ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

"TRANSFORMACION LINEAL"

MONOGRAFIA

Previa la obtención de Magister en Educación Matemática

Presentado por:

Aurora C. Yagual Burgos

Guayaquil - Ecuador

1994

AGRADECIMIENTO

Agradezco a las Instituciones y en especial al Master Gaudencio Zurita Herrera quién con sus sabias enseñanzas pudo guiarnos en mejorar nuestros conocimientos de Matemática y ademas por ser uno de los principales mentalizadores de que se realizara este curso de Post-Graddo en Educación Matemática y a los demás profesores que tambien supieron entregarnos con dedicación y esmero ese gran saber.

D E C L A R A C I O N   E X P R E S A

"La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestas en esta monografía, me corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la ESPOL).

....

Aurora C. Yagual Burgos

Master. *Gaudencio Zurita H.*

Director de Monografía

INDICE

INTRODUCCION

INTRODUCCION

Dentro del estudio del Algebra Lineal, tratamos acerca de un tema especial de funciones llamada **TRANSFORMACION LINEAL,** para lo cual damos una pequeña biografía de Arthur Cayley, quien fué uno de los matemáticos que dió a conocer estas funciones.

Arthur Cayley (1821 - 1895) nació en Richmond, Surrey; Arthur fué enviado a una escuela privada de Blackheath, y a los 14 años al King´s College School de Londres. Su genio matemático se manifestó por sí mismo muy temprano, el joven desarrolló una asombrosa habilidad para largos cálculos numéricos que emprendía para divertirse. Cayley creó áreas totalmente nuevas de las matemáticas, sus más notables contribuciones fueron en geometría analítica de dimensión n, teoría de los determinantes, **transformciones lineales** y teoría de las matrices, estas últimas las desarrolló al trabajar con transformaciones lineales del tipo $X' = aX + bY$

$y' = cX + dY$, donde a, b, c, d son números reales, pudiendo pensarse que son funciones que transforman el vector (x, y) y el vector (x´, y´), es decir que al cambiarse en otra tiene diferente forma.

Podemos manifestar entonces que el Algebra Lineal viene no sólo de representar con vectores muchos objetos de interés en las aplicaciones, sino también de representar muchas de las operaciones o transformaciones que en ciertos casos se transforman en datos de entrada y de salida.

Es así que, muchas veces estas transformaciones resultan lineales ya que en ellas existe la suma y el producto y por lo tanto, el matemático intenta deducir propiedades de las transformaciones así como aprender sobre las propiedades de las estructuras reales que se dan en cada caso, también encontramos definiciones del Kernel e Imagen de una Transformación Lineal así como también Nulidad y Rango.

Asi mismo, encontramos la representación matricial de la función transformación lineal, la cual indica que existe una matriz A_{mxn} que da luego una transformación lineal $T: R^n \dashrightarrow R^m$ definida por $Tx = Ax$. Tambien se han incluído algunos teoremas cuyas demostraciones las podrá encontrar en los textos que han servido de consulta, los mismos que son indicados en las páginas correspondientes y por último tenemos los Isomorfismos que son utilizados en una gran variedad de aplicaciones dentro de la función transformación lineal.

Por lo tanto espero que el presente trabajo sea claro para el lector, facilitando la comprensión del tema.

TRANSFORMACION LINEAL

DEFINICION 1.- Sean V ($\oplus$ $\odot$) y W ($\boxplus$ $\boxdot$) espacios vectoriales reales, con sus respectivas operaciones suma y producto por escalar. Una función T de V en W es una transformación lineal W (T: V ---> W) si y solo sí cumple con las siguientes propiedades:

i) $T(v_1 \oplus v_2) = T(v_1) \oplus T(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$

ii) $T(\alpha \boxdot v) = \alpha \boxdot T(v)$, $\forall\, v \in V, \alpha \in R$

1.1 ***ILUSTRACIONES DEL CONCEPTO DE TRANSFORMACIONES LINEALES***

Consideremos la función $T:R^2 \dashrightarrow R^2$ definida por $T(x,y) = (x,x+y)$, probaremos que es una transformación lineal.

Sean: $v_1 = (x_1,y_1)$ y $v_2= (x_2,y_2)$

$v_1 =(x_1 \ \ y_1) \Longrightarrow T(v_1)=(x_1, x_1+y_1)$

$v_2 = (x_2 \ \ y_2) \Longrightarrow T(v_2)=(x_2, x_2+y_2)$,

Veamos si:

$T(v_1 \oplus v_2) = T(v_1) \oplus T(v_2)$

PRUEBA

$$
\begin{aligned}
T(v_1 \oplus v_2) &= T\{(x_1 \ \ y_1) \oplus (x_2 \ \ y_2)\}\\
&= T(x_1 + x_2 \ , \ y_1 + y_2)\\
&= (X_1+X_2 \ , \ (X_1+X_2)+(y_1+y_2))\\
&= (x_1+x_2 \ , \ (x_1+y_1) + (x_2+y_2))\\
&= (x_1 \ \ x_1+y_1 \ ) + (x_2 \ \ x_2+y_2)\\
&= \ T(v_1 \ ) \oplus T(v_2)
\end{aligned}
$$

Si α es un escalar real entonces $\alpha v_1 = (\alpha x_1,\alpha y_1)$

PRUEBA

$T(\alpha \boxdot v_1) = T(\alpha \boxdot (x_1 , y_1))$

$T(\alpha \boxdot v_1) = T(\alpha x_1 + \alpha y_1)$

$= (\alpha x_1, \quad \alpha x_1 + \alpha y_1)$

$= [\alpha x_1, \quad \alpha (x_1+y_1)]$

$=\alpha (x_1, x_1+y_1)$

$T(\alpha \boxdot v_1)=\alpha \boxdot T(v_1)$

Lo cual prueba que T es una transformación lineal.

Sea $T: M_{2x2}$ ---> definida por:

$$T(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a+d, \; A \in M_{2x2}$$

determinar si T es una transformación lineal.

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \quad y \quad B= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

entonces se tiene que:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} ===>T(A)= a_1 + d_1$$

$$B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} ===>T(B)= a_2 + d_2$$

Veamos si:

$T\ (A \oplus B) = T(A) \oplus T(B)$

en donde:

$$T(A \oplus B) = T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a_1 + a_2)\ ,\ (d_1 + d_2)$$

$$= (a_1 + d_1) + (a_2 + d_2)$$

$$= T(A) \oplus T(B)$$

Probaremos que cumple con la propiedad indicada

$T(\alpha \boxdot A) = \alpha \boxdot T(A)$

$$T\ (\alpha \boxdot A) = T\left(\alpha \boxdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (\alpha\ a_1 + \alpha\ d_1)$$

$$= \alpha\ (a_1 + d_1)$$

$$= \alpha \boxdot T(A)$$

Como T cumple con las propiedades de la definición, entonces es una Transformación lineal.

La transformación lineal $T: R^3 \longrightarrow R^3$ definida por $T(x,y,z) = (x,y,0)$, geométricamente considerado, asigna a cada vector del espacio su "proyección" en el plano xy. Por ejemplo: $v = (3,5,4)$

$\longrightarrow T(v) = T\ (3,5,4) = (3, 5,0)$

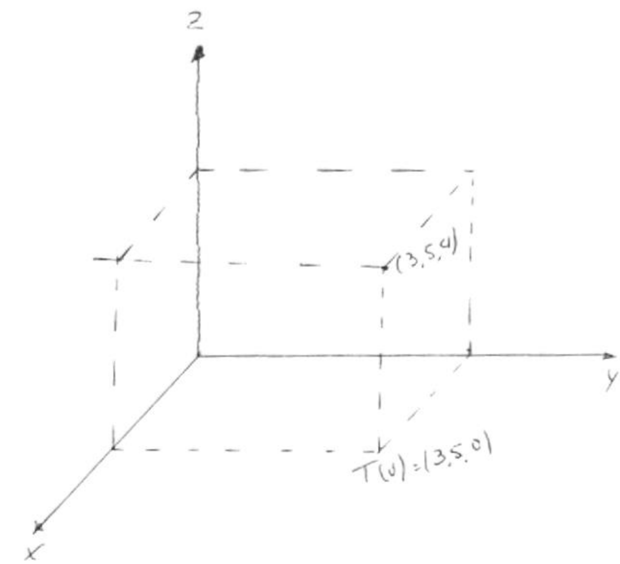
Veamos si:

$T(3, 5, 4) = (3, 5, 0)$

$v_1 = (3, 5, 4) \implies T(v_1) = (3, 5, 0)$

$v_2 = (3, 5, 4) \implies T(v_2) = (3, 5, 0)$

$$\begin{aligned} T(v_1 \oplus v_2) &= T(v_1) \oplus T(v_2) \\ &= T[(3, 5, 4) + (3, 5, 4)] \\ &= T(3 + 3, 5 + 5, 4 + 4) \\ &= (3 + 3, 5 + 5, 0 + 0) \\ &= (3, 5, 0) + (3, 5, 0) \\ &= T(v_1) \oplus T(v_2) \end{aligned}$$



$T(\alpha \boxdot v_1) = \alpha \boxdot T(v_1)$

$T(\alpha \boxdot v_1) = T(\alpha \boxdot (3, 5, 4)$

$= T(\alpha 3, \alpha 5, \alpha 4)$

$= (\alpha 3, \alpha 5, \alpha 0)$

$= \alpha\ (3, 5, 0)$

$= \alpha \boxdot T(v_1)$

1.1.4 Supongamos que $T: P_2 \longrightarrow P_2$ y que T tiene la siguiente regla de correspondencia:

$T(a+bx+cx^2) = a+(b+c)x + (2a-3b)x^2$.

Probaremos que:

T es una transformación lineal.

Sean:

$v_1 = a_1 + b_1X + c_1X^2 \longrightarrow T(v_1) = a_1+(b_1+c_1)X$

$+(2a_1-3b_1)x^2$

$v_2 = a_2 + b_2x + c_2x^2 \longrightarrow T(v_2) = a_2 + (b_2+c_2)x$

$+ (2a_2-3b_2)x^2$

Veamos si:

$$T(v_1 \oplus v_2) = T(v_1) \oplus T(v_2)$$

entonces decimos que es una transformación lineal

$$
\begin{aligned}
T(v_1 \oplus v_2) &= T[(a_1 + b_1x + c_1x) \oplus (a_2 + b_2x + c_2x)\} \\
&= T(a_1+a_2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)x^2) \\
&= a_1 + a_2 +(b_1 + b_2 + c_1 + c_2)x +[2 \\
&\quad (a_1 + a_2) - 3(b_1 + b_2)]x^2 \\
&= a_1 + a_2 +[(b_1 + c_1) + (b_2 + c_2)]x + \\
&\quad [(2a_1 - 3b_1) + (2a_2 - 3b_2)]x^2 \\
&= [a_1 +(b_1 +c_1)X + (2a_1-3b_1)x^2]+ \\
&\quad [a_2 +(b_2 +c_2)x +(2a_2 - 3b_2)x^2 \\
&= T(v_1) \oplus T(v_2)
\end{aligned}
$$

Veamos además si $T(\alpha \boxdot v) = \alpha \boxdot T(v)$

$$
\begin{aligned}
T(\alpha \boxdot v_1) &= T[\alpha \boxdot (a_1 + b_1X + c_1X^2)] \\
&= T(\alpha\, a_1 + \alpha\, b_1X + \alpha\, c_1X^2) \\
&= \alpha\, a_1 +(\alpha\, b_1 + c_1)X +(2\, \alpha\, a_1 - 3\alpha b_1)X^2 \\
&= \alpha\, a_1 + \alpha(b_1 + c_1)X + \alpha(2a_1 - 3b_1)x^2 \\
&= \alpha\, [a_1 + (b_1 +c_1)X + (2a_1 - 3b_1)x^2] \\
&= \alpha \boxdot T(v_1)
\end{aligned}
$$

Luego T es una transformación lineal.

Transformación Cero

Sean V y W espacios vectoriales y $T: V \longrightarrow W$ la función definida por $T(v) = 0v$ para todo v de V, se llama Transformación Cero. Esta transformación es lineal ya que es cierto que:

$T(v_1 \oplus v_2) = T(v_1) \oplus T(v_2)$

pues $T(v_1) = 0_v$

$T(v_2) = 0_v$

Por tanto, $T(v_1 \oplus v_2) = T(0_v) \oplus T(0_v)$

Entonces: $T(v_1 \oplus v_2) = 0_v + 0_v = 0_v$

$T(v_1 \oplus v_2) = T(v_1) \oplus T(v_2)$

y

$T(\alpha \boxdot v) = \alpha \boxdot T(v)$

donde

$T(\alpha \boxdot v) = \alpha\ (0_v)$

$= \alpha \boxdot T(v)$

Transformación Identidad

Supóngase que V es un espacio vectorial y que $I: V \dashrightarrow V$ es la función definida por $I(v)= v$ para todo v de V, se puede probar que I es una transformación lineal . Se le llama transformación identidad o bien operador identidad.

Transformación de reflexión.

Supóngase que $T: R^2 \longrightarrow R^2$ está definida por

$T(x,y) = (-x,y)$

Es posible verificar que T es lineal.

Geométricamente T toma un vector de R^2 y da por resultado su "reflexión" con respecto al eje Y

Determine si la siguiente función dada de R^3 en R^3 es lineal.

$T: R^3 \dashrightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (xy, yz, zx)$

$v_1 = (x_1 , y_1, z_1) \Longrightarrow T(v_1) = (x_1y_1, y_1 z_1, z_1x_1)$

$v_2 = (x_2, y_2, z_2) \Longrightarrow T(v_2) = (x_2y_2, y_2z_2, z_2x_2)$

Veamos si:

$$T(v_1 \oplus v_2) = T(v_1) \oplus T(v_2)$$

$$T(v_1 \oplus v_2) = T[(x_1 \ y_1 \ z_1) \oplus (x_2 \ y_2 \ z_2)]$$

$$= T[(x_1 + x_2 , y_1 + y_2 , z_1 + z_2)]$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_2 , y_1z_1 + y_2z_2 , z_1x_1 + z_2x_2)$$

Como no se cumple con la propiedad de que $T(v_1 \oplus v_2) = T(v_1) \oplus T(v_2)$, entonces T no es una transformación lineal.

1.2 *PROPIEDADES BASICAS DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES*

1.2.1 *TEOREMA*(1).- Sea $T:V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces para todos los vectores v_1, $v_2, \ldots, v_n \in V$ y todos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$

α_n , se cumplen las siguientes propiedades:

i) $T(0_v) = 0_w$

ii) $T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2)$

iii) $T(\alpha v_1 + \alpha 2\ v_2 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + {}_2T(v_2)$

$+ ... + \alpha_n T(v_n)$

DEMOSTRACION

i) $T(0_v) = 0_w$

$T(0v) = T(0_v + 0_v) = T(0_v) + T(0_v)$ por tanto

$0_v = T(0_v) - T(0_v) = T(0_v) + T(0_v) - T(0_v)$

$= T(0_v)$

Sabemos que $0_v = 0_w$ $\forall$ vector v se tiene

$T(0_v) = T(0_v\ \ 0_v) = 0_v T(0_v) = 0_w$

ii) $T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2)$

$T(v_1 - v_2) = T[v_1 + (-1)v_2] = T(v_1) + T[(-1)v_2]$

$= T(v_1) + (-1)T(v_2)$

$= T(v_1) - T(v_2)$

iii) $T\ (\alpha_1 v_1 + \alpha_1 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ...$

$+ \alpha_n T(v_n)$

Esta parte se demostrará mediante inducción matemática.

Si n= 1 la prueba es trivial

Si n=2

$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = T(\alpha_1 v_1) + T\ (\alpha_2 v_2)$

$= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$

Esta ecuación es válida si n=2

Se supondrá que es válida si n=K

$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots + \alpha_n T(v_k)$

y se probará que esto cumple que para n= k+1 es también verdadero.

$T[(\alpha\ v_1 + \alpha\ v_2 + \ldots + \alpha_k\ v_k) + (\alpha_{k+1} + v_{k+1})] = T(\alpha_1 v_1\ a_2 v_2 + \ldots + \alpha_k\ v_k) + T(\alpha_{k+1}\ v_{k+1})$

$\Longrightarrow \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots + \alpha_k\ T(v_k) + \alpha_{k+1}\ T(v_{k+1})$

Lo cual completa la prueba.

1.2.2 *TEOREMA* 2.- Si V es un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Sean $w_1, w_2, \ldots, w_n$, n vectores en W. Supóngase que T_1 y T_2 son dos transformaciones lineales de V a W tales que

$$T_1 v_i = T_2 v_i = wi,\ i=1,2,\ldots,n$$

Si v es cualquier vector en V y $T_1 v = T_2 v$ es entonces $T_1 = T_2$

Demostración de este Teorema lo encontrará en el Texto Algebra Lineal de Grossman, 4ª edición, Editorial McGRAW-HIIL Interamericana de México página 359

1.3 *KERNEL E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACION LINEAL*

1.3.1 *DEFINICION DE KERNEL*

1) Sea $T:V \dashrightarrow W$ una transformación lineal

El conjunto de todos los vectores v en V tales que $T(v) = 0_w$ se llama Kernel de T o Espacio Nulo de T. Su notacion es Ker(T) de manera que:

$$Ker(T) = \{v \in V / T(v) = 0w;\ \forall\ v \in V\}$$

Nótese que siempre es cierto que $0_v \in Ker(T)$, ya que $T(0_v) = 0_w$

1.3.2 ***DEFINICION IMAGEN DE T***

Sea $T:V \longrightarrow W$ una transformación lineal. El conjunto de todos los vectores w en W tales que existe por lo menos un elemento v en V de modo que $T(v) = W$ se llama Imagen de T, denotada por: Im(T).

De manera que:

$$Im(T) = \{ w \in W / T(v) = w,\ V\ \ v \in V \}$$

ILUSTRACIONES DE KERNEL E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACION LINEAL

Considerése la transformación lineal $T:R^2 \longrightarrow R^3$ definida por:

$T[(x,y)] = (x, 2y, x+y)$

a) Hallar el Ker (T)

b) Encontrar Im(T)

SOLUCION

A) $Ker(T) = (v \in V: T(v) = 0_w)$

$T[(x\ \ y)] = (x,\ 2y\ ,\ x+y) = (0\ \ \ 0\ \ 0)$

Esto es: $p(x)\ :\ \ x = 0$

$q(y)\ :\ \ 2y = 0$

$r(x,y):\ \ x+y = 0$

El sistema tiene solución única

$\{(0,0)\} = Ap(x) \wedge q\ (x)\ \wedge r(x,y)$ Por lo tanto,

Ker(T) es igual al cero vector $(0,0)\ \in\ R^2$.

$Ker(T) = \{(0,0)\} \subset R^2$

B) $T[(x,y)] = (x,\ 2y,\ x+y) = (a,\ b,\ c)$

$= (x,\ 0,\ x) + (0,\ 2y,\ y)$

$= x(1,\ 0,\ 1) + y(0,\ 2,\ 1)$

Por lo tanto la Im(T) es el conjunto de todos los vectores de R^3 de la forma $x(1,\ 0,\ 1) + y(0,\ 2,\ 1)$

Entonces la $Im(T) = gen\{(1,\ 0,\ 1),(0,\ 2,\ 1)\} \subset R^3$

Entonces Ker(T) es un subespacio de R^2 e Im(T) es un subespacio de R^3.

1.3.3.2 *KERNEL E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACION LINEAL*

Supóngase que $Tv = v,\ \forall\ v \in V$,T en este caso la denominamos transformación identidad. Entonces Ker(T) es el vector cero y la $Im(T) = V$.

Las transformaciones cero e identidad representan los dos extremos. En la primera todo vector en v está en el Kernel de T. En el segundo solo el vector cero de V esta en el Ker(T)

1.3.4 *TEOREMA KERT(T)*

TEOREMA (1).- Sea T: V —>W una transformación lineal T es inyectiva, si y solamente si Ker(T) = {0v}

La demostración de este teorema se la puede encontrar en el Texto , Algebra Lineal de Grossman, 4ª Edición, Editorial McGRAW-HILL Interamericana de México, página 389

1.4 *TEOREMA DE LA DIMENSION*

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Sea además T una transformación lineal (T: V --> W), entonces dim V= dim Ker(T) + dim Im(T)

PRUEBA

Sabemos que Ker(T) $\subset$ V ==> dim Ker(T) $\leq$ dim V

Sea $B_1 = \{v_1 , v_2 , \ldots, v_s \}$ una base para el Ker(T)

Sea $B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_s , u_1, u_2, \ldots, u_r \}$ una base para V

Intentamos probar que $A = \{T(u_1) , T(u_2), \ldots , T(u_r)\}$ es una base para Im (T)

$w \in Im(T) ==> v \in V: T(v)= w$

$===> v= \alpha v_1 + \alpha v_2 +\ldots+ \alpha_s v_s + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_r u_r$

$\Longrightarrow w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_1 v_2 + \ldots + \alpha_s v_s + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_r u_r)$

$\Longrightarrow = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots + \alpha_s T(v_s) + \beta_1 T(u_1) + \beta_2 T(u_2) + \ldots + \beta_r T(u_r)$

$= \alpha_1 0w + \alpha_2 0w + \ldots + \alpha_s 0w + \beta_1 T(u_1) + \beta_2 T(u_2) + \ldots + \beta_r T(u_r)$

$\Longrightarrow w = \beta_1 T(u_1) + \beta_2 T(u_2) + \ldots + \beta_r T(u_r)$

Sea $A = \{T(u_1), T(U_2), \ldots, T(u_r)\} =$

Luego A genera Imagen de T

Probaremos que A es linealmente independiente en W.

Esto significa que la única solución es la igualdad.

$\beta_1 T(u_1) + \beta_2 T(u_2) + \ldots + \beta_r T(u_r) = 0w$ donde

$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_r = 0$

$\Longrightarrow T(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_r u_r) = 0w$

$\Longrightarrow (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_r u_r) \in Ker(T)$

$\Longrightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_s v_s = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_r u_r$

$\Longrightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_s v_s + (-\beta_1 u_1) + (-\beta_2 u_2) + \ldots + (-\beta_r u_r)$

$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_s = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_r = 0$

puesto que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_s, u_1, \ldots, u_r\}$ es una base para V

COROLARIO

Si $T: V \to W$ y dim V= dim W entonces las siguientes proposiciones son equivalentes

1) T es inyectiva

2) T es sobreyectiva

3) T es biyectiva

4) Si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\{T(u_1) \; T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$ es una base para W.

1.5 *NULIDAD Y RANGO DE UNA TRANSFORMACION LINEAL*

Si T es una transformacion lineal que va de V en W se define:

Nulidad de T = $v(T)$= Dim (Ker(T))

Rango de T = $p(T)$ = Dim Im (T)

Asi en el ejemplo 1.3.2.1 la nulidad es cero y el rango es dos.

1.5.1 Ejemplo

Encuentre una base para Ker(T), Im(T), si se tiene una tranformación lineal de

$T: R^3 \dashrightarrow R^2$

$T(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) = (x_1 + x_2 \quad x_1 - 2x_2 + x_3)$

$Ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0w\}$

Para determinar Ker(T) se requiere encontrar todos los vectores (x_1 , x_2 , x_3) tales que:

$T(x_1, x_2 , x_3) = (x_1 + x_2 , \; x_1 - 2 x_2 + x_3) = (0,0)$

Esto es todos los x, tales que el sistema de ecuaciones cuya representación matricial es AX = B.

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$x_1 + x_2 = 0$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

Resolvemos utilizando matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 0 \\ & & & : & \\ 1 & -2 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 0 \\ & & & : & \\ 0 & -3 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 0 \\ & & & : & \\ 0 & -1 & -1/3 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow x_2 - 1/3\ x_3 = 0 \qquad x_2 = 1/3\ x_3$

$x_1 + x_2 = 0$

$x_1 + x_3/3 = 0 \qquad x_1 = -\ 1/3\ x_3$

La solucion es:

$(x_1 \quad x_2 \quad x_3\ ) = \{-1/3\ x_3 \quad x_3/3 \quad x_3\}$

$= X_3\ (\ -\ 1/3 \quad 1/3 \quad 1\ )$

Base para Ker(T) es $(\ -1/3 \quad 1/3 \quad 1)$

por lo tanto

Dim Ker(T) = 1

1.6 *MATRIZ DE CAMBIO DE BASE*

Dado que la matriz de coordenadas de un vector depende de la Base,esta matriz cambia cuando se cambia la base.

Abordamos este tema ya que existen infinitos números de bases de donde escoger para un espacio vectorial de dimension n.

1.6.1 ***DEFINICION DE MATRIZ DE CAMBIO DE BASE*** (1).- Sean $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y $B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ Bases de un espacio vectorial de dimensión finita, entonces vamos a escribir los elementos de la base B_2 en términos de la base B_1 de la siguiente manera:

$$v_1 = a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \ldots + a_{1n} u_n$$

$$v_2 = a_{21} u_2 + a_{22} u_2 + \ldots + a_{2n} u_n$$

$$\vdots$$

$$v_n = a_{n1} u_n + a_{n2} u_2 + \ldots + a_{nn} u_n$$

Entonces la matriz de transición de la Base B_1 a la base B_2 es:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_{mxn}$$

Por lo tanto esta matriz es denominada MATRIZ DE CAMBIO DE BASE de la B_1 a la base B_2

1.6.1.1 Ejemplo

Consideremos las dos bases siguientes de R^2

$B_1 = \{ (1 \ \ 0) , (0 \ \ 1)\}$

$B_2 = \{ (2 \ \ 3) , (1 \ \ 1)\}$

de donde

$v_1 = (2 \quad 1) = 2(1 \quad 0) + 3(0 \quad 1)$

$v_2 = (1 \quad 1) = 1(1 \quad 0) + 1(0 \quad 1)$

Entonces P es la matriz de cambio de base

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora encontraremos la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 , llamémosla Q

Siendo:

$u_1 = (1 \quad 0) = c_1 (2 \quad 3) + c_2 (1 \quad 1)$

$u_2 = (0 \quad 1) = c_3 (2 \quad 3) + c_4 (1 \quad 1)$

Entonces :

$$Q = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{bmatrix}$$

Los valores de c_1, c_2, c_3, c_4 se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones que se origina.

$p(c_1, c_2) : \quad 2 c_1 + c_2 = 1$

$q(c_1, c_2) : \quad 3 c_1 + c_2 = 0$

$r(c_3, c_4) : \quad 2 c_3 + c_4 = 0$

$s(c_3, c_4) : \quad 3 c_3 + c_4 = 1$

cuya solucion es:

$c_1 = -1$

$c_2 = 3$

$c_3 = 1$

$c_4 = -2$

Por lo tanto : $AP(c_1,c_2) \wedge q(c_1, c_2) \wedge r(c_3,c_4)$ $\wedge s(c_3, c_4)=$ (-1, 3, 1, -2)

Por lo tanto:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Se puede probar que $Q = P^{-1}$

Para $QP = PQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.6.2 *TEOREMA DE MATRIZ DE CAMBIO DE BASE*

Si P es la matriz de transición de una Base B_1 a una Base B_2 para un espacio vectorial V de dimension finita, entonces:

i) P es inversible

ii) P^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1

Este teorema encontrará su demostración en la página 240 del libro de Algebra Lineal de Howard Anton, 8ª Edición, Editorial Limusa

1.6.3 *MATRICES SEMEJANTES O SIMILARES*

Dos matrices cuadradas A y B son **semejantes** o **similares** si y solo sí existe una matriz C, también cuadrada e inversible tal que : $B= C^{-1} AC$

$BC^{-1} = C^{-1}ACC^{-1} \implies CBC^{-1} = C^{-1} AI$

$CBC^{-1}= CC^{-1} = CC^{-1} A$

$CBC^{-1} = IA$

$$CBC^{-1} = A$$

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \qquad C= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobaremos que A y B son similares. Como el det(c) =1 significa que la matriz C es inversible Hallamos la matriz inversa de C

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si $B^{-1} = C^{-1}AC$ entonces tenemos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = B$$

Con lo que se demuestra que A y B son matrices similares.

También verificamos CB = AC, para nuestro caso

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

CB= AC

1.6.4 *REPRESENTACION MATRICIAL DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES*

Se demostró previamente que toda matriz mxn da origen a una transformacion $T: R^n \dashrightarrow R^m$

Ahora veremos que para toda transformación $T(T: R^n \dashrightarrow R^m)$ existe una matriz A_{mxn} tal que $TX = AX;\ x \in R^n$

1.6.4.1 *TEOREMA*

Sea $T: R^n \dashrightarrow R^m$ una transformación lineal, entonces existe una sola matriz A_T de mxn ;

$$TX = A\ (X) \quad \forall\ x \in R^n$$

DEMOSTRACION

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ una base para R_n y sean $W_1 = T(v_1)$ $W_2 = T(v_2)$, ... , $W_n = T(v_n)$ Vectores en F^n Supongamos que A_T es la matriz cuyas columnas son $W_1, Wn_2, \ldots, W_n$ y además que A_T denota la matriz de la transformación de $R^n \dashrightarrow R^m$ que multiplica a la izquierda por A_T un vector de R^n

$W_1 = a_{11} V_1 + a_{12} V_2 + a_{13} V_3$

$W_2 = a_{21} V_1 + a_{22} V_2 + a_{23} V_3$

$\vdots$

$W_n = a_{m1} V_1 + a_{m2} V_2 + a_{mn} V_n$

Si $W = (a_{11}, a_{21} \quad a_{m1})$ $i = 1,2,\ldots, n$

Entonces

$$A_T = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mi} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a2i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mi} \end{bmatrix} = w_i$$

Por lo tanto $A_T (v_i) = W_i$, sí $i = 1,2,\ldots, n$

Ahora demostraremos que la matriz de transformación es A_T única:

Supongamos que : $TX = A_T X$, $TX = B_T X$; $\forall X \in R^n$

entonces: $A_T X = B_T X$

luego : $C_{T1} = A_T - B_T$

se tiene: $C_T X = 0 \quad \forall \quad x \in R_n$

en particular: $C_T (v_i) = 0$ si $i = 1,2,\ldots,n$

Pero $C_T (v_i) = (C_{1i}, C_{2i}, \ldots, C_{ni})$

Por lo tanto cada una de las n columnas de C_T es el vector de m ceros y la matriz de transformación $C_T = 0$, la matriz cero de mxn, por lo tanto la matriz de transformación de A_T es igual a la matriz de transformación de B_T.

1.6.5 *MATRIZ DE TRANSFORMACION*

La matriz A_T que se menciona en el teoraema primero, se llama **matriz de transformación** correspondiente a la transformación lineal T.

1.6.5.1 *ILUSTRACIONES DE MATRICES DE TRANSFORMACION*

Supongamos que T: R^3 --> R^3 una transformación lineal tal que:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinamos la matriz de transformación de un vector de R^3 en el plano XY

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cuando B ={(1 0 0), (0 1 0), (0 0 1)}

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Estos son los vectores columnas de la matriz de transformación

$$A_T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \text{si } X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in R^3$$

$$A_T\,X=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}$$

1.6.6 ***TEOREMA***

Sea V un espacio vectorial de dimensión n, W es un espacio vectorial de dimensión m , T: V --> W es una transformación lineal .

Supóngase que $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V y que $B_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ es una Base de W, entonces existe una sola matriz de transformación de $M_{m \times n}$ tal que $T(X)_{B2} = A_T (X)_{B1}$
La demostración de este teorema lo encontrará en el texto, Algebra Lineal, S. Grossman, 4ª Edición, Editorial McGRAW-HILL, México, página 370

1.7 *ISOMORFISMOS*

La palabra "Isomorfo" proviene de la expresión griega **isomorfos,** que significa "**de igual forma**" (iso= igual; morfos = forma).

1.7.1 ***DEFINICION*** (1).- Sea T: V --> W una transformación lineal. Entonces T es un Isomorfismo si y solo sí **T** es inyectiva y sobreyectiva.

1.7.1.1 **TEOREMA** .- Supóngase que T: V --> W es una transformación lineal, supóngase además que dim de V = dim W= n.

i) Si T es inyectiva, entonces T es sobreyectiva.

ii) Si T es sobreyectiva, entonces T es inyectiva

DEMOSTRACION

Sea A_T la representación matricial de T.

Entonces, si es inyectiva, Ker(T) ={0v} y $v\{A_T\}$= 0 lo cual significa que la (dimensión del recorrido de T) $p(T)= p(A_T)= n-0 = n$ por lo que la imagen de T = W . Si T es sobreyectiva, entonces $p(A_T)= n$, de tal modo que $v(T) = v(A_T)= 0$ y T es inyectiva.

1.7.1.1.1 EJEMPLO

Suponga que T: $R^2 \dashrightarrow R^2$ está definida por $T(x,y) = (x-y,\ 2x + y)$, $T(1\ 0)= (1\ 2)$; $T(0\ 1) =(-1\ \ 1)$

Se halla que: $$A_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$P(A_T) = 2$

Por tanto: $v(A_T)= 0$

$$N_{AT}= Ker(T) = 0_v$$

En conclusión T es inyectiva.

CONCLUSIONES

Este trabajo ofrece un estudio elemental de la Función Transformación Lineal, para estudiantes que se encuentran en los últimos cursos del bachillerato y para quienes ingresan a una escuela superior.

Es de gran importancia ya que nos muestra como un polinomio de grado n asi como de números reales llegan a cambiar mediante el uso de las propiedades de suma y producto que presenta la transformación lineal y la manera de emplearlas. Para este estudio es necesario que el estudiante tenga conocimiento de vectores en el espacio y de esa manera facilita su comprensión

Gracias al Algebra Lineal y al avance de la Matemática que ha tenido con ella, ha permitido hacer visibles las fuentes de las que surgen las transformaciones lineales y por lo tanto se debe ir cambiando nuestra forma de ver mas objetivamente el uso en general del Algebra Lineal ya que sigue intensamente viva dentro del espíritu y mente de cada persona en aprender y profundizarse en este conocimiento matematico.

Por lo tanto vemos la importancia que tiene la función Transformación Lineal, no solo para el estudiante sino para todos aquellos que conocen acerca de las matemáticas o para quienes quieren profundizar mas el aprendizaje sobre la misma.

ANEXO

Simbología utilizada

α	alfa
λ	lambda(multiplicación por un escalar)
β	Beta
$\in$	Pertenece o elemento de
$\forall$	para todo
$\oplus$	suma
$\boxdot$	producto
===>	entonces
Mmxn	Matriz m x n
P	Polinomio de grado dos
Ker(T)	Kernel
Im(T)	Imagen
T	Transformación
v	vector
w	vector
A_T	Matriz de transformación

BIBLIOGRAFIA

- ANTON Howard, (1985). **Introducción al Algebra Lineal,** Editorial Limusa, 8ª Edición, México.
- GEBER Harvey, (1990). **Algebra Lineal**, Grupo Editorial Iberoamericana S.A. México D.F., México.
- GROSSMAN Stanley, (1992), **Algebra Lineal con Aplicaciones, Editorial** McGRAW-HILL Interamericana de México, Cuarta Edición, México.
- HOFFMAN Kennet, (1977), **Algebra Lineal,** Ediciones del Castillo, S.A., Madrid, España.
- PERRY William, (1980), **Algebra Lineal**, Editorial McGRAWHILL Interamericana de México, México.