“Modelamiento y simulación de un sistema con doble péndulo invertido”

Ronald García Arcos (1) Jhon Ortiz Coloma (2) Ph.D. Douglas Plaza Guingla (3)
Facultad de Ingeniería en Electricidad y Computación (1) (2) (3)
Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL)
Campus Gustavo Galindo, Km 30.5 vía Perimetral
Apartado 09-01-5863. Guayaquil-Ecuador
rjgarcia@fiec.espol.edu.ec (1); jdortiz@fiec.espol.edu.ec (2); douplaza@fiec.espol.edu.ec (3)

Resumen

En este trabajo se modela el comportamiento de un péndulo doble invertido, a partir de las ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento del sistema .Las ecuaciones de un sistema dinámico son por lo general no lineales por lo que se procede a hacer una aproximación al linealizar las ecuaciones encontradas. Posteriormente para visualizar el comportamiento del sistema dinámico y realizar un análisis detallado se utilizaran herramientas informáticas, los simuladores a utilizar son Matlab, OpenModelica y Scilab. La simulación del sistema será en lazo abierto donde se comparan los recursos usados y la eficiencia de cada uno de los simuladores.

Palabras Claves: *Péndulo doble invertido, modelamiento matemático, simulación sistemas dinámicos.*

Abstract

In this work the behavior of a double inverted pendulum, from the mathematical equations that describe the behavior of a dynamic system equations .The system are generally nonlinear so therefore proceed to make an approach to linearize modeled the equations found. Then to display the dynamic behavior of the system and perform a detailed analysis tools are used, the simulators are used Matlab, Scilab and OpenModelica. The simulation will open loop system where the resources used and the efficiency of each of the simulators are compared.

Keywords*: Double inverted pendulum, mathematical modeling, simulation dynamic systems.*

1. Introducción

El péndulo invertido es un sistema muy conocido dentro del estudio de los sistemas dinámicos, en el presente trabajo se realiza un análisis del comportamiento dinámico del péndulo doble invertido.

En el estudio de los sistemas de control se tiene que ser capaz de modelar sistemas dinámicos y analizar características dinámicas. Un modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representa la dinámica del sistema si no es a precisión, por los menos en una buena aproximación.

Un sistema puede ser representado por más de un modelo matemático de acuerdo a la perspectiva del modelador, por lo tanto se puede decir que no existe un único modelo matemático para representar un sistema.

Podemos describir la dinámica de muchos sistemas en términos de ecuaciones diferenciales. De acuerdo al sistema podemos obtener las ecuaciones diferenciales mediante el uso de las leyes físicas que los rigen.

2. Modelos Matemáticos

Un modelo matemático es una representación de un sistema donde el proceso de desarrollo del mismo se lo conoce como modelización matemática. Un modelo matemático ayuda a comprender un sistema por medio de su representación en ecuaciones, lo que nos permite hacer predicciones sobre el comportamiento del sistema en circunstancias particulares.

Una vez que se haya encontrado el modelo matemático de un sistema existen programas de simulación que nos ayudan con el análisis y síntesis, como lo son: Matlab, Modelica, Scilab. Con el fin de ver los resultados de nuestro análisis previo.

3. Ecuaciones Diferenciales (White Box)

El mecanismo está formado por tres cuerpos rígidos, como se muestra en la figura 1 un carro de masa M_c, acoplado a través de una articulación de rotación a una barra con masa M_1, longitud L_1 y momento de inercia J_1. A su vez a la primera barra esta acoplada, en el otro extremo y también a través de una articulación de rotación, una segunda barra de masa M_2, longitud L_2 y momento de inercia J_2. En el modelo despreciamos los rozamientos lineales y angular de los tres cuerpos.

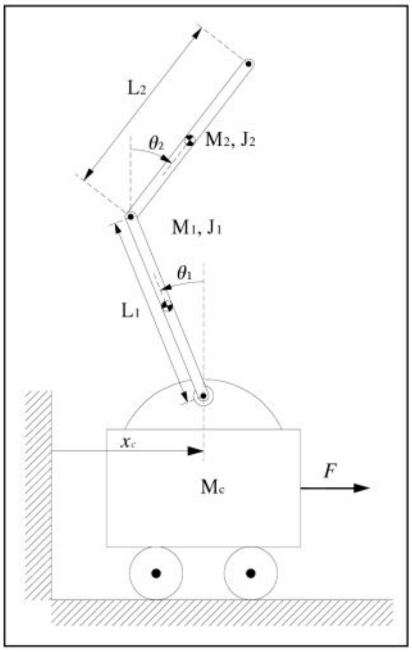

Figura 1. Esquema de doble péndulo invertido.

Para facilitar el modelado del sistema se realiza el análisis de los cuerpos por separado. [1]

Subsistema del carro

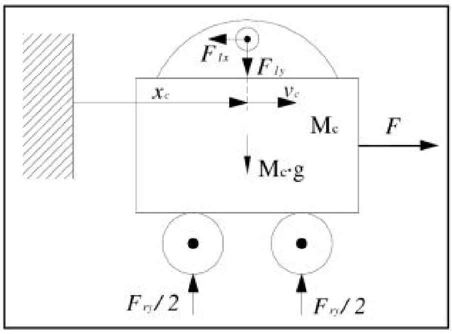

Figura 2. Esquema del carro.

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento lineal del carro obtenemos las siguientes ecuaciones.

Sumando las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre del carro en la dirección horizontal, se obtiene la siguiente ecuación del movimiento:

$$\mathrm{F} - \mathrm{F}_{1x} = \mathrm{M}_c \frac{dv_c}{dt} \qquad (1)$$

Ahora sumando las fuerzas en la dirección vertical se obtiene:

$$\mathrm{F}_{1y} + \mathrm{M}_c g - \mathrm{F}_{ry} = 0 \qquad (2)$$

Derivando la posición del carro respecto al tiempo obtenemos la velocidad del mismo:

$$v_c = \frac{dx_c}{dt} \qquad (3)$$

Se ha supuesto una distribución uniforme de la fuerza de reacción $\mathbf{F_{ry}}$ del suelo sobre el vehículo en las ruedas.

Subsistema barra 1

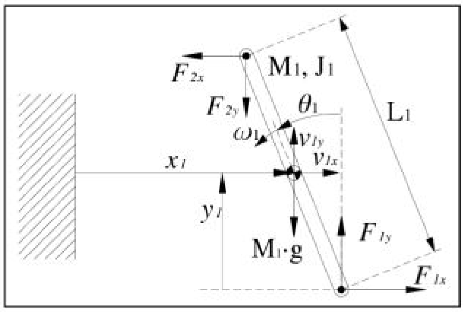

Figura 3. Esquema barra 1.

Sumando las fuerzas de la barra 1 en la dirección horizontal, se obtiene la siguiente ecuación del movimiento:

$$\mathrm{F}_{1x} - \mathrm{F}_{2x} = \mathrm{M}_1 \frac{dv_{1x}}{dt} \qquad (4)$$

Ahora sumando las fuerzas en la dirección vertical se obtiene:

$$\mathrm{F}_{1y} - \mathrm{F}_{2y} - \mathrm{M}_1 g = \mathrm{M}_1 \frac{dv_{1x}}{dt} \qquad (5)$$

Realizando sumatorias de torques obtenemos lo siguiente:

$$(\mathrm{F}_{1x} + \mathrm{F}_{2x}) \frac{L_1}{2} \cos(\theta_1) + \left(\mathrm{F}_{1y} + \mathrm{F}_{2y}\right) \frac{L_1}{2} \sin(\theta_1) = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} \qquad (6)$$

De la misma forma que obtuvimos la velocidad del carro, lo hacemos para la barra 1, derivando las posiciones de x1 e y1 respecto al tiempo para obtener sus respectivas velocidades.

$$v_{1x} = \frac{d_{x1}}{dt} \qquad (7)$$

$$v_{1y} = \frac{dy_1}{dt} \qquad (8)$$

Derivamos θ_1 respecto al tiempo obtenemos la velocidad angular de la barra 1.

$$\omega_1 = \frac{d\theta_1}{dt} \qquad (9)$$

Subsistema barra 2

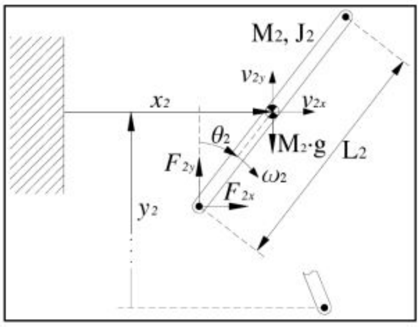

Figura 4. Esquema barra 2.

Sumando las fuerzas de la barra 2 en la dirección horizontal, se obtiene la siguiente ecuación del movimiento:

$$F_{2x} = M_2 \frac{dv_{2x}}{dt} \quad (10)$$

Ahora sumando las fuerzas en la dirección vertical se obtiene:

$$F_{2y} - M_2 g = M_2 \frac{dv_{2x}}{dt} \quad (11)$$

Realizando sumatorias de torques obtenemos lo siguiente:

$$-F_{2x} \frac{L_2}{2} \cos(\theta_2) + F_{2y} \frac{L_2}{2} \sin(\theta_2) = J_2 \frac{d\omega_2}{dt} \quad (12)$$

De la misma forma que obtuvimos la velocidad de la barra 1, lo hacemos para la barra 2, derivando las posiciones de x2 e y2 respecto al tiempo para obtener sus respectivas velocidades.

$$v_{2x} = \frac{d_{x2}}{dt} \quad (13)$$

$$v_{2y} = \frac{d_{y2}}{dt} \quad (14)$$

Derivamos θ_2 respecto al tiempo obtenemos la velocidad angular de la barra 2.

$$\omega_2 = \frac{d\theta_2}{dt} \quad (15)$$

3.1 Descripción de las variables de estado

El espacio de estados es otro método que permite modelar un sistema físico. Se representa por un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales de primer orden que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden. A esta representación se le llama ecuación de estado. Una forma general de expresar la dinámica de un sistema lineal es:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (16)$$

$$y = Cx + Du \quad (17)$$

Este tipo de representación tiene la ventaja de que permite conocer el comportamiento interno del sistema, además se facilita el diseño asistido por computadora, ya que los paquetes de software normalmente dependen de esta representación.

El vector x que determina el estado del sistema contendrá seis elementos (posición del carro, primera derivada, posición del ángulo θ_1, primera derivada, posición del ángulo θ_2 y su derivada). En el caso del vector y se ha considerado que el péndulo consta de tres sensores, uno para la posición del carro, otro para el ángulo θ_1 y el último para el ángulo θ_2. El vector u tiene un único elemento que es la fuerza aplicada al carro.

$$\begin{pmatrix} \frac{d\Delta v_c}{dt} \\ \frac{d\Delta x_c}{dt} \\ \frac{d\Delta \omega_1}{dt} \\ \frac{d\Delta \theta_1}{dt} \\ \frac{d\Delta \omega_2}{dt} \\ \frac{d\Delta \theta_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} & 0 & a_{16} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \Delta v_c \\ \Delta x_c \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta \theta_1 \\ \Delta \omega_2 \\ \Delta \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \\ b_5 \\ 0 \end{pmatrix} . \Delta F$$

$$\boldsymbol{y(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta x_c} \\ \boldsymbol{\Delta \theta_1} \\ \boldsymbol{\Delta \theta_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Delta F}$$

A continuación se detallan los valores de los parámetros para realizar la simulación.

Tabla 1. Datos de los parámetros del sistema.

Parámetros del sistema	
Mc	0.5 Kg
M1	0.2 Kg
M2	0.2 Kg
L1	0.3 m
L2	0.3 m
J1	0.006 Kg*m2
J2	0.006 Kg*m2
g	9.8 m/s2

4. Simulaciones del Sistema.

Luego de haber obtenido el modelo matemático del sistema representado en la matriz de variables de estado se procede a realizar las simulaciones de las ecuaciones del sistema en cada uno de los programas usados para luego realizar un análisis de los resultados obtenidos.

No se realizará un control del sistema solo se analizará su comportamiento con las señales de entrada escalón, impulso y rampa.

4.1. Simulink.

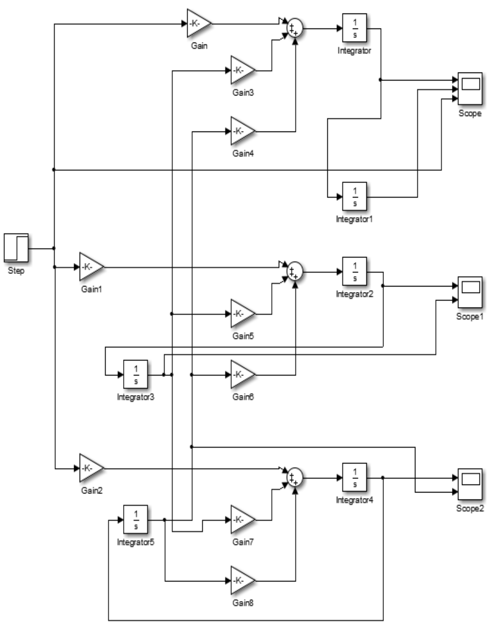

Figura 5. Bloques de Simulink.

4.1.1 Respuesta a una señal escalón unitario.

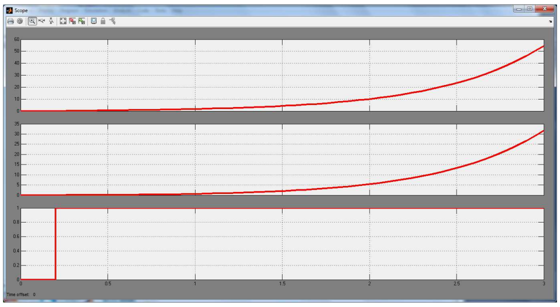

Figura 6. Variables Vc, Xc, F.

4.1.2 Respuesta a una señal impulso.

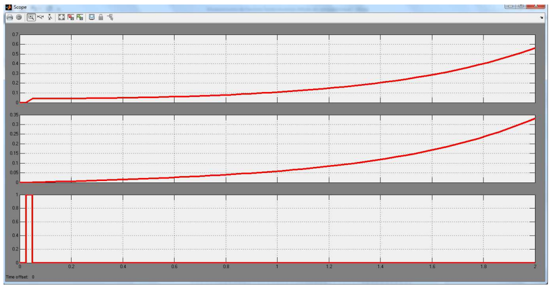

Figura 7. Variables Vc, Xc, F.

4.1.3 Respuesta a una señal rampa.

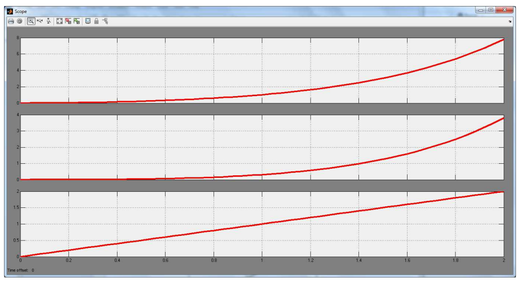

Figura 8. Variables Vc, Xc, F.

4.2. Modelica.

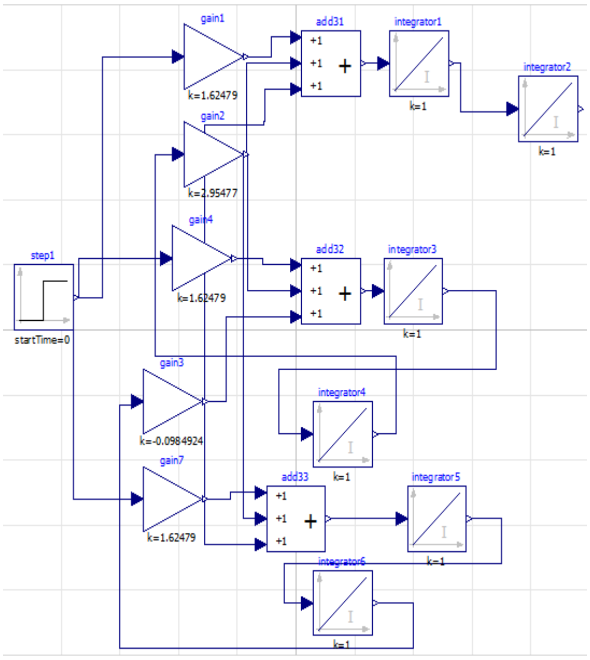

Figura 9. Bloques de Modelica.

4.2.1 Respuesta a una señal escalón unitario.

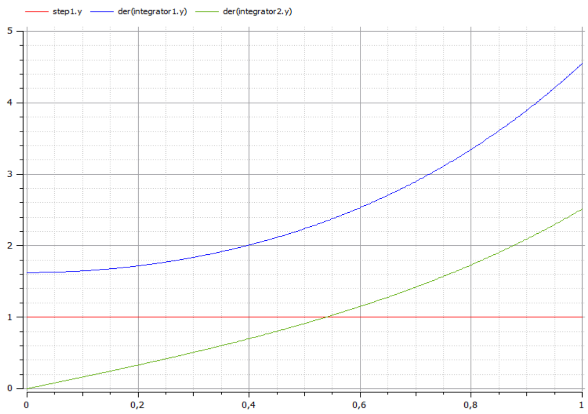

Figura 10. Variables Vc, Xc, F.

4.2.2 Respuesta a una señal impulso.

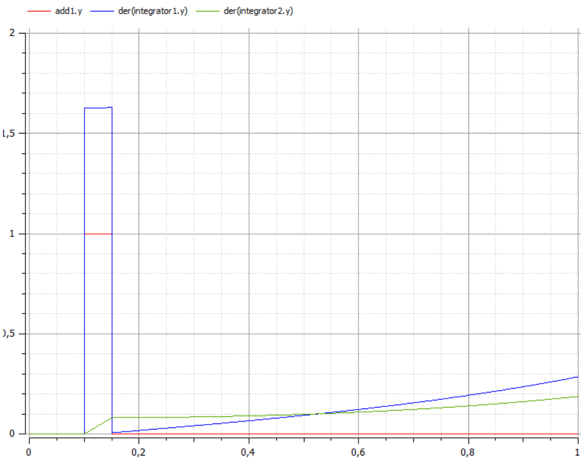

Figura 11. Variables Vc, Xc, F.

4.2.3 Respuesta a una señal rampa.

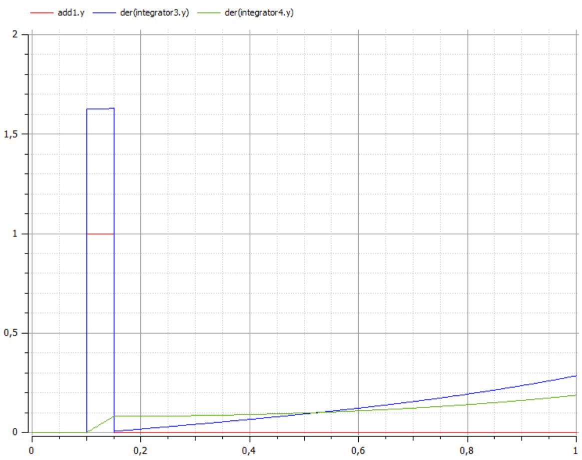

Figura 12. Variables Vc, Xc, F.

4.3. Scilab.

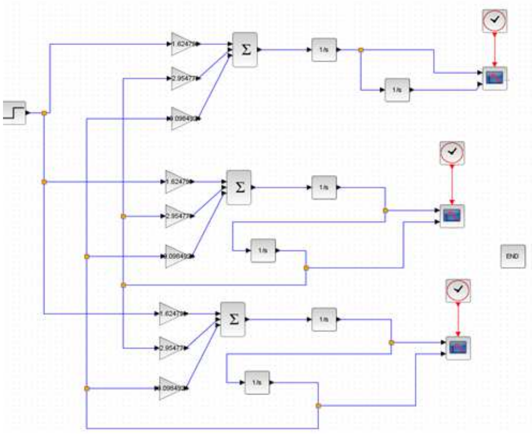

Figura 13. Bloques de Scilab.

4.3.1 Respuesta a una señal escalón unitario.

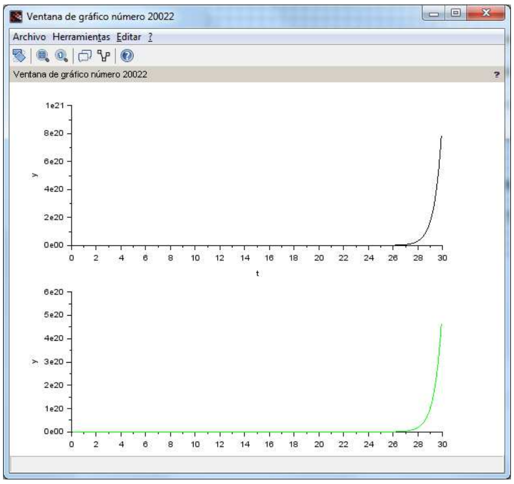

Figura 14. Variables Vc, Xc, F.

4.3.2 Respuesta a una señal impulso.

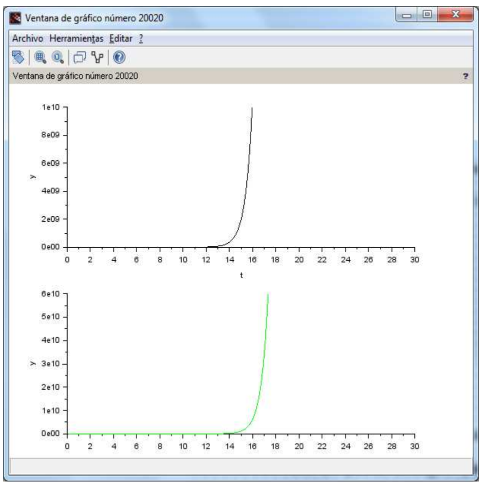

Figura 15. Variables Vc, Xc, F.

4.3.3 Respuesta a una señal rampa.

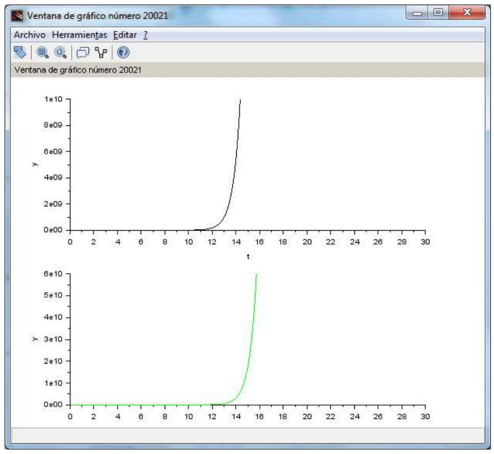

Figura 16. Variables Vc, Xc, F.

5. Análisis de las Simulaciones

5.1 Matlab.

Es una herramienta de software matemático con un lenguaje de alto nivel usado por ingenieros en todo el mundo, el paquete de Matlab consta con una herramienta que expande sus prestaciones como es Simulink que es un entorno de programación visual ya que permite la simulación de procesos mediante diagramas de bloques.

5.1.1 Análisis de respuesta del sistema a una señal escalón unitario, impulso y rampa.

Se simuló el sistema con una entrada de una señal de escalón unitario, impulso y rampa para poder visualizar y analizar su comportamiento.

La simulación tiene una duración de 2 segundos donde se analizan las variables del sistema que son velocidad y posición de carro, velocidad y posición angular de barra 1, velocidad y posición angular de barra 2.

Como se puede observar en las simulaciones el resultado no es satisfactorio por lo que el sistema no es estable a lazo abierto, se puede notar que la posición de las dos barras sobrepasa los 30 radianes a los 2 segundos y va en aumento en cada una de las señales de entrada. Esto nos indica que existe inestabilidad y el sistema sería válido para pequeños valores de ϴ1 y ϴ2.

5.2 Modelica.

Es un software libre orientado a objetos con un lenguaje basado en ecuaciones para poder modelar sistemas físicos. Tiene un entorno eficiente para crear modelos, este software es respaldado por una organización no lucrativa llamada Open Source Modelica Consortium (OSMC).

5.2.1 Análisis de respuesta del sistema a una señal escalón unitario, impulso y rampa.

Se simuló el sistema con una entrada de una señal de escalón unitario, impulso y rampa para poder visualizar y analizar su comportamiento.

La simulación tiene una duración de 1 segundo donde se analizan las variables del sistema que son velocidad y posición de carro, velocidad y posición angular de barra 1, velocidad y posición angular de barra 2.

Como se puede observar en las simulaciones el resultado no es satisfactorio por lo que el sistema no es estable a lazo abierto. Se puede ver que en la simulación con una señal de entrada impulso la variable que representa la velocidad tiende a seguir la señal de entrada, aunque después tiene la misma tendencia que las demás simulaciones de tener una magnitud infinita por lo que es sistema es inestable.

5.3 Scilab.

Es un software libre desarrollado por INRIA (Institut Nationale de Recherche en Informatique et en Automatique) y el ENPC (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées) de Francia, tiene un solo en un mismo ambiente herramientas de cálculo numérico, programación y gráfico. Similar a otros programas de cálculo numérico como por ejemplo MATLAB.

5.3.1 Análisis de respuesta del sistema a una señal escalón unitario, impulso y rampa.

Se simuló el sistema con una entrada de una señal de escalón unitario, impulso y rampa para poder visualizar y analizar su comportamiento.

La simulación tiene una duración de 30 segundos donde se analizan las variables del sistema que son velocidad y posición de carro, velocidad y posición angular de barra 1, velocidad y posición angular de barra 2.

Como se puede observar en las simulaciones las magnitudes de las variables tienden al infinito es un tiempo determinado por lo que el resultado no es satisfactorio y se determina que sistema no tiene estabilidad a lazo abierto.

6. Conclusiones

- Los modelos matemáticos tienen aplicación en un amplio campo, no solo en la ingeniería debido a que expresa un sistema o un problema de la vida real en función de sus variables, parámetros, relaciones en un algún tipo de formulismo matemático.
- La mayoría de los problemas de la vida real implican sistemas no lineales, debido a que estos sistemas son complicados en cuanto a su representación matemática la manera más sencilla de encontrar una solución es aplicar linealización de sistemas no lineales que es una aproximación del sistema no lineal.
- La simulación de sistemas tiene un papel importante en las investigaciones en el campo de la ingeniería donde se usa un tipo de software que tenga las herramientas necesarias para simular sistemas físicos, para la simulación del modelo matemático del péndulo doble invertido se usó Matlab, Modelica y Scilab.
- Los simuladores Matlab, Modelica y Scilab presentan similitudes en su entorno de programación gráfica ya que permiten trabajar con modelos eléctricos, mecánicos hidráulicos, etc. Para la simulación de ecuaciones diferenciales el simulador Modelica presenta muchas facilidades.
- Matlab uso más recursos del computador en comparación con los otros simuladores usados, incluyendo su instalación ya que contiene muchas más herramientas. El instalador del simulador Scilab es el que usa menos espacio en el disco duro del computador.

7. Referencias

[1] Luis Ignacio Gracia Calandín y Carlos Pérez Vidal, “Doble péndulo invertido” en Modelado de sistemas dinámicos: Aplicaciones, Editorial Club Universitario: España, 2005, pp. 148 – 158.
[2] Rolf Isermann y Marco Münchho, “Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications”, pringer Science & Business Media: Alemania, 2010, pp 77
[3] Revista Facultad de Ingeniería Universidad de

Antioquia,

http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext

&pid=S0120-62302014000300004, fecha de consulta Febrero 2015
[4] Universidad de Sevilla, Introducción a las redes neuronales, https://www.cs.us.es/cursos/iati-2013/temas/tema-09.pdf, fecha de consulta Marzo 2015
[5] José Manuel Gutiérrez, Universidad de Cantabria, Introducción a las redes neuronales, http://personales.unican.es/gutierjm/docs/tut_RedesNeuro.pdf, fecha de consulta Marzo 2015
[6] OpenModelica, Software de Simulación de sistemas físicos, http://www.taringa.net/posts/noticias/7440258/OpenModelica-software-de-simulacion-de-sistemas-fisicos.html, fecha de consulta Mayo 2015
[7] Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de Asunción, Introducción a Scilab, http://claroline.emate.ucr.ac.cr/claroline/claroline/backends/download.php?url=L1NjaWxhYi9MQ0FELUNVUlNPX0RFX1NDSUxBQi5wZGY%3D&cidReset=true&cidReq=MA0560, fecha de consulta Mayo 2015