ESCUELA SUPERIOR

POLITECNICA DEL LITORAL

Instituto de ciencias matemáticas

Función real de una variable.

Monografía:

Previa a la obtención del título de Magister en

Educación Matemática, aplicada a nivel medio

Presentado por:

Paul Costales Pesántez

Guayaquil - Ecuador

Marzo - 1994

DECLARACION EXPRESA

"La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestas en estas tesis, me corresponden exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la ESPOL).

AGRADECIMIENTO

Agradezco a todas las instituciones y personas que en forma directa me dieron la oportunidad para realizar este perfeccionamiento docente y con tal objetivo me brindaron su apoyo y amistad.

INTRODUCCION

Los orígenes de la noción de **función** y su influencia significativa en la evolución de la **matemática** puede anotarse en el siglo XVII. El concepto de **función** aparece explícitamente con Leibniz, por el año de 1692, posteriormente utilizado por Bernoulli. Más tarde Euler en 1734 por primera vez introdujo el símbolo **f(x)**, quien dio además un concepto general para función, concepto que en el año de 1854 quedó establecido por Dirichlet como correspondencia arbitraria entre dos variables.

Este trabajo de monografía, en lo que respecta a las definiciones, es un compendio de varios autores que pretenden aunar diversas experiencias de los matemáticos destacados en los últimos tiempos.

Esta monografía comprende tres capítulos :

Capítulo I , es la la fase inicial del trabajo que consta de algunas definiciones preliminares y el estudio de una función en general.

Capítulo II,es la parte medular de esta monografía , se analiza a la función real de una variable.

Capítulo III, esta última parte de la monografía se extiende al estudio de las funciones polinómicas lineal y cuadrática; y la función exponencial.

Todas las definiciones son debidamente ilustradas a base de ejemplos, diagramas y gráficas, aspirando que este estudio de funciones reales sea didáctico.

CONTENIDO

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO III

CAPITULO 1

FUNCION

1.1 PRELIMINARES

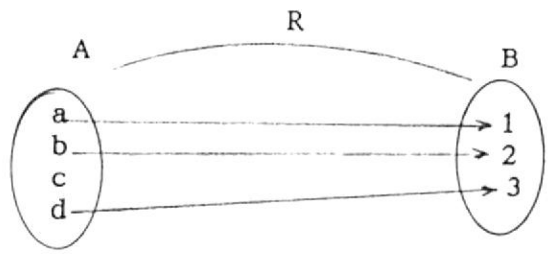
Para el estudio de funciones es necesario revisar el concepto de relación.

Definición 1.1: Sean A y B dos conjuntos no vacíos. A algún elemento $a \in A$ queremos asociar un elemento $b \in B$, bajo alguna regla de correspondencia, tal asociación se llama una relación de A en B. Además diremos que una relación R de A en B es un subconjunto S del producto cartesiano

$$A \times B$$

Se dice que dos elementos a y b de R están en relación si y solo si el par ordenado $(a,b) \in S$.

En la siguiente ilustración la asociación está representada por flechas (diagrama de Venn).



Al elemento a∈A asociamos el elemento 1∈B ===> a R 1

Al elemento b∈A asociamos el elemento 2∈B ===> b R 2

Al elemento d∈A asociamos el elemento 3∈B ===> d R 3

Para indicar que los elementos a y b están asociados o relacionados notaremos: a R b que se lee "a está relacionado con b", bajo la regla R, a saber: (a,b) ∈ S

<===> a R b.

En el diagrama se puede observar la siguiente relación:

a R 1

b R 2

d R 3

Este tipo de asociación se encuentra a menudo en forma natural, ej. las flores con sus respectivos colores; los elementos químicos con sus correspondientes pesos atómicos;los estudiantes con su peso, edad y estatura.También en la actividad del comercio se puede observar a diario los productos de un supermercado por ejemplo, y sus precios.Cualesquiera de estas asociaciones que puedan establecerse entre los elementos de un mismo conjunto o entre elementos de dos conjuntos implican en matemática una relación.

El conjunto A se llama **conjunto de partida**, cuya notación es D_R y se denomina **dominio de la relación**, $D_R \subseteq A$.

Y el conjunto B se llama conjunto de **llegada**, cuya notación es $\mathcal{R}_R$ y se denomina **rango** de la relación, o simplemente dominio de imágenes.

Ejemplos de relaciones:

Sean los conjuntos A= {2,3,4,6} y B= {4 6,8}

i) S_1 = {(2,4); (3,6); (4,8)}

y la relación R_1 : "x es la mitad de Y ".

ii) S_2 = {4,4); (6,6)}

y la relación R_2 : "x es igual a y"

iii) S_3 ={(2,4);(2,6);(2,8);(3,6);(4,4);(4,8);(6,6)}

y la relación R_3 : "x es divisor de y"

iv) S_4 = {(6,4)}

y la relación R_4 : "x es mayor que y"

1.2 FUNCION

Definición 1.2.: Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una función o transformación f de un conjunto A en un conjunto B es una regla que asigna a cada elemento a de A exactamente un elemento b de B . Se dice que f transforma a en b, o que f lleva a a b y que f transforma o lleva A en B.
La notación clásica para indicar que f es una función de A en B es:

$$A \xrightarrow{f} B$$

o también

$$f: A \longrightarrow B$$

y su regla de correspondencia $x \longrightarrow y = f(x)$

Nuestra pregunta ahora es ¿ Cómo conocer que una relación es una función o aplicación?.
Tomando el ejemplo de los productos de un supermercado y sus precios fijos, de la misma manera que el vendedor conoce cuales son los productos para la venta y el precio que debe asociar a cada producto, matemáticamente se debe conocer a los elementos del conjunto de partida de la aplicación o función , y conocer además el conjunto de llegada de dicha aplicación o función . Pero, así como para el vendedor no es suficiente saber cuales son los productos en venta y cuales todos sus precios para poder determinar a cada producto su precio; en matemática debemos conocer los pares ordenados formados con los elementos del conjunto de partida y sus correspondientes imágenes asociadas por la función.

Ejemplo 1.

Sean los conjuntos : A ={productos de venta} ={a,b,c,d}

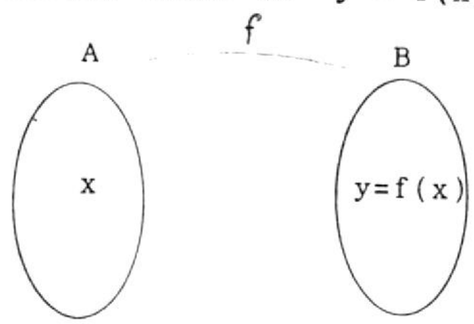
y B ={precios unitarios}={5,6,8,9}

A x B ={(a,5);(b,6);(c,8);(d,9)}

Estos pares ordenados son los elementos del producto cartesiano A x B.

donde el conjunto de los pares ordenados $(x,y) \subset A \times B$

El análisis del ejemplo propuesto nos permite clarificar el contexto de la definición dada:se **ha definido una función-,aplicación o transformación f** de un conjunto A en un conjunto B, como un subconjunto del producto cartesiano A x B tal que a todo elemento $x \in A$ hace corresponder **un único elemento** $y \in B$, que llamamos imagen del elemento x por la regla f, cuya notación usual es **y = f(x)**



Observaciones: . En **f** no pueden haber dos pares ordenados con primeras componentes iguales.

. A un elemento de A no le puede corresponder dos o más elementos en el conjunto B.

. Una función es una relación de valor único o relación funcional.

. Cualquier notación utilizada para función: **f**,**ϕ**, etc., f,ϕ

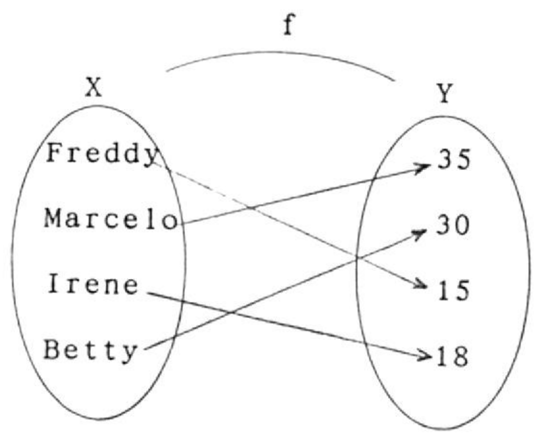
denota la función que se aplica sobre el elemento del conjunto de partida.

. f(x) ; ɸ (x) es el elemento del conjunto de llegada o imagen. Ejemplos de funciones:

Ejemplo 2. Sean los conjuntos X ={familia de un estudiante}

X ={Freddy,Marcelo,Irene,Betty}

Y={edad de los miembros de la familia} = {35,18,30,15}



En este diagrama podemos observar que ninguna persona tiene dos edades y todas las personas tienen al menos una edad, lo que nos permite concluir que en toda función se cumple las siguientes proposiciones:

. Todo elemento del conjunto de partida tiene una imagen en el conjunto de llegada.

. Cada elemento del conjunto X tiene uno y solo una imagen en el conjunto Y.

Ejemplo 3. Sean los conjuntos A ={2,3,4} y B = {6,7,8,9}.

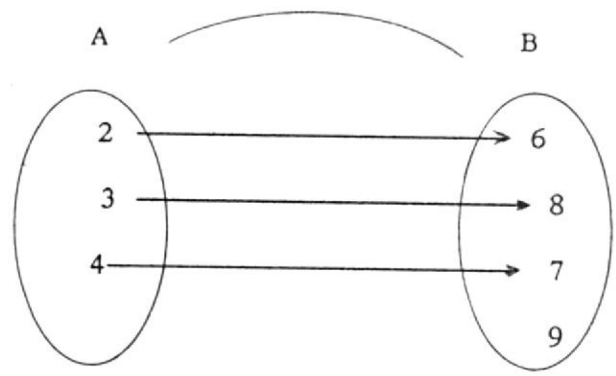
Y sea la función f de A en B:

f: A ——> B

2 ——> 6=f(2)

3 ——> 8=f(3)

4 ——> 7=f(7)

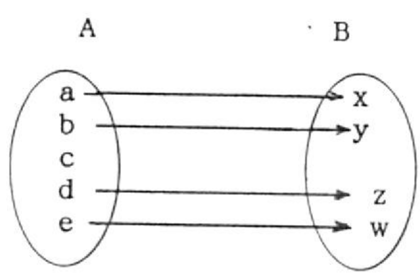


$\Longrightarrow$ f = { (2,6), (3,8), (4,7) }

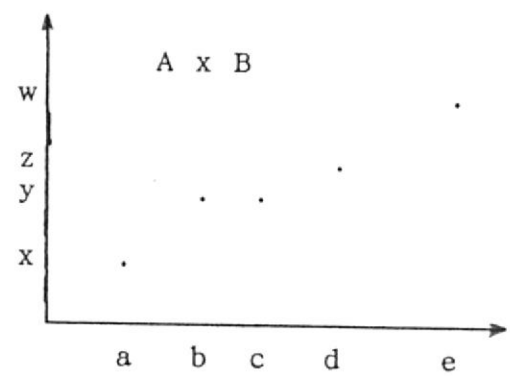
Ejemplo 4. Sean los conjuntos A={a,b,c,d,e} y B={x,y,z,w} sea la función ϕ de A en B:

ϕ = {(a,x),(b,y),(c,y),(d,z),(e,w) }

Diagrama de Venn



Representación gráfica



Ejemplo 5. Reconocer cuales de los siguientes conjuntos representan una función:

a) f ={(1,2);(3,4);(5,6)}

f si es una función porque los pares ordenados de este conjunto están conformados de tal manera que ningún elemento de la primera componente se repite.

b) h ={(1,3);(2,5);(1,4)}

h no es una función porque existe un par ordenado cuya primera componente se repite en otro par ordenado, a saber en los pares ordenados (1,3) y (1,4) se repite el elemento 1, por lo tanto esta relación no es una función.

1.3 DOMINIO Y CONTRADOMINIO DE UNA FUNCION

Hemos definido que f es una función de A en B, cuya notación más usual es f: A——> B.

Definición 1.3.1 El conjunto A o conjunto de partida se denomina **Dominio de la función f** y se nota por D_f , a saber el dominio de f está formado por todos los elementos de A.

$D_f = A \Longrightarrow D_f = \{ x \ / \ y=f(x), \ \forall x \in A \}$

*El dominio da la existencia a una función.

Definición 1.3.2 El **Contradominio** de la función f consta de todas las imágenes f(x) de los elementos x ∈ A, a saber el contradominio es un subconjunto del conjunto B o conjunto de llegada.

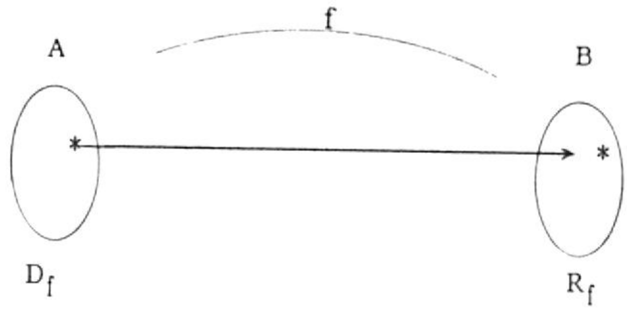
El contradominio de f notamos por R_f , esto implica $R_f \subset B$

$$R_f = \{ f(x) \ / \ x \in A \}$$

Los elementos del conjunto B asociados con los elementos del conjunto A forman otro conjunto denominado **Contra-dominio de f**.

Con las siguientes ilustraciones se esclarece las definiciones dadas sobre dominio y contradominio de una función:

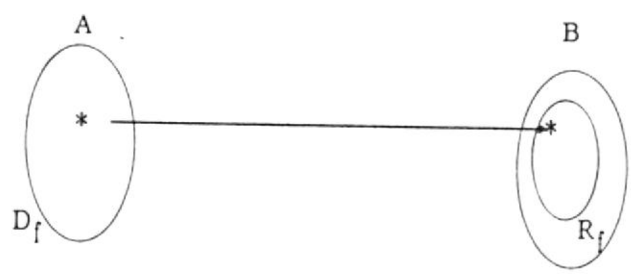
a)



En este diagrama se observa que el conjunto de llegada B es igual al contradominio o recorrido de f.

A saber $B = R_f$

b)



En este diagrama se observa que el conjunto de llegada B contiene al contradominio o recorrido de f.

A saber $B \supset R_f$

Ejemplo 1. Sean $X=\{1,2,3\}$ y $Y=\{5,6,7\}$

Una función f de X en Y es el conjunto:

$f = \{(1,5);(2,7);(3,6)\}$

$D_f = \{1,2,3\}$

$R_f = \{5,7,6\}$

$D_f = X$ y $R_f = Y$

Ejemplo 2. Sean $A=\{a,b,c,d\}$ y $B=\{m,n,r,s,t\}$

Una función ϕ de A en B es el conjunto:

$\phi = \{(a,m);(b,n);(c,r);(d,s)\}$

D_ϕ =A={a,b,c,d}
R_ϕ ={m,n,r,s} y $R_\phi \subset B$

Ejemplo 3. Sean X ={2,5,10} y Y ={3,7,10}

f de X en Y es el conjunto:

f ={(2,10);(5,10);(10,10)}

D_f = {2,5,10} = X R_f = {10}

Con la ilustración de estos ejemplos podemos concluir que el dominio de una función f, D_f es igual al conjunto de partida y el contradominio de f puede ser igual al conjunto de llegada,o un subconjunto propio del conjunto de llegada.

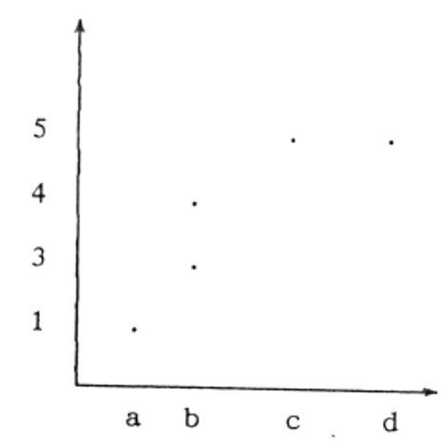
Ejemplo 4. Determinar el dominio y contradomionio o rango de las funciones cuyas representaciones gráficas son las siguientes:

a). f={(a,1);(b,3);(b,4);(c,5);(d,5)} , f no es función, porque b tiene dos imágenes.

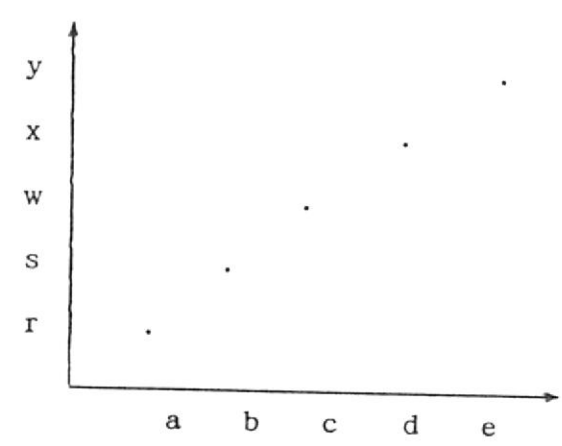
b). g={(a,r);(b,s);(c,w);(d,x);(e,y)} , g si es función

D_f ={a,b,c,d,e} y R_f ={r,s,x,w,y}

a)



b)



1.4. TIPOS DE FUNCIONES

1.4.1. Función Inyectiva

Definición . Una función f de un conjunto A en un conjunto B es uno a uno si y solo si **cada b elemento de B es imagen de a lo más un elemento a de A.**

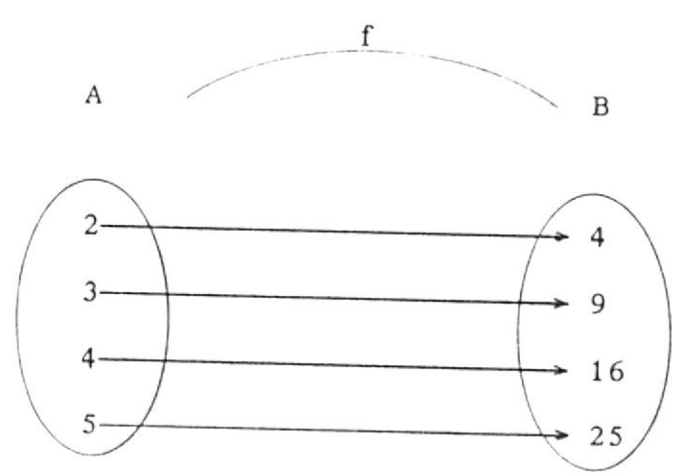
Ejemplo 1.Sean los conjuntos

$A = \{2,3,4,5\}$

y $B = \{4,9,16,25\}$

y $f : A \longrightarrow B$

$\Longrightarrow f = \{(2,4);(3,9);(4,16);(5,25)\}$ es una función uno a uno porque cada elemento de B es imagen de a lo más un elemento a de A, en el diagrama podemos observar que cada $b \in B$ tiene a lo más una flecha dirigida hacia si.



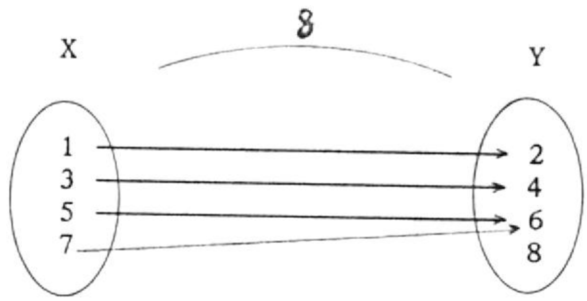
Para mostrar que f es uno a uno, se prueba que

$f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2$

lo cual significa que a elementos diferentes de A corresponden imágenes diferentes en B.

Observemos y analicemos estos diagramas:

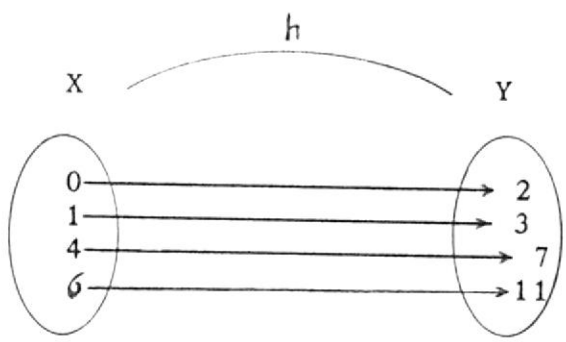
Ejemplo 2.



$g: X \longrightarrow Y$ no es inyectiva

$g(x_3) = g(x_4)$ y $x_3 = x_4$

Ejemplo 3.



$h : X \longrightarrow Y$ es inyectiva

1.4.2 Función Sobreyectiva

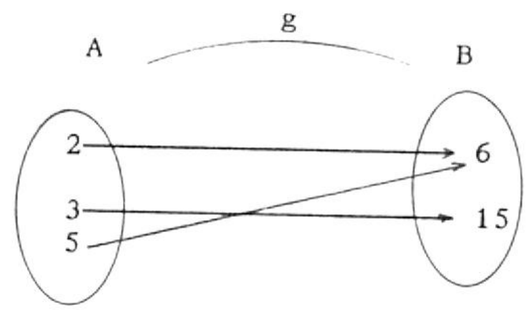
Definición: Una función de un conjunto A en un conjunto B es sobre B si cada elemento b de **B es imagen al menos de un elemento a de A.**

Ejemplos: 1. Sean los conjuntos $A = \{2,3,5\}$ y $B = \{6,15\}$

y $g: A \longrightarrow B$

$\Longrightarrow$ $g = \{(2,6);(3,15);(5,15)\}$ es sobre, puesto que todo elemento $b \in B$ es imagen de al menos un elemento $a \in A$.

En la ilustración podemos observar que todo elemento b de B tiene al menos una flecha dirigida hacia si misma.

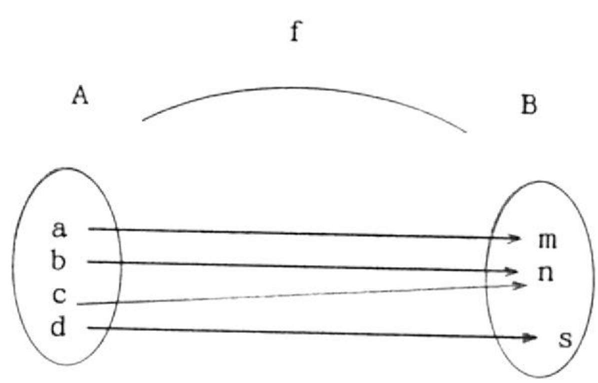


Para mostrar que g es una función sobreyectiva, se muestra que ∀ a ∈ A existe b ∈ B tal que g(a) = b, esta proposición es equivalente a $R_g = B$. Lo cual significa que si no existen en A elementos que no sean imágenes de algún elemento de A, la función es sobreyectiva.

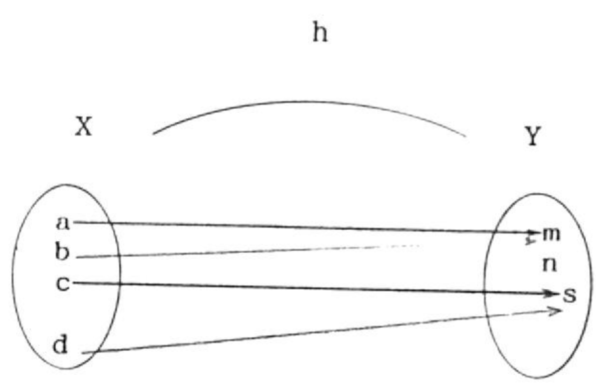
* f(x) es la imagen del conjunto A.

Observemos y analicemos estos diagramas:

Ejemplo.2



$R_f = B$ ====> f es sobreyectiva



$R_h \neq B$ entonces h no es sobreyectiva n de Y no es imagen de algún elemento conjunto X.

1.4.3 Función Biyectiva

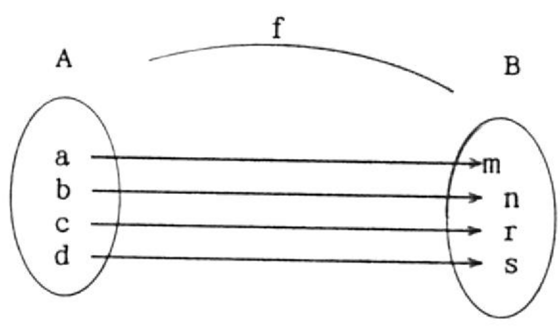
Definición: Una función de un conjunto A en un conjunto B es biyectiva o biunívoca , si a la vez es inyectiva y sobreyectiva A saber cuando todo elemento b del conjunto de llegada es exactamente imagen de un elemento a del conjunto de partida y además $R_f = B$ ====> f es una función biyectiva.

Para mostrar que f es biyectiva debemos mostrar que:

$\forall\ a \in A$, $a_1 = a_2$ en el dominio, entonces

$f(a_1) = f(a_2)$ en el contradominio.

Observemos y analicemos el siguiente diagrama:



f es inyectiva y sobreyectiva ====> f es biyectiva.

1.4.4 Definición: Sean las funciones

g: A ———> B y f: B ———> C

x ———> y=g(x) y ———> z=f(y)

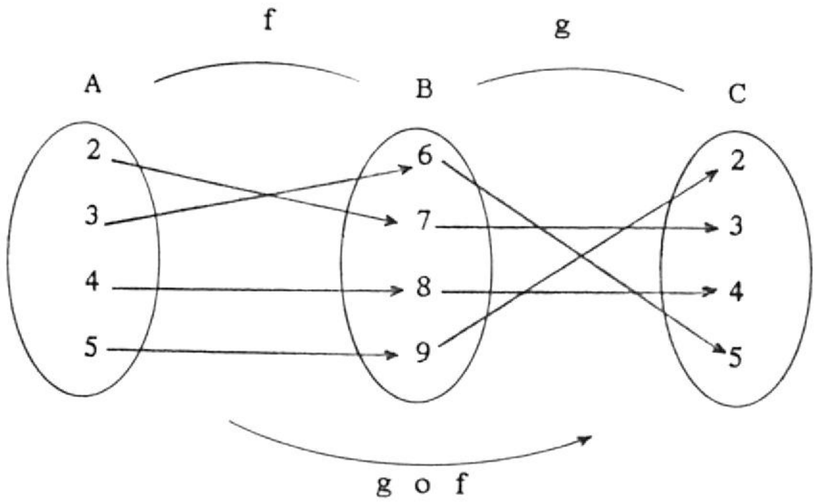
se denomina función compuesta de de g y f , cuya notación es f o g a la función de A en C definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

entonces $f \circ g : A \longrightarrow C$ cuya regla de correspondencia es $z=(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(y)$

Ejemplo 1. Sean las funciones $f=\{(2,7);(3,6);(4,8);(5,9)\}$ y $g=\{(6,5);(7,3);(8,4);(9,2)\}$, determinar $g \circ f$.

solución: $g \circ f=\{(2,3);(3,5);(4,4);(5,2)\}$



* Es importante observar que el conjunto de llegada de f es igual al conjunto de salida de g.

1.4.5 Función Inversa

Definición: Sean los conjuntos A y B, la función

$f : A \longrightarrow B$, biyectiva, cuya regla de correspondencia $x \longrightarrow y = f(x)$

definimos la función inversa de f como:

$f^{-1} : B \longrightarrow A$ y su regla de correspondencia es $y \longrightarrow x = f^{-1}(y)$

Ejemplo. 1 Sean los conjuntos $A=\{a,b,c,d\}$ y $B=\{1,2,3,4\}$

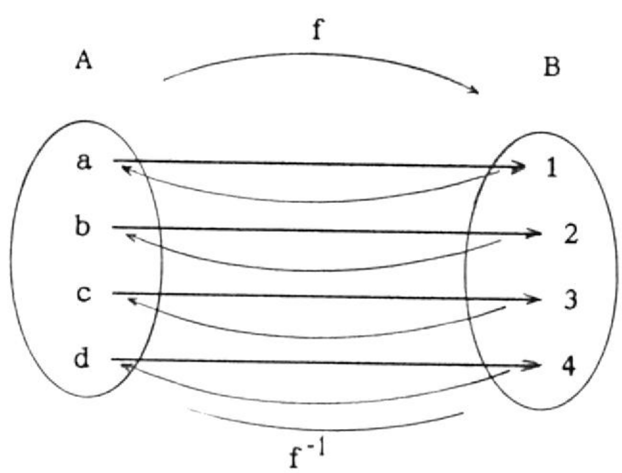
y $f=\{(a,1);(b,2);(c,3);(d,4)\}$ una función biyectiva, entonces existe su inversa:

$f^{-1} = \{(1,a);(2,b);(3,c);(4,d)\}$ la inversa de f.

f es una función sobreyectiva.

Al comparar los elementos de f y f^{-1} vemos que se intercambia el orden de los componentes en cada par ordenado, por lo que concluimos que el dominio de la función f pasa a ser el contradominio de la función inversa f^{-1} ; y el contradominio o recorrido de la función f pasa a ser el dominio de la función inversa f^{-1} esta doble relación de correspondencia solo se da en una función biyectiva.

Observemos el diagrama :

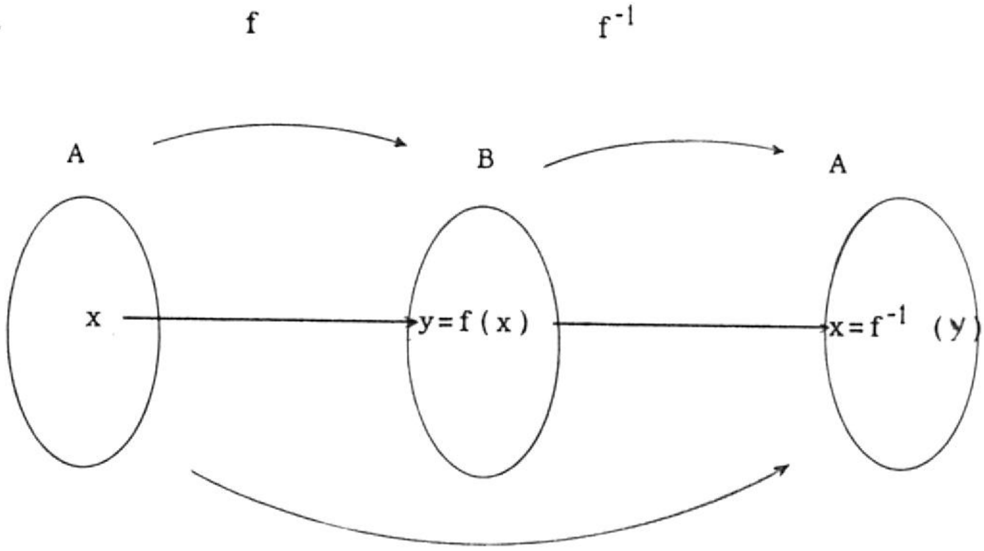


Propiedad de la función inversa: Si $f : A \longrightarrow B$ es una función fiyectiva $\Longrightarrow$ $f^{-1} : B \longrightarrow A$ es su inversa, entonces la composición $f^{-1} \circ f = I_A$

y también $f \circ f^{-1} = I_B$

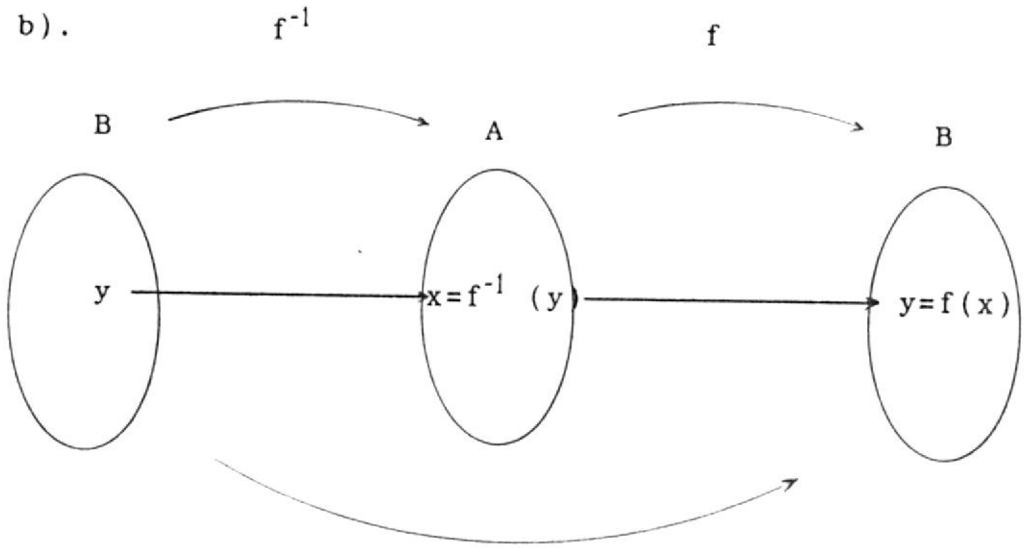
Los siguientes diagramas ilustran esta propiedad:

a).



$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \implies f^{-1} \circ f = I_A$$

b).



$$(f \circ f^{-1})(y) = y \implies f \circ f^{-1} = I_B$$

CAPITULO II

2. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

2.1 Definición: Las funciones cuyo dominio y contradominio son subconjuntos de los números reales se denominan funciones reales de una variable.

La notación de estas funciones es

$$f: R \longrightarrow R$$

y su regla de correspondencia $x \longrightarrow f(x) = y$

donde el dominio y el dominio de imágenes son los reales. A saber la primera componente x está en R y la segunda componente y también esta en R.

La forma de notar funcional identifica claramente la variable dependiente y, como f(x), lo que es equivalente a escribir: $y = f(x)$

El valor de la función $f : R \longrightarrow R$

definido por $x \longrightarrow f(x) = 2x+1$

para $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 5$, puesto que x como variable independiente puede tomar cualquier valor dentro del dominio.

2.2 Dominio y Rango de una función real:

El dominio y rango es la parte más sobresaliente en el análisis de cualquier función real.

Para determinar el dominio de f definida por $y=f(x)$, analizamos cuáles son los valores posibles para **x**, cuando esta implícito en la regla de correspondencia.

Ejemplo 1: Sea una función f que se define por $f(x) = \sqrt{x+2}$, tiene dominio implícito $D_f = \{x : x \geq -2\}$.

Ejemplo 2: Sea una función g definida por $g(x)= 1/(x^2 -4)$, $D_g =\{x /, x \in R - \{-2, 2\}$, es otro caso de dominio implícito.

Ejemplo 3. Sea f una función definida por $f(x)=\sqrt{x-3}$, $x\geq3$ en este caso el dominio es explícito $D_f = \{ x: x\geq3\}$. En general x representa un número arbitrario en el dominio de f y se llama variable independiente.

El contradominio o rango de una función f está representado por **f(x)** y se llama variable dependiente, puesto que su valor depende de los valores que se asigne a x.

Para determinar el contradominio o rango de una función f definida por $y=f(x)$, reemplazamos los valores asignados para x en $y = f(x)$ y de esta manera obtenemos el conjunto de imágenes que constituye el contradominio de una función.

Ejemplo 1. Determinar el dominio y el rango de estas funciones, cuyas reglas de correspondencia están dadas por las siguientes expresiones:

a). $h: A \longrightarrow R$

$x \longrightarrow h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

Solución: $A = D_h = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ y $R_h = R^+ + \{0\}$

b). $f : R \longrightarrow R$

$x \longrightarrow f(x) = x^3$

Solución: D_f = x reales $R_f = R$

c). $g : R \longrightarrow R$

$x \longrightarrow g(x) = 2x + 3$

Solución: D_g = x reales $R_g = R$

Ejemplo 2. Para $f(x) = \sqrt{x - 1}$ determinar el dominio y el rango de f

Solución: x - 1 no está definido para x < 1, por lo tanto el dominio de f es el intervalo $\{x: x \geq 1\}$.

Para encontrar el contradominio de f partimos de que x - 1 no puede ser negativo y lo que es más al variar x en el dominio f(x) toma todos los valores no negativos, luego el recorrido es $f(x) \geq 0$ fig.2.a

Ejemplo 3. Para $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1} & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

determinar el dominio de f

Solución: h está definido para $x \geq 1$ y $x < 1$, entonces el dominio de f es toda la recta real.

Para determinar el rango de h observemos que cuando $x \geq 1$ el dominio es $x \geq 1$ y para $x < 1$ el valor de $1 - x$ es positivo, por lo tanto el recorrido de h es el intervalo

2.3 Graficación de funciones reales

Definición: La gráfica de una función definida por $y = f(x)$ es el conjunto de todos los puntos (x,y) en el plano, donde x es la distancia dirigida desde el eje Y; y es la distancia dirigida desde el eje X.Las funciones reales están en R^2 y su representación gráfica se lo hace en el plano cartesiano.

Dada una función , para su representación gráfica en el plano cartesiano o plano coordenado determinamos una escala arbitraria igual para la coordenada en X y la coordenada en Y, en X ubicamos la primera componente que corresponde a un elemento del dominio; y en Y ubicamos la segunda componente que corresponde a un elemento del rango. Con un procedimiento análogo se ubican algunos puntos en el plano, y por la propiedad del contínuo de los números reales podemos inducir la representación gráfica de una función real.

Para calcular manualmente los valores de la función f para algunos valores x en R , formamos una tabla de valores.

En este trabajo la graficación de funciones se realizó utilizando un microcomputador en el Programa ECXEL 4.0 Fg 1.a; fig 1.b; fig1.c.

x	y
-2	2
-1	3
0	4
1	5
2	6
3	7
4	8

Representación gráfica de h

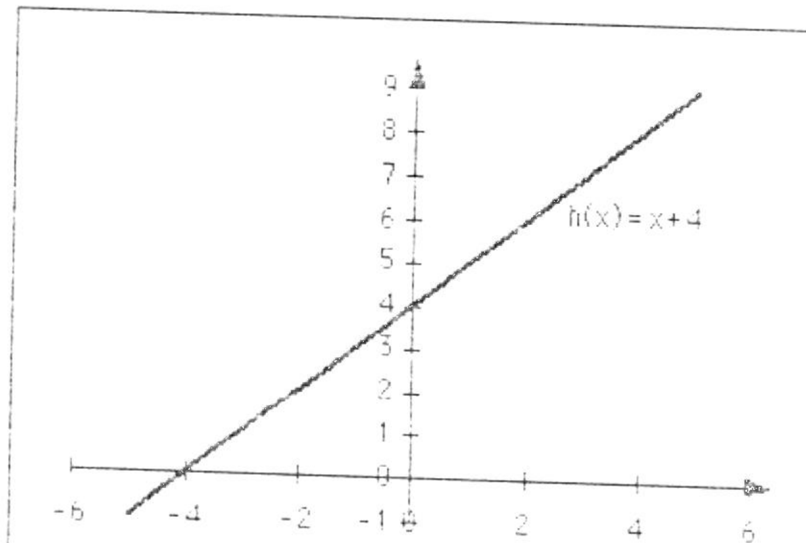


fig 1.a

Representación gráfica de g

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

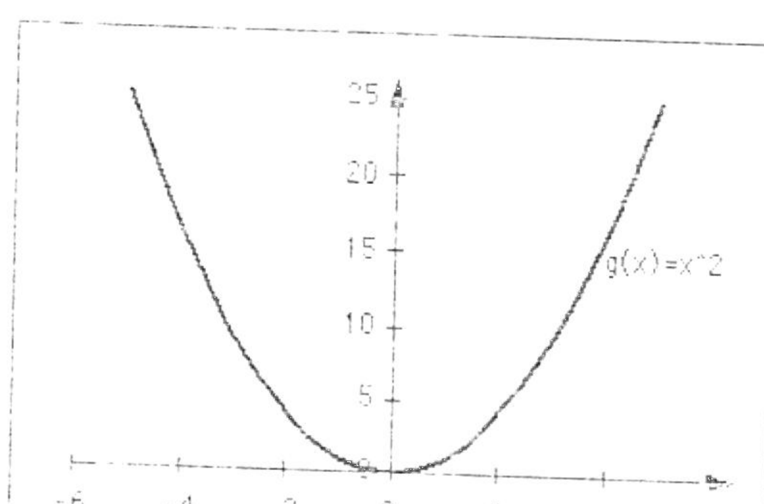
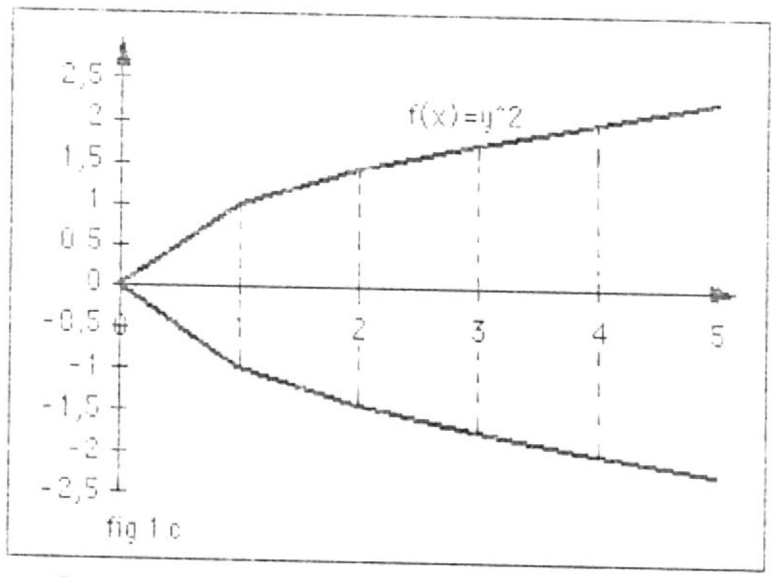


Fig 1.b

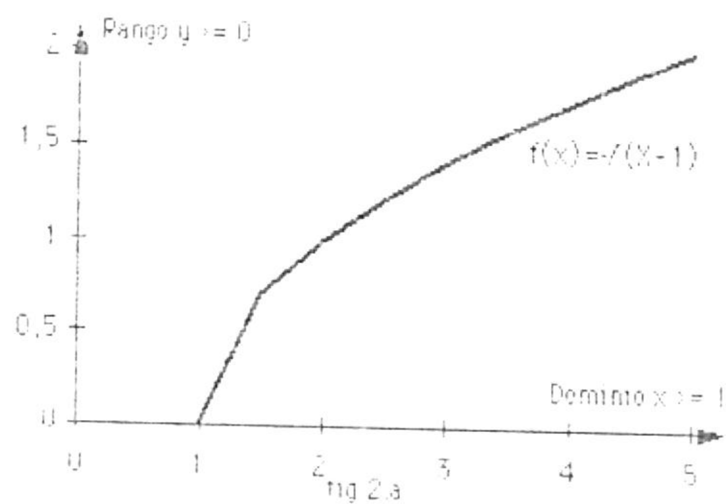
Representación gráfica de f

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

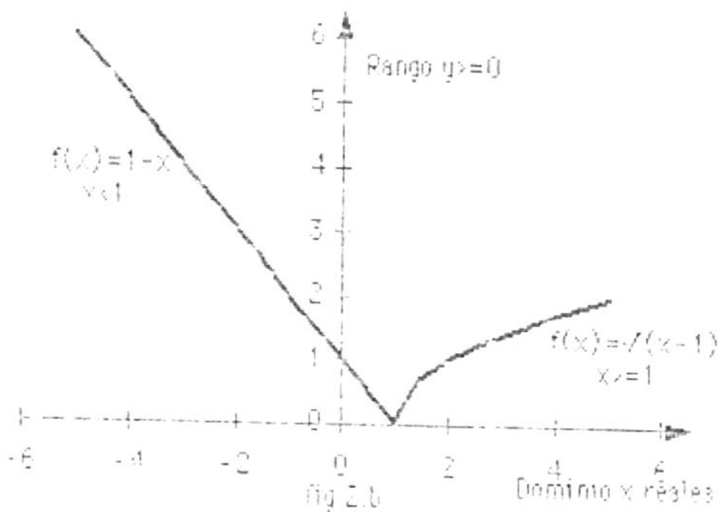


f no es función

Dominio y rango de f



Dominio y Rango de f



2.4 Ilustración gráfica de tipos de funciones reales

Como ya se dieron las definiciones de función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva; función inversa. Ilustraremos gráficamente estas definiciones para funciones reales.

- Función inyectiva

Ejemplo 1. Sea la función $f : R \longrightarrow R$

$$X \longrightarrow f(x) = x + 2$$

Si f es una función inyectiva debe cumplir que:

$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

en efecto $2 + x_1 = 2 + x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$, por lo tanto la función f es inyectiva.

La función lineal es inyectiva. fig 3.a

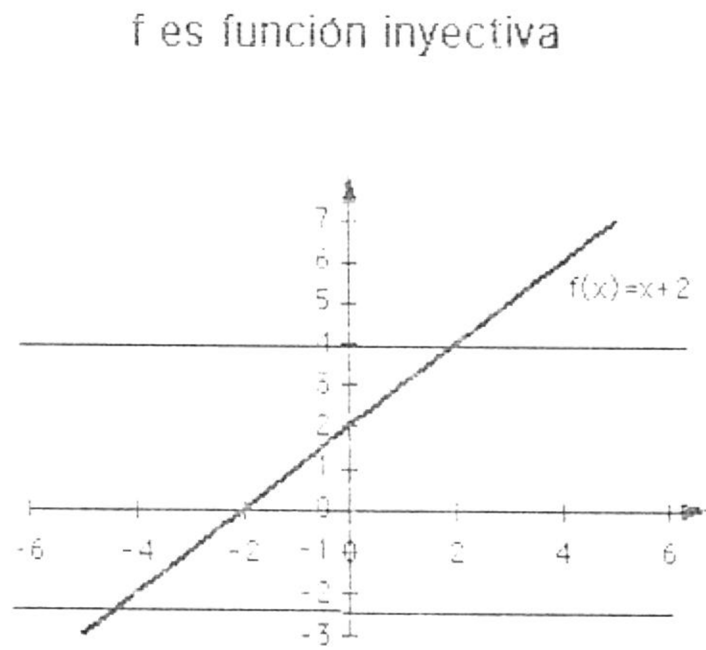


fig 3.a

Ejemplo 2. Sea $f(x) = x^3$, $x \in R$

Gráficamente podemos observar si una función es inyectiva o no, trazando paralelas al eje X. Si alguna de estas paralelas intersecta a la curva en un solo punto, garantiza que la función es inyectiva y si intersecta en más de un punto la función no es inyectiva. fig 3.b f es función inyectiva

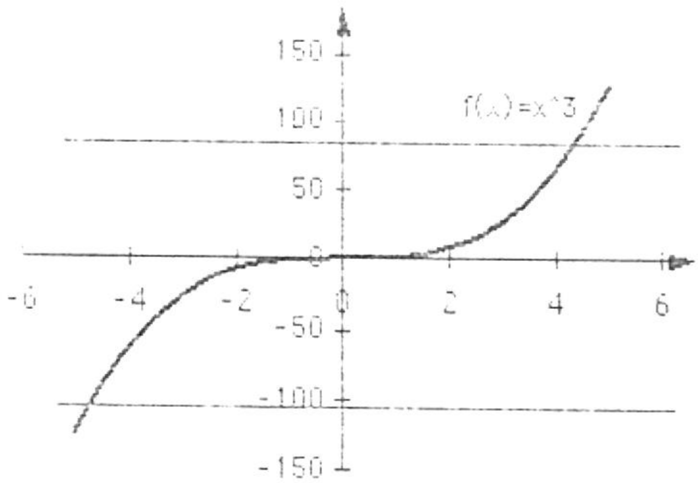


fig 3.b

- **Función sobreyectiva**

Ejemplo 1. La función $f : R \longrightarrow R$

$X \longrightarrow f(x) = x + 3$ es sobreyectiva, para mostrar tomemos un $y_0 \in R$ y encontremos un $x_0 \in R$ tal que $y_0 = x_0 + 3$

$====> x_0 = y_0 - 3$

$====> f(x_0) = f(y_0 - 3) = (y_0 - 3) + 3 = y_0$

Lo que nos permite concluir que dado cualquier y_0 en el conjunto de llegada siempre existe un dominio $x_0 = y_0 - 3$ tal que $f(x_0) = y_0$ por lo tanto la función es sobreyectiva. fig 4.a f es función sobreyectiva

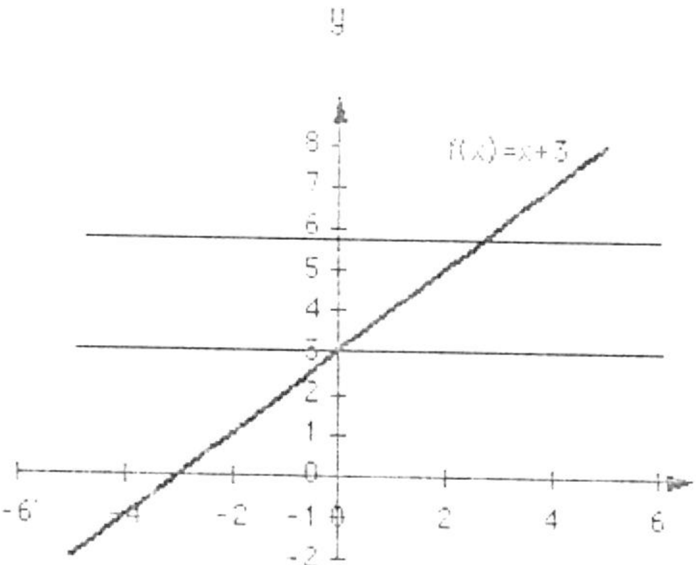
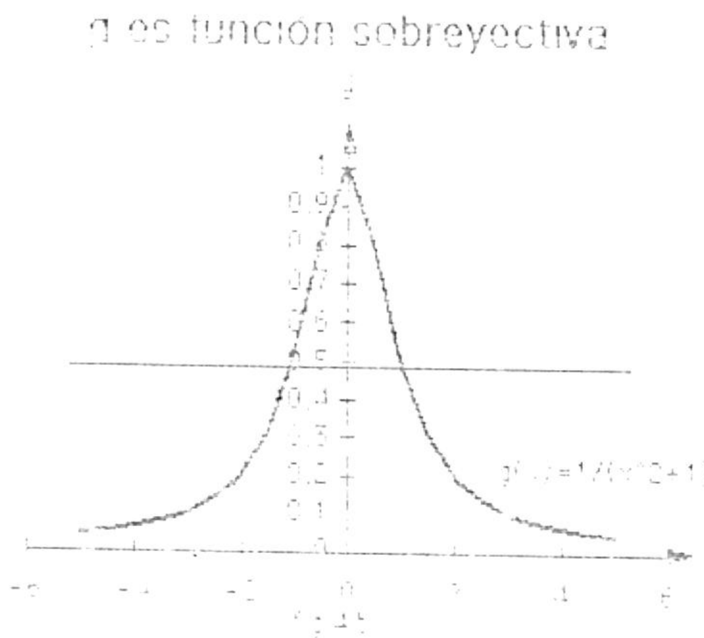


fig 4.a

Ejemplo 2. Sea $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ determinar si f es sobreyectiva.

Gráficamente podemos observar si una función es sobreyectiva o no.

Sea y un elemento del conjunto de llegada, si la recta horizontal que pasa por y intersecta al menos en un punto a la curva, entonces la función es sobreyectiva y si no intersecta para algún valor y, entonces la función no es sobreyectiva. fig 4.b



- **Función biyectiva**

Ejemplos: 1. Sea $f(x) = 3x + 5$, mostrar que f es biyectiva.

$$\text{Si } a_1 = a_2 \Longrightarrow 3a_1 = 3a_2$$

$$\text{y } 3a_1 + 5 = 3a_2 + 5 \Longrightarrow f(a_1) = f(a_2)$$

$$\Longrightarrow f \text{ es biyectiva.}$$

2. Sea $g(x) = x$, gráficamente analicemos que g es biyectiva. fig 5.a. ; fig 5.c.

h es función biyectiva

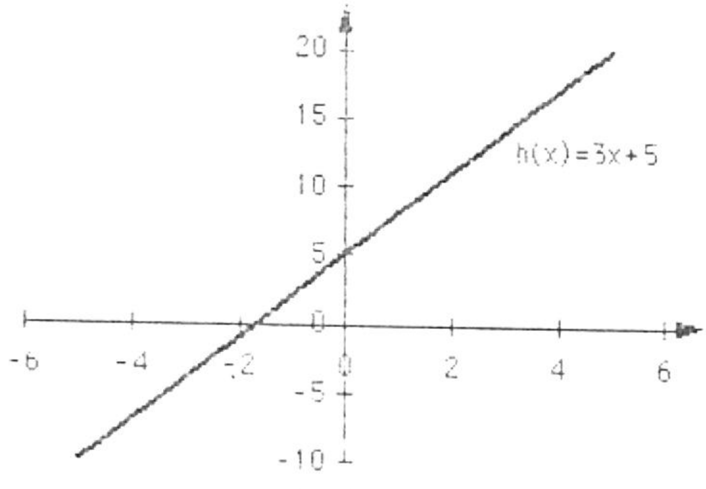


fig 5.a

f es función biyectiva

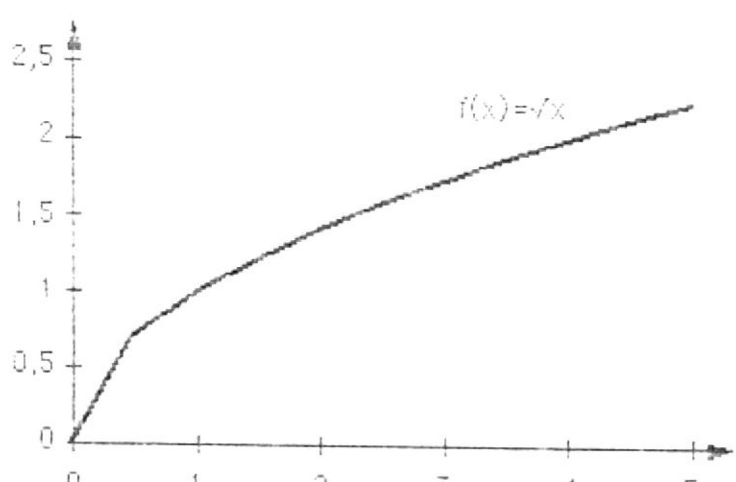


fig 5.b

- **Función inversa**

Ejemplo 1. Sea $f: R \longrightarrow R$ definida por $f(x) = x + 4$ que es una biyección, entonces existe la inversa de la función f, la misma que calculamos :

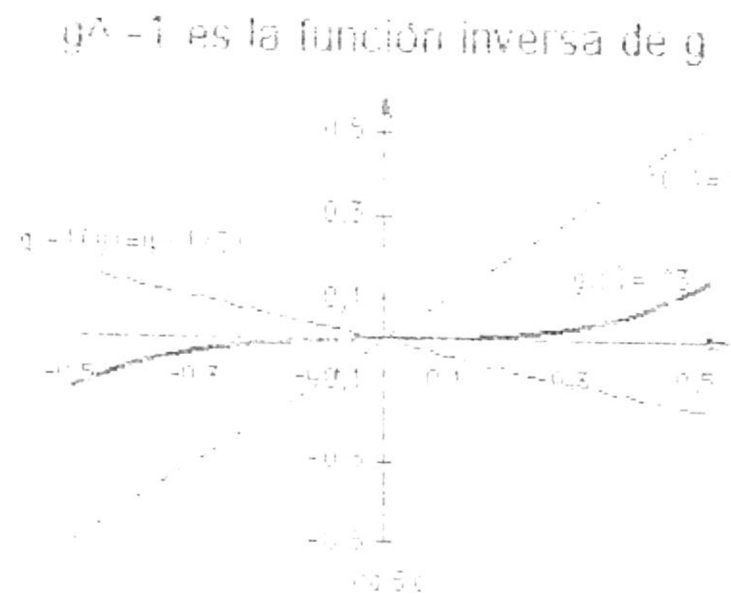
$y = x + 4 \Longrightarrow x = y - 4 = f^{-1}(y)$, a saber $f^{-1}(y) = y - 4$

Ejemplo 2. Sea la función $g: R \longrightarrow R$ definida por $g(x) = x^3$, calcular g^{-1}. Habíamos visto que g es una función inyectiva y sobreyectiva, entonces g es una función biyectiva y consecuentemente existe su inversa.

$g(x) = y = x^3 \Longrightarrow x = y \Longrightarrow g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, a saber

$g^{-1} : R \longrightarrow R$ es la inversa de g, cuya regla de correspondencia $y \longrightarrow g^{-1}(y) = y$ fig 5.c.

En la representación gráfica podemos observar que f y f^{-1} son simétricas respecto a la gráfica de la función identidad.



2.5 Operaciones con funciones reales:

Suma de funciones.- Definición: Sean f y g dos funciones reales

$f : R \longrightarrow R$ y $g: R \longrightarrow R$

$x \longrightarrow f(x)$ $x \longrightarrow g(x)$

la suma de f con g es la función definida por

$(f + g) : R \longrightarrow R$ cuya regla de correspondencia es

$x \longrightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

El dominio $D(f+g) = D_f \cap D_g$

Producto de funciones.- Definición: El producto de f con g (tomando 1.) es la función definida por

$(f.g) : R \longrightarrow R$ con la regla de correspondencia

$x \longrightarrow (f.g)(x) = f(x)\ g(x)$

El dominio $D(f.g) = D_f \cap D_g$

Cociente de funciones.- Definición: El cociente de f con g (también tomando 1.) es la función definida por

$(f/g) : R \longrightarrow R$ cuya regla de correspondencia es

$x \longrightarrow (f/g)(x) = f(x)/g(x)$

El dominio $D(f/g) = D_f \cap D_g$

Con este ejemplo ilustramos las 3 definiciones. Sean las funciones $f: R \longrightarrow R$ y $g: R \longrightarrow R$ y su regla de corresp. $x \longrightarrow f(x)=4$ $x \longrightarrow g(x)=x$

Como podemos observar f es una función constante y g es la función identidad. Aplicando las definiciones tenemos:

a).**Suma de funciones:**

$$(f+g): R \longrightarrow R$$

$$x \longrightarrow (f+g)(x) = f(x)+g(x) = 4+x$$

$\Longrightarrow$ el $D(f+g) = D_f \cap D_g = R \cap R = R$

b).**Producto de** $(f.g): R \longrightarrow R$

$$x \longrightarrow (f.g)(x) = f(x)g(x) = 4x$$

$\Longrightarrow D(f.g) = D_f \cap D_g = R \cap R = R$

c). **Cociente de funciones** $(f/g): R \longrightarrow R$

$$x \longrightarrow (f/g)(x) = f(x)/g(x) = 4/x,$$

$$x=0$$

$\Longrightarrow D(f/g) = D_f \cap D_g = R \cap R - \{x/x=0\}$

2.6 Función par y función impar: definición e ilustración gráfica.

Definición: Una función f con dominio R es **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo elemento x en R, esto significa que para una función f tal que siempre que x esté en el dominio, -x también está en el dominio.

*Una función polinómica es par si y solo si todos los términos del polinomio son de grado par. Ej. la función cuadrática, $ax^2 + c$; la función bicuadrática, $ax^4 + c$ son funciones pares.

En las ilustraciones gráficas podemos observar que a valores opuestos de x de asigna igual valor de y; y además es simétrica respecto al eje Y. fig 6.a y 6.b g es función par

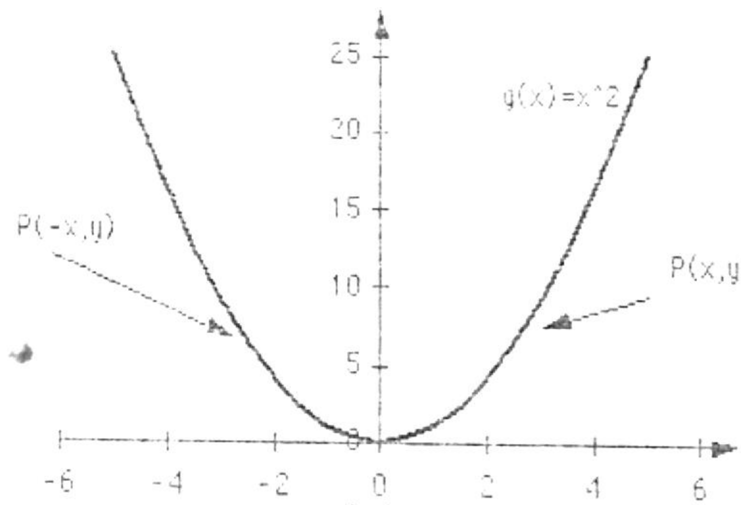


fig 6.a

función coseno x

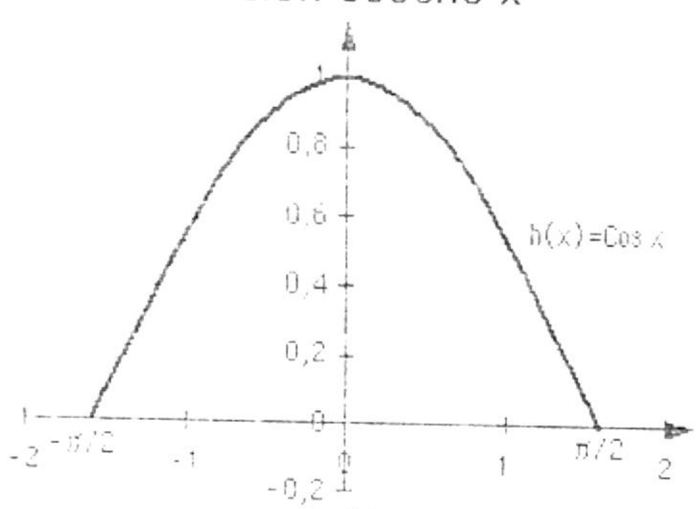


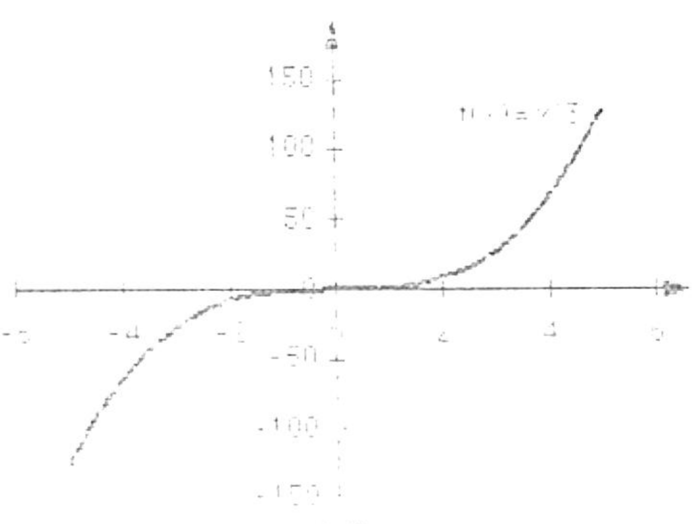
fig 6.b

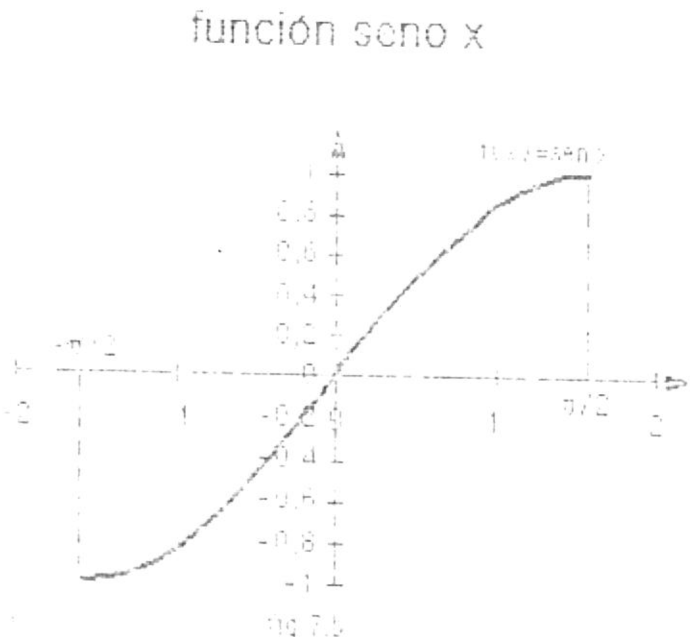
Definición: Una función **f** **con dominio R es impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo elemento x en R

* Una función polinómica es impar si y solo si todos los términos del polinomio son de grado impar.

En las ilustraciones gráficas se puede observar que a valores opuestos de x se asigna valores opuestos de y; y también es simétrica respecto al origen. fig 7.a; fig 7.b

f es función impar





2.7 Función creciente y función decreciente.

Definición: Sea f una función definida sobre un intervalo I y sean x_1 y x_2 elementos de I,

la función real f se dice que es **creciente** en I,

si y solo si

$\forall\ x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$

Ejemplo 1. Sea f una función definida por $f(x) = 3x^2$, $x \geq 0$

$D_f = \{ 0, +\infty \}$ fig.8.a

Definición: Sea f una función definida sobre un intervalo I; y sean x_1, x_2 elementos de I

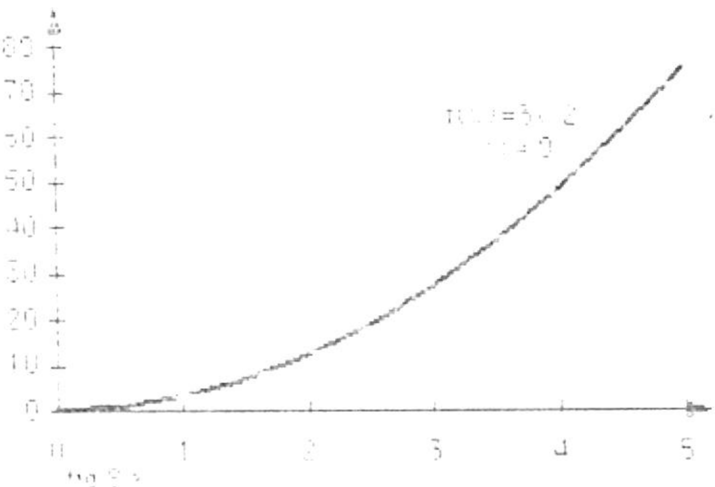
se denomina decreciente en I, si y solo si

$\forall\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

Ejemplo 3. Sea f definida por $f(x) = 3x^2$, $x \leq 0$

$D_f = \{ -\infty, 0 \}$ fig.8.b

f es función estrictamente creciente



f es estrictamente decreciente

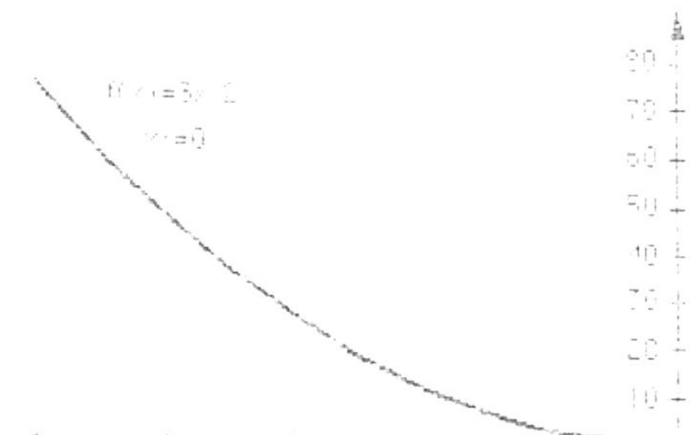
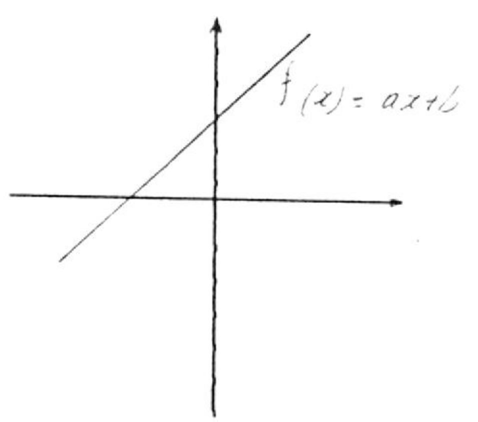


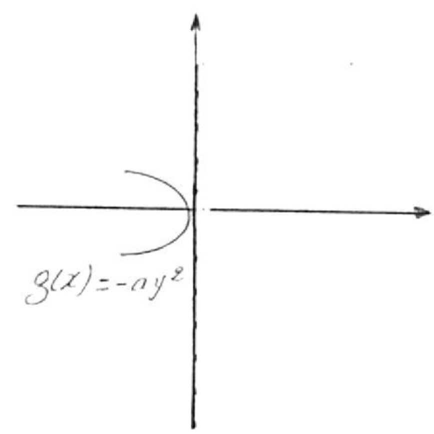
fig 8.b

Ejercicio: Reconozcamos cuales son la representación gráfica de una función y determinar las características relevantes de las siguientes ilustraciones gráficas.

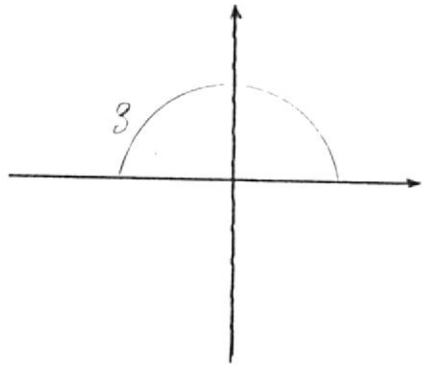
Siendo la función f: R———> R



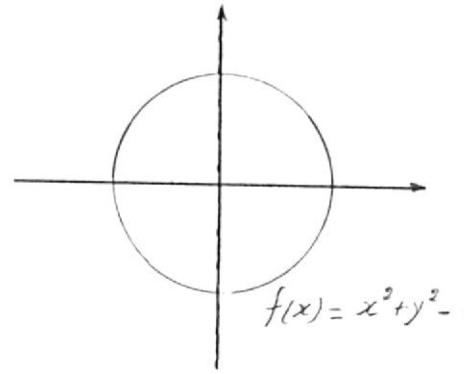
f es: función biyectiva,
creciente.



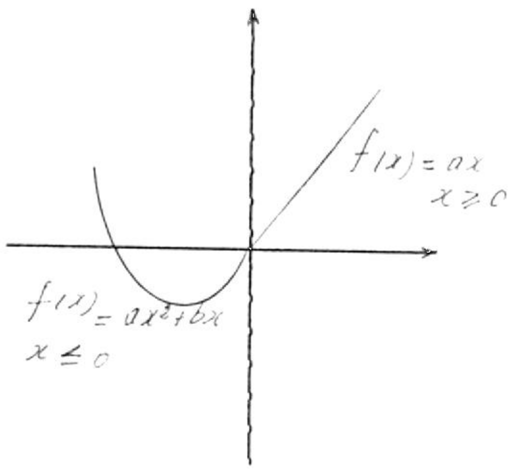
g no es función



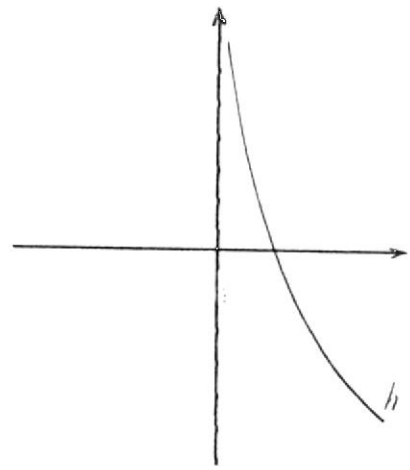
g es par creciente
y decreciente.



f no es función



f es función
par y creciente



h es
función decreciente

CAPITULO III

3. FUNCIONES POLINOMICAS

3.1 Función Lineal

Definición: Una función $f: R \longrightarrow R$ cuya regla de correspondencia es $x \longrightarrow f(x) = ax + b$

se llama función lineal, a y b son constantes reales.

El dominio $D_f = R$, implica que $y = f(x) = ax = b$ está definido para todos los reales;

y $R_f = R$, implica que todo elemento y en R es imagen de un elemento x en R, esta proposición garantiza que la función lineal es biyectiva.

En una función lineal f definida por $f(x) = ax + b$ se pueden considerar los siguientes casos:

1. $b = 0 \Longrightarrow f(x) = ax$, en su representación gráfica se observa que pasa por el origen.

2. b = 0 y a = 1 ====> f(x) = x es la recta identidad.

fig 10.b

3. a = 0 ====> f(x) = b es la recta constante, en su representación gráfica observamos que es paralela al eje X.

fig 10.a

f es identidad

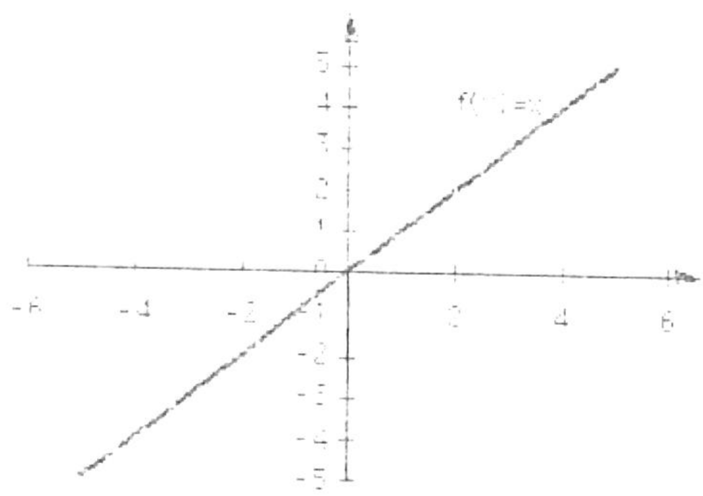


fig 10 b

f es funcion constante

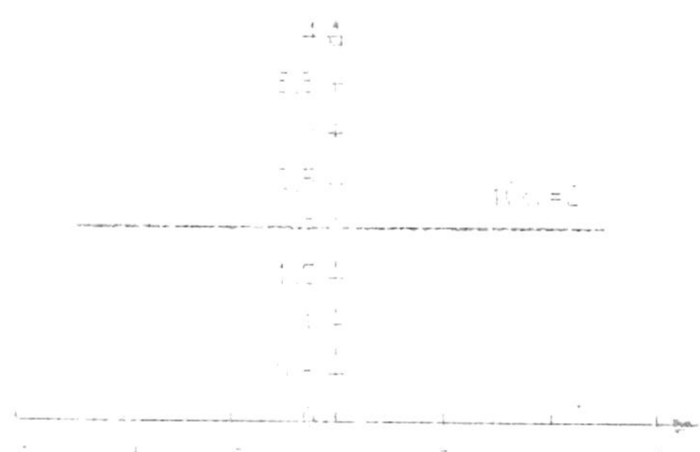
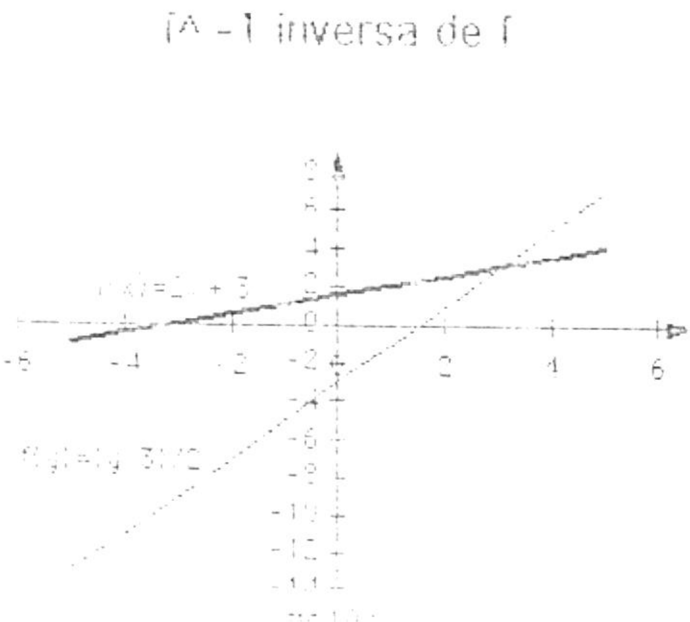


fig 10.a

Función inversa de f lineal: Sea f una función definida por $f(x)=2x-3$,

su inversa f^{-1} está definida por $f^{-1}(y)=(y+3)/2$. fig 10.c

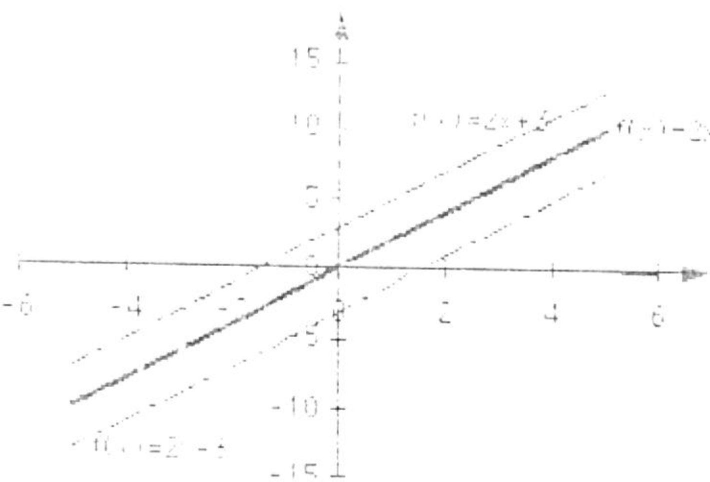


Transformación y desplazamiento vertical: En la representación gráfica de esta función podemos considerar tres posibilidades: . Si b=0, la recta pasa por el origen.

. Si b>0, la recta se desplaza sobre el eje + Y, b unidades.

Si b<0, la recta se desplaza sobre el eje - Y , b unidades.

fig.10.d



3.2 Función cuadrática

Definición: Una función f : R ——> R cuya regla de correspondencia es x ——> $f(x) = ax^2 + bx + c$

es una función cuadrática.

a, b, c son constantes reales , $a \neq 0$

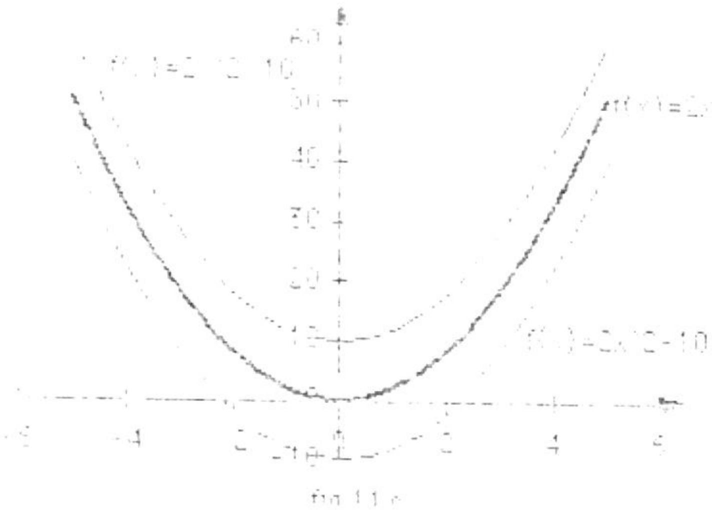
$D_f = R$, esto implica que $f(x) = ax^2 + bx + c$ está definido para cualquier x elemento de los reales.

$R_f = R$

Transformación de f y desplazamiento vertical:

Sea $f(x) = x^2 + c$ que define a la función f, la representación gráfica de f nos permite analizar tres posibilidades:

- Si $c = 0$, el vértice de la parábola está en el origen.
- Si $c > 0$, hay un desplazamiento sobre el eje + Y.
- Si $c < 0$, hay un desplazamiento sobre el eje - Y.



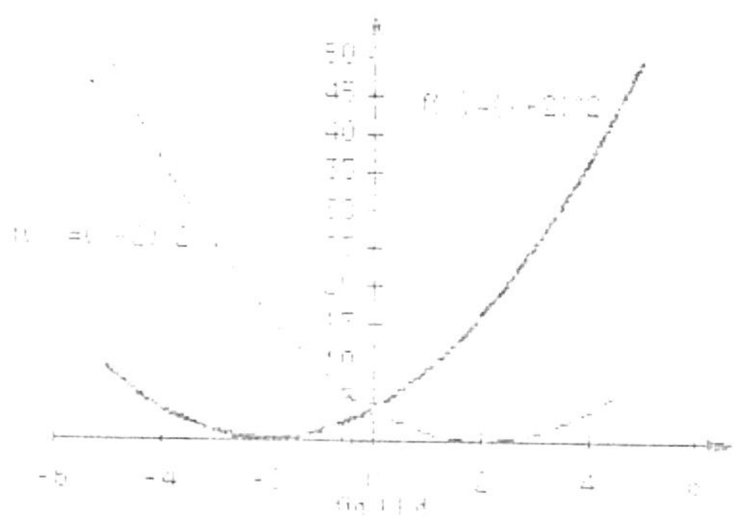
Transformación de f y desplazamiento horizontal:

Sea f una función definida por $f(x) = (x+c)^2$, la representación gráfica de f nos muestra tres posibilidades:

. Si $c > 0$, hay un desplazamiento sobre el eje -X.

. Si $c < 0$, hay un desplazamiento sobre el eje +X

fig.11.d



Transformación de f sin desplazamiento:

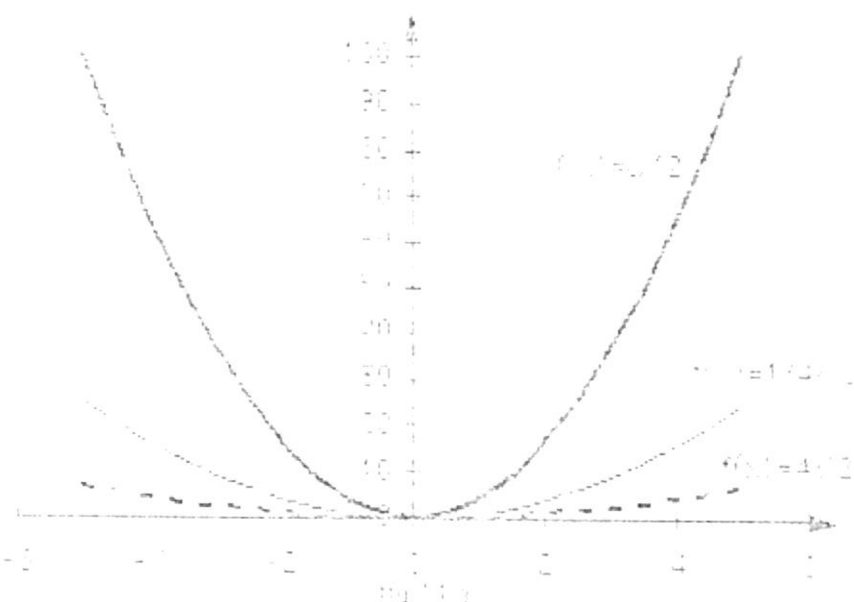
Sea g una función definida por $f(x)=x^2$

Si a la función f multiplicamos por un escalar a

====> $f(x)= ax^2$ puede considerarse dos casos:

1. para a>1 las ordenadas de todos los puntos se multiplican por dicho escalar.

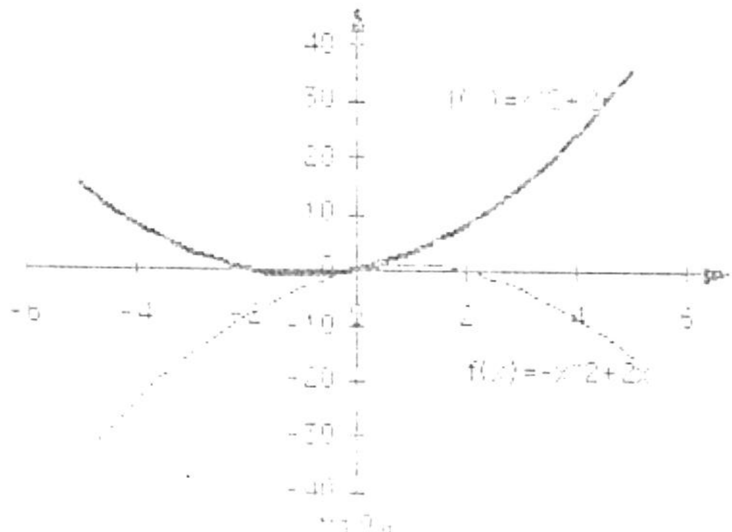
Para $0 < a<1$ las ordenadas de todos los puntos se dividen para 4. fig.11.a



* Para a>0 la parábola se dirige hacia arriba del eje X; y su vértice determina el valor mínimo de la función.

* Para a<0 la parábola se dirige hacia abajo del eje X; y su vértice determina el valor máximo de la función. fig9.a

Valor maximo y minimo de la función f



.La gráfica de $f(x) = x^2 + 2x$ es una parábola intersecta en (0,0) ; y esto representa que una raíz es igual a 0.

Por completación de cuadrados tenemos

$f(x)=x^2 +2x+1-1 \quad \equiv \quad f(x)=(x+1)^2 -1.$

.La gráfica de la función f definida por

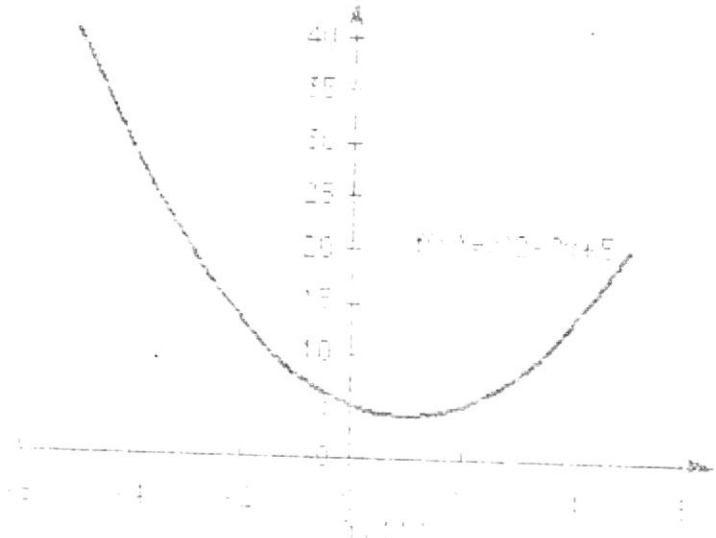
$f(x)=x^2 - 2x +5$ es una parábola que no intersecta en el eje X, entonces la función no tiene raíces reales, a saber no intersecta en el eje de X.

Por completación de cuadrados tenemos

$f(x)=x^2 -2x+1+4 \quad \equiv \quad f(x)=(x-1)^2 +4$

La representación gráfica de estos casos fig 11.b

La función cuadrática no tiene raíces reales



3.3 Función Exponencial

Definición 1: Sea **a** una constante real positiva y x un elemento de los reales,

una función $f : R \longrightarrow R^{+}$

cuya regla de correspondencia es $f(x) = a^{x}$

se llama función exponenecial, con dominio el conjunto de los reales y contradominio el conjunto de los reales positivos.

Propiedades de la función exponencial:

. Para a>1, entonces la función es estrictamente creciente,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f_1 < f_2$$

.Para 0<a<1, entonces la función es estrictamente decreciente, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f_1 > f_2$

. La función es siempre positiva, a saber toma solo valores positivos.

* Es característica de la función exponencial ser una función biyectiva, lo cual garantiza que tiene inversa.

* En la representación gráfica se observa que la curva siempre intersecta en el punto (0,1).

fig.13.a y fig 13.b

f es función exponencial

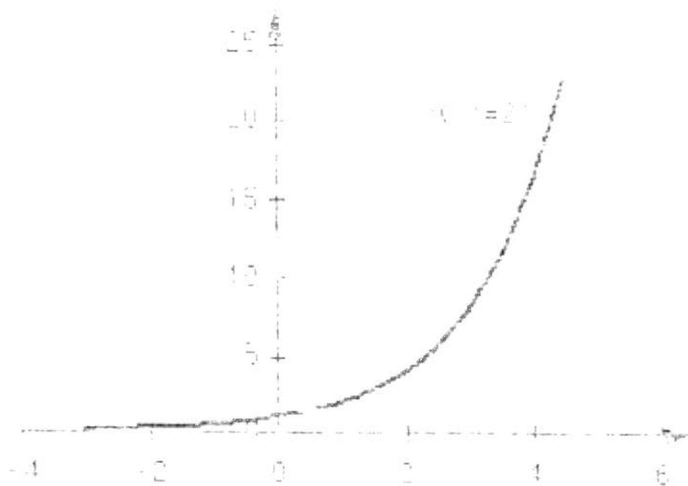


fig 10.a

f función exponencial

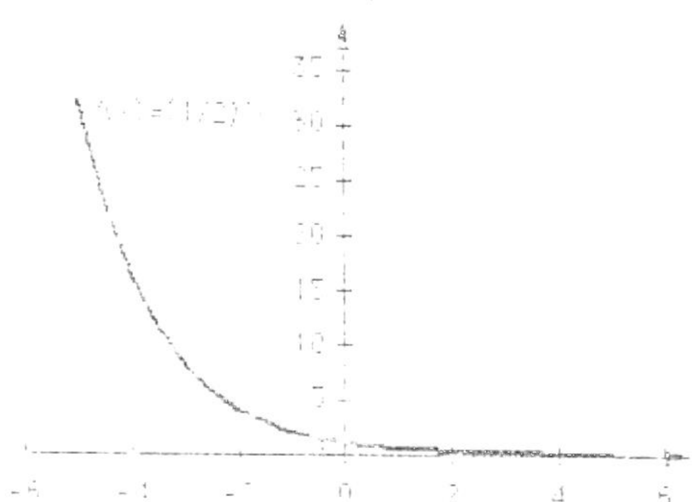
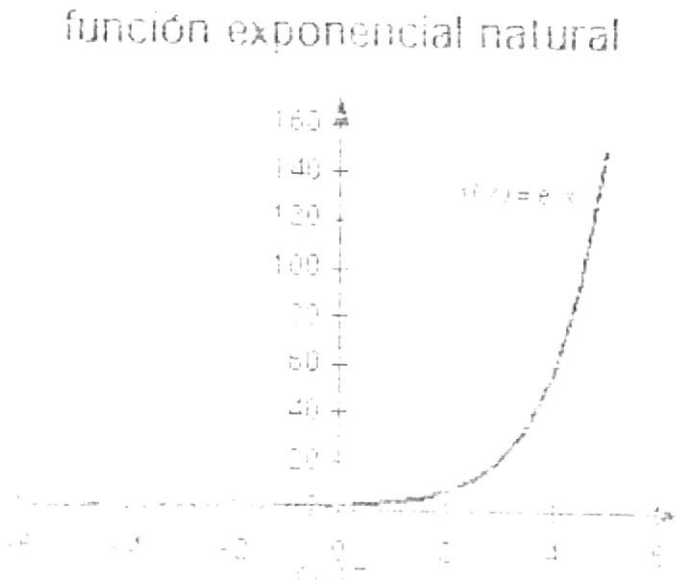
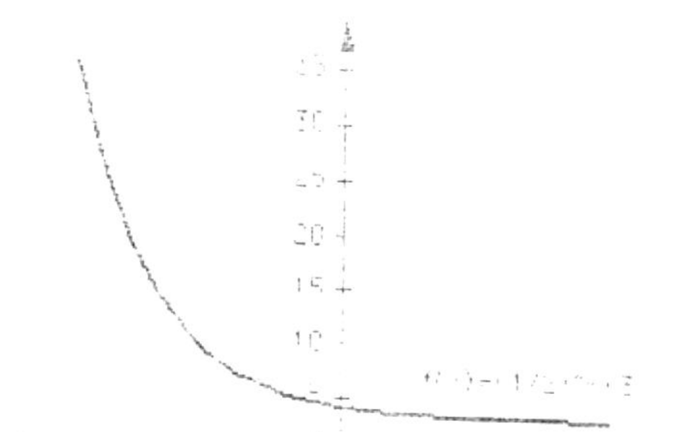


fig 10.b

*La función exponencial definida por $f(x)= e^{x}$ se llama función exponencial natural. fig.13.c



* La fig.13.d ilustra la transformación y desplazamiento de una función exponencial con desplazamiento .



CONCLUSIONES:

. Las funciones reales constituyen el fundamento del cálculo y el análisis matemático.

. El lenguaje matemático no puede prescindir de términos como conjunto y función, son tan amplios y a la vez tan comprensibles que con un dominio de sus propiedades se llega a conceptualizar las definiciones más abstractas.

. La definición de función real da la consistencia a los axiomas relativos a los números reales.

. El mundo de la matemática con las funciones ha alcanzado los más altos niveles de abstracción y generalización de las cosas.

. Función es un término universalizado en la matemática y en las ciencias aplicadas, que facilita el uso de una terminología adecuada y comprensible.

. El análisis de una función enmarca explícitamente a todo lo concreto y lo abstracto, que en otras épocas resultaban desconexas.

. La función real encuentra un nexo matemático entre el álgebra y la geometría, lo cual salva las limitaciones a estas subdisciplinas conocida como la algebrización de la geometría.

. El estudio de Matemática con funciones constituye un nuevo enfoque de esta ciencia que le da el carácter de una ciencia formal.

. Cnclusión general: Para estudiar matemática solo se requiere que se enseñe con criterio formativo, sin limitación de tiempo y con una adaptación mental adecuada.

BIBLIOGRAFIA

LARSON-HOSTETLER, (1990), Cálculo y geometría analítica, Editorial M_{C}GRAW-HILL, Tercera Edición, México D.F.

SWOKOWSKI,E., (1989), Cálculo con geometría analítica, Grupo Editorial Iberoamérica,Segunda Edición, México D.F.

SWOKOWSKI, E., (1988), Algebra y trigonometría con geometría analítica, Grupo Editorial Iberoamérica, Segunda edición, México D.F.

VANCE, E., (1968), Introducción a la matemática moderna, Editorial Fondo Educativo Interamericano, Bogotá.