ESCUELA SUPERIOR

POLITECNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

POSTGRADO EN EDUCACION MATEMATICA

"VALORES Y VECTORES CARACTERISTICOS Y DIAGONALIZACION"

MONOGRAFIA DE GRADO

Previa a la obtención del Título de:

MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA

Presentada por:

JAIME WASHINGTON VIZUETE TOAPANTA

GUAYAQUIL - ECUADOR

1994

A G R A D E C I M I E N T O

Dejo constancia de mis más sentidos agradecimientos a todos los profesores del Instituto de Matemáticas, preocupados por la problemática educativa del país y por ende de su desarrollo, pues ellos han hecho posible una formación adecuada en el campo de la matemática.

De manera especial al Master Gaudencio Zurita por la dirección en la elaboración de esta monografía.

D E D I C A T O R I A

A MI ESPOSA:

María Judith

A MIS HIJOS:

Washington Alexis

Damián Alejandro

Bryan Ricardo

....

Ms. Sc. GAUDENCIO ZURITA H.

Director de Monografía

DECLARACION EXPRESA

" La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta monografía, me corresponden exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la ESPOL).

WASHINGTON SIZUETE

....
Nombre y firma del autor

INDICE

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO III

INTRODUCCION

La realización de la presente monografía es parte del proceso de formación del Post-Grado en Educación Matemática, tiene como objetivo investigar con profundidad la temática seleccionada para este fin.

Queremos de alguna manera contribuir a quienes se hallen interesados en el estudio del Algebra Lineal, llegar de una forma fácil a este conocimiento, razón por la cual se ha desarrollado la investigación bibliográfica, tomando en cuenta aspectos fundamentales de los temas y subtemas del contenido, como son las definiciones, teoremas y sus respectivas pruebas procurando clarificar con uno o varios ejemplos.

En la primera parte se realiza un estudio de las definiciones de matriz, como también de algunos tipos especiales de matrices que intervienen en la diagonalización. A continuación procuramos fundamentar el tema con definiciones sobre independencia lineal y espacio vectorial con producto interno, para en la tercera parte entrar a conceptualizar la diagonalización tomando como fundamento los valores y vectores propios.

CAPITULO I

DIAGONALIZACION ORTOGONAL DE MATRICES CUADRADAS.

1.- DEFINICIONES PRELIMINARES

1.1. MATRICES

DEFINICION.- Sean los conjuntos A y $B \subset Z^+$, siendo $A = \{ i/i= 1,2,...,m\}$, $B = \{j/j= 1,2,...,n\}$, sea Φ una función, de AxB a R, Φ se denomina matriz , si y sólo si, a cada par ordenado $(i,j) \in AxB$ se le asigna un número real a_{ij}. A la definición expresada la ilustramos con el siguiente esquema gráfico.

Φ

AxB		R	
(1,1)	$\longrightarrow$	a_{11}	$\Phi(1,1) = a_{11}$
(1,2)	$\longrightarrow$	a_{12}	$\Phi(1,2) = a_{12}$
:		:	: :
(m,n)	$\longrightarrow$	a_{ij}	$\Phi(m,n) = a_{mn}$

Usualmente a una matriz A se representa como un arreglo rectangular de m filas y n columnas, que describimos a continuación, y con la cual permaneceremos en el desarrollo de este trabajo.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \quad ; \quad A = (a_{ij}) \in M_{mxn}$$

1.2. **NOTACION.-** Vamos a convenir la forma como se denotará las matrices.

Si para $i = \{ 1,2,3,\dots,m \}$

$j = \{ 1,2,3,\dots,n \}$

Diremos que las matrices tiene m filas y n columnas, alconjunto de las matrices reales se denotará por M_{mxn} (R), si las matrices son complejas denotaremos por M_{mxn} (C), si A $\in M_{mxn}$, otra notación es $(a_{ij}) \in M_{mxn}(R)$.

Ejemplos :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \in M_{3x2} (R),$$

$$B = \begin{bmatrix} i & i+2 \\ 1 & 3i \end{bmatrix} \in M_{2x2} (C)$$

1.3. VECTOR FILA Y VECTOR COLUMNA.

Cualquier vector X $\in R^n$ es una matriz 1xn ó nx1, en el primer caso le llamamos vector fila, y para el segundo caso vector columna, como veremos a continuación.

$X = (3,1,0,1) \in R^4$ es un vector fila

$X \in M_{1x4}(R)$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \\ \pi \\ 2 \end{bmatrix} \in R^5 \text{ es el vector columna.}$$

$y \in M_{5x1}(C)$

Puesto que, en el estudio de diagonalización ortogonal intervienen algunos tipos de matrices que tienen ciertas características especiales, conviene a continuación realizar un estudio individualizado de algunos de ellos.

1.4. ALGUNOS TIPOS DE MATRICES.

1.4.1. MATRIZ CUADRADA.

DEFINICION.- A partir de este definición convenimos que $M_{mxn}(R)$ será reeplazada por M_{mxn} ; A es una matriz cuadrada si y sólo si m = n, esto es si tiene el mismo número de filas y columnas.

Ejemplo: Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3x3}$$

es una matriz cuadrada 3x3.

1.4.2.DIAGONAL DE UNA MATRIZ

DEFINICION.- Sea $a_{ij} \in M_{mxn}$, un elemento a_{ij} es parte de la diagonal principal de A, si y sólo si $i=j$. Por ejemplo si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

a_{11} y a_{22} forman la diagonal principal de A.

1.4.3.MATRIZ DIAGONAL

DEFINICION.- Sea la matriz $A = (a_{ij}) \in M_{nxn}$, $n \in Z^+$, A se denomina matriz diagonal, si y sólo si cumple con las siguientes condiciones:

i) $\forall\ i,j \in Z^+$, $i \neq j$, $a_{ij} = 0$

ii) $\exists\ a_{ij}$ tal que para $i=j$, $a_{ij} \neq 0$

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal.

1.4.4. MATRIZ IDENTIDAD.

DEFINICION.- Sea $I_n \in M_{mxn}$, I_n es la matriz identidad nxn si y solamente si $a11 = a_{22} = \ldots = a_{mn} = 1$ y $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, siendo $i = \{1,2,3,\ldots m\}$ y $j = \{1,2,3,\ldots,n.\}$

$$I_1 = [\ 1\ ] \ ; \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ ;$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ : & : & : & & : \\ 0 & 0 & 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.5. MATRIZ INVERSA.

DEFINICION.- Sean A y B $\in M_{nxn}$, B es la matriz inversa de A, si y sólo si $AB=BA=I_n$. Si la matriz A tiene inversa entonces decimos que A es inversible.

Comúnmente a la inversa de A se denota como A^{-1}, de donde la condición queda expresada como

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

Utilizando la definición,

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Cabe anotar que esta definición de matriz inversa, no asegura que toda matriz cuadrada tenga inversa, pues existen matrices cuadradas que no son inversibles.

Con el propósito de utilizar matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales se han definido sobre sus filas (o columnas) las siguientes operaciones elementales sobre filas y columnas :

i) Multiplicar una fila por un número distinto de cero.

ii) Sumar el múltiplo de una fila a otra fila.

iii) Intercambiar dos filas.

Nótese que una matriz $A = (a_{ij})$ es igual a otra matriz $B = (b_{ij})$, si y sólo si $\forall i,j \in Z^+$ $a_{ij}=b_{ij}$, por lo tanto las operaciones sobre las filas de una matriz A pueden alterarla.

MATRIZ AUMENTADA

Si A es una matriz cuadrada, a la matriz [$A|I_n$] la denominamos matriz aumentada.

$$(A|I_n) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ : & : & & : & : & : & & : \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & & 1_n \end{array}\right]$$

Siendo $a_{ij} \in M_{nxn}$.

Ejemplo :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow (A|I) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

MATRICES ESCALONADA REDUCIDA POR FILAS.

DEFINICION.- Se dice que una matriz es escalonada reducida por filas si y solamente si se cumplen las condiciones siguientes :

i) Todas las filas cuyos elementos son en su totalidad ceros aparecen en la parte inferior de la matriz.

ii) El primer número diferente de cero en cualquier fila que no contiene ceros es 1, (a partir de la izquierda).

iii) Si dos filas sucesivas no contienen solamente ceros entonces el primer 1 en la fila inferior ocurre hacia la derecha del primer 1.

iv) Cualquier columna que contenga el primer 1 de una fila tiene ceros en las demás posiciones.

PROCEDIMIENTO PARA CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA A.

A continuación se describe un procedimiento que permite encontrar la inversa de una matriz cuadrada, o determinar si tal inversa no existe; en el mismo se usa el concepto de matriz escalonada o reducida.

a) Se escribe la matriz aumentada $(A|I_n)$.

b) Por medio de las operaciones elementales sobre $(A|I_n)$, reducimos a ésta a su forma escalonada.

c) Si se consigue pasar de $(A|I_n)$ a $(I_n|B)$, A es inversible y B es la inversa de A.

Ilustraremos ahora el procedimiento :

Sea $$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}$$

Paso i)

$$(A \mid I_n) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$R_1 \to \tfrac{1}{2}R_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$R_3 \to R_3-3R_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{l} R_1 \to R_1-R_2 \\ R_3 \to R_3+R_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7/2 & 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3/2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$R_3 \to 2/3R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7/2 & 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{l} R_1 \to R_1-7/2R_3 \\ R_2 \to R_2+R_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -13/3 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right] = (I \mid B)$$

Paso iii)

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 5/2 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

VERIFICACION:

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 5/3 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = AA^{-1}$$

Luego A es una matriz inversible y

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 5/3 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \text{ es su inversa } A^{-1}$$

1.4.6. MATRIZ TRANSPUESTA.

DEFINICION.- Si $A = (a_{ij})$, $A \in M_{mxn}$. A^t se la denomina transpuesta de A, si y sólo si $A^t=(a_{ji})$. Esto es, la transpuesta de una matriz se determina por el intercambio de filas por columnas en la matriz A.

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.7. MATRICES ORTOGONALES.

DEFINICION.- Sea $Q \in M_{nxn}$ una matriz inversible, entonces Q es ortogonal, si y sólo si $Q^{-1} = Q^t$, nótese que

$$Q^tQ = Q^{-1}Q = I$$

Con las siguientes matrices, que suponemos son la inicial Q, su transpuesta Q^t, e inversa Q^{-1}, respectivamente mostraremos un ejemplo donde Q es ortogonal.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Q^t = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Verificando la igualdad $Q^{-1}Q = Q^tQ = I_n$.

Luego :

$$QQ^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = I_n$$

Por lo tanto, Q es ortogonal.

1.4.8. MATRIZ SIMETRICA.

DEFINICION.- Sea $A \in M_{mxn}$. A es simétrica, si y sólo si $A^t = A$. Nótese que esta definición hace que m = n. Este es un caso muy especial de matrices, puesto que, las propiedades de A, son importantes en la diagonalización de matrices, tema que es motivo central de este trabajo.

1.4.9. MATRICES SIMILARES.

DEFINICION.- Sean las matrices $A, B \in M_{n \times n}$, la matriz B es similar o semejante a la matriz A, si y sólo si existe una matriz $C \in M_{n \times n}$ inversible, tal que

$$B = C^{-1}AC$$

Sean :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Veamos si, $B = C^{-1}AC$

$$B = \left[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, A y B son matrices similares.

CAPITULO II

2.- DEFINICIONES FUNDAMENTALES EN LA DIAGONALIZACION DE MATRICES.

Para tratar el tema central de nuestro trabajo, debemos tener en cuenta ciertos conocimientos previos, relativos a combinación lineal de vectores, independencia lineal de vectores, espacio generado, etc., con los cuales fundamentamos nuestro estudio sobre diagonalización.

2.1. COMBINACION LINEAL.

DEFINICION.- Sea V un espacio vectorial, $v_1, v_2, \ldots, v_n$, vectores en V, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ constantes reales, $v \in V$ es una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si y sólo si es cierto que:

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n$$

Sea la matriz :

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

v es una combinación lineal de las matrices, v_1 y v_2

Donde

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pues

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siendo $c_1 = 1$ y $c_3 = 3$ pues :

$$v = 1v_1 + 3v_2$$

2.2. ESPACIO GENERADO.

DEFINICION.- Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores en V, se dice que V es un espacio generado por $v_1, v_2, \ldots, v_n$, si y sólo si todo vector v de V se puede expresar como combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Esto es, para todo $v \in V$ existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal es que:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$$

2.3. INDEPENDENCIA LINEAL.

DEFINICION.- Sea V un espacio vectorial y $v_1, v_2, \ldots v_n \in V$. Los vectores $v_1, v_2, \ldots v_n$ son linealmente independientes en V, si y sólo sí la combinación lineal $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0_v$ tienen como única solución. $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Caso contrario se dirá que tales vectores son linealmente dependientes.

Un conjunto de vectores puede ser linealmente independiente en V y no generarlo,de igual manera que pueden generar un Espacio Vectorial y no ser linealmente independientes en el mismo; por ejemplo $\{(1,0),(0,1),(1,2)\}$ genera R^2 pero no es linealmente independientes en R^2.

De aquí surge la definición de base de un Espacio Vectorial.

2.4. BASE.

DEFINICION.- Un conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, si y sólo si :

i) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente en V, y

ii) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ genera a V.

A continuación presentamos algunos espacios vectoriales y algunas de sus bases.

El espacio vectorial R tiene una base $B = \{1\}$.

El espacio vectorial R^2 tiene una base $B =\{ (2,0),(0,3)\}$,

El espacio vectorial R^3 tiene una base

$$B = \{ (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \},$$

$$B = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right]$$

es una base para el espacio vectorial de las matrices 2x2.

$B = \{1,x,x^2\}$ es una base para un espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2.

2.5. DIMENSION.

DIMENSION.- Sea V un espacio vectorial de n vectores en V, se denomina dimensión de V al número entero n, si y sólo si n es igual a la cantidad de vectores en una base de V.

De los espacios vectoriales previamente nombrados R tiene dimensión uno, R^2 tiene dimensión dos, Rn tiene dimensión n, M_{mxn} tiene dimensión mxn, y la dimensión del espacio vectorialde los polinomios Pn es n+1.

2.6. ESPACIO VECTORIAL CON PRODUCTO INTERNO.

Supongamos que se ha visto como "multiplicar" vectores en R^n a fin de obtener un escalar. A este producto escalar se lo llama también producto interno. En otros espacios vectoriales también se pueden definir un producto interno. Antes de dar una definición general, cabe señalar que en R^n el producto interno de dos vectores es un escalar real. Supóngase que V es un espacio vectorial $v_1, v_2, ... v_n$ están en V y que $(v_1, v_2) \in VxV$.

V es un espacio vectorial con producto interno si y sólo si tiene definida una función ϕ, que va de VxV a R (ϕ:VxV->R) y ($\phi(v_1,v_2)=<v_1,v_2>\in R$) tal que cumpla con las siguientes condiciones.

i) $<v_1+v_2, v_3> = <v_1, v_3>+<v_2, v_3>$; V $v_1, v_2, v_3 \in V$.

ii) $<\alpha v_1, v_2> = \alpha<v_1, v_2>$; V$\alpha \in R$, V$v_1, v_2 \in V$.

iii) $<v_1, v_2> = <v_2, v_1>$; V $v_1, v_2 \in V$.

iv) $<v_1, v_1> = 0$; V $v_1 \in V$.

NOTACION.- A la función producto interno definida sobre une espacio vectorial v se lo denota :

$$\phi\ (v_1, v_2) = <v_1, v_2> \in R$$

$$\phi : VxV -> R$$

Si V es un espacio vectorial con producto interno dos vectores v_1, v_2 que pertenecen a V son ortogonales, si y sólo si $<v_1,v_2>=0$. Esta definición se puede extender a n vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ constituyéndose ellos en un conjunto ortogonal de vectores en V, si y sólo si el producto interno de $<v_i,v_j> = 0, \forall\ i \neq j$.

La norma de un vector v cualquiera en un espacio vectorial V sobre el que se ha definido un producto interno lo denotaremos por $\|v\|$ y se lo define de la siguiente manera:

$$\| v \| = + \sqrt{<v_1,v_2>}$$

Esto es, la norma de un vector es igual a la raíz cuadrada positiva del producto interno del vector v consigo mismo.

Sea $(3,4) \in R^2$, definimos el producto interno sobre R^2, como $<v_1,v_2> = x_1x_2 + y_1y_2$, siendo $v_1=(x_1,y_1)$ y $v_2=(x_2,y_2)$, bajo estas condiciones :

$$\begin{aligned} \|(3,4)\| &= +\sqrt{3^2+4^2} \\ &= +\sqrt{9+16} \\ &= +\sqrt{25} \\ &= +5 \end{aligned}$$

De lo expuesto se puede probar que la definición de norma exige que se cumpla lo siguiente:

i) $\|v\| \geq 0$, $\forall\, v \in V$.

ii) $\|v\|=0$ si y sólo sí $v = 0_v$

iii) $\|v_1+v_2\| \leq \|v_1\|+\|v_2\|$, $\forall\, v_1,v_2 \in V$.

2.7. TRANSFORMACIONES LINEALES.

En esta sección se estudiará un tipo especial de funciones, llamadas transformaciones lineales que ocurren a menudo en el Algebra Lineal puesto que son importantes en una gran variedad de aplicaciones.

DEFINICION.- Sean V y W espacios vectoriales, una transformación lineal T de V a W es una función T ($T:V\to W$) que asigna a cada vector v en V, un vector único $T(v)\in W$ y que cumple con las siguientes propiedades:

i) $T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2)$; $\forall v_1,v_2 \in V$.

ii) $T(\alpha v) = \alpha T(v)$; $\forall\, v\in V$, $\forall\, \alpha \in R$.

Sea ($T:R^2\to R^3$) una función de R^2 a R^3 definida por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix}$$

Se verificará si T es una transformación lineal.

Así, si $v_1 = (x_1,y_1)$

$v_2 = (x_2,y_2)$

Veamos si:

i) $T(v_1+v_2)= T(v_1)+T(v_2)$

$$T\left[\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right] = T\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \\ 3y_1 + 3y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - y_1 \\ 3y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ x_2 - y_2 \\ 3y_2 \end{bmatrix}$$

Pero,

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - y_1 \\ 3y_1 \end{bmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ x_2 - y_2 \\ 3y_2 \end{bmatrix} = T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= T(v_1)+T(v_2)$$

Veamos si

ii) $T(\alpha v) = \alpha\, T(v)$

$$T\left(\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x+\alpha y \\ \alpha x-\alpha y \\ 3\alpha y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \alpha T(v)$$

Entonces T es una transformación lineal.

2.8. REPRESENTACION MATRICIAL DE UNA TRANSFORMACION LINEAL.

Sea $A \in M_{nxn}$ una matriz real, $T:R^n \to R^n$ una transformación lineal definida por $T(x) = Ax$. Ahora se verá que para toda transformación lineal de R^n a R^n existe una matriz A_{nxn} tal que $T(x) = A(x)$ si $x \in R^n$.

Una vez que se conozca la transformación lineal, se puede evaluar $T(x)$ para toda $x \in R^n$ mediante una multiplicación matricial.

El siguiente teorema nos indica que la matriz A es única y se denomina matriz de la transformación, y se la denota A_T .

TEOREMA.- Sea $T: R^n \to R^m$ una transformación lineal. Entonces existe una sola matriz A_T tal que $T(x)=A_TX$ para todo $X\in R^n$.

PRUEBA

Sean $w_1 = Te_1$, $w_2 = Te_2, \ldots, w_n = Te_n$. Supóngase que A_T es la matriz cuyas columnas son $w_1, w_2, \ldots, w_n$ y también que A_T denota la transformación de R^n a R^n que multiplica a la izquierda por A_T. Si

$$w_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \quad \text{si } i = 1,2,\ldots,n$$

$$A_T e_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ 1 \\ 0_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} = w_i$$

Por tanto, $A_T e_i = w_i$, si $i = 1,2,\ldots,n$.

T y la transformación A_T son lo mismo porque coincide con sus vectores base.

Ahora ya se puede mostrar que A_T es única, supóngase que $T(x) = A_T x$ y $T(x) = B_T x$ para todo $x \in R^n$. Entonces $A_T X = B_T X$ o, haciendo $C_T = A_T - B_T$, se tiene que $C_T X = 0$ para todo $x \in R^n$. En particular, $C_T e_i = 0$ si $i = 1,2,\ldots,n$. Pero, como se ve en la demostración de la primera parte del teorema, $C_T e_i$ es la n-ésima columna de C_T. Por tanto, cada una de las n columnas de C_T es el vector con m ceros y C_T = 0, la matriz cero de mxn. Esto muestra que

$$A_T = B_T$$

2.9. PROCESO DE ORTOGONALIZACION DE GRAM-SCHMIDT

Hemos establecido cuando un conjunto no vacío de vectores es ortogonal en un espacio vectorial sobre V y además, podemos probar que todo conjunto de vectores ortogonales en v, es linealmente independiente en v, pero la recíproca de esta proposición nó es verdadera, esto es si un conjunto de vectores es linealmente independiente en V, no necesariamente es ortogonal en V, por lo tanto es necesario disponer de un conjunto ortonormal mediante un método que nos permita construir una base ortogonal a partir de cualquier base, esto es, de un conjunto de vectores que sean linealmente independientes en V y además lo generen a V.

A continuación damos el proceso de este método que es de carácter constructivo y al que lo denominamos Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt.

Sea B_o una base y

$$B_o = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$$

Mediante el proceso llevaremos esta base a $B_1=\{ v_1', v_2', \ldots, v_n' \}$ que es una base ortogonal y luego construimos $B_2 = \{ u_1, u_2, \ldots, u_n \}$ que es una base de vectores ortonormales, la que buscamos.

Hagamos que

1.- $v_1' = v_1$, $u_1 = v_1'/ \|v_1'\|$

Ahora,

2.- $v_2' = v_2 - <v_2,u_1>u_1$

3.- v_2' es ortogonal a u_1.

Pues

$$<u_1,v_2'> = <u_1,v_2 - <v_2,u_1>u_1$$

$$= <u_1,u_2> - <v_2,v_1><u_1,u_1>$$

Si $<u_1,u_1> = 1$

$$= <u_1,v_2> - <v_2,v_1>$$

Luego

$<u_1,v_2> = 0 \Rightarrow u_1$ y v_2' son ortogonales.

Probamos ahora que si

4.- $u_2 = v_2'/\|v_2'\|$, $\|u_2\| = 1$

u_1 y v_2' son ortonormales.

Hagamos que

5.- $v_3' = v_3 - <v_3,u_1>u_1 - <v_3,v_2>u_2$

verificamos que v_3' es ortogonal a u_1 y u_2.

$$<u_1,v_3'> = <u_1,v_3-<v_3,u_1>u_1-<v_3,u_2>u_2>$$

$$= <u_1,v_3>-<u_1,<v_3,u_1>u_1>-<u_1,<v_3,u_2><u_2,u_2>$$

$$= <u_1,v_3>-<v_3,u_1><u_1,u_1>-<v_3,u_2><u_2,u_2>$$

Pero $<u_2,u_2> = 1$

$= <u_1,v_3>-<v_3,u_1>$

$= <u_1,v_3>-<u_1,v_3>$

Luego v_3 y u_1 son ortogonales .

$<u_2,v_3'> = <u_2,v_3-<v_3,u_1>-<v_3,u_2>u_2>$

$= <u_2,v_3>-<u_2,<v_3,u_1>u_1>-<u_2,<v_3,u_2>u_2>$

$= <u_2,v_3>-0-<v_3,u_2>u_2,u_2>$

$= <u_2,v_3>-<v_3,v_2> = 0$

6.- Definimos $u_3= v_3'/\|v_3'\|$

Se puede concluir que :

$v_k'= v_k-<v_k,u_1>u_1-<v_k,u_2>u_2...$

$-<v_k,u_1>u_1...<v_k,u_{k-1}>u_{k-1}.$

donde $k>1$ $k\leq n$, es el k-ésimo vector ortogonal.

$u_k = v_k'/ \|v_k'\|$

CAPITULO III

3. VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS.

En esta sección se realizará el estudio del proceso de diagonalización de matrices cuadradas, puesto que del cálculo de los valores propios o característicos dependen los vectores característicos, como se verá a continuación.

DEFINICION.- Sea $A \in M_{nxn}$. El número λ (real ó complejo) recibe el nombre de valor característico de A, si existe algún vector $v \in C^n$ diferente de cero, tal que

$$AV = \lambda v$$

Se dice que el vector diferente de cero $\neg(v=0)$ es un vector característico de A, correspondiente al valor característico λ.

Sean $A, I_n \in M_{mxn}$. Si $A = I_n$, y además v es cualquier vector $v \in C^n$. Entonces se obtiene la siguiente ecuación :

$$Av = \lambda I_n v = \lambda v$$

Supóngase que λ es un valor característico de A.

Entonces existe un vector $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0$

Tal que $Av = \lambda v = \lambda I_v$, de donde al reescribir se obtiene:

$$(A-\lambda I)v = 0_v$$

Si $A \in M_{n \times n}$ la expresión anterior representa un sistema homogéneo de n ecuaciones con $x_1, x_2, \ldots, x_n$ incógnitas y $(A-\lambda I)v = 0$ tiene soluciones no triviales y es el valor característico de A.
Por otra parte si el $\det(A-\lambda I) \neq 0$ entonces la única solución de la ecuación es que $v = 0$, de modo que no es un valor propio de A.
Como se puede observar la ecuación $(A-\lambda I)v = 0$ es necesaria y suficiente para diagonalizar matrices, puesto que a partir del $\det(A-\lambda I)=0$ se calculan los valores y vectores característicos.

3.1. ECUACION Y POLINOMIO CARACTERISTICO.

DEFINICION.- $\det(A-\lambda I)v = 0$, se denomina ecuación característica de A , si y sólo si v es un vector característico de A y λ es el valor característico, además si $P(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ a esta expresión se lo llama polinomio característico que generalmente se lo representa :

$P(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n+1} + \ldots + b_1 + b_o = 0.$

Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad A-\lambda I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A- I = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}$$

de donde el polinomio $P(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (a-\lambda)(d-\lambda)-bc$

$$\Rightarrow \quad P(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)$$

Todo polinomio A de grado n con coeficientes reales ó complejos tiene exactamente n raíces.

De esto se concluye toda matriz de nxn tiene exactamente n valores característicos .

Al hablar de los valores y vectores característicos es necesario definir:

a) la multiplicidad geométrica y,

b) la multiplicidad algebraica.

3.2. MULTIPLICIDAD GEOMETRICA.

DEFINICION.- Si λ es el valor característico de la matriz A, entonces la multiplicidad geométrica de λ es la dimensión del espacio que sus correspondientes vectores propios generan el espacio, que se denota E_λ y se denomina espacio característico.

Multiplicidad geométrica de $\lambda = \dim E_\lambda = v(A-\lambda I)$

3.3. MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA.

DEFINICION.- Si A es una matriz cuadrada y simétrica la multiplicidad algebraica de λ, es igual al número de raíces ó valores que toma un particular λ. Si por ejemplo $(\lambda - 1)^3 = 0$, la multiplicidad algebraica de $\lambda = 1$ es igual a 3.

3.4. PROCESO PARA ENCONTRAR LOS VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS.

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = 0_v$$
$$\Rightarrow (A-\lambda I)v = 0_v,\ v \neq 0$$
$$\Rightarrow A-\lambda I = 0_v$$

1.- Se calcula el $\det(A-\lambda I)=0$.
2.- Se determinan los valores característicos que resultan del polinomio $P(\lambda) = \det(A-\lambda I)$.
3.- Con los valores característicos se determinan los vectores propios.

En el siguiente ejemplo se pueden observar los pasos estipulados anteriormente.

Sea $A \in M_{2x2}$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix};$$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2-1 = \lambda^2 -4\lambda +3$$

Si $\lambda^2 -4\lambda+3 = 0 \Rightarrow (\lambda -3)(\lambda -1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1$ son los valores propios tomando $\lambda_1 = 3$, la multiplicidad algebraica de $\lambda = 3$ es 1.

Trabajamos ahora con $(A-3I)X = 0_v$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = x_2$, $x_2 \in R$, pues

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

=> B = {(1,1)} es una base para el espacio característico de $\lambda_1 = 3$, ó también denotado por E_3,

Para $\lambda_2 = 1$ la multiplicidad algebraica es 1, además $(A-1I)X = O_v$ es :

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$x_1 = -x_2$, $x_2 \in R$, pues

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

B = {(-1,1)} es una base para el espacio característico de $\lambda_2 = 1$, esto es, E_1.

3.5. MATRICES SIMILARES Y DIAGONALIZACION.

En la sección 1.4.8 (pág#10) se definió matrices similares y se afirmaba que para que A y B sean similares, debe existir una matriz inversible $C \in M_{nxn}$, tal que $B = C^{-1} AC$, consideremos la siguiente definición.

3.5.1. MATRIZ DIAGONALIZABLE.

DEFINICION.- Sea A $\in M_{nxn}$, A es diagonalizable si y sólo si existe una matriz diagonal D, similar a la matriz A, tal que $D = C^{-1}AC$. De las dos definiciones se concluye que diagonalizar una matriz cuadrada es encontrar otra matriz C inversible tal que se cumpla la siguiente condición:

$$B = C^{-1}AC$$

3.5.2 TRANSFORMACION DE SIMILARIDAD.

DEFINICION.- La función definida por $B = C^{-1}AC$, que transforma la matriz A en la matriz B denotada por

$$T(A) = C^{-1}AC.$$

De allí la importancia del estudio de transformaciones lineales, pues la diagonalización también es una transformación lineal.

COMENTARIO : " Ya que existe un número infinito de formas de elegir un vector característico existe un número infinito de formas de elegir la matriz de diagonalización C ".

Con el siguiente ejemplo explicaremos el proceso de la diagonalización de matrices.

3.6. MATRICES SIMETRICAS Y DIAGONALIZACION ORTOGONAL.

En esta sección utilizaremos la definición dada en la sección 1.4.7 sobre matrices simétricas. Puesto que sus propiedades son importante como "toda matriz simétrica tiene n vectores característicos reales linealmente independientes y por tanto es diagonalizable, si y sólo si $A = A$ ".

PROPIEDADES DE LAS MATRICES SIMETRICAS.

Si A es una matriz simétrica entonces se cumplen las siguientes propiedades:

i) $A \in M_{n \times n}$ es diagonalizable.

ii) Los valores característicos son números reales.

iii) Los valores característicos de A corresponden a los valores propios.

3.7. DIAGONALIZACION ORTOGONAL.

DEFINICION.- Se dice que $A \in M_{n \times n}$ es diagonalizable ortogonalmente, si y sólo si existe una matriz ortogonal Q tal que:

$$Q^t A Q = D$$

Si además Q es ortogonal; esto es, $Q^t=Q^{-1}$ por lo tanto la expresión anterior se puede escribir:

$$Q^{-1}AQ = D$$

Nótese que esta expresión corresponde a la forma general de diagonalización y que las matrices simétricas tienen trascedental importancia en la diagonalización de matrices.

4. CONCLUSIONES.

4.1. Optar por un curso de Algebra Lineal es necesario para estudiantes de las diferentes disciplinas debido a la invención de las computadoras de alta velocidad, como también a la aplicación de las matemáticas en áreas no técnicas.

4.2. Las funciones son consideradas como un capítulo importante que se debe profundizar a todo nivel, puesto que es la base científica de la matemática moderna. "Todo en matemática es una función".

4.3. En el conocimiento de los valores y vectores propios convergen todas las definiciones de los temas preliminares.

4.4. De los valores y vectores propios se deduce la diagonalización de matrices cuadradas.

4.5. Todas las matrices simétricas son diagonalizables, por consiguiente tendrán valores y vectores propios.

BIBLIOGRAFIA

ANTON, H. (1986) **Introducción al Algebra Lineal**.
Editorial Limusa S.A. México D.F.

DETTMAN, J.(1975) **Introducción al Algebra Lineal y a las Ecuaciones diferenciales**.
Editorial McGraw-Hill. México S.A.

GROSSMANN,S.(1991)**Algebra Lineal con aplicaciones.**
Editorial McCraw-Hill de México S.A.

HERSTEIN I.N.(1988) **Algebra Lineal y teoría de matrices.**
Grupo Editorial Iberoamérica S.A.
México D.F.

ABREVIATURAS

Z^+	Conjuntos de todos los enteros positivos
R	Conjuntos de todos los números reales
$M_{mxn}(C)$	Conjunto de todas las matrices complejas mxn
$M_{mxn}(R) \equiv (M_{mxn})$	Conjunto de todas las matrices reales mxn
$A \in M_{mxn}$	Matriz A elemento del conjunto de las matrices reales
$\forall$	Cuantificador universal "para cualquier"
$\neq$	Diferente de
R^2	Espacio real bidimensional
R^n	Espacio real n-dimensional
$\in$	Es elemento de
Φ	Función (fi)
$=$	Igual a
$(A \vert b)$	Matriz aumentada del sistema lineal equivalente
$\neg$	Negación
$\Vert v \Vert$	Norma de un vector
$\langle v,v \rangle$	Producto interno
$\subset$	Subconjunto de
λ	Valor característico