegurado, paga una suma considerable (prima). El contrato es de interés para el asegurado cuando el monto de la prima es inferior al monto de la pérdida ocasionada por la destrucción de la propiedad.

Existen algunos modelos simples de políticas de seguros basados en la ocurrencia o no ocurrencia de sucesos (variables aleatorias Bernoulli). En el caso de los seguros de vida, es necesario describir la distribución de probabilidad del tiempo antes de la muerte, mediante la construcción de una tabla de mortalidad.

CAPITULO 3

3 MARCO TEÓRICO EN LA CONSTRUCCIÓN DE UNA TABLA DE MORTALIDAD

Ahora nos centraremos en el estudio de las bases teóricas para la construcción de una tabla de mortalidad, sin embargo, antes debemos desarrollar un conjunto de conceptos para describir la distribución del tiempo de supervivencia y la de la variable aleatoria asociada a la edad de fallecimiento.

3.1 La función de supervivencia

Denotemos por X la variable asociada al tiempo de vida de un ente (esto es, individuos, empresa, bien material, etc.), X es **continua** y puede tomar valores desde 0 (cero) al límite superior de supervivencia. Sea $F(x)$ la función de distribución de X , esto es

$$F(x) = P(X \leq x) \quad x \geq 0 \quad (3.1.1)$$

Y sea

$$s(x) = 1 - F(x) = P(X > x) \quad x \geq 0 \quad (3.1.2)$$

Entonces, como $F(0) = 0$, se tiene que $s(0) = 1$. Para cualquier x positivo, $s(x)$ representa entonces la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad de x años. Así, $s(x)$ es llamada **función de supervivencia**. La distribución de X puede ser definida bien por $F(x)$ o por $s(x)$.

Usando las leyes de probabilidad podemos construir una expresión para la probabilidad de que un recién nacido muera entre las edades x y z en términos de la función de distribución de X o de la función de supervivencia.

$$\begin{aligned} P(x < X \leq z) &= F(z) - F(x) \\ &= (1 - s(z)) - (1 - s(x)) \\ &= s(x) - s(z) \end{aligned}$$

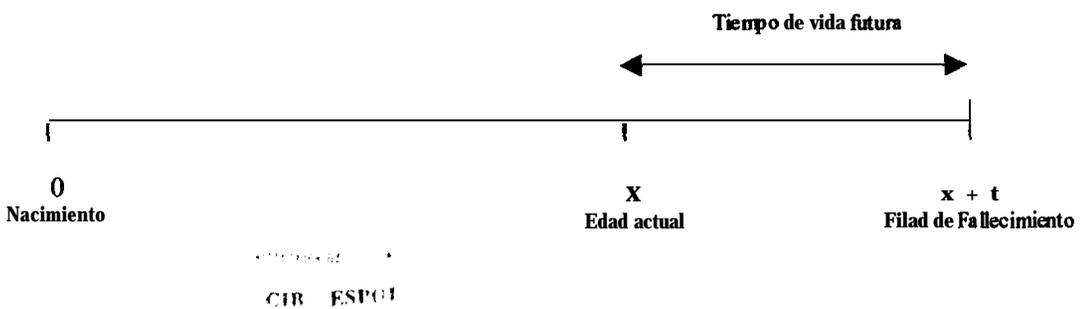
De la misma forma, la probabilidad condicional de que un individuo muera entre las edades x y z , dado que ha cumplido la edad x , es

$$P(x < X \leq z \mid X > x) = \frac{F(z) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{s(x) - s(z)}{s(x)} \quad (3.1.3)$$

3.2 Tiempo de vida futura para un individuo **de edad x**

El símbolo (x) será usado para denotar a un individuo de edad x . Al tiempo de vida futura de (x) para un individuo de edad x , lo denotaremos como $T(x)$. Entonces tenemos que $X=T+x$ es la edad de muerte del individuo.

Figura 3.1



Definamos ahora la función de distribución de $T(x)$, ${}_tq_x$:

$${}_tq_x = P(T(x) \leq t) \quad t \geq 0$$

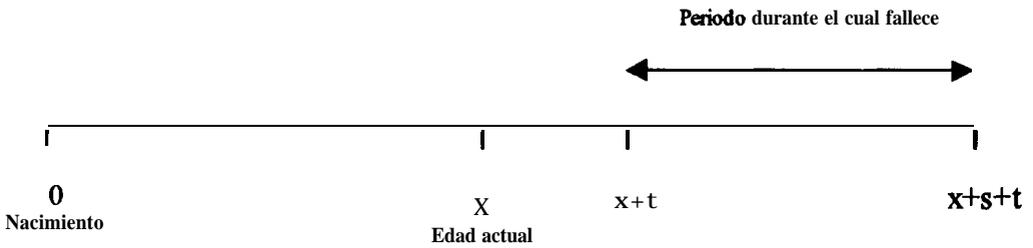
Es decir, ${}_tq_x$ es la probabilidad de que un individuo de edad x muera dentro de t años. Así mismo, se define la función de sobrevivencia para (x) , ${}_tp_x$:

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P(T(x) > t) \quad (3.2.1)$$

Donde ${}_tp_x$ representa la probabilidad de que un individuo (x) alcance la edad $x + t$. En el caso particular de un recién nacido, $T(0) = X$. Otro símbolo usado

en matemáticas actuariales es ${}_{s|t}q_x$ que representa la probabilidad de que (x) llegue a la edad t y muera en el lapso de los siguientes s años.

Figura 3.2



$$\begin{aligned} {}_{s|t}q_x &= P (t < T(x) \leq t+s) \\ &= {}_{t+s}q_x - {}_tq_x \\ &= {}_t p_x - {}_{t+s} p_x \end{aligned}$$

En términos de probabilidades condicionales podemos escribir:

$${}_t p_x = \frac{{}_{x+t} P_0}{{}_x P_0}$$

y,

$$\begin{aligned} {}_{t|u} q_x &= \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)} \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x+t)} \\ &= {}_t p_{xu} q_{x+t} \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

3.3 Fuerza de mortalidad

Ahora, describiremos la distribución de probabilidad de muerte en un futuro cercano dado que ha llegado a la edad x . Para el caso de una distribución continua, podemos expresar esta probabilidad como:

$$P(x < X \leq x + \Delta x / X > x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \quad (3.3.1)$$

Usando la fórmula de Taylor de primer orden para aproximar $F(x+h)-F(x)$ por medio de $F'(x)h$ con un error cometido de $O(h)$, y teniendo $F'(x) = f(x)$, obtenemos:

$$P(x < X \leq x + \Delta x / X > x) = \frac{f(x)\Delta x}{1 - F(x)}$$

Y luego:

$$\frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{P(x < X \leq x + \Delta x / X > x)}{\Delta x}$$

Donde $z-x=\Delta x$, y Δx representa un intervalo infinitesimal comprendido entre x y $x+\Delta x$. En esta expresión $f(x)$ es la función de distribución de una variable de tiempo de vida continua.

Es decir, la función

$$\frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Nos representa la probabilidad de que (x) muera en un intervalo infinitesimal comprendido entre x y $x+\Delta x$, y le llamamos tasa instantánea de mortalidad o fuerza de mortalidad y se la denota por μ_x . Las propiedades de f(x) y de $1-F(x)$ implican que $\mu_x \geq 0$.

Partiendo de:

$$\frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{-s'(x)}{s(x)} = \mu_x$$

Y haciendo $x = y$ obtenemos:

$$-\mu_y dy = d \ln s(y)$$

Integrando a ambos lados desde x a $x+n$, tenemos

$$\int_x^{x+n} -\mu_y dy = \int_x^{x+n} d \ln s(y) = \ln(s(x+n)) - \ln(s(x))$$

$$-\int_x^{x+n} \mu_y dy = \ln \left[\frac{s(x+n)}{s(x)} \right]$$

Luego

$${}_n p_x = \exp \left(- \int_x^{x+n} \mu_y dy \right)$$

$$-\int_x^{x+n} \mu_y dy = \ln {}_n p_x$$

Si $y = s+x$

$${}_n p_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+s} ds\right) \quad (3.3.2)$$

Y si tomamos $n=x$ y $x=0$ tendremos:

$${}_x p_0 = \exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right) = s(x)$$

Luego:

$$F(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right) \quad (3.3.3)$$

$$\mathbf{F'(x) = f(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right) = {}_x p_0 \mu_x}$$

Ahora, tomando la probabilidad de que un individuo muera en t años, ${}_t q_x$ que es la función de distribución de $T(x)$ (el tiempo de vida futura de (x)), trataremos de sacar una expresión para la función de distribución de la fuerza de mortalidad de $T(x)$. Vamos a denotar por $G(t)$ a ${}_t q_x$, con $g(t) = G'(t)$, la cual sería la función de distribución de la fuerza de mortalidad de $T(x)$.

$$g(t) = \frac{d}{dt} {}_t q_x$$

$$g(t) = \frac{d}{dt} \left[1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} \right]$$

$$g(t) = \left[\frac{s(x+t)}{s(x)} \right] \left[- \frac{s'(x+t)}{s(x+t)} \right]$$

$$g(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} \quad (3.3.4)$$

De esta manera ${}_t p_x \mu_{x+t} dt$ es la probabilidad de que (x) muera entre t y $t+dt$, y

$$\int_0^{\infty} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = 1$$

3.4 Funciones básicas de una Tabla de Mortalidad

3.4.1 Número esperado de sobrevivientes

Definamos el conjunto de seres humanos sobre el cual está basado el estudio como el conjunto P , y sea A_x el conjunto de (x) dado que (x) pertenece a P , esto es:

$$A_x = \{(x) / (x) \in P\}$$

Al número de elementos del conjunto A_x , lo llamaremos l_x , esto es, el número de vivos de edad exacta x .

$$\text{card}(A_x) = l_x$$

Vamos a considerar un grupo de l_0 recién nacidos, los cuales tienen una función de sobrevivencia específica $s(x)$. Luego, denotemos por $L(x)$ el número de sobrevivientes de edad x . Numerando cada (x) como $j=1,2,3,\dots,l_0$ de tal manera que l_j sea un indicador de la sobrevivencia de un individuo j .

$$l_j = \begin{cases} 1 & \text{si el individuo } j \text{ sobrevive a la edad } x \\ 0 & \text{si el individuo } j \text{ no llega a la edad } x \end{cases}$$

Entonces:

$$L = \sum_{j=1}^{l_0} l_j$$

De esta manera $E[L(x)]=l_x$, que representa el número esperado de sobrevivientes de edad x de los l_0 recién nacidos. Ahora tomemos:

$$l_x = E\left[\sum_{j=1}^{l_0} l_j\right] = \sum_{j=1}^{l_0} E[l_j] = l_0 s(x)$$

Luego, bajo la suposición de que los indicadores l_j son mutuamente independientes, $L(x)$ tiene una distribución binomial con parámetros $n=l_0$ y $\theta=s(x)$.

De la misma manera, representamos con ${}_nD_x$ al número de muertes entre las edades x y $x+n$ dado un grupo de recién nacidos inicial l_0 . Y, a $E[{}_nD_x]$ lo representamos con ${}_nd_x$, que sería el número esperado de muertes entre las edades x y $x+n$. Como la probabilidad de que un individuo recién nacido muera entre las edades de x y $x+n$ es $s(x)-s(x+n)$, se tiene:

$${}_nd_x = E[{}_nD_x] = l_0[s(x) - s(x+n)]$$

$${}_nd_x = l_x - l_{x+n}$$

De donde

$$l_{x+n} = l_x - {}_nd_x \quad (3.4.1)$$

Veamos también que:

$$-\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx} = -\frac{1}{s(x)} \frac{ds(x)}{dx} = \mu_x$$

y,

$$-dl_x = l_x \mu_x dx$$

Como $s(x) = {}_xp_0$

$$l_x \mu_x = l_0 {}_xp_0 \mu_x \quad (3.4.2)$$

Podemos interpretar a $l_x u_x$ como la densidad esperada de muertes entre las edades x y $x+dx$, y es un indicador importante de la mortalidad de una población, la cual suele representarse gráficamente.

3.4.2 Número total de años vividos

Se denota por T_x al número total de años vividos desde x por el grupo de sobrevivientes procedente del grupo inicial de l_0 elementos, y se puede expresar de la siguiente forma:

$$T_x = \int_0^{\infty} t \cdot l_{x+t} u_{x+t} dt = - \int_0^{\infty} t dl_{x+t} = \int_0^{\infty} l_{x+t} dt \quad (3.4.3)$$

3.4.3 Esperanza de vida abreviada y completa

La esperanza de vida se define de dos formas, esperanza de vida abreviada y esperanza de vida completa, denotadas por e_x y e_x^o respectivamente.

Denotemos por $K(x)$ a la variable aleatoria asociada al tiempo de vida futura que tiene como función de distribución:

$$P[K(x) = k] = P[k < T(x) \leq k + 1] = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x$$

La esperanza de vida abreviada e_x se expresa de la siguiente manera:

$$e_x = E[K(x)] = \sum_{k=0}^{w-x-1} k \cdot p_x^{-k+1} p_x \equiv \sum_{k=0}^{w-x-1} k p_x \cdot q_{x+k} = \sum_{k=0}^{w-x-1} k+1 p_x$$

$$e_x = \frac{e_{x+1} + e_{x+2} + e_{x+3} + e_{x+4} + \dots + e_{w-1}}{e_x} \quad (3.44)$$

Y la esperanza de vida completa, de la forma

$$e_x^o = E[T] = \int_0^{w-x} t \cdot g(t) dt = \int_0^{w-x} t \cdot {}_t p_x \cdot u_{x+t} dt$$

Mediante la integración por partes

$$e_x^o = \int_0^{w-x} {}_t p_x dt$$

Una aproximación de la relación entre las dos esperanzas se puede basar en un razonamiento general, es decir, no tener en cuenta los años fraccionados de vida media, de la siguiente manera:

$$e_x^o \cong e_x + \frac{1}{2}$$

Recordando que

$$e^o = \frac{T_x}{l_x}$$

Se tiene que

$$T_x = \int_0^{\infty} l_{x+t} dt \quad (3.4.5)$$

3.4.4 Número total esperado de años de supervivencia

Considerando el número de individuos de un colectivo de personas o sector de empresas constituido por l_0 recién nacidos, denotamos por L_x el número total esperado de años de supervivencia vividos por los elementos del colectivo y lo expresamos como:

$$L_x = \int_0^1 t \cdot l_{x+t} \cdot u_{x+t} dt + l_{x+1}$$

Integrando por partes, tenemos

$$L_x = -\int_0^1 t \cdot dl_{x+t} + l_{x+1} = -t \cdot l_{x+t} \Big|_0^1 + \int_0^1 l_{x+t} dt + l_{x+1}$$

Entonces

$$L_x = -l_{x+1} + \int_0^1 l_{x+t} dt + l_{x+1} = \int_0^1 l_{x+t} dt \quad (3.4.6)$$

3.5 Algunas leyes de mortalidad conocidas

La alternativa a tener tabulados los valores de las probabilidades de fallecimiento y supervivencia, es utilizar una función teórica para la mortalidad.

3.51 Modelo de Gompertz

Benjamín Gompertz supuso que la resistencia de (x) frente a la muerte decrece proporcionalmente con la edad. Entonces si μ_x , la fuerza de mortalidad es una medida de la propensión a la muerte de (x) en una infinitésima fracción de tiempo, Gompertz usó μ_x^{-1} para medir la resistencia de (x) a la muerte, de tal manera que la fuerza de mortalidad crece en progresión geométrica; en efecto, su modelo se puede expresar como

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mu_x} \right) = -h \frac{1}{\mu_x}$$

Donde h representa una constante de proporcionalidad, luego integrando

$$\ln \left(\frac{1}{\mu_x} \right) = -hx - \ln B$$

Donde $\ln B$ es la constante de integración.

Luego, si $e^h=c$, tenemos

$$\mu_x = B.c^x$$

Así

$$l_x = l_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu_y dy} = l_0 \cdot e^{-\ln g^{c^x-1}} = l_0 g^{c^x-1}$$

De esta manera

$${}_t p_x = g^{c^x(c^t-1)}$$

3.5.2 Modelo de Makeham

Makeham combinó dos causas: una aleatoria, la previa disposición de (x) a la muerte o bien deterioro, y la otra, la inhabilidad creciente de resistirse a la desaparición o a la muerte. Por lo tanto, la ley de Makeham añade una constante a la de **Gompertz**.

$$\mu_x = a + bc^x$$

Se supondrá que el valor de c es conocido. Se trata por tanto de un modelo lineal en los parámetros a y b, considerando a c^x como la variable independiente y μ_x la variable a explicarse. La estimación de a y b puede obtenerse estadísticamente mediante mínimos cuadrados a través de las variables observables μ_x y c^x , enlazadas con los parámetros a y b, mediante las relaciones:

$$\mu_{x_i} = a + bc^{x_i} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Matricialmente:

$$\mu = A\alpha + \varepsilon$$

Donde

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \\ \vdots \\ \mu_{x_n} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & c^{x_1} \\ 1 & c^{x_2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & c^{x_n} \end{pmatrix}; \quad \alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Modelo en el cual supondremos que, como es usual, $E(\varepsilon)=0$ y $L_\varepsilon=\sigma^2$, donde L_ε denota a la matriz de covarianzas de ε (observemos que esta hipótesis implica la homocedasticidad de los errores, esto es, que no están correlacionados).

Si se supiera por alguna información complementaria que las ε_i no fuesen correlacionadas y de igual varianza, se puede efectuar una transformación lineal que nos conduce a lo mismo. La obtención de la información **muestral** no es problema, pues las estadísticas demográficas nos suministran el número de expuestos al riesgo de muerte durante la unidad temporal y referidos a todas las edades, así como también el número de fallecimientos, la información **obtenida** viene referida a las cantidades que se denotan en la simbología de la matemática actuarial como:

L_x : Número de individuos de edad x expuestos al riesgo de muerte

D_x : Número de fallecimientos de los individuos de edad x antes de cumplir la edad $x+1$

Este antecedente **muestral** nos permite estimar la probabilidad de muerte denotada con q_x por:

$$q_x = \frac{D_x + 1}{L_x + 2} = m_x;$$

Es decir el tanto anual de mortalidad, que es su estimador de máxima verosimilitud.

Ahora bien, suponiendo la distribución uniforme de los fallecimientos durante el año del fallecimiento:.

$$m_x \approx \mu_{x+1/2} \approx 2 \frac{q_x}{2 - q_x}$$

Este resultado permite considerar las μ_{x_i} como variables observables siendo

$$x'_i = x_i + 1/2.$$

En definitiva podemos enunciar el problema que se pretende resolver de la siguiente manera:

Estimar a, b de la expresión $a + b c^x = \begin{pmatrix} 1 & c^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = p^T \alpha$, mediante una

combinación lineal de las variables observables $\mu_{x'_i}$ cuyas ecuaciones son:

$$\mu_{x'_i} = a + b c^{x'_i} + \varepsilon_i$$

Es decir,

$$\mu' = A' \alpha + \varepsilon$$

En la que:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \\ \vdots \\ \mu_{x_n} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & c^{x_1} \\ 1 & c^{x_2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & c^{x_n} \end{pmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}; \quad a = \begin{matrix} a \\ 0b \end{matrix}$$

Como es conocido, la solución óptima (de mínimos cuadrados) consiste en estimar α por $\hat{\alpha}$ dado por:

$$\hat{\alpha} = (A^T A)^{-1} A^T \mu = S^{-1} A^T \mu$$

Donde

$$S = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n c^{x_i} \\ \sum_{j=1}^n c^{x_j} & \sum_{i=1}^n c^{2x_i} \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \bar{c} \\ \bar{c} & \overline{c^2} \end{pmatrix}.$$

La inversa será:

$$S^{-1} = \frac{1}{n(\overline{c^2} - \bar{c}^2)} \begin{pmatrix} \overline{c^2} & -\bar{c} \\ -\bar{c} & 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte:

$$A^T \mu = \begin{pmatrix} n\bar{\mu} \\ \sum_{i=1}^n c^{x_i} \mu_{x_i} \end{pmatrix}; \quad \bar{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{x_i}}{n}$$

Entonces

$$\hat{\alpha} = S^{-1} A^T \mu = \frac{1}{n(\overline{C^2} - \bar{C}^2)} \begin{pmatrix} n\bar{\mu}\bar{c}^2 - \bar{c} \sum_{i=1}^n c^{x_i} \mu_{x_i} \\ -n\bar{\mu}\bar{c} + \sum_{i=1}^n c^{x_i} \mu_{x_i} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\hat{a} = \bar{\mu} - \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{x_i} (c^{x_i} - \bar{c}^2)}{n(\overline{c^2} - \bar{c}^2)}; \quad y, \quad \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{x_i} (c^{x_i} - \bar{c})}{n(\overline{c^2} - \bar{c}^2)}$$

La estimación de μ , será por tanto:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_x &= \hat{a} + \hat{b} c^x \\ &= \bar{\mu} + \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{x_i} (c^{x_i} (c^x - 1) + \bar{c}^2 - \bar{c} c^x)}{n(\overline{c^2} - \bar{c}^2)} \end{aligned}$$

Además se pueden establecer los otros tipos de inferencias de los modelos lineales como intervalos de predicción.

Donde se ha supuesto conocido c , en el caso de ser c desconocido, se puede proceder así: sabemos que,

$$\begin{aligned} l_x &= e^{-\int_0^x \mu_y dy} = e^{-\int_0^x a + bc^y dy} = e^{A+Bx+Cc^x} \\ \ln(l_x) &= A + Bx + Cc^x \\ \Delta \ln(l_x) &= \ln(l_{x+1}) - \ln(l_x) = B + C(c-1)c^x \\ \Delta^2 \ln(l_x) &= C(c-1)^2 c^x = Dc^x \end{aligned}$$

Esta expresión es la solución de la ecuación en diferencias:

$$Z_{x+1} - cZ_x = 0$$

entonces,

$$\frac{Z_{x+1}}{Z_x} = c = \frac{\Delta^2 \ln(l_{x+1})}{\Delta^2 \ln(l_x)}$$

De acuerdo a este resultado, se puede estimar c apoyándonos en el conocimiento estadístico de las variables $\gamma_{x1}, \gamma_{x2}, \dots, \gamma_{xn}$; siendo $\gamma_{xi} = (Z_{xi+1}) / (Z_{xi})$; para $i=1, \dots, n$.

Si no se tiene conocimiento suficiente respecto a las distribuciones de probabilidad de dichas variables, procedemos a la estimación no paramétrica, considerando los estadísticos de orden: $\gamma_{x(1)} < \gamma_{x(2)} < \dots < \gamma_{x(n)}$, el intervalo de confianza de $(1 - \alpha)100\%$ de confianza para la mediana $\xi_{0.5}$ se conoce que está dado por: $[\gamma_{x(i)}, \gamma_{x(j)}]$, con:

$$P(\gamma_{x(i)} < \mathbf{50.5} < \gamma_{x(j)}) = \sum_{r=i}^{j-1} \binom{n}{r} \frac{1}{2^n} \approx 1 - \alpha$$

De aquí que con el nivel de **significancia** α se puede tomar por c a cualquier número interior al intervalo:

$$\gamma_{x(i)} < \mathbf{c} < \gamma_{x(j)}.$$

En el caso que se disponga de una información previa de c , por ejemplo una tabla de mortalidad correspondiente a un grupo demográfico análogo, se puede usar la teoría de la credibilidad (parte de la teoría de la información).

Todo el desarrollo anterior para el modelo de Makeham, ha sido adaptado a un modelo más amplio, que se denomina *modelo ampliado* y que se desarrolla a continuación.

3.5.3 Modelo ampliado de Makeham (ley de Lázarus)

Consideremos ahora la fuerza instantánea de mortalidad μ_x como:

$$\mu_x = a + bc_1^x + bc_2^x$$

La importancia de esta hipótesis sobre la de Makeham estriba en que la de Makeham no nos da un valor servible para edades jóvenes ya que el tanto instantáneo de mortalidad es permanentemente creciente, la de Lázarus presenta un mínimo único para la edad x_0 .

$$x_0 = \frac{\ln b - \ln \ln C_2 - \ln b_1 - \ln \ln C_1}{\ln C_2 - \ln C_1}$$

Luego se trata de un tanto decreciente hasta x_0 y creciente a partir de esta edad, es decir, el modelo de Lázarus sirve incluso para edades jóvenes. Esto tiene un carácter bien práctico y real, pues la mortalidad de poblaciones tiene esta característica, como se puede observar en el anexo 3 que corresponde a un gráfico de la fuerza de mortalidad.

La estimación de los parámetros puede realizarse de forma análoga al caso de Makeham. Haremos la hipótesis que: son conocidos C_1 y C_2 , por lo que el modelo a tomar será:

$$p^T \alpha = \alpha + b_1 c_1^x + b_2 c_2^x$$

En donde

$$a = \begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; p = \begin{pmatrix} 1 \\ c_1^x \\ c_2^x \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de observación serán: $\mu = A\alpha + \varepsilon$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \\ \vdots \\ \mu_{x_n} \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & c_1^{x_1} & c_2^{x_1} \\ 1 & c_1^{x_2} & c_2^{x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_1^{x_n} & c_2^{x_n} \end{pmatrix}; \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Se supone como antes que, $E(\varepsilon) = 0$ y $L_\varepsilon = \sigma^2 I$. Y se tiene:

$$A^T A = S = n \begin{pmatrix} 1 & \overline{c_1} & \overline{c_2} \\ \overline{c_1} & \overline{c_1^2} & \overline{c_1 c_2} \\ \overline{c_2} & \overline{c_1 c_2} & \overline{c_2^2} \end{pmatrix};$$

donde

$$\bar{c}_j = \frac{\sum c_j^{x_i}}{n}; \quad \bar{c}_j^2 = \frac{\sum c_j^{2x_i}}{n}; \quad \overline{c_1 c_2} = \frac{\sum (c_1 c_2)^{x_i}}{n}$$

El determinante de S:

$$|S| = n^3 \left(\overline{c_1^2 c_2^2} + 2\bar{c}_1 \bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_2 - \overline{c_1 c_2^2} - \overline{c_1^2 c_2} - \overline{c_1 c_2} \right)$$

Y la matriz inversa S^{-1} es:

$$S^{-1} = \frac{n^2}{|S|} \begin{pmatrix} \overline{c_1^2 c_2^2} - \overline{c_1 c_2^2} & \overline{c_2 c_1 c_2} - \overline{c_1 c_2^2} & \overline{c_1 c_1 c_2} - \overline{c_2 c_1} \\ \overline{c_2 c_1 c_2} - \overline{c_1 c_2} & \overline{c_2^2} - \overline{c_2} & \overline{c_2 c_1} - \overline{c_1 c_2} \\ \overline{c_1 c_1 c_2} - \overline{c_1^2 c_2} & \overline{c_1 c_2} - \overline{c_1 c_2} & \overline{c_1^2} - \overline{c_1^2} \end{pmatrix}$$

Como la solución de mínimos cuadrados es

$$\hat{\alpha} = S^{-1} A^T \mu = S^{-1} \begin{pmatrix} n\bar{\mu} \\ \sum c_1^{x_i} \mu_{x_i} \\ \sum c_2^{x_i} \mu_{x_i} \end{pmatrix}$$

Se tiene que la solución analítica para los estimadores de mínimos cuadrados son:

$$\hat{a} = \frac{n^2}{|S|} \left[\left(\overline{c_1^2 c_2^2} - \overline{c_1 c_2^2} \right) n \bar{\mu} + \left(c_2 c_1 c_2 - \overline{c_1 c_2^2} \right) \sum c_1^{x_i} \mu_{x_i} + \left(\overline{c_1 c_1 c_2} - \overline{c_2 c_1^2} \right) \sum c_2^{x_i} \mu_{x_i} \right]$$

$$\hat{b}_1 = \frac{n^2}{|S|} \left[\left(\overline{c_2 c_1 c_2} - \overline{c_2^2 c_1} \right) n \bar{\mu} + \left(\overline{c_1 c_2} - \overline{c_1 c_2} \right) \sum c_2^{x_i} \mu_{x_i} + \left(\overline{c_2^2} - \overline{c_2^2} \right) \sum c_1^{x_i} \mu_{x_i} \right]$$

$$\hat{b}_2 = \frac{n^2}{|S|} \left[\left(\overline{c_1 c_1 c_2} - \overline{c_1 c_2} \right) n \bar{\mu} + \left(\overline{c_1 c_2} - \overline{c_1 c_2} \right) \sum c_1^{x_i} \mu_{x_i} + \left(\overline{c_1^2} - \overline{c_1^2} \right) \sum c_2^{x_i} \mu_{x_i} \right]$$

Según lo indicado antes, este modelo ampliado supone una ventaja frente al de Makeham, por lo que puede presentarse la conveniencia de tener una mejor representación del modelo a partir del conocimiento del parámetro c_1 .

3.6 Descripción de la base de datos

La construcción de un modelo que contenga los patrones de mortalidad según la edad requiere de la recolección de datos empíricos. Los datos que se recolectaron fueron :

- Población del Ecuador por edades simples y por sexo
- Defunciones en el Ecuador por edades simples y por sexo

El objetivo es obtener estimadores de q_x para las distintas edades, a partir de los cuales se generarán las funciones de la tabla de mortalidad.

La información se recolectó a partir de los datos del censo de población de 1990, de las proyecciones de población estimada por el Instituto Nacional de

Estadísticas y Censos, y de la información recolectada por la misma institución a través del Registro civil del Ecuador. Sin embargo los datos recolectados no siempre están libres de errores, las principales fuentes de errores son:

- Omisión de personas.
- Mala declaración de la edad.

3.6.1 Omisión de personas

Decimos que hay omisión de personas cuando un individuo no ha sido censado, este fenómeno se puede dar por omisión completa de áreas geográficas, omisión completa de viviendas, o por omisión de personas aisladas. En el caso de este estudio, el error presentado por omisión de personas es despreciable, ya que se tiene suficiente cantidad de datos como para lograr una buena estimación.

3.6.1.2 Omisión completa de áreas geográficas

Por obstáculos geográficos o por deficiencias en la categoría censal, cierta zona se quedan fuera del levantamiento de datos censales y por lo tanto no se empadronan las personas que viven allí. Este error no afecta significativamente a la estructura de los datos del censo.

3.6.1.3 Omisión de personas aisladas

Es el caso en que la vivienda es empadronada pero quedan una o más personas no captadas por el empadronador.

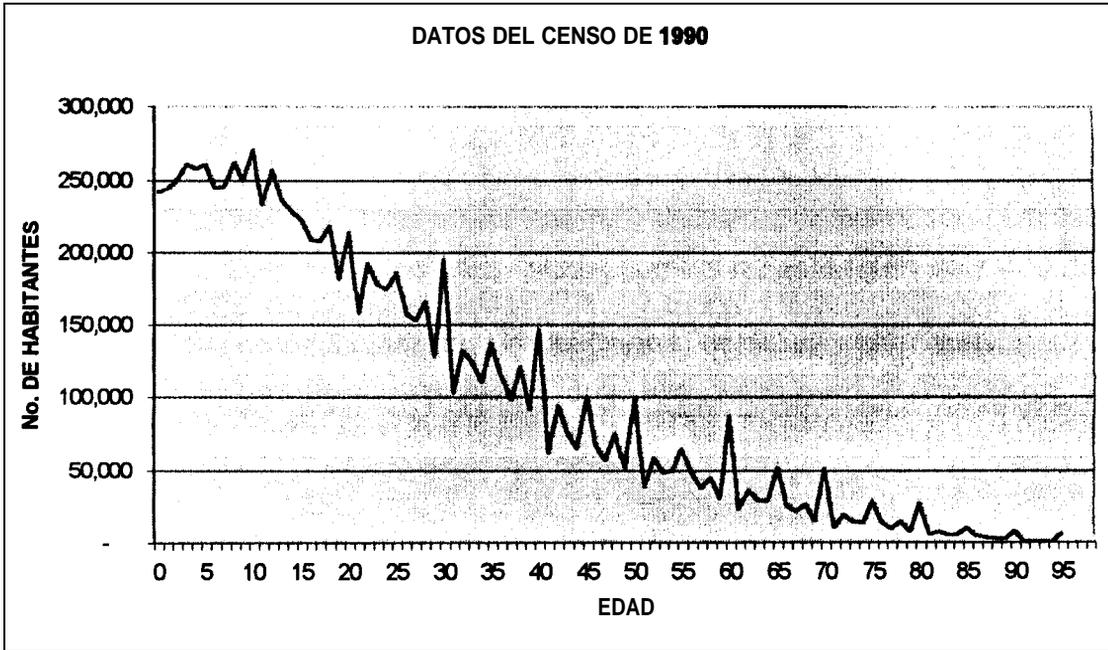
3.6.1.4 Omisión completa de viviendas

En ocasiones ocurre que el empadronador deja sin empadronar viviendas, que por su ubicación resultan poco visibles o que son difíciles de identificar como **tales**. Otro caso es en el cual los habitantes se encuentran ausentes de su casa durante el día.

3.6.2 Mala declaración de la edad

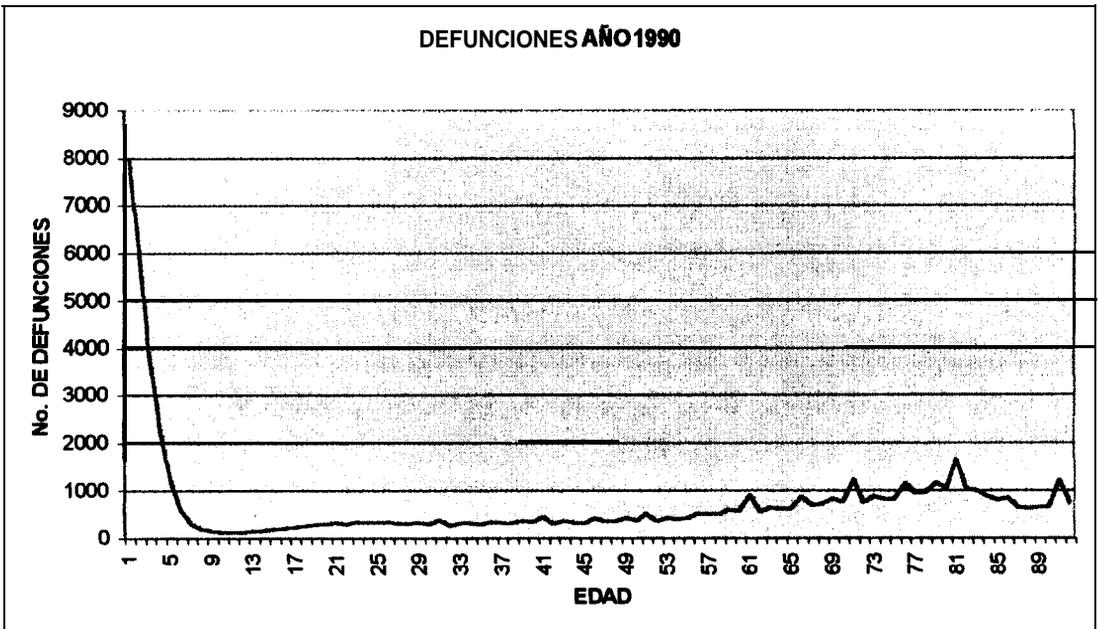
Esta situación es notoria en los datos del censo poblacional de 1990 en los que se nota una preferencia por las edades múltiplos de cinco, y especialmente las decenas en las edades que pasan los treinta años de edad. Este fenómeno es común en los países en vías de desarrollo. Para este tipo de error se usan métodos de suavizamiento, que eliminen los picos producidos por la mala declaración de la edad, como veremos en el capítulo 4.

Figura 4.1.1



Los datos de las defunciones presentan también ciertas fluctuaciones bruscas, como podemos ver en el gráfico (Figura 4.1.2).

Figura 4.1.2



CAPITULO 4'

4 Construcción de la tabla de mortalidad para la población ecuatoriana

4.1 Ajuste preliminar de datos

Como se mencionó anteriormente, los datos recolectados tienen una serie de fuentes de error. De acuerdo a algunos estudios realizados, y según las escalas del Índice de exactitud (Índice de Whipple) planteada por Las Naciones Unidas, los datos del censo de 1990 corresponderían a datos malos.

Esto se observa claramente en el gráfico las edades vs. el número de habitantes, donde se producen picos en los múltiplos de cinco, y más pronunciadamente en la decenas como podemos apreciar en el gráfico (Figura 4.1 .I).

Para resolver este inconveniente se usará la interpolación cúbica segmentaria (Splines), que es un método de **interpolación** que usa curvas suaves.

Los datos de población de los años subsiguientes no presentan este tipo de inconveniente, ya que como son proyecciones, estas ya están suavizadas, como podemos ver en los gráficos para 1991, 1992 **1993**, **1994**, 1995, 1996, 1997 y 1998.

Figura 413

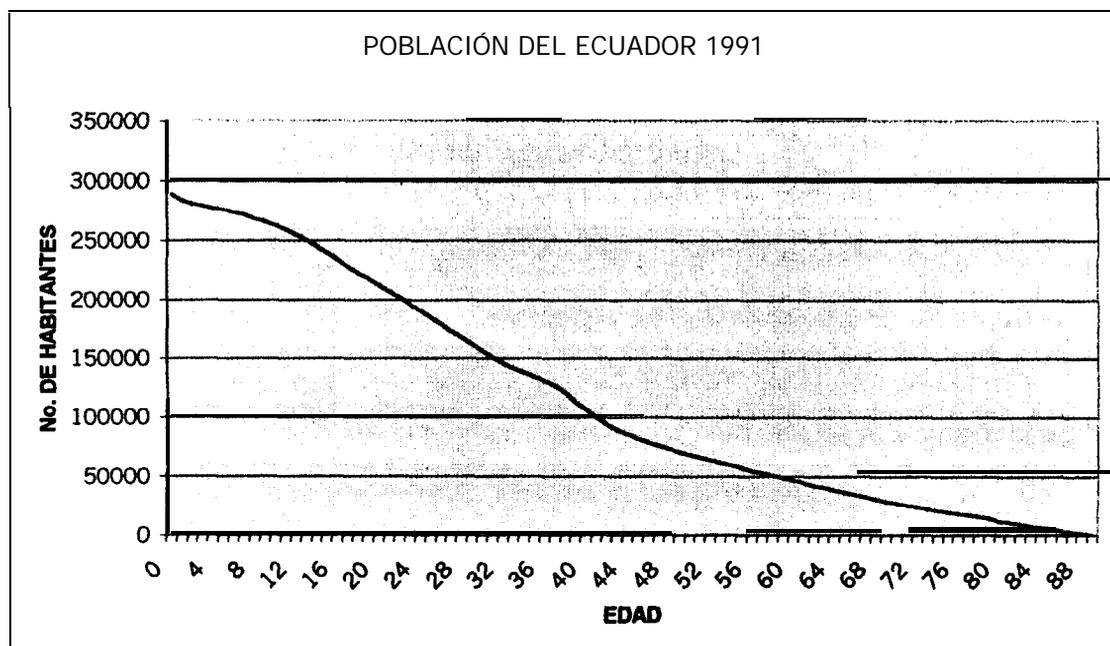


Figura 4.1.4

INSTITUTO
NACIONAL DE ESTADÍSTICA
CIB - ESPOL

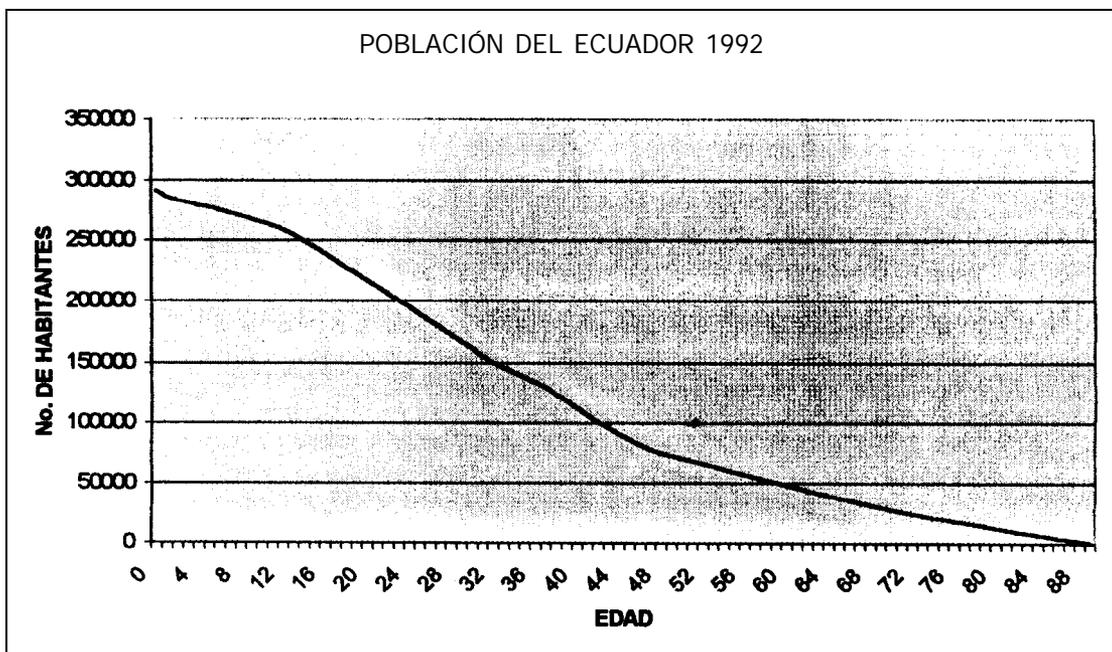


Figura 4.1.3

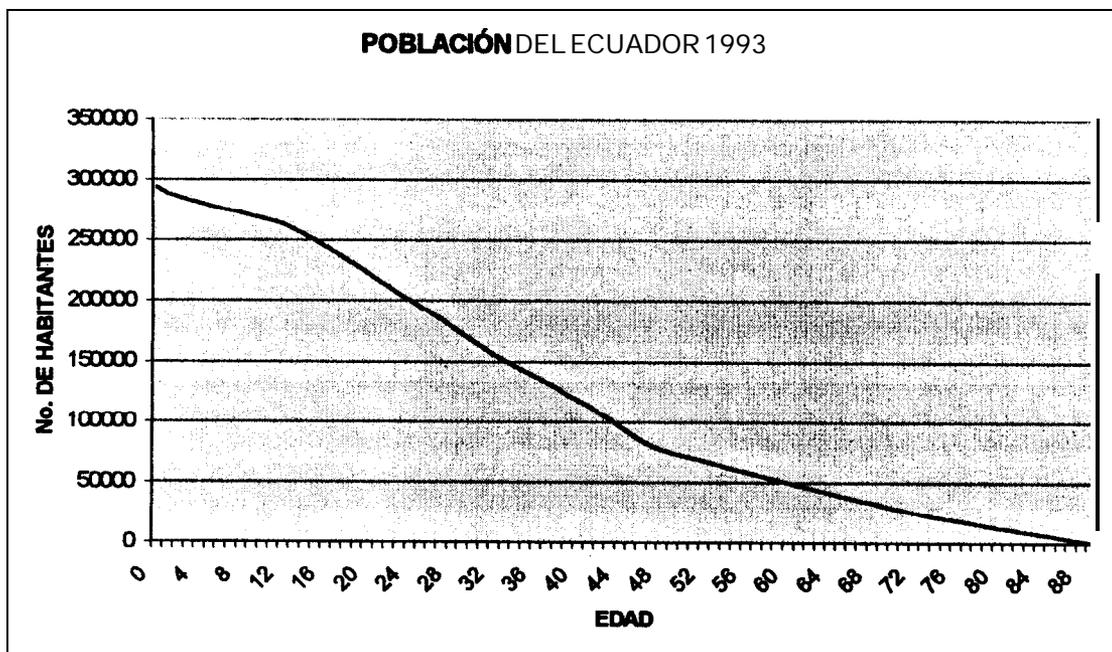


Figura 4.1.6

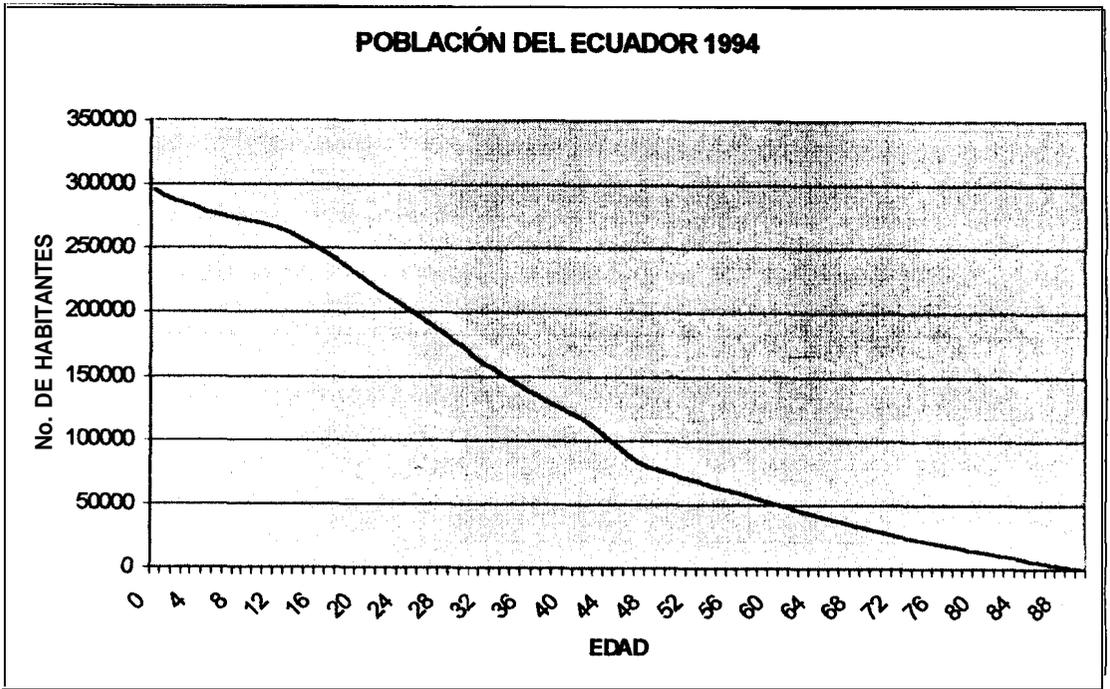


Figura 4.1.7

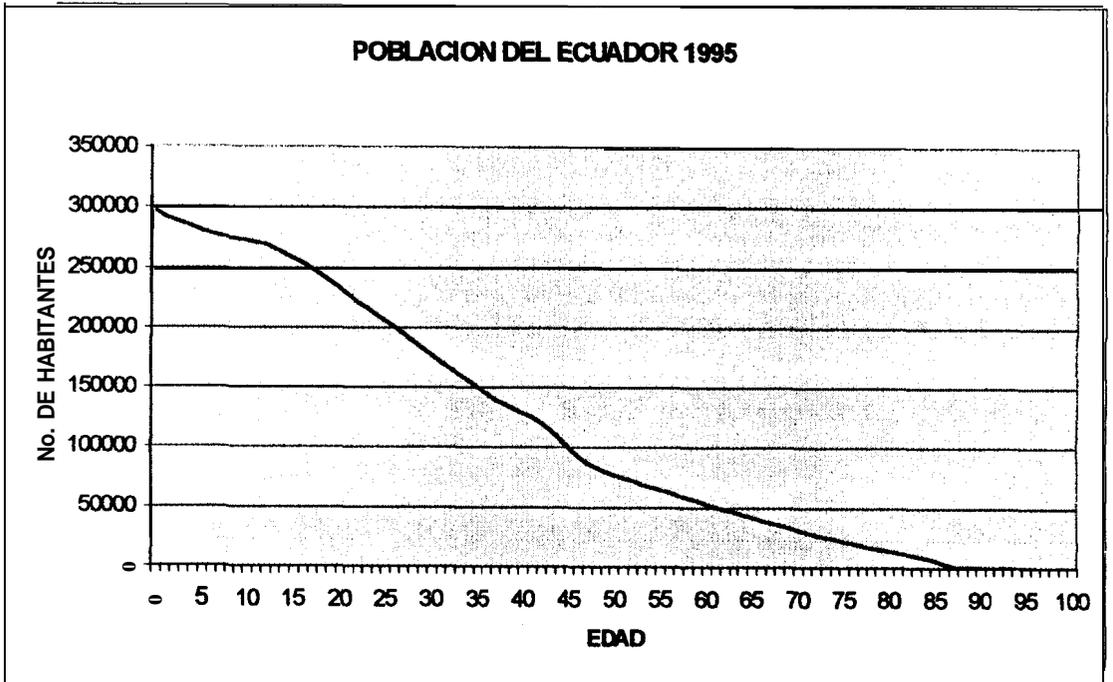
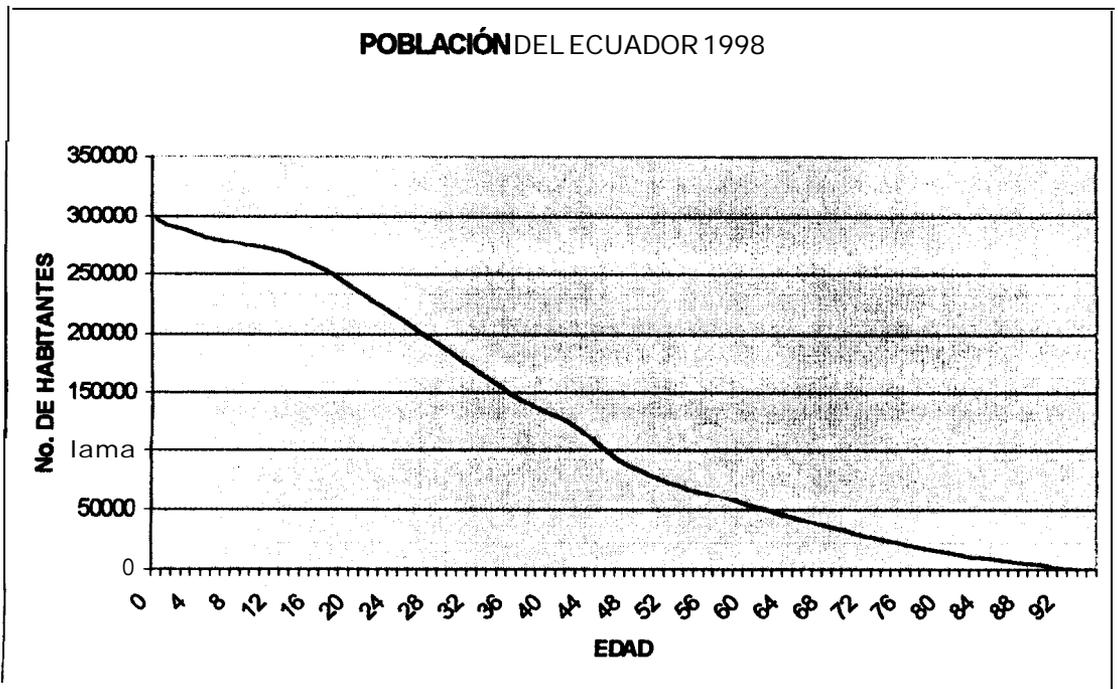


Figura 4.1.10



Con el fin de obtener datos sin fluctuaciones bruscas y superar los errores de preferencia de dígitos, usamos para suavizar la línea un método de interpolación llamado Interpolación Cúbica Segmentaria.

4.1.1 Interpolación Cúbica Segmentaria

El objetivo de la interpolación cúbica segmentaria es obtener polinomios de tercer orden en cada uno de los intervalos entre nodos, de la forma:

$$F_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

Por lo tanto, para $n+1$ puntos ($i=0, 1, 2, 3, \dots, n$) existen n intervalos, dentro de los cuales se puede definir una función de tercer orden $f_i(x)$ a partir de la siguiente ecuación cúbica.

$$f_i(x) = \frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})} (x_i - x)^3 + \frac{f''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})^3} + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x_i - x) \\ + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x - x_i)$$

Esta ecuación contiene únicamente dos incógnitas dentro del intervalo, las segundas derivadas al final de cada intervalo. Estas incógnitas se evalúan utilizando la ecuación siguiente.

$$(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) \\ = \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{(x_i - x_{i-1})} [f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$

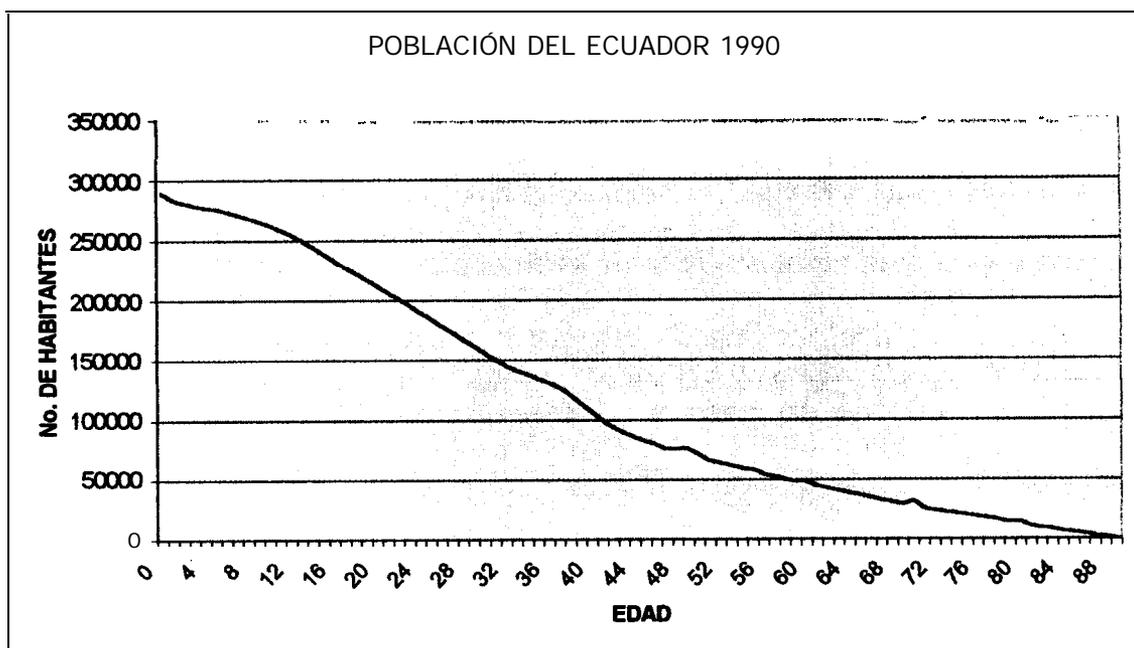
Si esta ecuación se escribe para todos los nodos interiores, se generan $n-1$ ecuaciones simultáneas con $n+1$ segundas derivadas incógnitas. Sin embargo, ya que este es un polinomio interpolante "natural", las segundas derivadas en los nodos de los extremos son ceros, y el problema se reduce a $n-1$ ecuaciones, con $n-1$ incógnitas. Además, nótese que el sistema de ecuaciones será tridiagonal, por lo tanto no sólo se tiene que reducir el número de ecuaciones, sino que también se calculan de forma que sean muy

fáciles de resolver.

Las funciones de interpolación cúbica segmentaria tienen la propiedad de que las conexiones entre ecuaciones cúbicas adyacentes son visualmente suaves, superficialmente parece que la aproximación segmentaria de tercer orden es inferior a la expresión de **séptimo** orden.

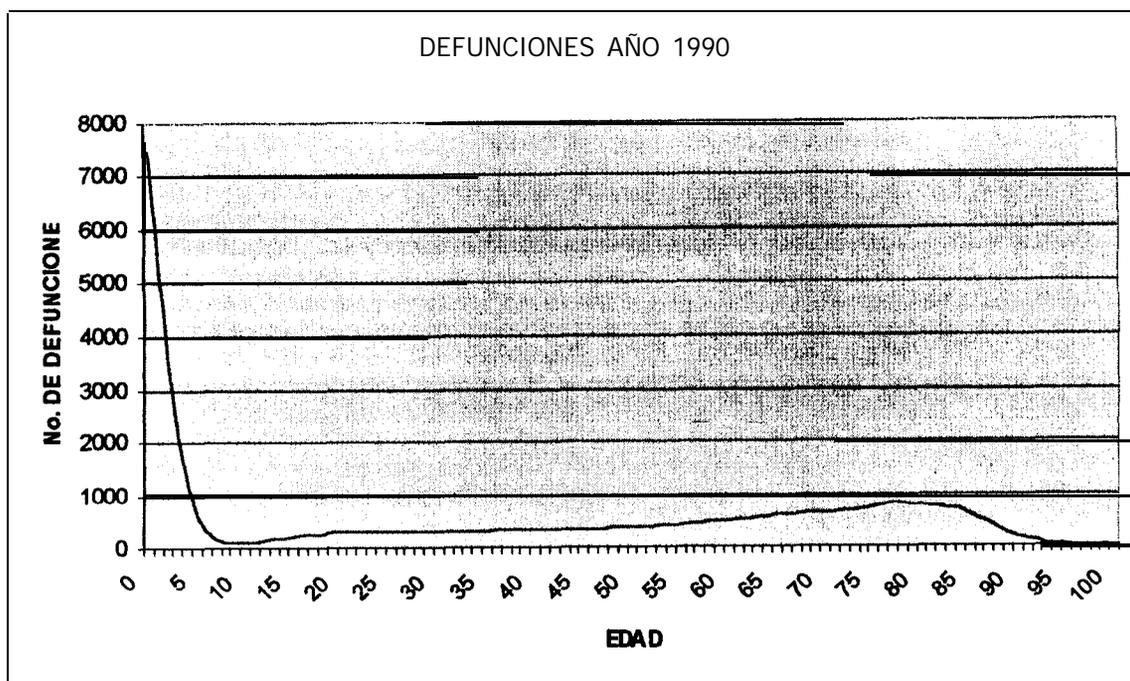
Como resultado de la utilización del método de Interpolación cúbica segmentaria, los datos quedan suavizados. Veamos el gráfico de los datos de 1990 después del proceso de suavizamiento (ver detalle en el anexo 1A-1 B).

Figura 4.1.11



Así mismo las defunciones (ver detalle en el anexo 2A-2B).

Figura 41.12



4.2 Estimación de los **parámetros** utilizando las estadísticas **demográficas**

Con los datos suavizados calculamos a partir del número de habitantes de edad x , el número de muertes ocurridas en el intervalo de tiempo de un año (d_x) con la finalidad de calcular el número de sobrevivientes al cumplir la edad x al comienzo de ese intervalo (l_x) a partir de $l_0=1000$. Para este propósito necesitamos estimar q_x , que es la tasa de mortalidad de la tabla de vida, y esta definida, como ya vimos como d_x/l_x .

Tomando D_x como el número total de muertes ocurridas de elementos de edad x , en este caso, entre los años 1990 y 1998, y L_x como el número total

de personas de edad x , podemos estimar la probabilidad de muerte denotada con q_x por:

$$q_x = \frac{D_x + 1}{L_x + 2}$$

que es su estimador de máxima verosimilitud.

Utilizando q_x y y como colectivo inicial $l_0 = 100.000$, podemos estimar los d_x y l_x paralelamente

$$dx = l_x \cdot q_x \quad ; \quad l_x = l_{x-1} - q_{x-1}$$

Cuando l_x viene definido por medio de una tabla de mortalidad y se desconoce la ley subadyacente, los valores de u_x pueden aproximarse de la expresión:

$$u_x = \frac{1}{2} (\ln l_{x-1} - \ln l_{x+1})$$

Demostremos:

De la expresión ${}_n p_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+s} ds\right)$, y haciendo $n=1$, tenemos

$$p_x = \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+s} ds\right)$$

Tomando algoritmos,

$$\ln p_x = \left(-\int_0^1 \mu_{x+s} ds\right)$$

y, en términos aproximados

$$u_{x+1/2} = \ln p_x$$

Si integramos u_{x+t} entre $t=-1$ y $t=1$, obtenemos

$$\int_{-1}^1 u_{x+t} = -\ln p_{x-1} - \ln p_x$$

Y esto es dos veces el valor medio de u_x entre las edades $x-1$ y $x+1$, lo que nos lleva a la siguiente aproximación:

$$u_x = -\frac{1}{2}(\ln p_{x-1} - \ln p_x) = \frac{1}{2}(\ln l_{x-1} - \ln l_{x+1})$$

Para estimar el número total de años vividos desde x por el grupo de elementos vivos, denotado por T_x , usamos la expresión que ya se definió anteriormente

$$T_x = \int_0^{\infty} l_{x+t}$$

Integrando, usando métodos numéricos de integración, logramos una estimación para T_x .

Luego, teniendo en cuenta que

$$l_{x+t} u_{x+t} = l_x {}_t p_x u_{x+t}$$

De donde

$$l_{x+t} = l_x {}_t p_x$$

Integrando de $t=0$ hasta ∞ , tenemos

$$\int_0^{\infty} l_{x+t} \cdot dt = \int_0^{\infty} l_{x,t} p_x u_{x+t}$$

$$T_x = \int_0^{\infty} l_{x,t} p_x u_{x+t}$$

$$\frac{T_x}{l} - \int_0^{\infty} p_x u_{x+t} = e_x^{\circ}$$

y obtenemos un estimador para e_x° .

Otro símbolo usado en una tabla de mortalidad es L_x , el cual denota el número total de años vividos entre las edades x y $x+1$, de un grupo de l_0 elementos vivos iniciales. Se expresa como:

$$L_x = \int_0^1 t l_{x+t} u_{x+t} dt + l_{x+1}$$

Donde la integral evalúa los años vividos por todo el conglomerado que llegó a la edad x , pero no llegó a cumplir la edad $x+1$, y el término l_{x+1} denota el total de años vividos por los que llegaron a la edad $x+1$. De la integración por partes tenemos:

$$\begin{aligned} L_x &= - \int_0^1 t dl_{x+t} + l_{x+1} \\ &= -t l_{x+t} \Big|_0^1 + \int_0^1 l_{x+t} dt + l_{x+1} \\ &= \int_0^1 l_{x+t} dt \end{aligned}$$

Una aproximación de L_x es

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

Que puede ser justificada al usar la regla del trapecio para integrar numéricamente.

4.3 Tablas de mortalidad

Una vez ajustados los datos, y luego calculadas las funciones, estas son tabuladas en la tabla, veamos los resultados obtenidos.

4.3.1 Tabla de mortalidad de la población ecuatoriana general

x	l_x	q_x	p_x	d_x	u_x	T_x	${}^o e_x$
0	100000	0,02309	0,97691	2309		7202779	72,02779
1	97691	0,01681	0,98319	1642	0,02016	7107179	72,75183
2	96049	0,01110	0,98890	1067	0,01406	7007175	72,95439
3	94982	0,00655	0,99345	622	0,00887	6914890	72,80197
4	94360	0,00360	0,99640	340	0,00509	6817063	72,24544
5	94020	0,00188	0,99812	177	0,00275	6726076	71,53904
6	93843	0,00102	0,99898	96	0,00145	6628969	70,63911
7	93747	0,00064	0,99936	60	0,00083	6538364	69,74480
8	93687	0,00046	0,99954	43	0,00055	6441463	68,75507
9	93644	0,00038	0,99962	36	0,00042	6350984	67,82065
10	93608	0,00037	0,99963	35	0,00038	6254173	66,81217
11	93574	0,00041	0,99959	39	0,00039	6350913	67,87084
12	93535	0,00050	0,99950	47	0,00046	6067027	64,86370
13	93488	0,00061	0,99939	57	0,00056	5976700	63,93015
14	93431	0,00074	0,99926	69	0,00068	6666912	64,93499
15	93361	0,00087	0,99913	81	0,00081	5789843	62,01539

16	93280	0,00100	0,99900	93	0,00094	5693336	61,03487
17	93187	0,00112	0,99888	104	0,00106	5603287	60,12951
18	93083	0,00122	0,99878	113	0,00117	5508966	59,16189
19	92970	0,00128	0,99872	119	0,00125	5417124	58,26764
20	92850	0,00137	0,99863	127	0,00133	5321026	57,30750
21	92724	0,00140	0,99860	130	0,00139	5231425	56,41956
22	92594	0,00149	0,99851	138	0,00145	5135582	55,46370
23	92456	0,00154	0,99846	143	0,00152	5046241	54,58013
24	92313	0,00161	0,99839	148	0,00158	5135297	55,62923
25	92165	0,00168	0,99832	155	0,00164	4861617	52,74924
26	92010	0,00171	0,99629	157	0,00170	4766345	51,80247
27	91853	0,00175	0,99825	161	0,00173	4677598	50,92498
28	91692	0,00179	0,99821	164	0,00177	4582641	49,97858
29	91528	0,00178	0,99822	163	0,00179	4494215	49,10198
30	91365	0,00188	0,99812	171	0,00183	4399584	48,15394
31	91194	0,00184	0,99816	168	0,00186	4311487	47,27836
32	91026	0,00193	0,99807	176	0,00189	4217196	46,32959
33	90850	0,00203	0,99797	184	0,00198	4129438	45,45339
34	90666	0,00213	0,99787	193	0,00208	4035499	44,50956
35	90473	0,00229	0,99771	207	0,00221	3948109	43,63844
36	90266	0,00237	0,99763	214	0,00233	3654557	42,70211
37	90052	0,00243	0,99757	219	0,00241	3767579	41,83779
38	89833	0,00252	0,99748	227	0,00248	3674455	40,90318
39	89606	0,00252	0,99748	226	0,00252	3587916	40,04095
40	89381	0,00267	0,99733	238	0,00260	3495242	39,10512
41	89142	0,00260	0,99740	232	0,00264	3409159	38,24403
42	88910	0,00281	0,99719	250	0,00271	3316955	37,30672
43	88661	0,00298	0,99702	265	0,00290	3231344	36,44620
44	88396	0,00324	0,99676	287	0,00312	3139639	35,51782
45	88109	0,00369	0,99631	325	0,00347	3054559	34,66784
46	87784	0,00391	0,99609	343	0,00381	2963433	33,75818
47	87441	0,00414	0,99586	362	0,00403	2878997	32,92498
48	87079	0,00442	0,99558	385	0,00429	2786557	32,02321
49	86694	0,00451	0,99549	391	0,00448	2704846	31,19992
50	86303	0,00494	0,99506	426	0,00474	2615171	30,30234
51	85877	0,00490	0,99510	421	0,00493	2532252	29,48711
52	85456	0,00535	0,99465	457	0,00514	2443416	28,59274
53	84998	0,00573	0,99427	487	0,00556	2361353	27,78113

54	84511	0,00627	0,99373	530	0,00602	22734291	26,90087
55	83981	0,00698	0,99302	586	0,00665	2192345	26,10512
56	83395	0,00738	0,99262	615	0,00721	2105485	25,24717
57	82780	0,00769	0,99231	636	0,00756	2025564	24,46933
58	82143	0,00810	0,99190	665	0,00792	1939933	23,61641
59	81478	0,00828	0,99172	674	0,00822	1861287	22,84399
60	80804	0,00938	0,99062	758	0,00887	1776979	21,99127
61	80046	0,00922	0,99078	738	0,00934	1699707	21,23407
62	79308	0,01028	0,98972	815	0,00980	1616680	20,38733
63	78493	0,01134	0,98866	690	0,01087	1541117	19,63377
64	77603	0,01277	0,98723	991	0,01213	1459919	18,81272
65	76612	0,01496	0,98504	1146	0,01396	1385945	18,09042
66	75466	0,01576	0,98424	1189	0,01548	1306747	17,31579
67	74276	0,01682	0,98318	1249	0,01642	1235028	16,62746
68	73027	0,01781	0,98219	1301	0,01747	1158214	15,86004
69	71727	0,01814	0,98186	1301	0,01814	1088990	15,18250
70	70426	0,02069	0,97931	1457	0,01961	1014761	14,40893
71	68968	0,02016	0,97984	1391	0,02064	948191	13,74817
72	67578	0,02273	0,97727	1536	0,02168	876802	12,97468
73	66042	0,02538	0,97462	1676	0,02435	813083	12,31158
74	64366	0,02921	0,97079	1880	0,02768	744764	11,57080
75	62486	0,03531	0,96469	2206	0,03280	684419	10,95317
76	60280	0,03791	0,96209	2285	0,03730	619901	10,28378
77	57994	0,04097	0,95903	2376	0,04024	563887	9,72312
78	55618	0,04467	0,95533	2484	0,04377	503943	9,06076
79	53134	0,04568	0,95432	2427	0,04623	452686	8,51975
80	50707	0,04855	0,95145	2462	0,04826	397656	7,84231
81	48245	0,05298	0,94702	2556	0,05210	351285	7,28132
82	45689	0,06016	0,93984	2749	0,05824	301198	6,59240
83	42940	0,06931	0,93069	2976	0,06694	259972	6,05432
84	39964	0,08270	0,91730	3305	0,07907	215394	5,38973
85	36659	0,09242	0,90758	3388	0,09165	180154	4,91432
86	33271	0,10593	0,89407	3524	0,10447	142104	4,27112
87	29746	0,12184	0,87816	3624	0,12095	113657	3,82087
88	26122	0,16500	0,83500	4310	0,15513	82644	3,16378
89	21812	0,19970	0,80030	4356	0,20155	61642	2,82606
90	17456	0,24790	0,75210	4327	0,25363	39036	2,23623
91	13129	0,28520	0,71480	3744	0,31032	26720	2,03524

92	9384	0,34500	0,65500	3238	0,37944	12584	1,34094
93	6147	0,38500	0,61500	2367	0,45463	5862	0,95367
94	3780	0,45000	0,55000	1701	0,54199	3037	0,80338

Figura 4.3.1

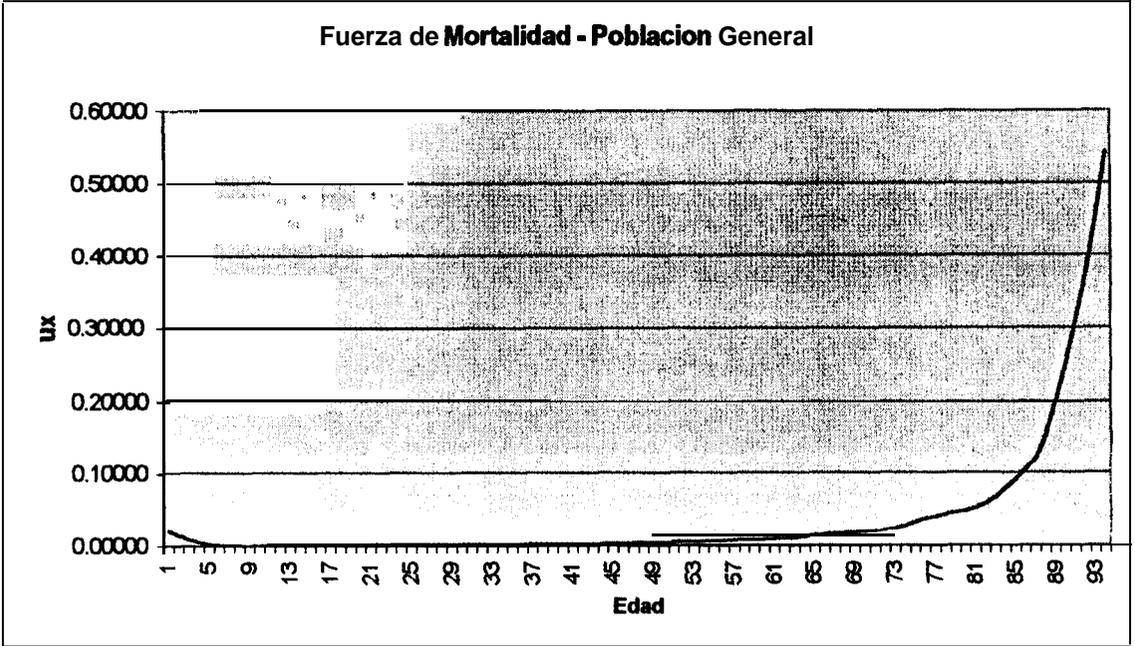


Figura 4.3.2

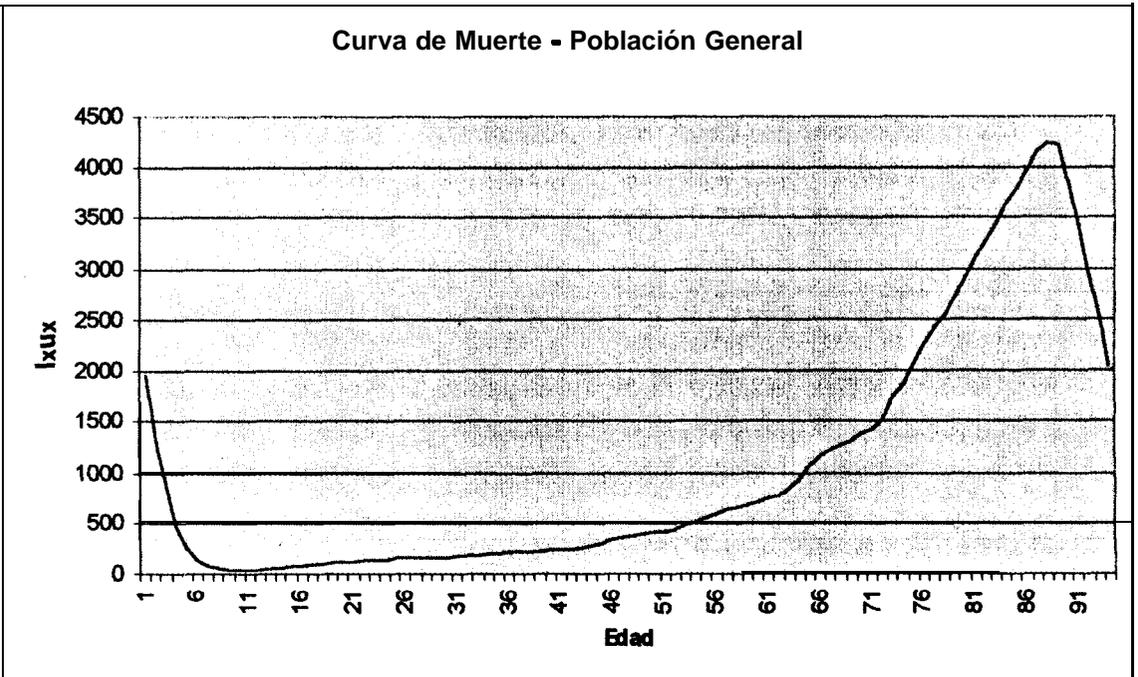
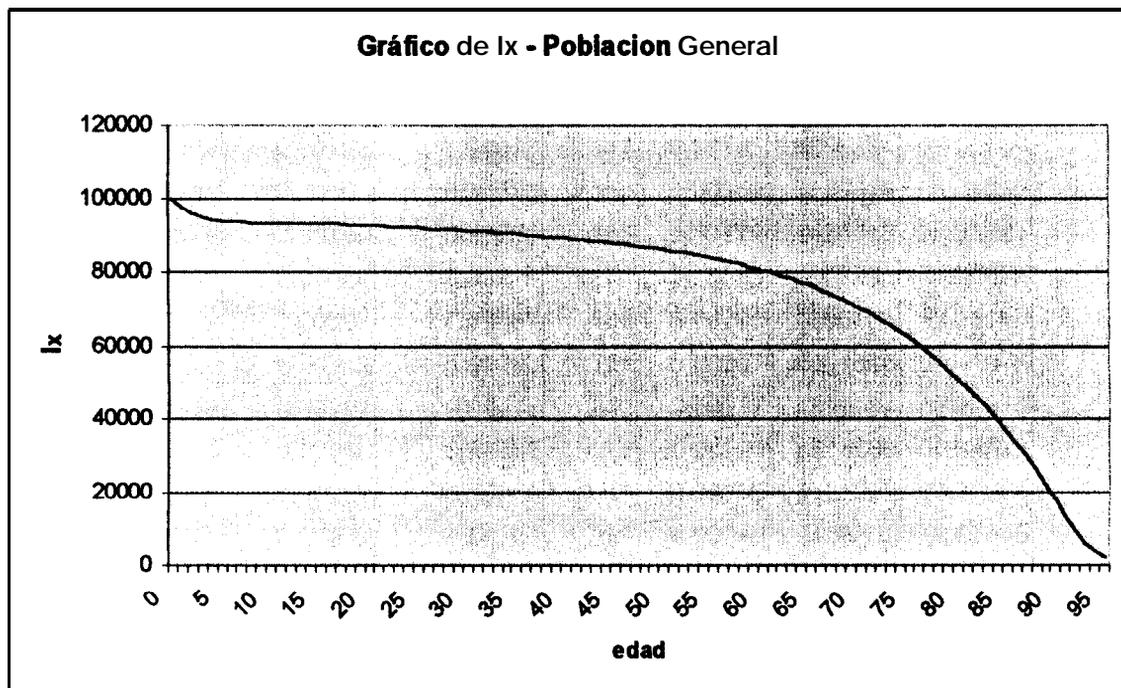


Figura 4.3.3



4.3.2 Tabla de mortalidad de la población masculina del Ecuador

x	l_x	q_x	p_x	d_x	u_x	T_x	e_x^o
0	100000	0.02549	0.97451	2549		6948779	69.48779
1	97451	0.01843	0.98157	1796	0.02221	6849623	70.28775
2	95655	0.01202	0.98798	1149	0.01535	6750588	70.57248
3	94505	0.00694	0.99306	656	0.00952	6658097	70.45210
4	93850	0.00378	0.99624	353	0.00537	6581413	69.91399
5	93496	0.00195	0.99805	182	0.00266	6470297	69.20364
6	93315	0.00108	0.99892	101	0.00151	6374363	68.31047
7	93214	0.00071	0.99929	66	0.00090	6283641	67.41096
6	93146	0.00057	0.99943	53	0.00064	6187923	66.43141
9	93095	0.00050	0.99950	46	0.00053	6097341	65.49620
10	93048	0.00049	0.99951	46	0.00049	6001732	64.50132
11	93003	0.00051	0.99949	48	0.00050	6097249	65.55992
12	92955	0.00060	0.99940	56	0.00056	5815727	62.56495
13	92899	0.00071	0.99929	66	0.00065	5725337	61.62939

14	92834	0.00085	0.99915	79	0.00078	5815595	62.64528
15	92755	0.00102	0.99898	95	0.00094	5539674	59.72395
16	92660	0.00119	0.99881	111	0.00111	5444428	58.75697
17	92550	0.00137	0.99863	127	0.00128	5354359	57.85399
18	92423	0.00153	0.99847	142	0.00145	5259334	56.90519
19	92281	0.00164	0.99836	152	0.00159	5169519	56.01939
20	92129	0.00180	0.99820	166	0.00172	5074776	55.08323
21	91963	0.00186	0.99814	171	0.00183	4985265	54.20925
22	91792	0.00203	0.99797	186	0.00195	4890651	53.28189
23	91606	0.00212	0.99788	194	0.00207	4801686	52.41675
24	91412	0.00222	0.99778	203	0.00217	4890462	53.49921
25	91209	0.00233	0.99767	213	0.00228	4618865	50.64038
26	90996	0.00237	0.99763	215	0.00235	4525227	49.72974
27	90781	0.00242	0.99758	220	0.00240	4436873	48.87446
28	90561	0.00248	0.99752	225	0.00245	4343666	47.96388
29	90336	0.00245	0.99755	222	0.00247	4255753	47.11004
30	90115	0.00261	0.99739	236	0.00254	4162992	46.19660
31	89879	0.00251	0.99749	225	0.00256	4075528	45.34455
32	89654	0.00264	0.99736	237	0.00258	3983230	44.42894
33	89417	0.00275	0.99725	246	0.00270	3896224	43.57346
34	89172	0.00284	0.99716	254	0.00280	3804399	42.66367
35	88918	0.00306	0.99694	272	0.00296	3717863	41.81241
36	88646	0.00313	0.99687	277	0.00310	3626569	40.91077
37	88368	0.00317	0.99683	280	0.00316	3540593	40.06630
38	88088	0.00330	0.99670	291	0.00324	3449833	39.16340
39	87798	0.00324	0.99676	284	0.00327	3364420	38.32019
40	87513	0.00349	0.99651	305	0.00337	3274236	37.41423
41	87208	0.00328	0.99672	286	0.00339	3189401	36.57249
42	86922	0.00357	0.99643	311	0.00343	3099814	35.66210
43	86611	0.00375	0.99625	324	0.00367	3015565	34.81729
44	86287	0.00404	0.99596	348	0.00390	2926596	33.91713
45	85938	0.00467	0.99533	401	0.00436	2843000	33.08180
46	85538	0.00485	0.99515	415	0.00477	2754737	32.20500
47	85123	0.00510	0.99490	434	0.00499	2671929	31.38916
48	84689	0.00550	0.99450	466	0.00531	2584498	30.51756
49	84223	0.00552	0.99448	465	0.00553	2502562	29.71340
50	83758	0.00621	0.99379	520	0.00588	2416051	28.84559
51	83238	0.00591	0.99409	492	0.00608	2335064	28.05291

52	82746	0.00653	0.99347	540	0.00624	2249566	27.18631
53	82206	0.00692	0.99308	569	0.00675	2169588	26.39205
54	81637	0.00756	0.99244	618	0.00727	2085163	25.54184
55	81020	0.00853	0.99147	691	0.00808	2006330	24.76351
56	80329	0.00890	0.99110	715	0.00875	1923148	23.94094
57	79614	0.00917	0.99083	730	0.00908	1845680	23.18287
58	78884	0.00972	0.99028	766	0.00949	1763925	22.36104
59	78117	0.00979	0.99021	765	0.00980	1687925	21.60752
60	77353	0.01169	0.98831	904	0.01080	1607690	20.78388
61	76449	0.01080	0.98920	825	0.01131	1533266	20.05614
62	75623	0.01219	0.98781	922	0.01156	1454766	19.23700
63	74701	0.01338	0.98662	999	0.01287	1382051	18.50103
64	73702	0.01506	0.98494	1110	0.01432	1305389	17.71169
65	72592	0.01824	0.98176	1324	0.01679	1234684	17.00845
66	71268	0.01867	0.98133	1331	0.01863	1160276	16.28042
67	69937	0.01990	0.98010	1392	0.01947	1092150	15.61613
68	68546	0.02125	0.97875	1457	0.02079	1020422	14.88673
69	67089	0.02131	0.97869	1430	0.02151	955080	14.23605
70	65659	0.02593	0.97407	1702	0.02391	886235	13.49756
71	63956	0.02351	0.97649	1504	0.02503	823853	12.88147
72	62453	0.02701	0.97299	1687	0.02558	758256	12.14125
73	60766	0.02988	0.97012	1816	0.02886	699008	11.50325
74	58950	0.03436	0.96564	2025	0.03265	636766	10.80176
75	56925	0.04324	0.95676	2461	0.03958	581178	10.20956
76	54464	0.04497	0.95503	2449	0.04511	523062	9.60390
77	52014	0.04836	0.95164	2515	0.04779	472247	9.07920
78	49499	0.05405	0.94595	2675	0.05257	419056	8.46595
79	46824	0.05408	0.94592	2532	0.05558	373302	7.97253
80	44291	0.05769	0.94231	2555	0.05751	325361	7.34597
81	41736	0.06243	0.93757	2606	0.06194	284727	6.82208
82	39131	0.07091	0.92909	2775	0.06901	241906	6.18201
83	36356	0.08029	0.91971	2919	0.07862	206523	5.68060
84	33437	0.09471	0.90529	3167	0.09160	169242	5.06155
85	30270	0.10688	0.89312	3235	0.10627	139732	4.61616
86	27035	0.14272	0.85728	3859	0.13352	108725	4.02166
87	23176	0.15100	0.84900	3500	0.15885	85870	3.70508
88	19677	0.16500	0.83500	3247	0.17201	62253	3.16378
89	16430	0.19970	0.80030	3281	0.20155	46432	2.82606

90	13149	0.24790	0.75210	3260	0.25383	29404	2.23623
91	9889	0.28520	0.71480	2820	0.31032	20127	2.03524
92	7069	0.34500	0.65500	2439	0.37944	9479	1.34090
93	4630	0.38500	0.61500	1783	0.45463	5862	0.75900
94	2848	0.45000	0.55000	1281	0.54199	3037	0.63939

Figura 4.3.4

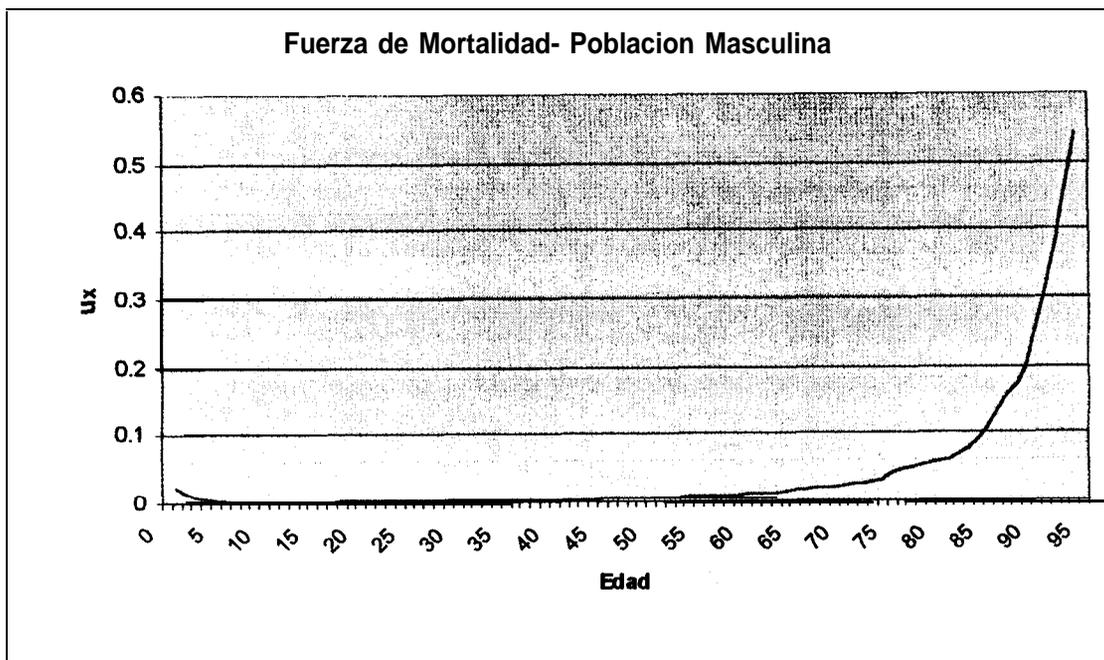


Figura 4.3.5

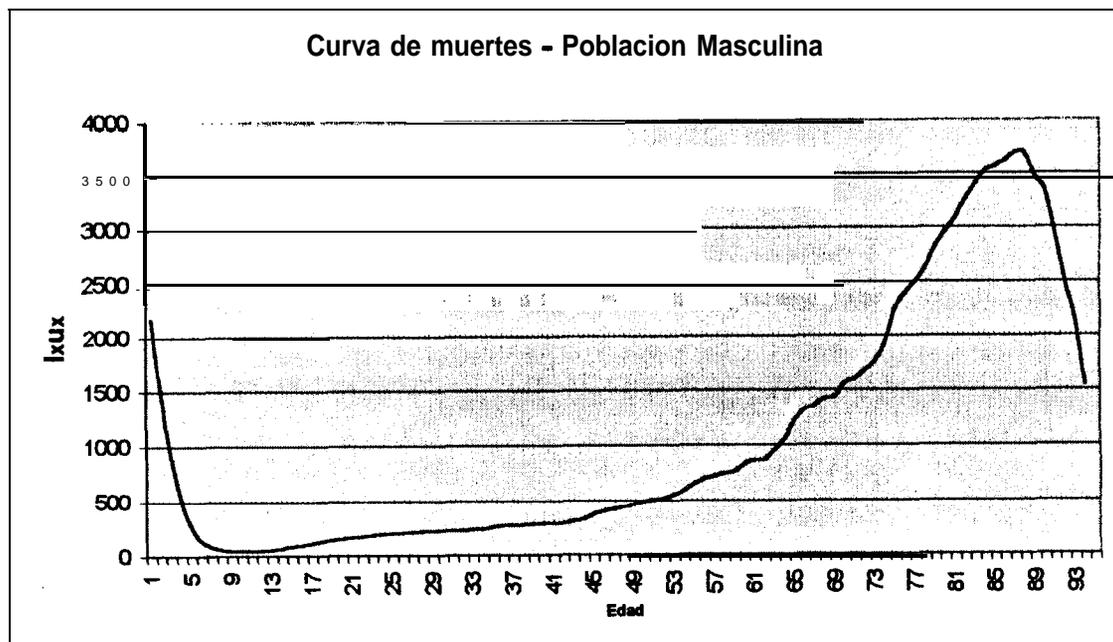
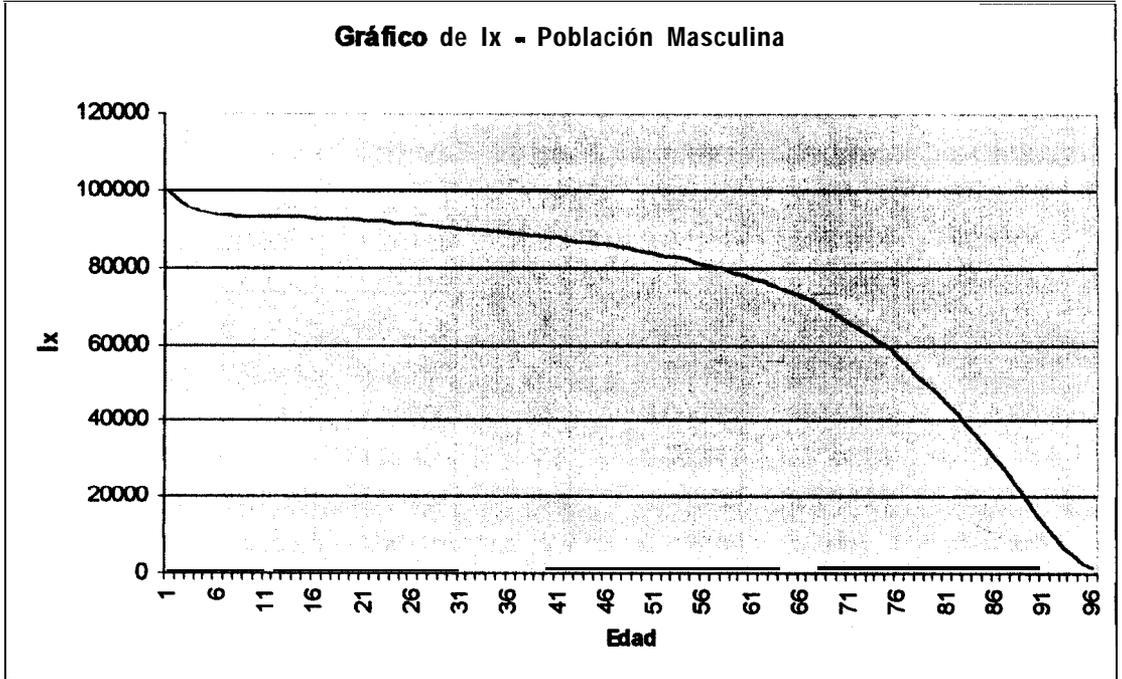


Figura 4.3.6



4.3.3 Tabla de mortalidad de la población femenina del Ecuador

x	l_x	q_x	p_x	d_x	u_x	T_x	e_x^o
0	100000	0.02059	0.97941	2059		7474080	74.74080
1	97941	0.01512	0.98488	1481	0.01802	7373963	75.28989
2	96460	0.01016	0.98984	980	0.01272	7272939	75.39817
3	95481	0.00618	0.99384	588	0.00819	7180875	75.20759
4	94893	0.00344	0.99656	326	0.00481	7081847	74.62980
5	94567	0.00181	0.99819	172	0.00263	6991002	73.92665
6	94395	0.00096	0.99904	91	0.00139	6892662	73.01927
7	94304	0.00058	0.99944	53	0.00076	6802185	72.13011
8	94251	0.00035	0.99965	33	0.00048	6704641	71.12939

9	942181	0.00026	0.999741	24	0.00030	6613675	70.19533~
10	94194	0.00025	0.99975	24	0.00025	6515601	69.17214
11	94170	0.00031	0.99969	29	0.00028	6613626	70.23036
12	94142	0.00041	0.99959	38	0.00036	6327262	67.21012
13	94103	0.00052	0.99948	49	0.00046	6237007	66.27827
14	94055	0.00063	0.99937	59	0.00057	6327165	67.27124
15	93998	0.00072	0.99928	68	0.00067	6046901	64.35301
18	93928	0.00080	0.99920	75	0.00076	5951071	63.35786
17	93853	0.00086	0.99914	81	0.00083	5861048	62.44936
18	93772	0.00090	0.99910	84	0.00068	5763367	61.46131
19	93888	0.00092	0.99908	86	0.00091	5673505	60.55724
20	93802	0.00093	0.99907	87	0.00092	5575991	59.57102
21	93518	0.00094	0.99906	88	0.00093	5486300	58.66726
22	93428	0.00095	0.99905	88	0.00094	5386960	57.68040
23	93339	0.00096	0.99904	90	0.00096	5299445	56.77605
24	93250	0.00099	0.99901	92	0.00098	5388780	57.78881
25	93157	0.00102	0.99898	95	0.00100	5112946	54.88502
28	93063	0.00105	0.99895	97	0.00103	5015968	53.89888
27	92965	0.00107	0.99893	100	0.00106	4926822	52.99640
28	92866	0.00109	0.99891	101	0.00108	4830038	52.01100
29	92785	0.00111	0.99889	103	0.00110	4741091	51.10886
30	92882	0.00113	0.99887	105	0.00112	4644509	50.12323
31	92557	0.00117	0.99883	108	0.00115	4555768	49.22127
32	92449	0.00123	0.99877	113	0.00120	4459397	48.23650
33	92335	0.00130	0.99870	120	0.00127	4370873	47.33701
34	92215	0.00140	0.99860	130	0.00136	4274729	46.35623
35	92085	0.00151	0.99849	139	0.00146	4166446	45.46272
38	91948	0.00181	0.99839	148	0.00157	4096562	44.48877
37	91797	0.00170	0.99830	156	0.00166	4002557	43.60206
38	91842	0.00175	0.99825	161	0.00173	3906969	42.83310
39	91481	0.00180	0.99820	164	0.00178	3819276	41.74935
40	91317	0.00185	0.99815	169	0.00182	3724008	40.78120
41	91148	0.00193	0.99807	176	0.00189	3636644	39.89825
42	90972	0.00205	0.99795	186	0.00199	3541715	38.93184
43	90786	0.00223	0.99777	202	0.00214	3454703	38.05337
44	90584	0.00246	0.99754	223	0.00235	3360148	37.09448
45	90360	0.00273	0.99727	246	0.00260	3273543	36.22759
48	90114	0.00298	0.99702	266	0.00286	3179435	35.28230

47	89846	0.00320	0.99880	2871	0.00309	30933221	34.42921
48	89559	0.00337	0.99663	302	0.00329	2999750	33.49478
49	89257	0.00353	0.99647	315	0.00345	2914209	32.64970
50	88942	0.00370	0.99630	329	0.00362	2821240	31.71998
51	88613	0.00392	0.99608	347	0.00381	2736330	30.87940
52	88286	0.00421	0.99579	372	0.00407	2644020	29.95510
53	87895	0.00457	0.99543	402	0.00440	2559805	29.12358
54	87493	0.00502	0.99498	439	0.00481	2468241	28.21088
55	87054	0.00549	0.99451	478	0.00527	2364833	27.39499
56	86576	0.00591	0.99409	512	0.00572	2294146	26.49874
57	86064	0.00626	0.99374	539	0.00611	2211693	25.69821
58	85525	0.00656	0.99344	561	0.00643	2122028	24.81180
59	84984	0.00684	0.99316	581	0.00672	2040650	24.01776
60	84383	0.00720	0.99280	607	0.00705	1952106	23.13392
61	83775	0.00774	0.99226	649	0.00750	1871893	22.34420
62	83127	0.00848	0.99152	705	0.00814	1784569	21.46803
63	82422	0.00944	0.99058	778	0.00900	1705658	20.69422
64	81644	0.01063	0.98937	868	0.01009	1619750	19.83928
65	80775	0.01192	0.98808	963	0.01134	1542401	19.09491
66	79813	0.01306	0.98694	1043	0.01257	1458230	18.27062
67	78770	0.01399	0.98601	1102	0.01362	1362802	17.55491
68	77668	0.01467	0.98533	1139	0.01443	1300710	16.74704
69	76529	0.01526	0.98474	1166	0.01507	1227478	16.03939
70	75361	0.01599	0.98401	1205	0.01575	1147661	15.22877
71	74156	0.01717	0.98283	1273	0.01672	1076768	14.52025
72	72883	0.01892	0.98108	1379	0.01821	999371	13.71200
73	71504	0.02142	0.97858	1532	0.02038	931037	13.02083
74	69972	0.02472	0.97528	1730	0.02335	856415	12.23942
75	68242	0.02849	0.97151	1944	0.02697	791160	11.59346
76	66298	0.03195	0.96805	2118	0.03069	720003	10.86015
77	64180	0.03487	0.96513	2238	0.03398	658622	10.26219
78	61942	0.03704	0.96296	2295	0.03662	591683	9.55224
79	59847	0.03898	0.96102	2325	0.03875	534757	8.96534
80	57322	0.04141	0.95859	2374	0.04103	472399	8.24108
81	54948	0.04568	0.95432	2510	0.04453	420129	7.64587
82	52438	0.05198	0.94802	2726	0.05007	362547	6.91379
83	49712	0.06106	0.93894	3036	0.05819	315324	6.34298
84	46677	0.07350	0.92650	3431	0.06988	263226	5.63932

85	43246	0.08141	0.91859	3520	0.08063	222102	5.13579
86	39726	0.07981	0.92019	3171	0.06404	176764	4.44962
87	36555	0.10212	0.89788	3733	0.09545	142535	3.89918
88	32822	0.16500	0.83500	5416	0.14402	103641	3.16378
89	27406	0.19970	0.80030	5473	0.20155	77452	2.82606
90	21933	0.24790	0.75210	5437	0.25383	49048	2.23623
91	16496	0.28520	0.71480	4705	0.31032	33573	2.03524
92	11791	0.34500	0.65500	4068	0.37944	15811	1.34094
93	7723	0.38500	0.61500	2973	0.45463	5862	1.26606
94	4750	0.45000	0.55000	2137	0.54199	3037	1.06654

Figura 4.3.7

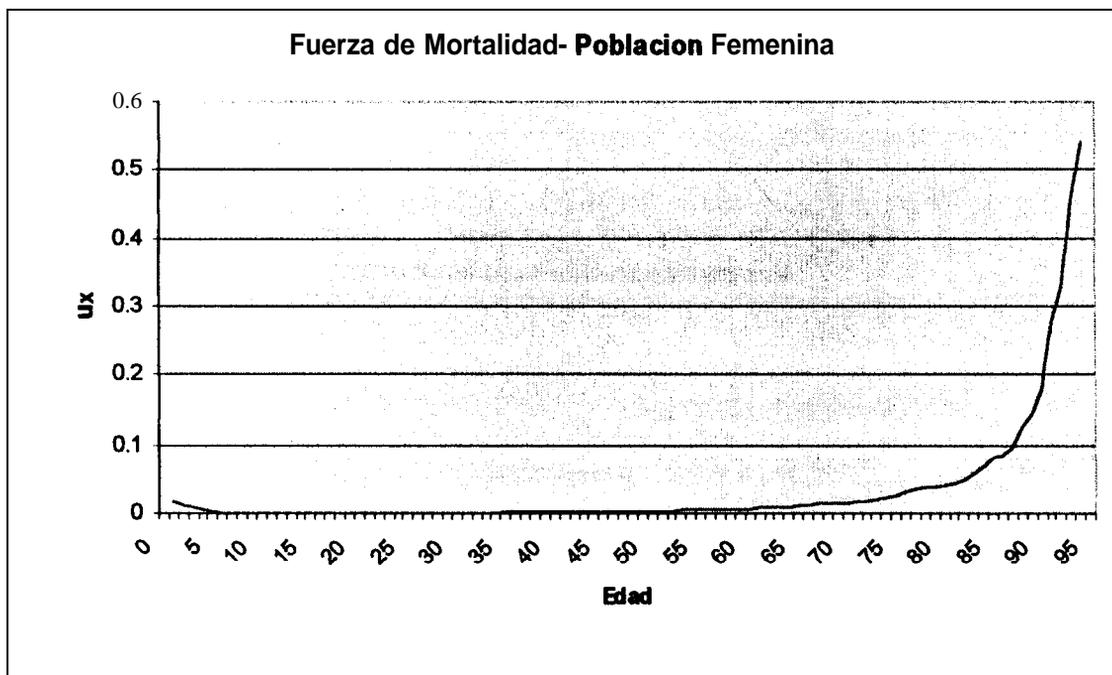


Figura 4.3.8

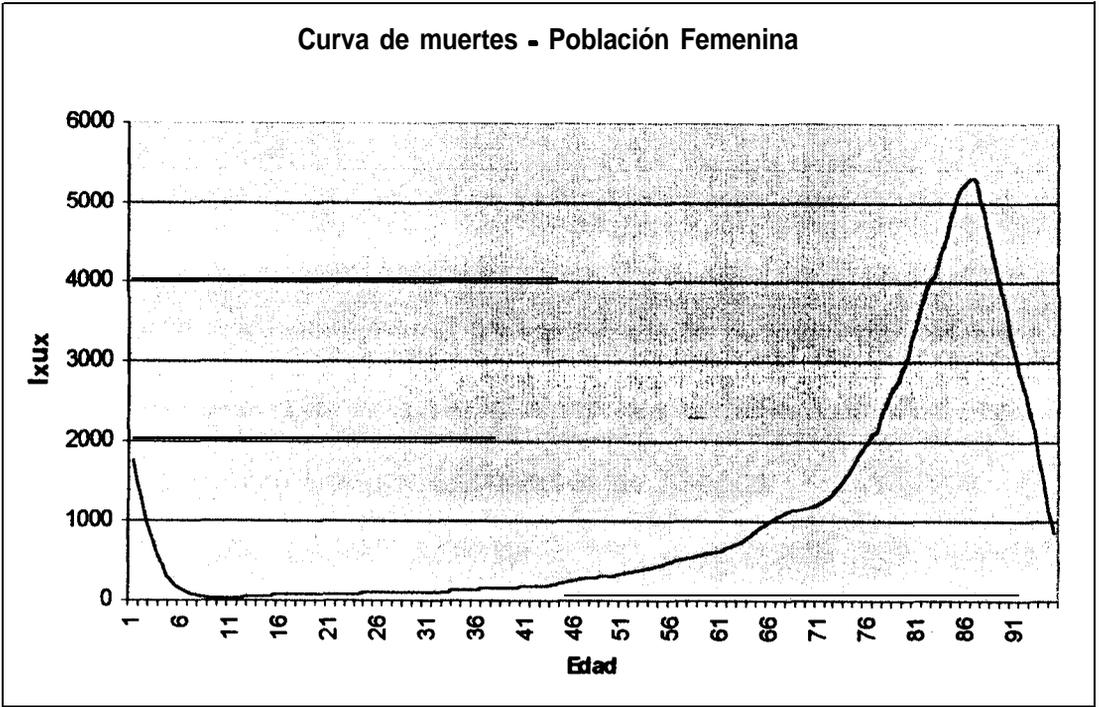
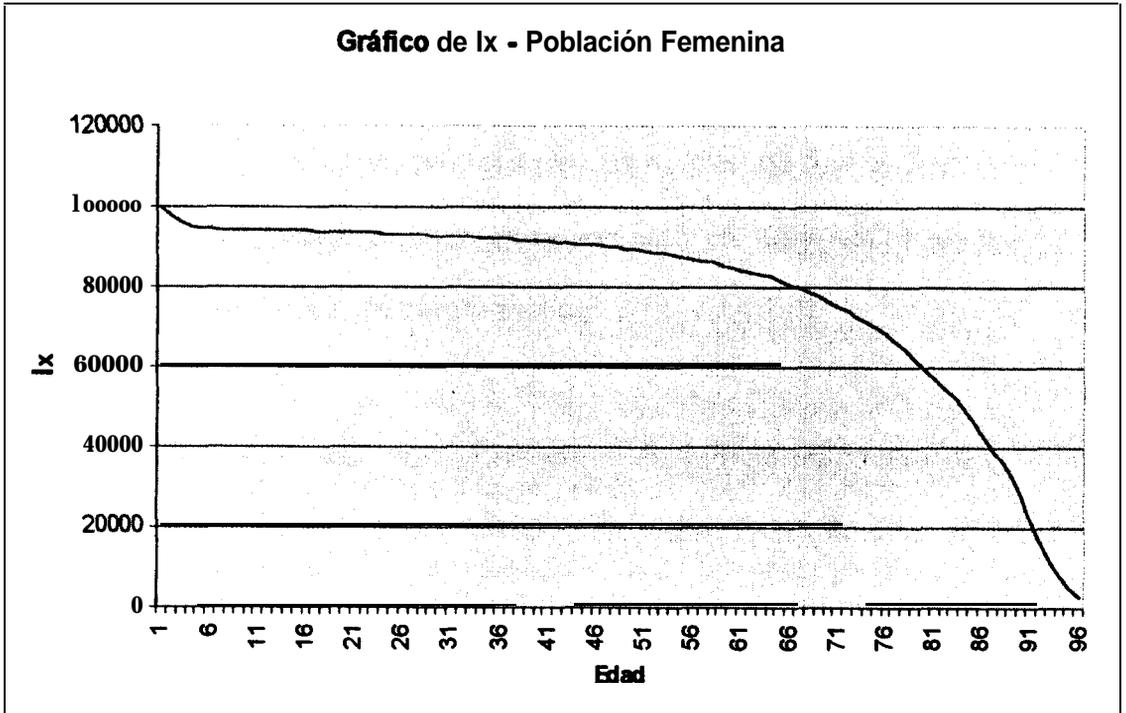


Figura 4.3.9



4.4 Análisis comparativo de los datos

Al observar el comportamiento de los datos y las curvas de las funciones, se pueden destacar algunos datos importantes.

Para la población ecuatoriana en general, según las estimaciones de q_x , se espera que aproximadamente el 2% de los recién nacidos mueran antes de cumplir el primer año de vida. De igual manera el número de años esperado de vida de un recién nacido ecuatoriano es de 72 años.

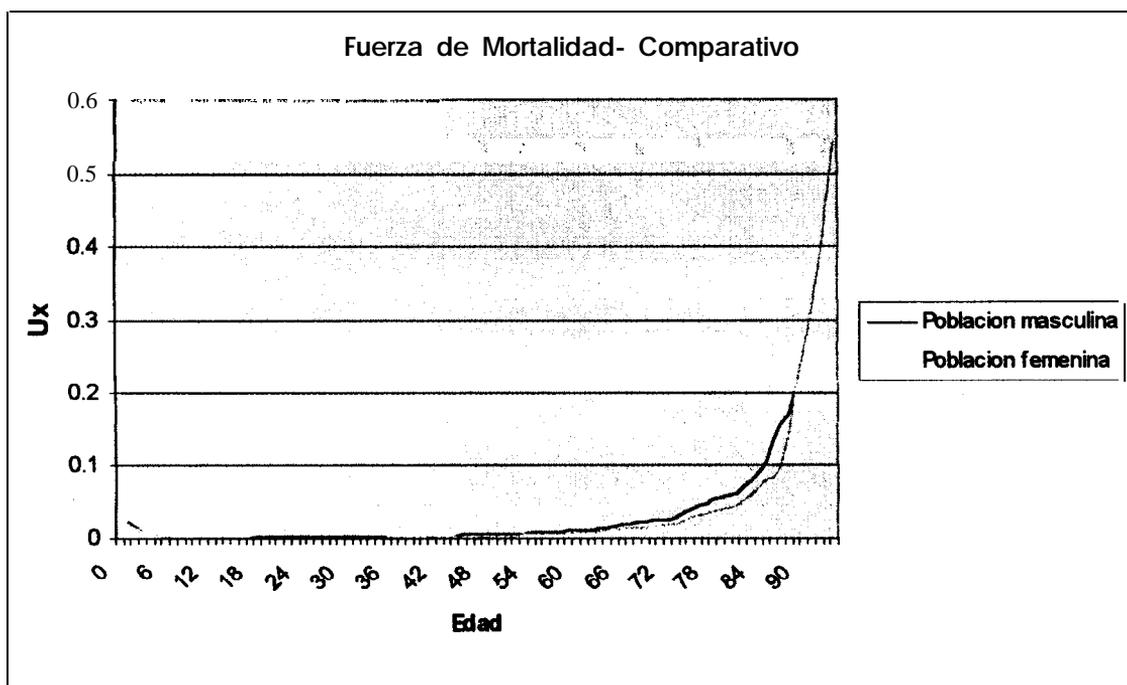
En cuanto a la función $l_x u_x$ que representa la densidad esperada de muertes a la edad de x , presenta en la población en general, un máximo alrededor de la edad de 88 años, esto significa que alrededor de esa edad se espera el máximo número de muertes en ese grupo de edad.

Una de las principales características de una función de fuerza de mortalidad es que tiende al infinito cuando x se incrementa. Las tablas construidas poseen marcadamente esta característica.

Además podemos darnos cuenta que, como es característico también, en las funciones de la fuerza de mortalidad u_x , se presenta un mínimo en edades jóvenes, tanto en la tabla para la población general, como para las tablas para las poblaciones masculina y femenina, variando un poco el comportamiento.

Se puede observar que en la población en general, y tanto para la población masculina como para la población femenina se observa un mínimo alrededor de los 10 años (ver detalle en el anexo 3).

Figura 4.4.1



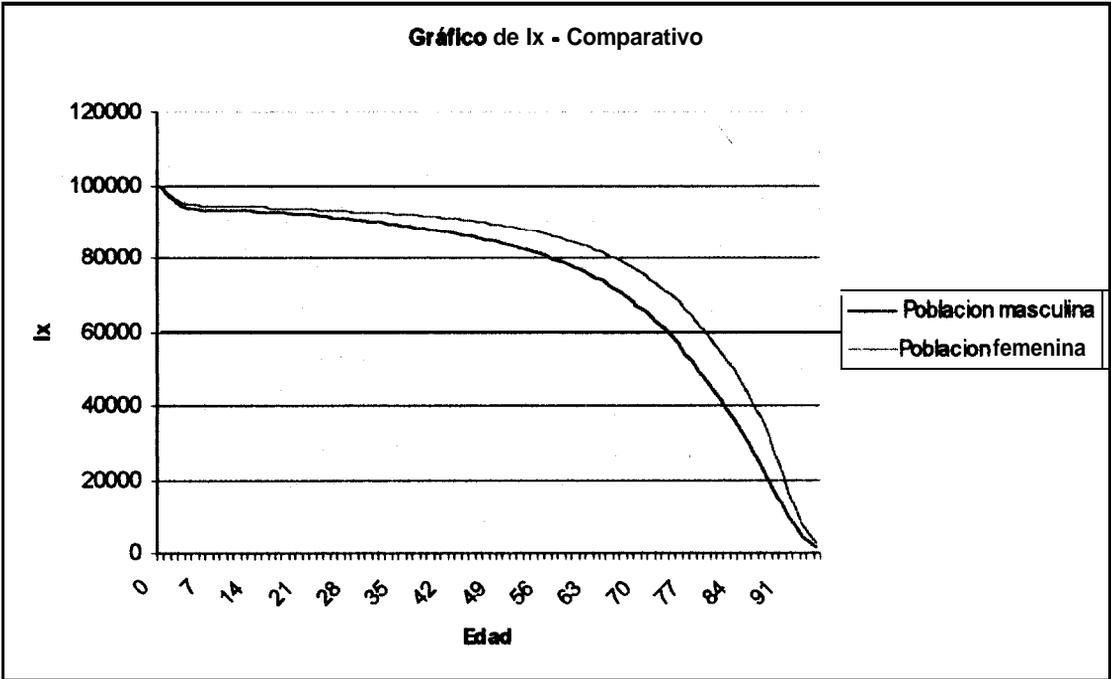
Como se dijo anteriormente, la curva se incrementa mas bruscamente en la población femenina en la edades mayores, lo que nos indica que la fuerza de mortalidad tiene menores consecuencias en la población femenina.

La función $l_x u_x$ que representa la densidad esperada de muertes a la edad x , presenta en la población en general, un máximo alrededor de la edad de 88

años, Para la población masculina el máximo esta, de igual manera, alrededor de los 88 años, y en la población femenina, esta por alrededor de los 87 años. Veamos también que los puntos locales extremos de $l_x u_x$ corresponden a los puntos de inflexión en l_x

Veamos ahora los gráficos de l_x para las poblaciones masculina y femenina. Vemos que la curva decrece mas bruscamente en las edades mayores para la población femenina, luego de esto, las dos fuerzas parecen tener el mismo patrón.

Figura 4.4.2

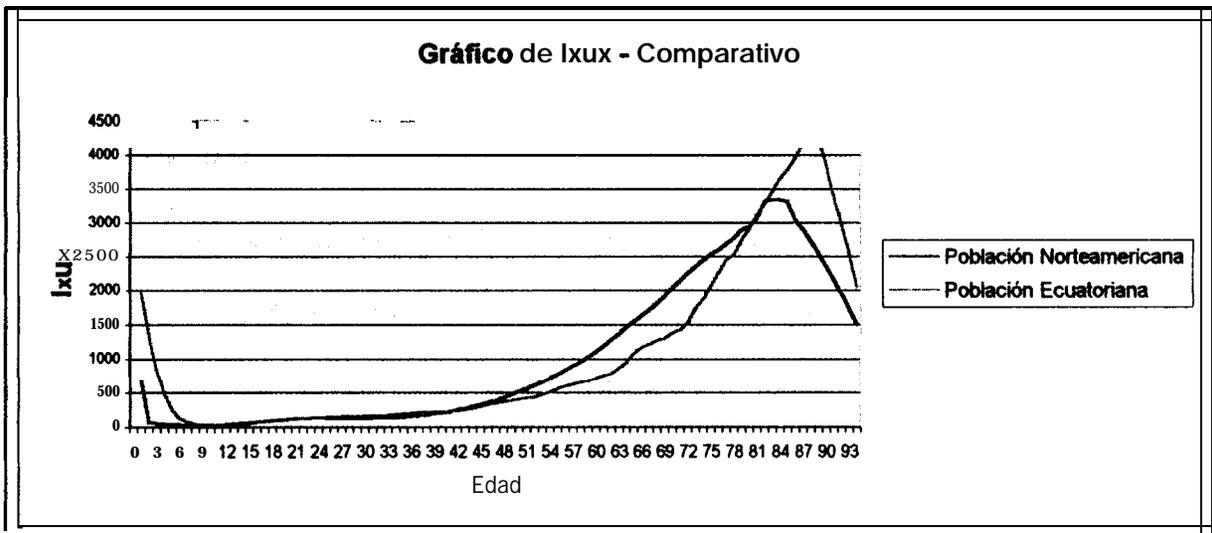


Comparemos ahora las datos con los de la población norteamericana, tomada de el libro “Matemáticas Actariales” publicado por La Sociedad de Actuarios, Itasca, Illinois, en 1986 con la finalidad de tener un punto de

referencia para la tabla de mortalidad de la población ecuatoriana en general. La edad esperada de vida para un recién nacido norteamericano es 75 años, mientras que para un recién nacido ecuatoriano es 72 años. Del total de recién nacidos, el 1% perece antes de cumplir el primer año de vida, para la población ecuatoriana esta tasa es dos veces superior.

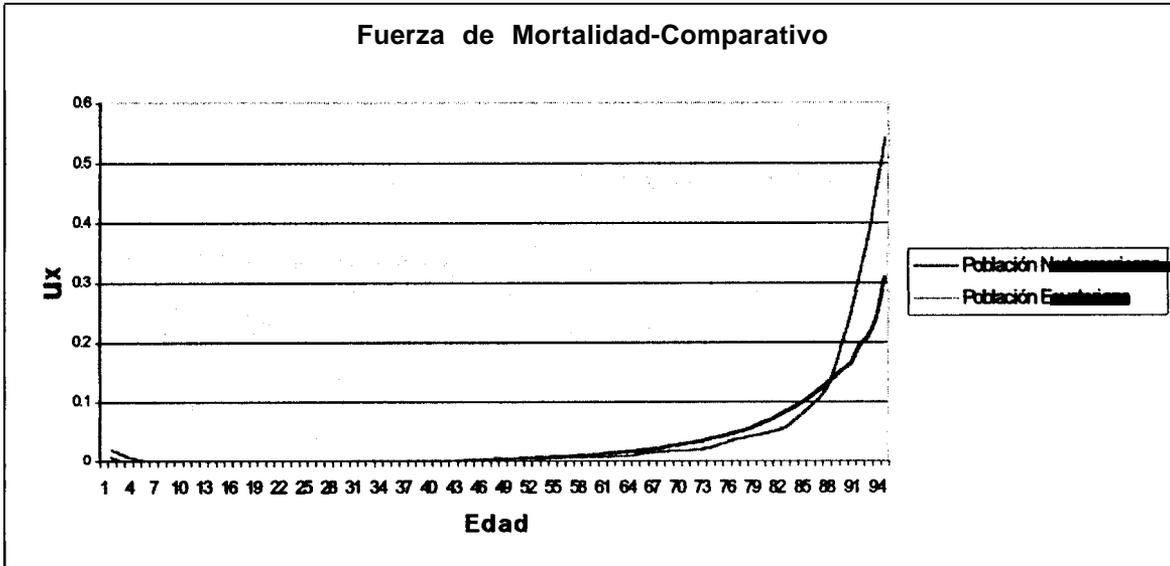
El máximo numero de muertes en un grupo de edad específico para la población Norteamericana ocurre a la edad de 83 años, para la población ecuatoriana ocurre a los 88 años.

Figura 4.4.3



Para la población Norteamericana la función de fuerza de mortalidad presenta su mínimo a la edad de 10 años. Para la población ecuatoriana ocurre de igual manera aunque los patrones son diferentes como se puede observar en la figura 4.4.4.

Figura 4.4.4



4.5 Construcción de una tabla de mortalidad utilizando el modelo de Makeham

Hay algunas justificaciones para usar un modelo analítico para la mortalidad y las funciones de supervivencia. Una de ellas es que, al tener un modelo analítico que se ajuste bien a la realidad, se pueden explicar muchos fenómenos biológicos usando simples fórmulas. Muchos autores han sugerido que la mortalidad humana es gobernada por una ley. La segunda justificación es que es más fácil manejar unos pocos parámetros que definen una ley que manejar más de cien parámetros o probabilidades de mortalidad. La utilización de funciones de supervivencia analíticas ha declinado en años recientes, sin embargo, algunos recientes estudios han reiterado los argumentos biológicos para el desarrollo de leyes analíticas de mortalidad.

En este estudio se construirá una tabla de mortalidad para la población ecuatoriana según el modelo de Makeham.

El modelo de Makeham, como se había mencionado anteriormente, expresa la fuerza de mortalidad como:

$$\mu_x = a + bc^x$$

Utilizando los estimadores de q_x :

$$q_x = \frac{D_x + 1}{L_x + 2}$$

Se obtiene los estimadores de u'_x ,

$$\mu'_x \approx 2 \frac{q_x}{2 - q_x}$$

Luego, obtenemos un estimador para c a partir de la mediana de la variables aleatorias generadas por:

$$c = \frac{\Delta^2 \ln(l_{x+1})}{\Delta^2 \ln(l_x)}$$

Entonces,

$$c = 1.07$$

A partir de la técnica de los mínimos cuadrados se obtiene la función estimada de u_x .

	<i>Coefficientes</i>	<i>Error típico</i>	<i>Estadístico t</i>	<i>Probabilidad</i>	<i>Inferior 95%</i>	<i>Superior 95%</i>
<i>Intercepción</i>	-0.00350678	0.00091219	-3.84434567	0.00024518	-0.00532281	-0.00169074
Variable X 1	0.00175411	0.00010112	17.3483272	1.7085E-28	0.00155279	0.00195543

$$\mu_x = -0.00351 + 0.00175(1.07)^x$$

l_x se calcularía por:

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x u_y dy}$$

$$l_x = l_0 e^{(0.0035 \ln x - 0.025865) e^{(0.0676586484x)} + 0.02586}$$

En fin, una vez obtenida la función de la fuerza de mortalidad, podemos seguir completando las demás funciones de la tabla usando las identidades mencionadas en el capítulo 3. Recordemos que el modelo de Makeham no posee mínimos locales, y la fuerza de mortalidad, generalmente posee un mínimo local en las edades juveniles, es por esto que en este estudio se ha construido una tabla de mortalidad basada en las edades de 20 a 80 años, así obtenemos la tabla correspondiente.

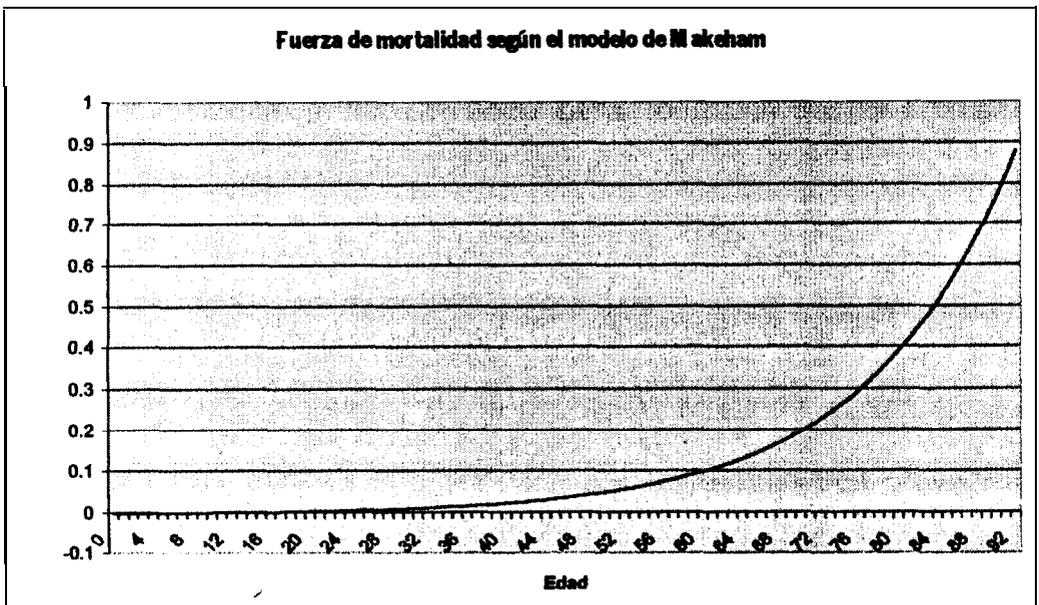
x	l_x	q_x	p_x	d_x	u_x
20	99901	0.003033	0.996967	303	0.002837
21	99598	0.003490	0.996510	348	0.003281
22	99251	0.003979	0.996021	395	0.003756
23	98856	0.004501	0.995499	445	0.004265
24	98411	0.005060	0.994940	498	0.004809
25	97913	0.005658	0.994342	554	0.005391
26	97359	0.006297	0.993703	613	0.006014
27	96746	0.006980	0.993020	675	0.006680

28	96071	0.007711	0.992289	7411	0.0073931
29	95330	0.008492	0.991508	610	0.008156
30	94520	0.009327	0.990673	882	0.008972
31	93639	0.010220	0.989780	957	0.009846
32	92662	0.011174	0.988826	1036	0.010781
33	91646	0.012195	0.987805	1118	0.011781
34	90528	0.013285	0.986715	1203	0.012851
35	69326	0.014451	0.965549	1291	0.013996
36	88035	0.015696	0.984304	1382	0.015221
37	86653	0.017027	0.982973	1475	0.016532
38	85178	0.018449	0.981551	1571	0.017935
39	83606	0.019969	0.980031	1670	0.019436
40	81937	0.021592	0.978408	1769	0.021042
41	80168	0.023326	0.976674	1870	0.022760
42	78298	0.025178	0.974822	1971	0.024599
43	76326	0.027155	0.972845	2073	0.026566
44	74254	0.029267	0.970733	2173	0.028671
45	72080	0.031521	0.968479	2272	0.030924
46	69808	0.033927	0.966073	2368	0.033334
47	67440	0.036495	0.963505	2461	0.035913
48	64979	0.039236	0.960764	2549	0.038672
49	62429	0.042159	0.957841	2632	0.041625
50	59797	0.045278	0.954722	2707	0.044784
51	57090	0.048603	0.951397	2775	0.048164
52	54315	0.052148	0.947852	2832	0.051781
53	51483	0.055927	0.944073	2879	0.055651
54	48603	0.059954	0.940046	2914	0.059792
55	45689	0.064243	0.935757	2935	0.064223
56	42754	0.068811	0.931189	2942	0.068964
57	39812	0.073674	0.926326	2933	0.074037
58	36879	0.078850	0.921150	2908	0.079465
59	33971	0.084356	0.915644	2866	0.085274
60	31106	0.090210	0.909790	2806	0.091488
61	28299	0.096433	0.903567	2729	0.098138
62	25570	0.103045	0.896955	2635	0.105253
63	22936	0.110066	0.889934	2524	0.112866
64	20411	0.117517	0.882483	2399	0.121012
65	18012	0.125421	0.874579	2259	0.129728

66	15753	0.133800	0.866260	2108	0.139055
67	13646	0.142676	0.857324	1947	0.149034
68	11699	0.152073	0.847927	1779	0.159712
69	9920	0.162014	0.837986	1607	0.171137
70	8312	0.172522	0.827478	1434	0.183363
71	6878	0.183619	0.816381	1283	0.198443
72	5615	0.195329	0.804671	1097	0.210440
73	4519	0.207672	0.792328	938	0.225416
74	3580	0.220669	0.779331	790	0.241441
75	2790	0.234341	0.765659	654	0.258587
76	2136	0.248704	0.751296	531	0.276934
77	1605	0.263774	0.736226	423	0.298565
78	1182	0.279564	0.720436	330	0.317570
79	851	0.296085	0.703915	252	0.340045
80	599	0.313342	0.686658	188	0.364094

Observando la figura 4.5.1 no podemos dar cuenta que la fuerza de mortalidad no tiene el mínimo local que se pudo observar en las tablas de mortalidad construidas anteriormente (ver anexo 3).

Figura4.5.1



CAPITULO 5

5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones

Para desarrollar las tablas resultantes de este estudio, como se ha podido ver, no se necesitó tomar un grupo representativo de recién nacidos de la población ecuatoriana y observar su comportamiento durante un siglo o hasta que muera el último de los sobrevivientes. Mas bien fueron basadas en los datos que se obtuvieron de la población ecuatoriana en los últimos años por edades simples, mediante los cuales se obtuvo una estimación de las tasas de mortalidad y sobrevivencia para cada una de las edades y los grupos investigados.

El desarrollo de nuevos modelos de mortalidad y la investigación del comportamiento demográfico de la población ecuatoriana, son temas muy importantes para el desarrollo del país, son temas que nos proveen de tal información que son usados para, además de cálculos de primas para

seguros de vida, también para el manejo de los recursos del estado en cuanto a salud.

Al observar el comportamiento de los datos y las curvas de las distintas funciones, como fuerza de mortalidad, la densidad esperada del número de muertes a la edad x , y el número esperado de **años** de vida futura, se pueden destacar algunos datos importantes. Se ha podido observar datos característicos demográficos de una población que está en vías de desarrollo, como por ejemplo la alta tasa de mortalidad infantil, que en el primer año de vida es casi el doble de la norteamericana. Sin embargo hay que destacar el aumento del tiempo esperado de vida para un individuo recién nacido, desde 1990, que está en alrededor de los 71 años de edad para la población general.

Se observaron también rasgos típicos de una población, como la presencia de un mínimo en la función de la fuerza de mortalidad, que se presenta en las edades juveniles, en el caso del Ecuador, alrededor de los 10 años. Este mínimo se explica por la alta tasa de mortalidad que se presentan en los primeros años de vida, tasa que luego se reduce y aumenta otra vez en las edades maduras.

Según los últimos reportes, y como consecuencia de la actual crisis en la que se encuentra nuestro país, la tasa de emigración estaría en alrededor del

10% de la población total ecuatoriana, lo que nos ocasionaría una distorsión entre los datos usados y los valores reales de la población en las distintas edades, la que sería en realidad menor, ya que estos son proyecciones de la población a partir del censo de 1990, año en el cual la tasa de emigración era significativamente menor.

Los datos que se toman para desarrollar cualquier tipo estudio, son sumamente importantes, en el caso de este estudio, se notó una gran falencia en la toma de datos por parte de las instituciones encargadas, como se notó en los datos del censo de 1990, donde es notoria la preferencia por las edades quinquenales, aunque se trató de tomar medidas que minimicen este error, como el suavizamiento de los datos, esto podría ser una fuente considerable de error.

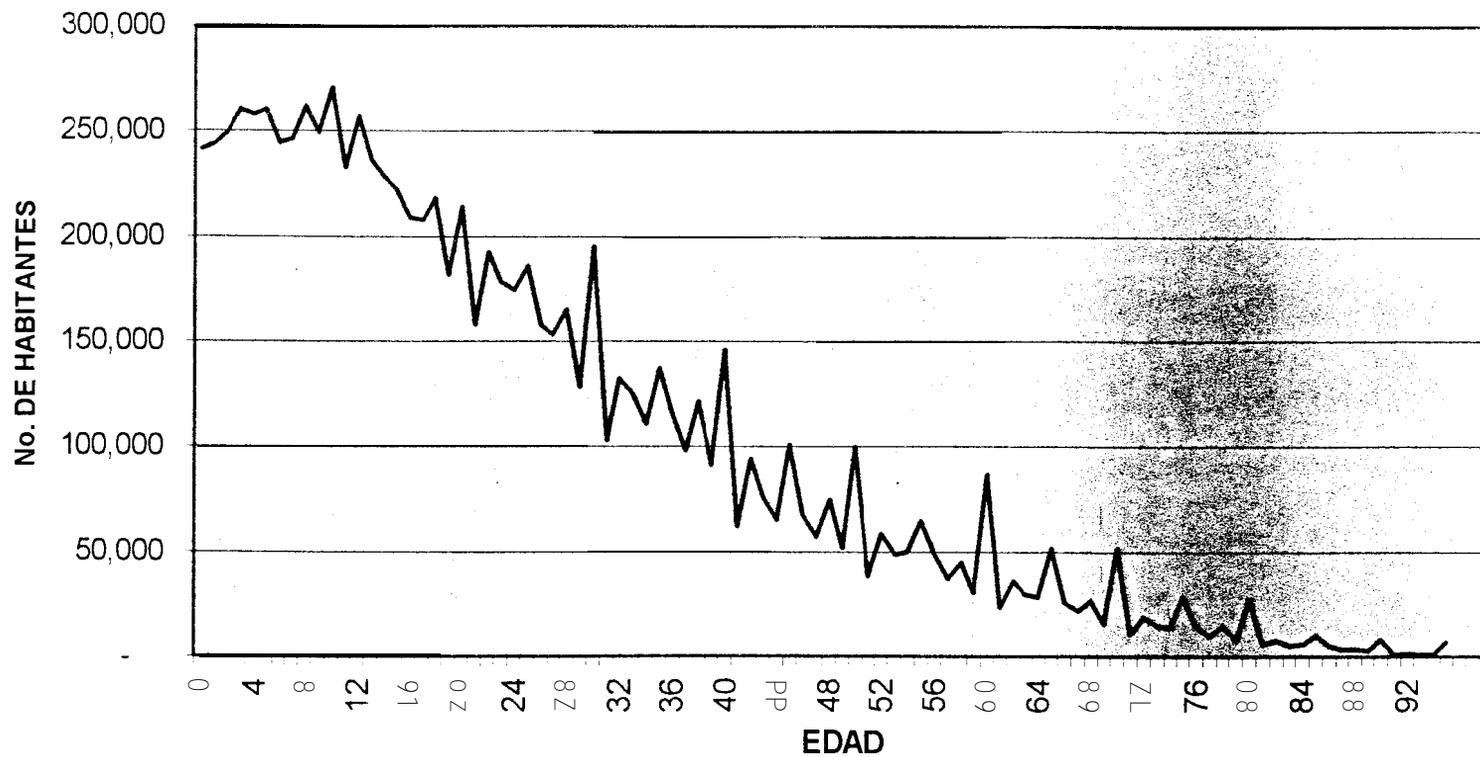
5.2 Recomendaciones

- Es importante mencionar que los datos de población se obtuvieron mediante las proyecciones que realiza el Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INEC), basadas en los resultados de los últimos censos de población, y las defunciones, que son datos reales que el INEC toma del Registro Civil para luego procesarlos. El uso de proyecciones hace que exista un error por estimación, del cuál solo podremos tener información después del siguiente censo de población. Es interesante, y

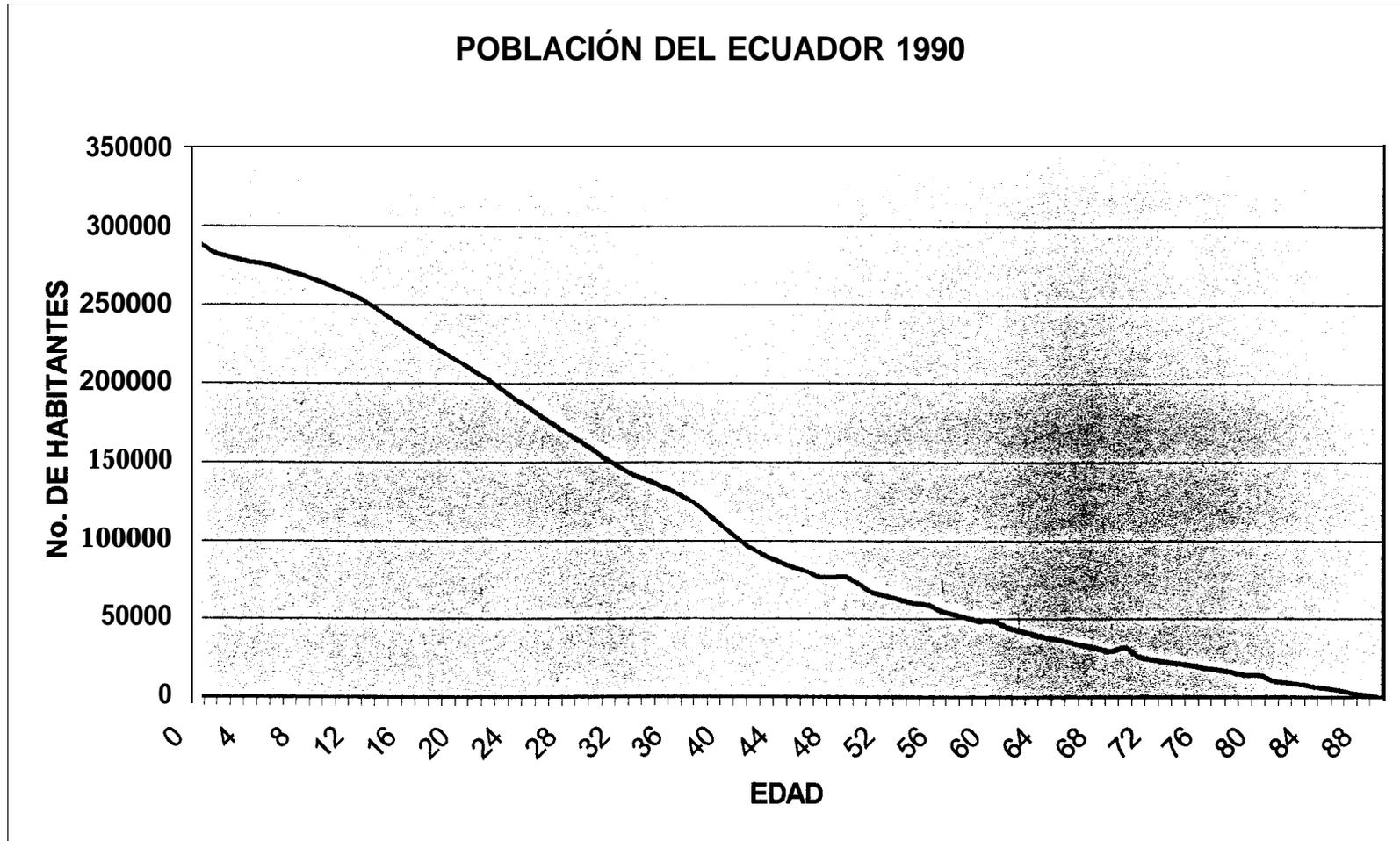
podría ser un tema de tesis, analizar este error o diseñar un modelo de monitoreo para corregir las proyecciones en el lapso de tiempo entre censos poblacionales.

Es recomendable hacer estudios sobre modelos analíticos que se ajusten de mejor manera a los patrones de mortalidad y supervivencia empíricos, puesto que los modelos analíticos clásicos tienen serias deficiencias, y quedan como simples ilustraciones académicas que difícilmente se ajustan a la realidad. El modelo ampliado de Makeham, aparece como un modelo muy interesante, ya que la función de la fuerza de mortalidad que se modela, como se pudo ver en los resultados obtenidos, tiene un mínimo a diferencia de los modelos clásicos.

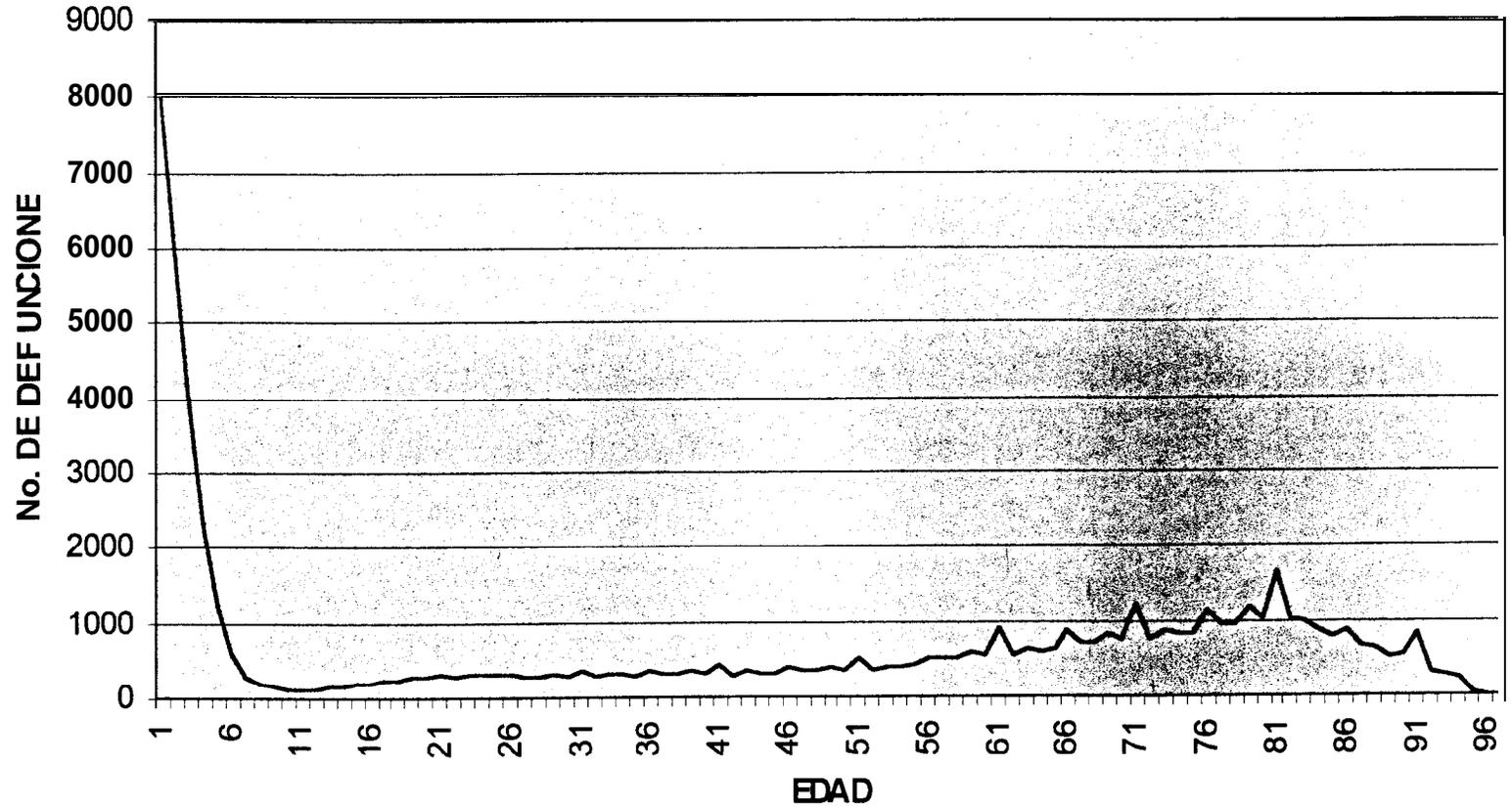
DATOS DEL CENSO DE 1990



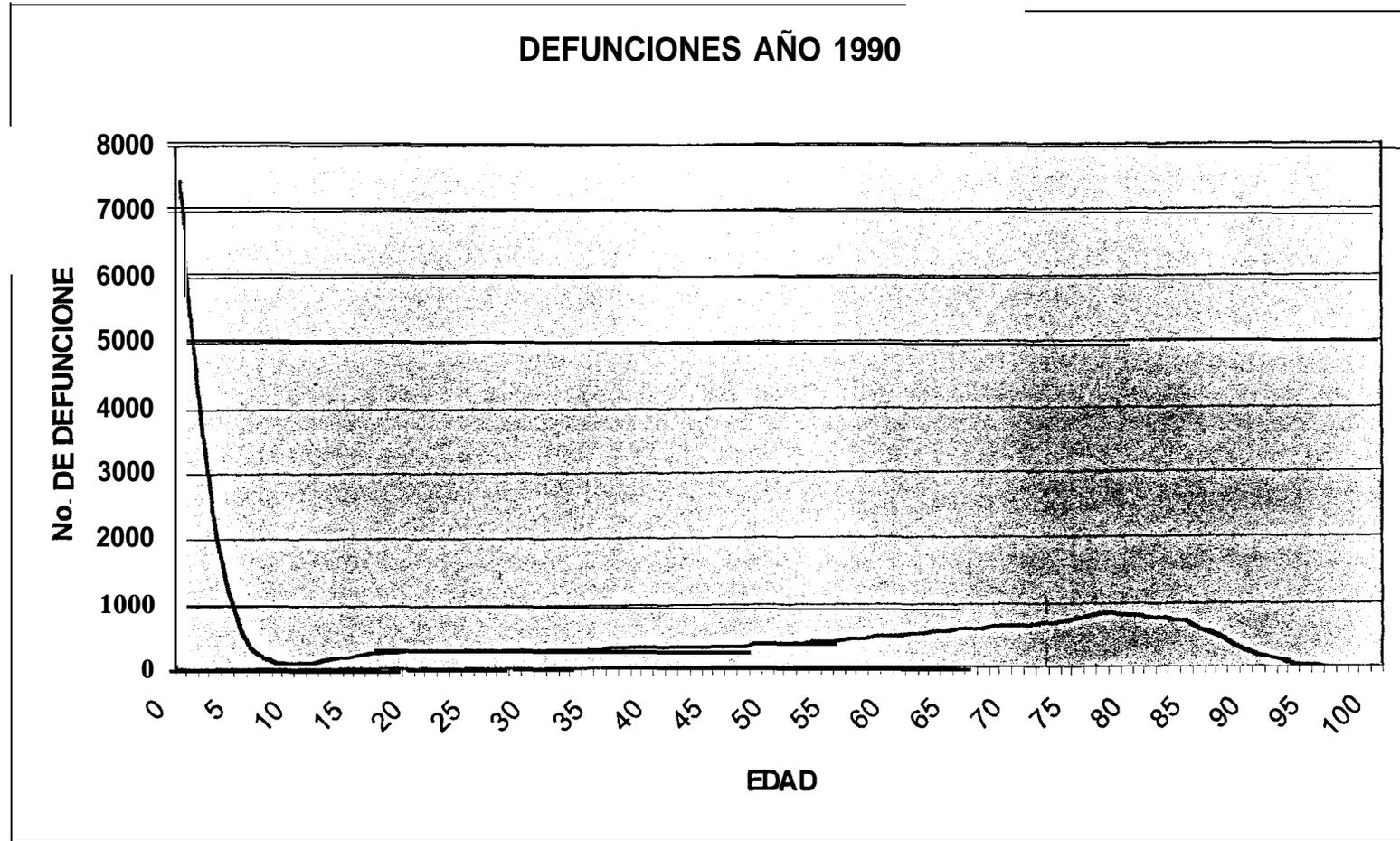
ANEXO 1 -B Datos del censo de 1990 después del proceso de suavizamiento



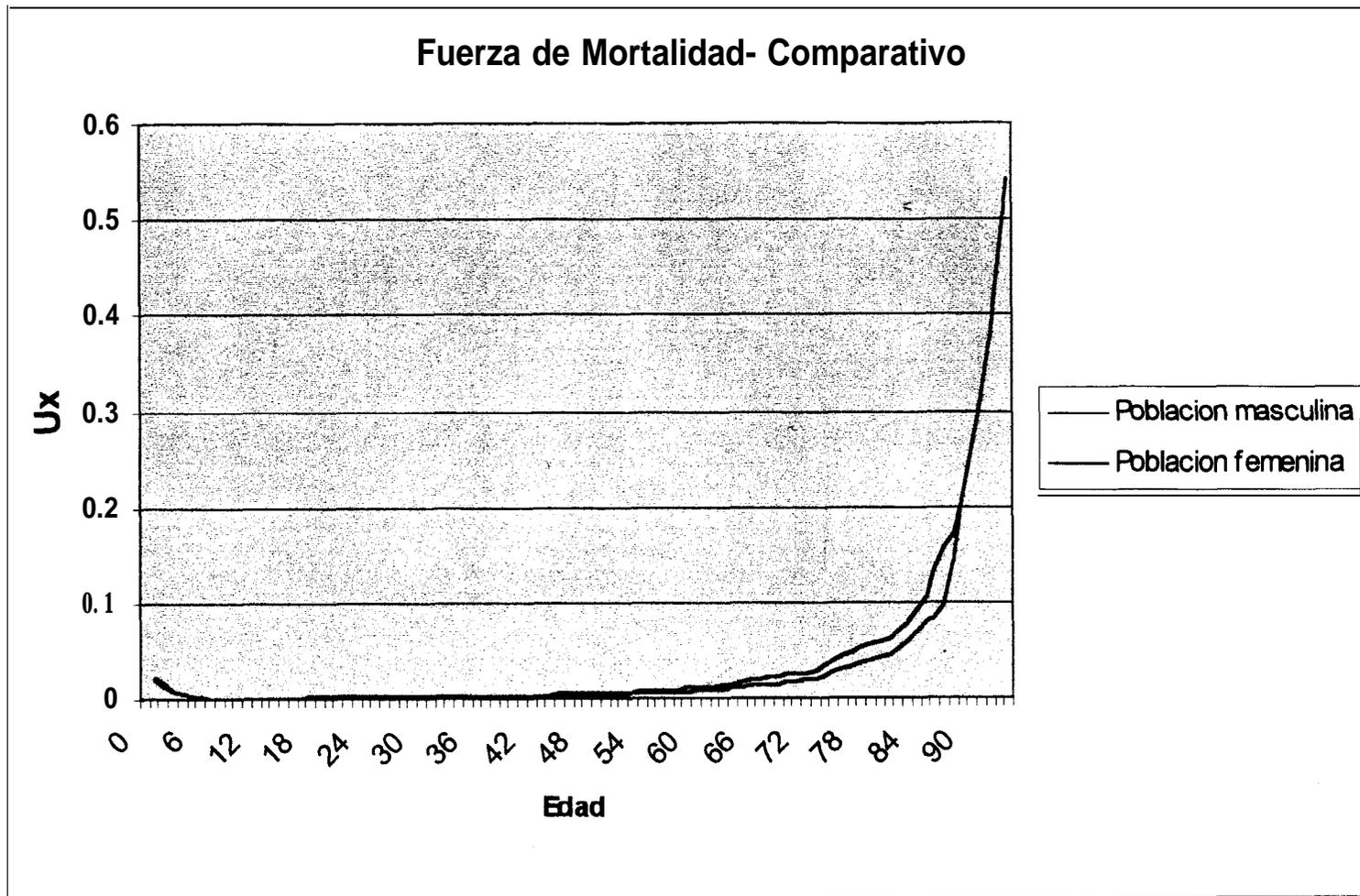
DEFUNCIONES AÑO 1990



ANEXO 2-B Defunciones de la población ecuatoriana 1990 - Antes del proceso de suavizamiento

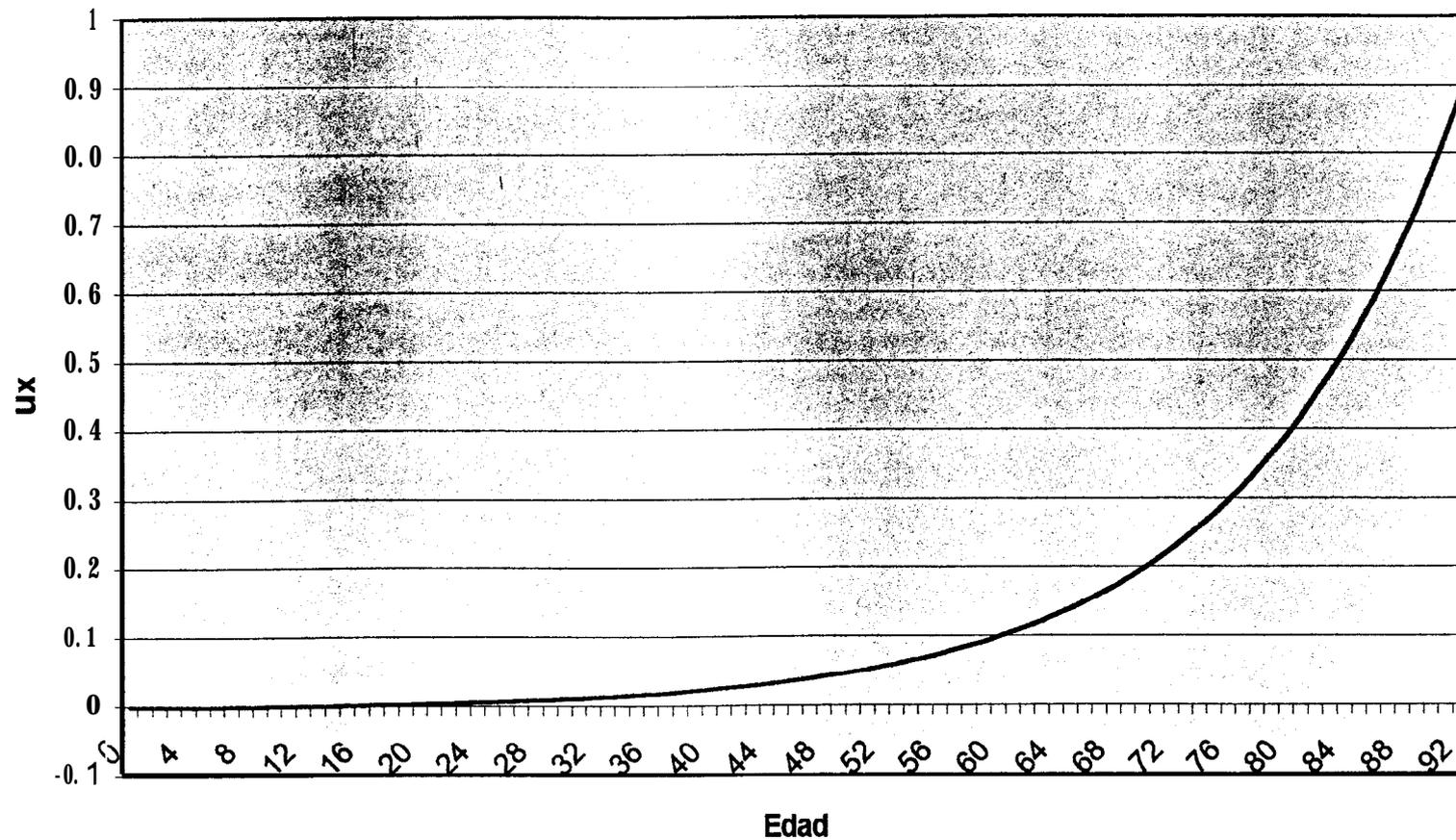


ANEXO 3 Comparativo de la fuerza de mortalidad entre las poblaciones masculina y femenina del Ecuador



ANEXO 4 Fuerza de mortalidad de la población ecuatoriana – Modelo de Makeham

Fuerza de mortalidad según el modelo de Makeham



BIBLIOGRAFIA

1. BOWERS NEWTON L. JR., GERBER **HANS** U., HICKMAN JAMES C., JONES DONALD A., Y NESBITT CECIL J., Actuarial Mathematics, Millicent Treloar, Illinois, 1986
2. **CHAPRA** STEVEN C., **CANALE** RAYMOND P., Métodos Numéricos para Ingenieros con Aplicaciones en Computadoras Personales, Mc Graw **Hill**, México, 1987
3. INEC, Anuario de Estadísticas Vitales, 1990 – 1997, Publicaciones del Instituto Nacional de Estadísticas y Censos, Quito
4. SANDOYA SANCHEZ FERNANDO, **Análisis** de un Modelo Ampliado para la Mortalidad de las Personas, VI Jornadas Estadísticas Informáticas, Escuela Superior Politécnica del Litoral, Guayaquil, 1999
5. UNITED NATIONS, Model **Life** Tables for Developing Countries, United Nations Publication, New York, 1982
6. VILLALON JULIO G., Operaciones de Seguros Clásicas y Modernas, Pirámide, España, 1997