



**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**

**Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas**

Un nuevo método de elementos finitos conservativo en masa para un  
modelo de flujo termo-bioconvectivo

**PROYECTO INTEGRADOR**

Previo a la obtención del Título de:

**Matemático**

Presentado por:

Marco Vinicio Estrada Tenorio

GUAYAQUIL - ECUADOR

Año: 2022

## DEDICATORIA

Este trabajo, se lo dedico a mis padres y personas que me han brindado su apoyo a lo largo de la carrera. Y para mis hijos, si algún día llego a tener alguno.

*Marco Estrada T.*

## **AGRADECIMIENTOS**

Mis mas sinceros agradecimientos a mis tutores, por su guía y orientación en la realización del presente trabajo.

Agradezco en general a los profesores de la carrera de matemáticas por sus enseñanzas y consejos, que estoy seguro me servirán como base en el desarrollo de mi carrera como matemático.

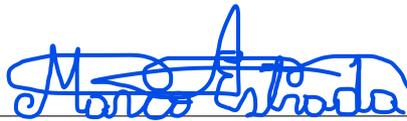
Al proyecto FONDECYT 1110241 ANID-CHILE, dirigido por el Dr. Eligio Colmenares, por la propuesta y colaboración en el desarrollo de esta investigación.

Y en especial, agradezco a mis amigos y familiares que me motivaron a culminar con éxito mi carrera universitaria y me disuadieron de abandonarla en algún momento.

*Marco Estrada T.*

## DECLARACIÓN EXPRESA

“Los derechos de titularidad y explotación, me corresponde conforme al reglamento de propiedad intelectual de la institución; *Marco Vinicio Estrada Tenorio*, y doy mi consentimiento para que la ESPOL realice la comunicación pública de la obra por cualquier medio con el fin de promover la consulta, difusión y uso público de la producción intelectual”

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Marco Estrada', is written over a horizontal line.

Marco Estrada T.

# EVALUADORES

---

**Dr. Luz Elimar Marchan Mendoza**

PROFESOR DE LA MATERIA

INTEGRADORA

---

**Dr. Dany De Cecchis De Leon**

TUTOR

---

**Dr. Wilfredo Angulo Sanchez**

COTUTOR

## RESUMEN

En el presente trabajo, se presenta y analiza un esquema de elementos finitos para un modelo de flujo termo-bioconvectivo de microorganismos gravitácticos en medios pososos que conserva la propiedad de divergencia nula a nivel discreto. Este modelo, consiste en un sistema que relaciona la velocidad y la presión de un fluido Darcy-Brinkman acoplado con ecuaciones de difusión-advección y conservación celular para la temperatura y la concentración, respectivamente. El método propuesto tiene como finalidad resolver numéricamente el modelo en consideración, con una alta precisión para una eventual aplicación en industrias donde se trabaje con este tipo de fenómenos afines u otros.

El trabajo se desarrolló de forma teórica y computacionalmente. En la parte teórica se demostró la estabilidad, consistencia y convergencia del método numérico siguiendo estimados de energía y la teoría de elementos finitos.

A través de un código computacional, se validaron los resultados teóricos usando un ejemplo académico con soluciones manufacturadas, obteniéndose estimaciones de error a priori y con el orden esperado respecto al parámetro de discretización.

**Palabras Clave:** Método de elementos finitos, método de Galerkin discontinuo, análisis de error, modelo termo-bioconvectivo.

## **ABSTRACT**

*In this work, a finite element method for a thermo-bioconvective flow of gravitactic microorganisms in a porous media is introduced and analyzed. This method holds the divergence-free property in the discrete formulation. The model consists of a system of differential equations that relates the velocity and pressure of a Darcy-Brinkman fluid coupled with advection-diffusion equations for the cellular conservation of the temperature and concentration, respectively. This method aims to numerically solve the model described above with high precision and potential application for industry problems.*

*Through the course of this work, both aspects, theoretical and computational, are considered. The proof of stability, consistency, and convergence is boarded on a theoretical study of the numerical method, following energy estimates and the finite element theory. A computational implementation of a synthetic problem is used to verify the theoretical results of the a priori error estimations and order of convergence respecting the discretization parameter.*

**Keywords:** *Finite element methods, discontinuous Galerkin method, error analysis, flow thermo-bioconvective model.*

# ÍNDICE GENERAL

RESUMEN . . . . .	I
ABSTRACT . . . . .	II
ÍNDICE DE FIGURAS . . . . .	V
ÍNDICE DE TABLAS . . . . .	VI
CAPÍTULO 1 . . . . .	1
1. INTRODUCCIÓN . . . . .	1
1.1 Descripción del problema . . . . .	1
1.2 Justificación del problema . . . . .	2
1.3 Objetivos . . . . .	2
1.3.1 Objetivo General . . . . .	2
1.3.2 Objetivos Específicos . . . . .	2
1.4 Marco teórico . . . . .	3
1.4.1 Antecedentes . . . . .	3
1.4.2 Planteamiento del modelo físico-matemático . . . . .	4
1.4.3 Preliminares sobre la teoría continua . . . . .	6
1.4.4 Conceptos previos sobre los métodos numéricos . . . . .	7
1.4.5 Método de Galerkin . . . . .	8
CAPÍTULO 2 . . . . .	12
2. METODOLOGÍA . . . . .	12
2.1 Elección del método numérico . . . . .	12
2.2 Metodología para la formulación variacional continua . . . . .	13
2.3 Estrategia de construcción del método numérico . . . . .	15
CAPÍTULO 3 . . . . .	16
3. RESULTADOS Y ANÁLISIS . . . . .	16
3.1 Formulación variacional . . . . .	16
3.2 Análisis continuo . . . . .	22
3.2.1 Buen planteamiento del problema . . . . .	22

3.3	Construcción del método numérico . . . . .	26
3.3.1	Estimaciones discretas y propiedades de estabilidad . . . . .	27
3.3.2	Análisis de consistencia . . . . .	29
3.3.3	Análisis de convergencia . . . . .	35
3.4	Implementación computacional . . . . .	40
CAPÍTULO 4	. . . . .	49
4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	. . . . .	49
BIBLIOGRAFÍA		

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1	Gráfica de la velocidad . . . . .	43
Figura 3.2	Gráficos de contorno de las funciones test para la concentración y temperatura . . . . .	43
Figura 3.3	Gráfica de contorno de la presión . . . . .	44
Figura 3.4	Triangulación del dominio $\Omega$ en la malla $\mathcal{T}_h$ . . . . .	45
Figura 3.5	Gráfica de las soluciones numéricas para la velocidad . . . . .	46
Figura 3.6	Gráfica de las soluciones numéricas para la temperatura . . . . .	46
Figura 3.7	Gráfica de las soluciones numéricas para la concentración . . . . .	46
Figura 3.8	Gráfica de las soluciones numéricas para la concentración . . . . .	47
Figura 3.9	Gráficas de la tendencia del error con respecto al parámetro $h$ . . . . .	47
Figura 3.10	Gráficas de las tasas de convergencia con respecto al parámetro $h$ . . . . .	48

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1	Registro de convergencia para el modelo termobio-convectivo con el método <i>H-div</i> conforme propuesto y orden de aproximación $k = 1$ . . . . .	44
Tabla 3.2	Registro de convergencia para el modelo termobio-convectivo con el método <i>H-div</i> conforme propuesto y orden de aproximación $k = 1$ . . . . .	45

# CAPÍTULO 1

## 1. INTRODUCCIÓN

Un flujo termo-bioconvectivos se refieren a flujos espontáneos y a la formación de patrones debido al movimiento de una gran masa de microorganismos, causado por gradientes de temperatura en un medio específico. Ejemplos típicos de estos flujos se pueden encontrar en oceanografía, geofísica, aeronáutica, entre otros (Jamuna and Balla, 2021). En el presente proyecto, se aborda un problema relacionado con este tipo de fluidos así como su aproximación numérica.

### 1.1 Descripción del problema

En el estudio de fenómenos asociados a flujos termo-bioconvectivos de microorganismos gravitácticos, intervienen numerosos principios físicos como los de conservación de materia y energía. La aplicación de éstos en el modelamiento del fenómeno produce un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP's) no lineales acoplado, que relaciona la velocidad y presión del fluido, por medio de un sistema Darcy-Brinkman, y la concentración de microorganismos y temperatura del fluido, por medio de ecuaciones de conservación celular de difusión-advección, las cuáles constituyen las variables físicas principales de interés en el fenómeno (Sohail et al., 2021). La resolución analítica de este tipo de modelos en la actualidad, son limitados. Por lo tanto, resulta imprescindible construir métodos numéricos que permita aproximar dicha solución analítica.

En la literatura actual existen numerosos trabajos en los que se proponen métodos para aproximar la solución de modelos sobre flujos termo-bioconvectivos u otros fenómenos afines, tales como el métodos de volumen finito, métodos espectrales, diferencias finitas, métodos de elementos finitos estándar, métodos mixtos, entre otros. Sin embargo, aspectos como la estabilidad, consistencia y convergencia no son abordados en algunos de ellos. En esta misma línea de investigación, tenemos los métodos

numéricos que se derivan de la teoría de Borís Galerkin (1945), conocidos como los métodos de Galerkin. Particularmente, el método de Galerkin Discontinuo (DG) es un método de elementos finitos que posee buenas propiedades para aproximar la solución de estos modelos. Además, el método DG tiene la propiedad de ser conservativo, es decir, que preserva los principios físicos de conservación involucrados en el fenómeno, (Di Pietro and Ern, 2012). Además, existe el método de Galerkin Discontinuo (DG) que exhibe la propiedad de la conservación de masa a nivel discreto, es decir, velocidades discretas de divergencia nula, adecuado para la resolución de modelos de flujos termo-bioconvectivos de microorganismos gravitácticos.

## **1.2 Justificación del problema**

Debido a la ausencia de estudios matemáticos que muestren resultados de existencia y unicidad de soluciones de los flujos termo-bioconvectivos así como resultados de convergencia, surge la necesidad de proponer un método de aproximación y su correspondiente análisis matemático y numérico, que brinde la confianza necesaria para la toma de decisiones en los procesos industriales asociados con este tipo de fenómenos.

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo General**

Diseñar un método de elementos finitos conservativo en masa para la simulación numérica de un modelo de flujo termo-bioconvectivo.

### **1.3.2 Objetivos Específicos**

Los objetivos específicos para este trabajo se detallan a continuación:

- Explorar la literatura actual sobre métodos numéricos existentes para aproximar el modelo de flujo termo-bioconvectivo y fenómenos afines.
- Plantear una formulación débil equivalente al problema de valor de frontera asociado con el modelo de flujo termo-bioconvectivo.

- Demostrar estabilidad de soluciones débiles continuas mediante estimados usuales de energía.
- Construir un método H-div conforme, estable, consistente y de alto orden para la aproximación numérica del fenómeno de flujo termo-bioconvectivo.
- Analizar el buen planteamiento del esquema discreto en términos de existencia y unicidad de soluciones.
- Establecer estimaciones de error a priori óptimas.
- Validar los resultados teóricos a través de test numéricos implementados computacionalmente.

## **1.4 Marco teórico**

### **1.4.1 Antecedentes**

El desarrollo de técnicas numéricas para la simulación de flujos bioconvectivos y fenómenos afines ha sido desarrollado por Cockburn et al. (2007), Hopkins and Fauci (2002), Cao and Chen (2014), Colmenares et al. (2021), entre otros. Trabajos en los que se han empleado métodos de diferencias finitas, métodos de volumen de control y métodos de elementos finitos primales mixtos. Estos se han centrado en el estudio de microorganismos gravitácticos, oxiácticos y girotácticos en fluidos o en medios fluidos. Kuznetsov and Jiang (2001) estudiaron la convección de microorganismos gravitácticos en medios porosos con base en la ley de Darcy y las ecuaciones de conservación de microorganismos. Ellos analizan la existencia y estabilidad de las soluciones en un dominio simple de una dimensión. Además, para las simulaciones y aproximaciones numéricas de las soluciones del caso que estudian emplean un método conservativo de diferencias finitas. En relación con esto, Nguyen-Quang et al. (2008) estudian el inicio de la convección considerando la doble difusión, esto es, investigando los efectos térmicos y solutales de los microorganismos gravitácticos en un medio poroso sobre el inicio de la convección en una capa porosa.

En el presente proyecto, a diferencia de (Nguyen-Quang et al., 2008) se considerará un sistema del tipo Darcy-Brinkman, el cual, se usa para describir los fenómenos

hidrodinámicos. En este tipo de sistema, se tienen en cuenta la resistencia viscosa así como los efectos de la inercia para microorganismos por medio de términos laplacianos y darcianos, acoplándolos a las ecuaciones de advección-difusión y una ecuación de conservación celular que modelan las variaciones de temperatura y el flujo de microorganismos, respectivamente, a través de fuerzas de flotabilidad y términos convectivos.

#### **1.4.2 Planteamiento del modelo físico-matemático**

Para el planteamiento del modelo empezamos por considerar un dominio abierto y acotado  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  con  $d = 2$  o  $d = 3$ , con una frontera poliédrica  $\Gamma$  y con vector normal exterior  $n$ . La frontera está particionada por subconjuntos  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$  tales que  $\Gamma_D, \Gamma_N \subseteq \Gamma$ . Considerando este dominio general, se estudia el fenómeno de la bioconvección, el cual se refiere a una convección dinámica que ocurre en una suspensión homogénea, donde la mezcla no heterogénea está compuesta por un fluido que es menos denso que los microorganismos autopropulsados que esta contiene, los cuáles, por lo general, se presentan en grandes cantidades. Cuando estos microorganismos se mueven hacia arriba se concentran en las regiones superiores de la superficie. Así, al acumularse se comienzan a formar capas inestables de distintas densidades, lo cual quiere decir que la estratificación es inestable, puesto que la acumulación de estos microorganismos hace que la densidad de la capa superior sea mayor que la de la capa inferior. Esto produce una bioconvección ya que se desarrollan patrones de flujos inestables de distintas temperaturas, concentración y presión (Zhao et al., 2019).

Como se mencionó previamente, en este proyecto se plantea estudiar el fenómeno de "gravitaxia", el mismo que se produce cuando estos microorganismos continúan moviéndose verticalmente hacia arriba en ausencia del movimiento de fluidos a granel. La metodología que se seguirá para el planteamiento de las ecuaciones que describen el modelo físico, se basará en el trabajo de Zhao et al. (2019), el cual se sustenta en el estudio de este modelo en medios porosos para fenómenos de bioconvección realizado por Cisneros et al., (2011) y extendido por Kuznetsov (2006), quién combina la ley de Darcy con el fin de describir el flujo de suspensión en medios porosos.

Dado que un el modelo bioconvectivo, los microorganismos están en constante

movimiento dentro del material poroso, se producen capas de alta porosidad por lo cual se introducen las ecuaciones de Darcy-Brinkman, que han sido ampliamente usadas para analizar el flujo en medios de alta porosidad ya que agregan un término laplaciano (viscoso) a las ecuaciones clásicas en la ley de Darcy. A continuación se detallan las ecuaciones que modelan el fenómeno de la termo-bioconvección.

### Modelo matemático

Para una suspensión diluida de microorganismos en movimiento en una región  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), si suponemos que esta es incomprensible, se obtiene la siguiente ecuación de continuidad

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{u} = (u_j)_{1 \leq j \leq d}$  denota al vector de la velocidad de filtración del fluido. Para la ecuación del momentum empleamos el modelo de Darcy-Brinkman

$$\frac{\mu}{\kappa} \mathbf{u} - \mu' \Delta \mathbf{u} + \nabla p + [\beta_\theta \theta - \beta_\varphi \varphi] \mathbf{g} = c_a \rho_w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{f}, \quad (1.2)$$

aquí  $c_a$  se conoce como el coeficiente de aceleración que depende de la geometría del medio poroso,  $\rho_w$  es la densidad del agua,  $t$  es el tiempo,  $p$  es la presión  $\mu$  es la viscosidad dinámica de suspensión,  $\mu'$  es la viscosidad Brinkman efectiva,  $\kappa$  es la permeabilidad del medio poroso, las constantes  $\beta_\theta > 0$  y  $\beta_\varphi > 0$  están asociadas a la expansión térmica y los coeficientes de bio-densidad, respectivamente. Por su parte,  $\mathbf{g}$  es el vector de aceleración de la gravedad y  $\mathbf{f}$  se refiere a una fuerza externa distribuida en el volumen. Adicionalmente,  $\theta$  es la temperatura y  $\varphi$  la concentración de los microorganismos. Asimismo, la ecuación de conservación de los microorganismos esta dada por

$$-\operatorname{div} \mathbf{J} = \omega \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{donde } \mathbf{J} = (\mathbf{u} + U \mathbf{i}_d) \varphi - \kappa_\varphi \nabla \varphi, \quad (1.3)$$

aquí  $\omega$  es la porosidad,  $\kappa_\varphi$  es la difusividad de los microorganismos en el medio poroso y  $U$  es la velocidad del movimiento producida por la gravedad de los microorganismos e  $\mathbf{i}_d$  es el vector canónico en dirección del eje  $X_d$ . Finalmente, la última ley física a considerar es la la ley de conservación de la energía térmica, cuya ecuación esta dada por:

$$-\kappa_\theta \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.4)$$

siendo  $\kappa_\theta$  la conductividad térmica efectiva.

En este proyecto se estudiará el modelo en un estado estacionario, por lo que las variaciones en el tiempo son todas nulas y así obtenemos el modelo matemático siguiente: Encontrar  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\theta$  y  $\varphi$  tales que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu}{\kappa} \mathbf{u} - \mu' \Delta \mathbf{u} + \nabla p + [\beta_\theta \theta - \beta_\varphi \varphi] \mathbf{g} &= \mathbf{f}, \quad \mathbf{y} \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ -\kappa_\theta \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= 0, \quad \mathbf{y} \quad -\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad \text{donde} \quad \mathbf{J} = (\mathbf{u} + U \mathbf{i}_d) \varphi - \kappa_\varphi \nabla \varphi. \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega \quad (1.5)$$

Además, asumiendo una condición antideslizante en la frontera para la velocidad, la condición de flujo cero para los microorganismos y condiciones de frontera mixtas, para la temperatura, tenemos que

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \quad \mathbf{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \theta_D \quad \text{sobre } \Gamma_D, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad (1.6)$$

donde  $\theta_D$  se asume conocida sobre  $\Gamma_D$ .

Finalmente, note que la ecuación de conservación de masa (1.3) junto con la condición de frontera de flujo nulo (segunda ecuación de (1.6)) forza a asumir una masa total  $m > 0$  fija de microorganismos, esto es:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi = m. \quad (1.7)$$

Así, considerando (1.5), (1.6) y (1.7), obtenemos el modelo matemático completo en estado estacionario, que describe la bioconvección de microorganismos gravitácticos en medios porosos.

### 1.4.3 Preliminares sobre la teoría continua

Para establecer un marco funcional apropiado necesitamos las siguientes notaciones y definiciones

**Notación 1.** Se denotará por  $W^{s,p}(\Omega)$  ( $s \geq 0$ ) a los espacios de Sobolev, que representan el espacio de todas las funciones  $L^p(\Omega)$  ( $p \geq 1$ ) cuyas derivadas, en el sentido de las distribuciones, hasta el orden  $s$ , están en  $L^p(\Omega)$ . A sus respectivas normas y semi-normas las denotaremos por  $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$  y  $|\cdot|_{s,p,\Omega}$ .

Cuando  $p = 2$  se denotará por  $H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega)$ ,  $\|\cdot\|_{s,\Omega} := \|\cdot\|_{s,2,\Omega}$  y  $|\cdot|_{s,\Omega} := |\cdot|_{s,p,\Omega}$ . Un mayor despliegue teórico acerca de estos espacios se puede encontrar en (Adams and Fournier, 2003).

**Notación 2.** Considere el caso  $s = 1/2$  en el dominio  $\Gamma_D$  correspondiente al espacio de trazas, denotado por  $H^{1/2}(\Gamma_D)$  en  $\Gamma_D$ . Definimos la norma en este espacio como:

$$\|\phi\|_{1/2,\Gamma_D} := \inf \{ \|\psi\|_{1,\Omega} : \psi \in H^1(\Omega), \psi|_{\Gamma_D} = \phi \}.$$

**Notación 3.** Se denotará con  $H_{\Gamma_*}^1(\Omega)$  (o  $H_0^1(\Omega)$ , respectivamente cuando  $\Gamma_* = \Gamma$ ) al espacio de funciones con traza cero en el subdominio  $\Gamma_* \subseteq \Gamma$ , con  $|\Gamma_*| > 0$ . Asimismo, se escribirá  $L_0^2(\Omega)$  para referirnos al espacio de funciones en  $L^2$  con valor medio nulo en  $\Omega$ . Adicionalmente, se emplea el subespacio cerrado de  $H^1(\Omega)$  dado

$$\tilde{H}^1(\Omega) := H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) = \left\{ \psi \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} \psi = 0 \right\}. \quad (1.8)$$

Finalmente, para efectos de la formulación continua del problema, es necesario definir los siguientes espacios de Hilbert, dotados con la norma natural:

$$\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) := \{ \mathbf{w} \in [L^2(\Omega)]^d : \text{div } \mathbf{w} \in L^2(\Omega) \},$$

$$\mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) := \{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) : \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma \},$$

$$\mathbf{H}_0(\text{div}^0, \Omega) := \{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) : \text{div } \mathbf{w} = 0 \text{ in } \Omega \}.$$

#### 1.4.4 Conceptos previos sobre los métodos numéricos

Las ecuaciones como las dadas en (1.5), (1.6) y (1.7) son ejemplos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP's). De forma general, no existe una solución cerrada para sistemas de ecuaciones diferenciales de este tipo, pues los métodos desarrollados actualmente son muy limitados. Generalmente el análisis de una EDP dada consiste en investigar la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones. Sin embargo, en general no se tienen herramientas prácticas para la determinación explícita de sus soluciones (Quarteroni, 2017).

Es así que, los métodos numéricos toman una gran importancia puesto que permiten construir una solución aproximada  $u_N$  de la solución exacta  $u$ , evaluando el error  $u_N - u$ ,

en normas apropiadas. Aquí,  $N \geq 1$  denota la dimensión finita de las aproximaciones generadas.

En las siguientes definiciones, se denotará por  $u(g)$  y  $u(g_N)$  las soluciones  $u$  y  $u_N$ , asociadas en la EDP, las cuáles dependen de  $g$  y  $g_N$ , respectivamente. De esta forma, se puede establecer la convergencia y estabilidad de un método numérico.

**Definición 1** (Convergencia). *Un método numérico es convergente siempre que se cumpla que*

$$\|u - u_N\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad N \rightarrow \infty,$$

*para una norma dada. Más precisamente, tenemos convergencia si, y sólo si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 = N_0(\varepsilon) > 0, \exists \delta = \delta(N_0, \varepsilon) : \forall N > N_0, \forall g_N \quad \text{tal que si} \quad \|g - g_N\| < \delta,$$

$$\|u(g) - u_N(g_N)\| \leq \varepsilon.$$

Para el análisis de la consistencia, particularmente en el método de Galerkin, se realiza un análisis del error a priori.

**Definición 2** (Definición de estabilidad). *Un método numérico es estable si a pequeñas perturbaciones de los datos corresponden pequeñas perturbaciones de la solución. Más precisamente,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \delta g_N : \|\delta g_N\| < \delta \Rightarrow \|\delta u_N\| \leq \varepsilon, \forall N \geq 1.$$

#### 1.4.5 Método de Galerkin

De esta forma, la idea para resolver mediante el método de Galerkin discontinuo el problema (1.5), es primeramente considerar un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  y enunciar una formulación débil de este problema, el cual consiste en

$$\text{Encontrar} \quad u \in V : \quad \mathbf{a}(u, v) = \mathbf{F}(v) \quad \forall v \in W. \quad (1.9)$$

Aquí,  $V$  y  $W$  son espacios de Hilbert apropiados, que son subespacios del espacio de Sobolev  $H^m(\Omega)$ , una definición más extensa y detallada de estos espacios se la puede encontrar en (Quarteroni, 2017). La existencia y unicidad de soluciones del problema anterior las tenemos por el conocido teorema de Lax-Milgram (Di Pietro and Ern, 2012).

## Planteamiento del método de Galerkin

Se considera una familia de espacios  $V_h$  que dependen de un parámetro positivo  $h$ , tal que

$$V_h \subset V, \quad \dim V_h = N_h < \infty, \quad \forall h > 0.$$

De donde se tiene que, el problema discreto asociado al problema continuo (1.9), toma siguiente forma

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h : \quad \mathbf{a}(u_h, v_h) = \mathbf{F}_h(v_h), \quad \forall v_h \in W_h. \quad (1.10)$$

Uno de los conceptos teóricos más importantes sobre los métodos numéricos es el de consistencia, particularmente para el método de Galerkin se precisa la siguiente definición

**Definición 3.** *Decimos que el problema discreto (1.10) es consistente si para cualquier solución exacta  $u \in V_*$*

$$a(u, w_h) = F_h(v_h) \quad \forall v_h \in W_h.$$

donde  $V_* \subset V$  es tal que, permite la extensión de  $a$ , a  $V_* \times V_h$ .

De aquí, tenemos el siguiente teorema sobre la convergencia de un método numérico, conocido como el teorema de Lax-Richtmyer

**Teorema 1.** *Si un método es consistente y estable, entonces es convergente.*

Así, el análisis de un método numérico consiste en demostrar su consistencia, estabilidad y convergencia.

Para el método de Galerkin, la consistencia se garantiza a partir de la existencia y unicidad de soluciones del problema anterior, lo cuál se sigue haciendo uso del teorema de Lax-Milgram. Así mismo, este método es convergente y estable; para más detalles de esto se puede consultar (Di Pietro and Ern, 2012).

Adicionalmente, cuando las funciones en el espacio  $V_h$  son discontinuas entre los elementos de la malla, generalmente se tiene que  $V_h \not\subset V$  y  $W_h \not\subset W$ . En esta caso, la terminología del método de Galerkin, indica que esta es una aproximación no conforme.

Cuando la aproximación es no conforme, el problema (1.10) toma la forma

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h : \quad \mathbf{a}_h(u_h, v_h) = \mathbf{F}_h(v_h), \quad \forall v_h \in W_h. \quad (1.11)$$

siendo  $a_h$  la combinación lineal de  $a$ , con unos términos de penalización adecuados que garantizan la consistencia del problema discreto.

Para la construcción de un método numérico de elementos finitos, se empieza tomando una malla regular  $\mathcal{T}_h$  que es partición del dominio  $\Omega$ , como una colección disjunta de elementos  $\mathcal{T}_h$  constituida por elementos simpliciales denotados por  $K$ , donde  $K$  es un poliedro  $d$ -dimensional, con vector normal hacia afuera unitario  $\mathbf{n}_K$  y diámetro de elemento  $h_K$ . Usualmente, el *tamaño de malla* es definido como  $h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ . Por simplicidad se asumirá que si  $\partial K \cap \partial\Omega \neq \emptyset$  entonces se cumple que  $|\partial K \cap \partial\Gamma_D| = 0$  o  $|\partial K \cap \partial\Gamma_N| = 0$ . Asimismo, que la intersección de dos elementos distintos es vacía, un borde o una cara. El conjunto de lados/caras de la malla  $\mathcal{T}_h$  se denotará por  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^i \cup \mathcal{E}_h^b$ , donde  $\mathcal{E}_h^i$  es el conjunto de los bordes/caras interiores y  $\mathcal{E}_h^b$  es el conjunto de lados/caras frontera, además,  $\mathcal{E}_{h,\Gamma_D}^b = \mathcal{E}_h^b \cap \Gamma_D$ . Para cualquier lado/cara  $e \in \mathcal{E}_h$ , denotaremos por  $h_e$  al respectivo  $(d-1)$ -diámetro.

Adicionalmente, se definen los operadores de salto y promedio que serán usados en los capítulos siguientes. Primeramente, sea  $e \in \mathcal{E}_h^i$  como un borde/cara de dos elementos vecinos  $K^+, K^- \in \mathcal{T}_h$ , satisfaciendo que  $e = \partial K^+ \cap \partial K^-$ , y sea  $\mathbf{n}_e^\pm$  el vector normal unitario hacia afuera a  $e$  en  $K^\pm$ . Si  $\psi$  y  $\mathbf{v}$  son funciones escalares y vectoriales lo suficientemente regulares respectivamente, denotaremos por  $\psi^\pm$  y  $\mathbf{v}^\pm$  como sus respectivas trazas desde el interior de  $K^\pm$ . Así, se define el salto  $[[\cdot]]$  actuando sobre  $\psi$  y  $\mathbf{v}$  como

$$[[\psi]] = \begin{cases} \psi^+ \mathbf{n}_e^+ + \psi^- \mathbf{n}_e^-, & e \in \mathcal{E}_h^i, \\ \psi \mathbf{n}, & e \in \mathcal{E}_h^b, \end{cases} \quad \text{y} \quad [[\mathbf{v}]] = \begin{cases} \mathbf{v}^+ \otimes \mathbf{n}_e^+ + \mathbf{v}^- \otimes \mathbf{n}_e^-, & e \in \mathcal{E}_h^i, \\ \psi \otimes \mathbf{n}, & e \in \mathcal{E}_h^b, \end{cases}$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario hacia afuera de  $\partial\Omega$  y  $\otimes$  denota el producto tensorial.

De forma similar, para cualquier función (escalar, vectorial o tensorial)  $\eta$ , se define el promedio sobre  $e \in \mathcal{E}_h^i$  como  $\{\{\eta\}\} = \frac{1}{2}(\eta^+ + \eta^-)$  y  $\{\{\eta\}\} = \eta$ , si  $e \in \mathcal{E}_h^b$ .

Los espacios  $V_h$  sobre los que trabaja el método de Galerkin, son espacios de polinomios, subespacios de espacios de Sobolev a trozos, los mismos que se definen a continuación.

**Definición 4.** Sea  $\mathcal{T}_h$  una malla de un dominio  $\Omega$ . Para cada elemento de la malla  $K \in \mathcal{T}_h$ ,

los espacios de Sobolev  $H^r(K)$  y  $W^{r,p}(K)$  se definen reemplazando  $\Omega$  por  $K$ . Así, se denota los espacios de Sobolev a trozos como

$$H^r(\mathcal{T}_h) := \left\{ \psi \in L^2(\Omega) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \psi|_K \in H^r(K) \right\}, \quad (1.12)$$

$$W^{r,p}(\mathcal{T}_h) := \left\{ \psi \in L^p(\Omega) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \psi|_K \in W^{r,p}(K) \right\}, \quad (1.13)$$

donde  $r \geq 0$  y  $1 \leq p \leq \infty$ .

De aquí, se denota a las normas dependientes de parámetros de la malla, como

$$\|\psi_h\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla_h \psi\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{a_0}{h_e} \|\llbracket \psi \rrbracket_{0,e}^2, \quad \forall \psi \in H^1(\mathcal{T}_h), \quad (1.14)$$

$$\|\psi_h\|_{2,\mathcal{T}_h}^2 = \|\psi_h\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |\psi|_{2,K}^2, \quad \forall \psi \in H^2(\mathcal{T}_h), \quad (1.15)$$

donde  $\nabla_h(\cdot)$  es el operador gradiente a trozos y  $a_0$  es un parámetro fijo. Una desigualdad inversa (ver Oyarzúa et al. (2014)) permite garantizar la existencia de una constante positiva, independiente del tamaño de la malla tal que

$$\|\psi_h\|_{2,\mathcal{T}_h} \leq C \|\psi_h\|_{1,\mathcal{T}_h}, \quad \forall \psi_h \in \Psi_h, \quad (1.16)$$

donde  $\Psi_h$  es un espacio polinomial a trozos.

Además, de esto también tenemos la versión de los teoremas de inclusion de Sobolev para el operador gradiente a trozos (ver Cockburn et al. (2007)); existe una constante positiva  $\tilde{C}_{Sob} > 0$ , tal que,

$$\|\psi\|_{0,q,\Omega} \leq \tilde{C}_{Sob} \|\psi\|_{1,\mathcal{T}_h}, \quad \forall \psi \in H^1(\mathcal{T}_h), \quad \text{donde} \quad \begin{cases} q \geq 1 & \text{si } d = 2, \\ q \in [1, 6] & \text{si } d = 3. \end{cases} \quad (1.17)$$

Asimismo, tenemos las desigualdades de traza

$$\|v_h\|_{0,\partial K} \leq C \left( h_K^{-1/2} \|v_h\|_{0,K} + h_K^{1/2} |v_h|_{1,K} \right), \quad v_h \in H^1(K), \quad (1.18)$$

$$\|p\|_{0,\partial K} \leq C h_K^{-1/2} \|p\|_{0,K} \quad p \in P_k(K). \quad (1.19)$$

Aquí,  $P_k(K)$  es un espacio de polinomios de grado  $k$ . En el método de Galerkin discontinuo (DG), los subespacios de polinomios son funciones discontinuas entre elementos. En la siguiente sección se analizará la implementación de un método DG para la aproximación numérica del problema (1.5).

# CAPÍTULO 2

## 2. METODOLOGÍA

### 2.1 Elección del método numérico

En la literatura actual, existen numerosos métodos numéricos para la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, entre estos destacan métodos de diferencia finitas, métodos de volumen finito, métodos de elementos finitos continuo y discontinuo, métodos espectrales, métodos de elementos discontinuos, métodos de descomposición de dominio, entre otros. La aplicación de un método numérico u otro depende de las condiciones del problema, la geometría de los dominios de integración, el costo computacional asociado y los resultados que se deseen obtener. Por lo cual, siempre es necesario desarrollar nuevos métodos, mejorar o combinar métodos ya existentes de acuerdo a su aplicabilidad a algún problema de interés.

Como se mencionó previamente, una de las alternativas para resolver numéricamente el problema (1.5), es mediante el método de volumen finito, el cuál, en la práctica es fácil de implementar a nivel computacional. Sin embargo, este método presenta muchas dificultades al momento de generar esquemas de alto orden o en el tratamiento de condiciones de frontera como las dadas en (1.6). Los métodos de elementos finitos, por su parte, permiten trabajar en geometrías complicadas y diversas condiciones de frontera. Además, el marco en el cuál se plantea el problema permite la utilización de herramientas de análisis para establecer no solo el buen planteamiento de éstos, sino también garantizar la estabilidad, consistencia y convergencia de las respectivas discretizaciones.

Los métodos espectrales por su parte, pueden arrojar tasas de convergencia que dependen únicamente de la regularidad de la solución del problema y no del grado del polinomio asociado a los espacios discretos utilizados para la aproximación. Sin embargo, estos métodos solo pueden manejar geometrías simples, como por ejemplo

rectángulos, lo cuál para el fenómeno de interés resulta ser restrictivo. Además la implementación para este método tiene un costo computacional elevado, puesto que la matriz de rigidez asociada es mucho menos dispersa que en el caso del método de elementos finitos, además son métodos difíciles de paralelizar en computadoras con memorias distribuidas (Canuto et al., 2007).

Es conocido que para sistemas de EDP's en los que se tienen términos convectivos o advectivos o condiciones de frontera discontinuas, emplear métodos de elementos finitos continuos entre elementos puede incurrir en inestabilidades numéricas así como en comportamientos oscilatorios con respecto a las soluciones exactas. Una manera de mitigar esto es emplear un método de elementos finitos de polinomios discontinuos entre elementos, puesto que la naturaleza de estos espacios discretos impide parcialmente que se presente un comportamiento oscilatorio con respecto a las soluciones. Por lo tanto, en este proyecto se usará la teoría de Galerkin para la construcción de un método de elementos finitos discontinuo para las ecuaciones del fluido junto con aproximaciones del tipo conforme para las temperatura y la concentración de microorganismos.

En este sentido, se plantea una formulación variacional continua del problema (1.5) con las condiciones de frontera (1.6). Posteriormente se probará la existencia y unicidad de soluciones débiles. Se construye luego el método numérico para el cuál se demostrará las propiedades de convergencia, estabilidad y consistencia y finalmente se implementará computacionalmente un ejemplo académico que confirme las propiedades del método numérico propuesto.

## **2.2 Metodología para la formulación variacional continua**

Primeramente, se planteará la formulación variacional del problema, para lo cuál, se toman funciones test en espacios de Sobolev adecuados, que sean consistentes con las condiciones de frontera (1.6) y con las propiedades de masa total previamente establecidas. Estas funciones test, se multiplican con las correspondientes ecuaciones de velocidad, presión, temperatura y concentración. Una vez hecho esto, se aplica el teorema de Green generalizado con el objetivo de reducir términos de segundo orden a

términos de primer orden en las ecuaciones del problema (1.5).

Finalmente, para completar la formulación variacional de las ecuaciones obtenidas anteriormente se identifican formas lineales, bilineales y trilineales adecuadas que deben poseer determinadas propiedades de continuidad y estabilidad. En particular, la forma trilineal que surge a partir de las ecuaciones de concentración y temperatura, deben satisfacer una propiedad de antisimetría. Asimismo, para la forma bilineal asociada con el operador de divergencia de la velocidad se prueba una propiedad estándar conocida como la condición *inf-sup*, lo cuál resulta clave en el paso posterior a la formulación variacional.

Posterior a la formulación variacional, se plantea la estrategia para probar la existencia y unicidad de las soluciones. La misma que consistió en reducir el problema variacional, examinar el buen planteamiento al problema desacoplado y linealizado para finalmente plantear un esquema de punto fijo.

Con más precisión, se considera el núcleo del operador bilineal asociado a las condiciones de incompresibilidad del fluido. De esta forma, se plantea el problema débil considerando a la velocidad  $u$  en este espacio, lo cuál es posible gracias a la condición *inf-sup*, que permite probar la equivalencia entre el problema reducido y la problema variacional.

A partir del problema reducido, se establecen estimaciones a priori para las soluciones respectivas, esto permite posteriormente definir un conjunto compacto que contenga a las soluciones; el mismo que solo dependerá de la data del problema.

Para probar el buen planteamiento, se define un esquema de punto fijo, que consiste en desacoplar y linealizar las ecuaciones en términos de un operador que resulta estar bien definido por el teorema de Lax-Milgram y para lo cuál un punto fijo del mismo corresponde su vez, ser solución del problema reducido original.

Para garantizar la existencia del punto fijo deseado, es necesario aplicar el teorema de Schaefer (Burton and Kirk, 1998). Para esto, se demuestra que el operador considerado es localmente Lipschitz continuo y compacto.

### 2.3 Estrategia de construcción del método numérico

Una vez garantizado la existencia de soluciones débiles del problema, se propone un método numérico de Galerkin discontinuo para la velocidad y presión y espacios de elementos finitos continuos para la concentración y temperatura. Particularmente, para la velocidad se considerara un espacio discontinuo que preserve a nivel discreto la condición  $\text{div } u = 0$ , por lo cuál el espacio de dimensión finita escogido fue el espacio *H-div* conforme de *Brezzi-Douglas-Marini (BDM)*, el mismo que se definirá más adelante.

Luego de elegir los espacios de elementos finitos, se replantearon las formas variacionales acorde a estos espacios y se comprobó que estas preservaran las propiedades que se encontraron en el análisis continuo.

Una vez construido el método, se siguió la misma estrategia que en el caso continuo para comprobar la existencia y unicidad de las soluciones para el problema discreto, es decir, para el método numérico propuesto.

Asimismo, para analizar la convergencia de las soluciones aproximadas a las exactas se consideran las proyecciones ortogonales definidas en los respectivos espacios discretos, posteriormente se emplea la propiedad de ortogonalidad de Galerkin, para establecer los ordenes de convergencia del esquema de discretización.

Finalmente, se implementa computacionalmente el método numérico haciendo uso del software FreeFem++, con el cual se confirmarán los resultados precedidos por la teoría y se evaluará el desempeño del esquema propuesto.

# CAPÍTULO 3

## 3. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Como se detalló en el capítulo anterior, en primer lugar se debe obtener una formulación variacional del sistema (3.1).

### 3.1 Formulación variacional

A partir del problema (1.5)-(1.6), tenemos que el problema a estudiar se plantea de la siguiente forma: Encontrar  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\varphi$  y  $\theta$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\kappa} \mathbf{u} - \mu' \Delta \mathbf{u} + \nabla p + [\beta_\theta \theta - \beta_\varphi \varphi] \mathbf{g} &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, & \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ -\kappa_\theta \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= 0 \quad \text{en } \Omega, & -\kappa_\varphi \Delta \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi + U \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma, & \kappa_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - n_d U \varphi &= n_d U m \quad \text{sobre } \Gamma \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} \varphi = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

Además, para fines del análisis se considera la siguiente restricción sobre la data

$$U < \frac{\kappa_\varphi}{C_{\text{FP}}^2}, \quad (3.2)$$

donde  $C_{\text{FP}}$  es una constante que aparece en la desigualdad de Friedrichs-Poincaré.

En primer lugar, se empieza multiplicando la primera ecuación de (3.1) por una función test  $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d$  e integramos sobre  $\Omega$ . De aquí, usando integración por partes y las condiciones de frontera Dirichlet para  $\mathbf{u}$ , se obtiene

$$\frac{\mu}{\kappa} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mu' \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_{\Omega} [\beta_\theta \theta - \beta_\varphi \varphi] \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d.$$

Ahora para la segunda ecuación se toma a  $q \in L_0^2(\Omega)$ , e integrando se obtiene

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (3.3)$$

Asimismo, para la tercera ecuación se considera el espacio  $\mathbf{H}_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \left\{ \xi \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \gamma_0(\xi) = 0 \text{ en } \Gamma_D \right\}$  donde  $\gamma_0 : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_D)$ , es la restricción a  $\Gamma_D$  del operador

traza usual. Ahora tomando como función test  $\xi \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ , se obtiene

$$\kappa_\theta \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \xi + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \theta) \xi = 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1(\Omega), \quad (3.4)$$

Finalmente para la concentración, se multiplica por una función test  $\psi \in \tilde{H}^1(\Omega)$  siendo el espacio  $\tilde{H}^1(\Omega)$  definido previamente en (1.8), de donde se obtiene, luego de aplicar la integración por partes y las respectivas condiciones frontera de Robin (segunda ecuación de la tercera fila de (3.1)):

$$\kappa_\varphi \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi - U \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_d} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi) \psi = Um \int_{\Gamma} n_d \psi \quad \forall \psi \in \tilde{H}^1(\Omega).$$

De esta forma, definimos las siguientes formas funcionales

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^S : [H_0^1(\Omega)]^d \times [H_0^1(\Omega)]^d &\longrightarrow \mathbb{R}, & \mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{\mu}{\kappa} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mu' \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, \\ \mathcal{A}^T : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}, & \mathcal{A}^T(\theta, \xi) &= \kappa_\theta \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \xi, \\ \mathcal{A}^C : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}, & \mathcal{A}^C(\varphi, \psi) &= \kappa_\varphi \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi - U \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_d}, \\ \mathcal{C} : [H_0^1(\Omega)]^d \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}, & \mathcal{C}(\mathbf{w}; \phi, \psi) &= \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \phi) \psi, \\ \mathcal{B}^S : [H_0^1(\Omega)]^d \times L_0^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}, & \mathcal{B}^S(\mathbf{v}, q) &= - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

para  $(\eta, \phi) \in H^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega)$ , dadas se definen los funcionales

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^S((\eta, \phi); \cdot) : [H^1(\Omega)]^d &\longrightarrow \mathbb{R}, & \mathcal{F}^S((\eta, \phi); \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{f} - [\beta_\theta \eta - \beta_\varphi \phi] \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v}, \\ \mathcal{F}^C : H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}, & \mathcal{F}^C(\psi) &= Um \int_{\Gamma} n_3 \psi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Así, como resultado de lo anterior, se propone la siguiente formulación débil del modelo de Darcy-Brinkman bioconvectivo (3.1):

Encontrar  $(\mathbf{u}, p, \theta, \varphi) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega)$  con  $\theta|_{\Gamma_D} = \theta_D$ , tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{B}^S(\mathbf{v}, p) &= \mathcal{F}^S((\theta, \varphi); \mathbf{v}), \\ \mathcal{B}^S(\mathbf{u}, q) &= 0, \\ \mathcal{A}^T(\theta, \xi) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \theta, \xi) &= 0 \\ \mathcal{A}^C(\varphi, \psi) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \varphi, \psi) &= \mathcal{F}^C(\psi).\end{aligned}\tag{3.7}$$

para todo  $(\mathbf{v}, q, \xi, \psi) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L_0^2(\Omega) \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega)$ .

A continuación, se establecem algunas propiedades de las formas funcionales dadas en (3.5)-(3.6).

**Lema 1.** (a) Las formas bilineales  $\mathcal{A}^S : [H_0^1(\Omega)]^d \times [H_0^1(\Omega)]^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}^T : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\mathcal{A}^C : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  son acotadas. Mas aún,  $\mathcal{A}^S$ ,  $\mathcal{A}^T$  y  $\mathcal{A}^C$  son coercivas en los espacios  $[H_0^1(\Omega)]^d$ ,  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  y  $\tilde{H}^1(\Omega)$ , respectivamente.

(b) La forma  $\mathcal{B}^S : [H_0^1(\Omega)]^d \times L_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada y satisface la condición inf-sup

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{B}^S(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}} \geq \beta \|q\|_{0,\Omega} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \tag{3.8}$$

(c) La forma trilineal  $\mathcal{C} : [H_0^1(\Omega)]^d \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada. Es más,  $\mathcal{C}$  satisface la propiedad de antisimetría

$$\mathcal{C}(\mathbf{w}; \phi, \psi) = -\mathcal{C}(\mathbf{w}; \psi, \phi), \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0(\text{div}^0, \Omega) \quad \forall \theta, \psi \in H^1(\Omega). \tag{3.9}$$

(d) El funcional  $\mathcal{F}^S((\eta, \phi); \cdot) : [H^1(\Omega)]^d \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $(\eta, \phi)$  dados en  $H^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega)$ ) y el funcional  $\mathcal{F}^C : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  son acotados.

**Demostración.** a) A partir de la definición de  $\mathcal{A}^S$  y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se sigue que

$$|\mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathcal{A}^S\| \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \tag{3.10}$$

donde  $\|\mathcal{A}^S\|$  es la constante definida por

$$\|\mathcal{A}^S\| = \max \left\{ \frac{\mu}{\kappa}, \mu' \right\} \tag{3.11}$$

Para la coercividad de  $\mathcal{A}^S$ , notar que por definición de  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^S(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \frac{\mu}{\kappa} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mu' \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \\ &\geq \min \left\{ \frac{\mu}{\kappa}, \mu' \right\} \left[ \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \right] = \alpha_{\mathcal{A}^S} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2\end{aligned}\quad (3.12)$$

donde  $\|\mathcal{A}^S\|$  es la constante definida por

$$\alpha_{\mathcal{A}^S} = \min \left\{ \frac{\mu}{\kappa}, \mu' \right\}. \quad (3.13)$$

Asimismo para  $\mathcal{A}^T$ , por desigualdad de Cauchy-Schwarz se cumple que

$$|\mathcal{A}^T(\theta, \xi)| = \left| \kappa_{\theta} \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \xi \right| \leq \|\mathcal{A}^T\| \|\theta\|_{0,\Omega} \|\xi\|_{0,\Omega} \leq \|\mathcal{A}^T\| \|\theta\|_{1,\Omega} \|\xi\|_{1,\Omega}, \quad (3.14)$$

donde  $\|\mathcal{A}^T\|$  es la constante definida por

$$\|\mathcal{A}^T\| = \kappa_{\theta}. \quad (3.15)$$

Ahora para la coercividad de  $\mathcal{A}^T$ , usando la desigualdad de Friedrichs-Poincaré, se cumple que

$$\mathcal{A}^T(\xi, \xi) = \kappa_{\theta} \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \xi = \kappa_{\theta} |\xi|_{1,\Omega}^2 \geq \alpha_{\mathcal{A}^T} \|\xi\|_{1,\Omega}^2, \quad (3.16)$$

donde  $\|\mathcal{A}^T\|$  es la constante definida por

$$\alpha_{\mathcal{A}^T} = \kappa_{\theta} C_{FP}^{-2} \quad (3.17)$$

Finalmente para  $\mathcal{A}^C$ , se obtiene por desigualdad triangular y desigualdad de Cauchy Schwarz

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}^C(\varphi, \psi)| &= \left| \kappa_{\varphi} \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi - U \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_d} \right| \leq \kappa_{\varphi} \int_{\Omega} |\nabla \varphi \cdot \nabla \psi| + U \int_{\Omega} \left| \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_d} \right| \\ &\leq \kappa_{\varphi} |\varphi|_{1,\Omega} |\psi|_{1,\Omega} + |U| \|\varphi\|_{0,\Omega} |\psi|_{1,\Omega} \leq \|\mathcal{A}^C\| \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega},\end{aligned}\quad (3.18)$$

donde:

$$\|\mathcal{A}^C\| = \max\{\kappa_{\varphi}, U\}. \quad (3.19)$$

Para la coercividad de esta forma bilineal se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^C(\psi, \psi) &= \kappa_\varphi \int_\Omega (|\nabla \psi|)^2 - U \int_\Omega \psi \frac{\partial \psi}{\partial x_d} = \kappa_\varphi |\psi|_{1,\Omega}^2 - U \int_\Omega \psi \frac{\partial \psi}{\partial x_d} \\
&\geq \kappa_\varphi |\psi|_{1,\Omega}^2 - U \|\psi\|_{0,\Omega} |\psi|_{1,\Omega} \geq \kappa_\varphi |\psi|_{1,\Omega}^2 - U \frac{\|\psi\|_{1,\Omega}^2}{2} - U \frac{|\psi|_{1,\Omega}^2}{2} \\
&\geq \kappa_\varphi |\psi|_{1,\Omega}^2 - U \frac{\|\psi\|_{1,\Omega}^2}{2} - U \frac{|\psi|_{1,\Omega}^2}{2} \\
&= \frac{\kappa_\varphi}{C_{FP}^2} \|\psi\|_{1,\Omega}^2 - U \frac{\|\psi\|_{1,\Omega}^2}{2} = \alpha_{\mathcal{A}^C} \|\psi\|_{1,\Omega}^2.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Note que por la hipótesis (3.2) se cumple que

$$\alpha_{\mathcal{A}^C} = \frac{\kappa_\varphi}{C_{FP}^2} - \frac{U}{2} > 0 \tag{3.21}$$

b) Por definición de  $\mathcal{B}^S$  y a partir de la desigualdad de Cauchy, se sigue que

$$|\mathcal{B}^S(\mathbf{v}, q)| = \left| \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{v} \right| \leq C_3(\Omega) \|q\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}.$$

Para verificar que se satisface la condición inf-sup, note que si consideramos al operador inducido asociado  $\mathbf{B} : [H_0^1(\Omega)]^d \rightarrow L_0^2(\Omega)$  dado por  $\mathbf{B}(\mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{v}$ , se tiene que definiendo a  $V = \ker(\mathbf{B}) = \{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$ , entonces a partir del *Corolario 2.4* de (Girault and Raviart, 2012), se sigue que  $\mathbf{B}$  es un isomorfismo entre  $V^\perp$  y  $L_0^2(\Omega)$  y que además dado cualquier  $q \in L_0^2(\Omega)$  existe un único  $\mathbf{v} \in V^\perp$ , para el cual se cumple que

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = q \quad \text{y} \quad \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq C \|q\|_{0,\Omega}.$$

De esta forma, a partir del *Lema 4.1* de (Girault and Raviart, 2012) se obtiene que el operador  $\mathcal{B}^S$  satisface la condición inf-sup, con constante  $\beta = \frac{1}{C}$ .

c) Para la forma trilineal, por desigualdad de Holder e inclusión de Sobolev

$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$  valido para  $d \in \{2, 3\}$ , se tiene que

$$|\mathcal{C}(\mathbf{w}; \phi, \psi)| \leq \|\mathbf{w}\|_{0,4,\Omega} \|\nabla \phi\|_{0,\Omega} \|\psi\|_{0,4,\Omega} \leq \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\phi\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}. \tag{3.22}$$

Además, note que al usar integración por partes y el hecho de que  $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$  y que  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\Gamma$ , por definición de  $\mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega)$  se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mathbf{w}; \psi, \phi) &= \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \psi) \phi = \int_{\Omega} (\mathbf{w} \phi) \cdot \nabla \psi = \int_{\Gamma} (\mathbf{w} \phi \cdot \mathbf{n}) \psi - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{w} \phi) \psi \\ &= - \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\mathbf{w}) \phi + \mathbf{w} \cdot \nabla \phi] \psi = - \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla \phi) \psi = -\mathcal{C}(\mathbf{w}; \phi, \psi). \end{aligned}$$

d) Note que por definición de  $\mathcal{F}^S$ , desigualdad triangular y Cauchy-Schwarz se cumple que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}^S((\eta, \phi); \mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} (\mathbf{f} - [\beta_{\theta} \eta - \beta_{\varphi} \phi] \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v} \right| \\ &\leq \int_{\Omega} (|\mathbf{f}| + |\mathbf{g}| [\beta_{\theta} |\eta| + \beta_{\varphi} |\phi|]) |\mathbf{v}| \\ &\leq \|(|\mathbf{f}| + |\mathbf{g}| [\beta_{\theta} |\eta| + \beta_{\varphi} |\phi|])\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|\mathcal{F}^S\| \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde

$$\|\mathcal{F}^S\| = \|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega} + \|\mathbf{g}\|_{\infty,\Omega} (\beta_{\theta} \|\eta\|_{0,\Omega} + \beta_{\varphi} \|\phi\|_{0,\Omega}). \tag{3.24}$$

Y finalmente para  $\mathcal{F}^C$ , se tiene por el teorema de las trazas y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en  $L^2(\Gamma)$

$$|\mathcal{F}^C(\psi)| = Um \left| \int_{\Gamma} n_d \psi \right| \leq Um \|n_d\|_{0,\Gamma} \|\psi\|_{1,\Gamma} \leq \|\mathcal{F}^C\| \|\psi\|_{1,\Omega}, \tag{3.25}$$

siendo

$$\|\mathcal{F}^C\| = Um |\Gamma|^{1/2}, \tag{3.26}$$

y donde se usó que

$$\|n_d\|_{1,\Gamma}^2 = \int_{\Gamma} n_d \leq \int_{\Gamma} \left( \sum_{i=1}^d n_i \right)^{\frac{1}{2}} = \int_{\Gamma} \|\mathbf{n}\| = |\Gamma|.$$

□

De aquí, en las siguiente secciones se procederá con el análisis continuo y posterior construcción del método numérico.

## 3.2 Análisis continuo

Inicialmente tenemos el problema;

Encontrar,  $(\mathbf{u}, p, \theta, \varphi) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega)$  con  $\theta|_{\Gamma_D} = \theta_D$ , tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{B}^S(\mathbf{v}, p) &= \mathcal{F}^S((\theta, \varphi); \mathbf{v}), \\ \mathcal{B}^S(\mathbf{u}, q) &= 0, \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\mathcal{A}^T(\theta, \xi) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \theta, \xi) = 0$$

$$\mathcal{A}^C(\varphi, \psi) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \varphi, \psi) = \mathcal{F}^C(\psi),$$

para todo,  $(\mathbf{v}, q, \xi, \psi) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L_0^2(\Omega) \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega)$ .

Ahora se define el Kernel de la forma bilineal  $\mathcal{B}^S$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \left\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d : \mathcal{B}^S(\mathbf{v}, q) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega) \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \right\}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

y sea  $\theta_1 \in H^1(\Omega)$  cualquier extensión de  $\theta_D$ , esto es,  $\theta_1|_{\Gamma_D} = \theta_D$ . De esta forma, haciendo  $\theta_0 = \theta - \theta_1$ , obtenemos que el problema (3.27) es equivalente a la forma reducida:

Encontrar,  $(\mathbf{u}, \theta_0, \varphi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega)$ , tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathcal{F}^S((\theta, \varphi); \mathbf{v}), \\ \mathcal{A}^T(\theta_0, \xi) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \theta_0, \xi) &= -\mathcal{A}^T(\theta_1, \xi) - \mathcal{C}(\mathbf{u}; \theta_1, \xi) \\ \mathcal{A}^C(\varphi, \psi) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \varphi, \psi) &= \mathcal{F}^C(\psi), \end{aligned} \tag{3.29}$$

para todo,  $(\mathbf{v}, \xi, \psi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega)$ . Mas precisamente, se tiene el siguiente resultado, cuya demostración se omite

**Lema 2.** *Los problemas (3.27) y (3.29) son equivalentes.*

### 3.2.1 Buen planteamiento del problema

Es necesario probar la existencia y unicidad de soluciones al problema (3.29). Para ello primeramente probamos las siguientes estimaciones a priori

**Teorema 2.** Sea  $(\mathbf{u}, \theta_0, \varphi)$  una solución de (3.29). Entonces, se cumple que

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq r_1, \quad \|\theta_0\|_{1,\Omega} \leq r_2 \quad \text{y} \quad \|\varphi\|_{1,\Omega} \leq r_3 \quad (3.30)$$

donde  $r_1 = 2 (\min \{\frac{\mu}{\kappa}, \mu'\})^{-1} [\|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega} + \|\mathbf{g}\|_{\infty,\Omega} ((C_{FP}^2 + 1) \beta_\theta \delta^{-4} \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D} + \beta_\varphi r_3)]$   
con  $\delta = \left(2 (\min \{\frac{\mu}{\kappa}, \mu'\})^{-1} \|\mathbf{g}\|_{\infty,\Omega} \beta_\theta C_{FP}^2 \kappa_\theta^{-1} \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D}\right)^{1/4}$ ,  
 $r_2 = C_{FP}^2 (C \delta^{-4} \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D} (1 + \kappa_\theta^{-1} r_1))$  y  $r_3 = Um \left(\frac{\kappa_\varphi}{C_{FP}^2} - \frac{U}{2}\right)^{-1} |\Gamma|^{1/2}$ .

**Demostración.** Para la demostración de este teorema, basta aplicar las desigualdades vistas en el Lema 1 junto con el *Lema 3.2* de Colmenares and Neilan (2016), el cual garantiza la existencia del  $\delta$  que permite establecer los estimados a priori sin la dependencia de la data.  $\square$

Para probar la existencia de soluciones, se seguirá un esquema de punto fijo, con el fin de emplear el teorema de Schaefer (Burton and Kirk, 1998). Para esto, se replantea el problema (3.29) de la siguiente forma

Sea  $(\mathbf{w}, \eta, \phi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega)$  dados. Encontrar  $(\mathbf{u}, \theta_0, \varphi)$  tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathcal{F}^S((\eta, \phi); \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \\ \mathcal{A}^T(\theta_0, \xi) + \mathcal{C}(\mathbf{w}; \theta_0, \xi) &= -\mathcal{A}^T(\theta_1, \xi) - \mathcal{C}(\mathbf{w}; \theta_1, \xi) & \forall \xi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega), \\ \mathcal{A}^C(\varphi, \psi) + \mathcal{C}(\mathbf{w}; \varphi, \psi) &= \mathcal{F}^C(\psi) & \forall \psi \in \tilde{H}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Considere a  $\mathbf{H} = \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega)$ . Luego, sea  $(\mathbf{w}, \eta, \phi) \in \mathbf{H}$  dados, se definen los operadores

$\mathcal{A} : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ , dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{w}; (\mathbf{u}, \theta, \varphi), (\mathbf{v}, \xi, \psi)) &= \mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{A}^T(\theta, \xi) + \mathcal{C}(\mathbf{w}; \theta, \xi) \\ &+ \mathcal{A}^C(\varphi, \psi) + \mathcal{C}(\mathbf{w}; \varphi, \psi). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Y el funcional

$\mathcal{F} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ , dado por

$$\mathcal{F}((\mathbf{w}, \eta, \phi); (\mathbf{v}, \xi, \psi)) = \mathcal{F}^S((\eta, \phi); \mathbf{v}) - \mathcal{A}^T(\theta_1, \xi) - \mathcal{C}(\mathbf{w}; \theta_1, \xi) + \mathcal{F}^C(\psi). \quad (3.33)$$

Y de esta forma el problema (3.31) se reescribe como:

Dados  $(\mathbf{w}, \eta, \phi) \in \mathbf{H}$  encontrar,  $(\mathbf{u}, \theta_0, \varphi) \in \mathbf{H}$  tal que

$$\mathcal{A}(\mathbf{w}; (\mathbf{u}, \theta_0, \varphi), (\mathbf{v}, \xi, \psi)) = \mathcal{F}((\mathbf{w}, \eta, \phi); (\mathbf{v}, \xi, \psi)) \quad \forall (\mathbf{v}, \xi, \psi) \in \mathbf{H}. \quad (3.34)$$

Observe que a partir de las ecuaciones (3.18), (3.10), (3.14) y (3.22) la forma multilinear  $\mathcal{A}$  es acotada y coerciva. En efecto notar que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}(\mathbf{w}; (\mathbf{u}, \theta, \varphi), (\mathbf{v}, \xi, \psi))| &\leq \|\mathcal{A}\| (\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} + \|\theta\|_{1,\Omega} \|\xi\|_{1,\Omega} + \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}) \\
&\quad + \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\theta\|_{1,\Omega} \|\xi\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}) \\
&\leq \|\mathcal{A}\| (\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} + (\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + 1) \|\theta\|_{1,\Omega} \|\xi\|_{1,\Omega} \\
&\quad + (\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + 1) \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}) \tag{3.35} \\
&\leq \|\mathcal{A}\| (\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + 1) (\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} + \|\theta\|_{1,\Omega} \|\xi\|_{1,\Omega} \\
&\quad + \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}) \\
&\leq \|\mathcal{A}\| (\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + 1) \|(\mathbf{u}, \theta, \varphi)\| \|(\mathbf{v}, \xi, \psi)\|
\end{aligned}$$

Siendo  $\|\mathcal{A}\| = \max \{ \|\mathcal{A}^S\|, \|\mathcal{A}^T\|, \|\mathcal{A}^C\|, \|\mathcal{C}\| \}$ , la cual a partir de las ecuaciones (3.11), (3.15), (3.19) y (3.22) es una constante que depende de  $\kappa_\theta, \kappa_\varphi, \mu, \mu', U$ , y  $\kappa$ . Similarmente, para la coercividad se sigue de (3.20), (3.12) y (3.16) que

$$\mathcal{A}(\mathbf{w}; (\mathbf{v}, \xi, \psi), (\mathbf{v}, \xi, \psi)) \geq \alpha_{\mathcal{A}} (\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 + \|\xi\|_{1,\Omega}^2 + \|\psi\|_{1,\Omega}^2) = \alpha_{\mathcal{A}} \|(\mathbf{v}, \xi, \psi)\|^2, \tag{3.36}$$

donde  $\alpha_{\mathcal{A}} = \min \{ \alpha_{\mathcal{A}^S}, \alpha_{\mathcal{A}^T}, \alpha_{\mathcal{A}^C} \}$  que es una constante que depende de  $\kappa_\theta, \kappa_\varphi, \mu, \mu', U, C_{FP}$  y  $\kappa$  de acuerdo con (3.13), (3.17), (3.21).

Ahora, para el funcional  $\mathcal{F}$ , usando (3.25) y (3.23) se tiene que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}((\mathbf{w}, \eta, \phi); (\mathbf{v}, \xi, \psi))| &\leq \|\mathcal{F}^S\| \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} + \|\mathcal{A}^T\| \|\theta_1\|_{1,\Omega} \|\xi\|_{1,\Omega} \\
&\quad + \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\theta_1\|_{1,\Omega} \|\xi\|_{1,\Omega} + \|\mathcal{F}^C\| \|\psi\|_{1,\Omega} \\
&= \|\mathcal{F}^S\| \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} + (\|\mathcal{A}^T\| + \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}) \|\theta_1\|_{1,\Omega} \|\xi\|_{1,\Omega} \tag{3.37} \\
&\quad + \|\mathcal{F}^C\| \|\psi\|_{1,\Omega} \\
&\leq \|\mathcal{F}\|_{\mathbf{w}, \eta, \phi} \|(\mathbf{v}, \xi, \psi)\|,
\end{aligned}$$

donde  $\|\mathcal{F}\|_{\mathbf{w}, \eta, \phi} = (\|\mathcal{F}^S\| + (\|\mathcal{A}^T\| + \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}) \|\theta_1\|_{1,\Omega} + \|\mathcal{F}^C\|)$ .

De esta forma, se obtiene a partir del teorema de Lax-Milgram que existe una única solución para el problema (3.34).

Finalmente, considere un elemento  $(\mathbf{w}, \eta, \phi) \in \mathbf{H}$  dado y el operador

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} : \mathbf{H} &\longrightarrow \mathbf{H} \\
(\mathbf{w}, \eta, \phi) &\longmapsto \mathcal{L}(\mathbf{w}, \eta, \phi) = (\mathbf{u}, \theta_0, \varphi), \tag{3.38}
\end{aligned}$$

donde  $(\mathbf{u}, \theta_0, \varphi)$  es solución del problema linealizado y desacoplado (3.34).

Note que dado que existe solución para el problema (3.34), se sigue que el operador  $\mathcal{L}$  esta bien definido. A continuación, se establecen algunas propiedades de este operador.

**Lema 3.** (a) *Considere el conjunto*

$$B = \left\{ (\mathbf{w}, \eta, \phi) \in \mathbf{X} \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega) / \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \leq r_1, \quad \|\eta\|_{1,\Omega} \leq r_2, \quad \|\phi\|_{1,\Omega} \leq r_3 \right\} \quad (3.39)$$

entonces, se tiene que  $\mathcal{L}(B) \subseteq B$ .

(b) *El operador  $\mathcal{L}$  es compacto y localmente lipschitz continuo en  $B$ , esto es,*

$$\exists C_{LIP} > 0 / \|\mathcal{L}(\mathbf{w}, \eta, \phi) - \mathcal{L}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\eta}, \hat{\phi})\| \leq C_{LIP} \|(\mathbf{w}, \eta, \phi) - (\hat{\mathbf{w}}, \hat{\eta}, \hat{\phi})\|. \quad (3.40)$$

En base a estos resultados, se puede garantizar la existencia y unicidad de las soluciones, para lo cual se tiene el siguiente teorema

**Teorema 3.** *Existe una solución al problema (3.29) y, si  $C_{LIP} < 1$ , esta es única.*

**Demostración.** Es claro que cualquier punto fijo del operador  $\mathcal{L}$  es solución del problema (3.29). Ahora, a partir de las propiedades (3.39) y (3.40) del Lema 3 y por la compacidad del operador, se tiene que, por el teorema de Leray-Schauder, este operador tiene al menos un punto fijo en  $B$  y así se tiene que existe una solución al problema (3.29).

Ahora considere  $(\mathbf{u}, \theta_0, \varphi)$  y  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\theta}_0, \hat{\varphi})$  como soluciones del problema (3.29), en particular éstas deben de ser puntos fijos del operador  $\mathcal{L}$ . Luego, de la propiedad (3.40), se tiene que

$$\|(\mathbf{u}, \theta_0, \varphi) - (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\theta}_0, \hat{\varphi})\| \leq C_{LIP} \|(\mathbf{u}, \theta_0, \varphi) - (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\theta}_0, \hat{\varphi})\|.$$

Por lo que sí  $C_{LIP} < 1$ , entonces  $(1 - C_{LIP}) > 0$  con lo cual

$$(1 - C_{LIP}) \|(\mathbf{u}, \theta_0, \varphi) - (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\theta}_0, \hat{\varphi})\| \leq 0,$$

pero como  $(1 - C_{LIP}) > 0$ , entonces  $\|(\mathbf{u}, \theta_0, \varphi) - (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\theta}_0, \hat{\varphi})\| = 0$  y así

$$(\mathbf{u}, \theta_0, \varphi) = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\theta}_0, \hat{\varphi}).$$

□

### 3.3 Construcción del método numérico

Para buscar una aproximación a la solución del problema (3.29) de orden  $k > 0$ , se toma una malla  $\mathcal{T}_h$  del dominio  $\Omega$  como se definió en la sección 1.4.5. Ahora, sea  $P_k(K)$  el espacio local generado por polinomios de grado  $\leq k$  y considérense los siguientes espacios de dimensión finita

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &:= \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_0(\text{div}; \Omega) : \mathbf{v}_h|_K \in [P_k(K)]^d, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ H_h &= \left\{ \xi_h \in C(\bar{\Omega}) / \xi_h|_K \in P_k(K) \right\}, \quad \mathbf{Q}_h = S_h^{k-1} \cap L_0^2(\Omega), \\ \tilde{H}_h &= \left\{ \psi \in C(\bar{\Omega}) / \psi|_K \in P_k(K) \right\} \cap L_0^2(\Omega), \end{aligned} \quad (3.41)$$

aquí

$$S_h^k = \left\{ r_h \in L^2(\Omega) / r_h|_K \in P_k(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}. \quad (3.42)$$

Por lo tanto, note que el espacio  $\mathbf{V}_h$  es no conforme en  $[H_0^1(\Omega)]^3$ , mientras que  $\mathbf{Q}_h$ ,  $H_h$  y  $\tilde{H}_h$  son conformes en  $L_0^2(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega)$  y  $\tilde{H}^1(\Omega)$  respectivamente. Más aún, el espacio  $\mathbf{V}_h$  es el espacio *H-div conforme de Brezzi-Douglas-Marini (BDM)*.

De acuerdo a los espacios definidos en (3.41), como  $\mathbf{V}_h$  es no conforme, se define la versión discreta del operador  $\mathcal{A}^S$  como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \frac{\mu}{\kappa} \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h + \mu' \int_{\Omega} \nabla_h \mathbf{u}_h : \nabla_h \mathbf{v}_h - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{ \{ \mu' \nabla_h \mathbf{u}_h \} \} : \llbracket \mathbf{v}_h \rrbracket \\ &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{ \{ \mu' \nabla_h \mathbf{v}_h \} \} : \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\mu' a_0}{h_e} \int_e \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket : \llbracket \mathbf{v}_h \rrbracket, \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde  $a_0$  es un término de penalización interior lo suficientemente grande a definir más adelante.

Además, se introduce una aproximación  $\theta_{D,h}$  del dato de frontera  $\theta_D$ , el cuál pertenecerá al siguiente espacio de trazas

$$\theta_{D,h} \in \Lambda = \left\{ \xi \in C(\bar{\Gamma}) : \xi|_e \in P_k(e), e \in \mathcal{E}_h^b \right\}. \quad (3.44)$$

De esa forma, basados en los espacios definidos en (3.41) y según las definiciones de las formas funcionales (3.43), se propone el siguiente método de Galerkin de elementos finitos para el problema (3.27).

Encontrar  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h, \varphi_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{Q}_h \times H_h \times \tilde{H}_h$  con  $\theta_h|_{\Gamma_D} = \theta_{D,h}$  tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, p_h) &= \mathcal{F}^S((\theta_h, \varphi_h); \mathbf{v}_h), \\ \mathcal{B}^S(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0, \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\mathcal{A}^T(\theta_h, \xi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \theta_h, \xi_h) = 0$$

$$\mathcal{A}^C(\varphi_h, \psi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \varphi_h, \psi_h) = \mathcal{F}^C(\psi_h),$$

para todo  $(\mathbf{v}_h, q_h, \xi_h, \psi_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{Q}_h \times H_h \times \tilde{H}_h$ .

Nótese que las formas funcionales  $\mathcal{A}^T$ ,  $\mathcal{A}^C$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{B}^S$ ,  $\mathcal{F}^C$  y  $\mathcal{F}^S$  son las mismas que se definieron en (3.5)-(3.6).

Una de las características claves del método (3.45), es que la velocidad  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  tiene divergencia cero. Para esto, si se define al Kernel discreto de  $\mathcal{B}^S$  como

$$\mathbf{X}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : \mathcal{B}(\mathbf{v}, q) = 0, \forall q \in \mathbf{Q}_h \right\} = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : \operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0 \text{ in } \Omega \right\} \tag{3.46}$$

Donde la última igualdad se sigue desde que  $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega)$  y que  $\operatorname{div} \mathbf{V}_h \subset \mathbf{Q}_h$ . Particularmente se tiene que  $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{H}_0(\operatorname{div}^0; \Omega)$ .

### 3.3.1 Estimaciones discretas y propiedades de estabilidad

A continuación se verificará que las afirmaciones del Lema 1 se mantengan en estos espacios de Sobolev a trozos, lo cual garantiza que el método (3.45) es estable.

En prime lugar, dado que  $\mathbf{Q}_h$ ,  $H_h$  y  $\tilde{H}_h$  son conformes entonces, las formas bilineales  $\mathcal{A}^C$  y  $\mathcal{A}^T$  son automáticamente acotadas y coercivas con las mismas constantes, esto es

$$|\mathcal{A}^C(\varphi_h, \psi_h)| \leq \|\mathcal{A}^C\| \|\varphi_h\|_{1,\Omega} \|\psi_h\|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi_h, \psi_h \in H_h \tag{3.47}$$

$$|\mathcal{A}^T(\theta_h, \xi_h)| \leq \|\mathcal{A}^T\| \|\theta_h\|_{1,\Omega} \|\xi_h\|_{1,\Omega} \quad \forall \theta_h, \xi_h \in \tilde{H}_h, \tag{3.48}$$

asimismo, para la coercividad

$$\mathcal{A}^T(\xi_h, \xi_h) \geq \alpha_{\mathcal{A}^T} \|\xi_h\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \xi_h \in \tilde{H}_h \tag{3.49}$$

$$\mathcal{A}^C(\psi_h, \psi_h) \geq \alpha_{\mathcal{A}^C} \|\psi_h\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \psi_h \in H_h \tag{3.50}$$

Para el caso de  $\mathcal{A}_h^S$ , se tiene que a partir de los resultados dados por Arnold (1982), se tiene que para un término de penalización  $a_0$  lo suficientemente grande, que ésta es bilineal, continua y coerciva, con constantes positivas independientes de  $h$ ,  $\tilde{C}_{\mathcal{A}}$  y  $\tilde{\alpha}_{\mathcal{A}}$  respectivamente, es decir,

$$|\mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| \leq \tilde{C}_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (3.51)$$

$$\mathcal{A}_h^S(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}} \|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}^2 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (3.52)$$

Con respecto a la forma bilineal  $\mathcal{B}^S$ , la continuidad se sigue a partir del trabajo hecho por Cockburn et al. (2005), de donde se tiene que existe una constante  $\tilde{C}_{\mathcal{B}}$  independiente de  $h$ , tal que

$$|\mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, q_h)| \leq \tilde{C}_{\mathcal{B}} \|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|q_h\|_{0, \Omega} \quad \forall \mathbf{v}_h, q_h \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{Q}_h. \quad (3.53)$$

Más aún, a partir de los resultados obtenidos por Hansbo and Larson (2002), se tiene que existe una constante  $\tilde{\beta}$  independiente de  $h$ , tal que

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V} \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \frac{\mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}} \geq \tilde{\beta} \|q_h\|_{0, \Omega} \quad \forall q_h \in \mathbf{Q}_h, \quad (3.54)$$

lo cual prueba que se satisface la condición *inf-sup* de  $\mathcal{B}^S$  a nivel discreto.

Para la forma trilineal  $\mathcal{C}$ , se tiene a partir de la desigualdad de Holder e inclusión (1.17)

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}(\mathbf{v}_h; \xi_h, \psi_h)| &\leq \|\mathbf{v}_h\|_{0, 4, \Omega} \|\nabla \xi_h\|_{0, \Omega} \|\psi_h\|_{0, 4, \Omega} \\ &\leq \tilde{C}_{\mathcal{C}} \|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\xi_h\|_{1, \Omega} \|\psi_h\|_{1, \Omega} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad \forall \xi_h, \psi_h \in H_h \times \tilde{H}_h. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Además, es fácil ver que la propiedad de *antisimetría* se satisface para cualquier  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h$  dado que  $\text{div } \mathbf{v}_h = 0$  en  $\Omega$  y  $\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\Gamma$ .

Finalmente, a partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (1.17), se tiene que los funcionales  $\mathcal{F}^S$  y  $\mathcal{F}^C$  son continuos, es decir,

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}^S((\eta_h, \phi_h); \mathbf{v}_h)| &= \left| \int_{\Omega} (\mathbf{f} - [\beta_{\theta} \eta_h - \beta_{\varphi} \phi_h] \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v}_h \right| \leq \int_{\Omega} (|\mathbf{f}| + |\mathbf{g}| [\beta_{\theta} |\eta_h| + \beta_{\varphi} |\phi_h|]) |\mathbf{v}_h| \\ &\leq \|(|\mathbf{f}| + |\mathbf{g}| [\beta_{\theta} |\eta_h| + \beta_{\varphi} |\phi_h|])\|_{0, \Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{0, \Omega} \end{aligned}$$

Luego, usando (1.17), se tiene que existe una constante  $\tilde{C}_{\mathcal{F}}$  independiente de la malla, tal que

$$\|\mathcal{F}^S((\xi_h, \psi_h); \mathbf{v}_h)\| \leq \|\tilde{\mathcal{F}}^S\| \|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad \forall \xi_h, \psi_h \in H_h \times \tilde{H}_h, \quad (3.56)$$

donde  $\|\widetilde{\mathcal{F}}^S\| = \widetilde{C}_{\mathcal{F}} \|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega} + \|\mathbf{g}\|_{\infty,\Omega} (\beta_{\theta} \|\xi_h\|_{1,\mathcal{T}_h} + \beta_{\varphi} \|\psi_h\|_{1,\mathcal{T}_h})$ .

De forma similar para  $\mathcal{F}^C$ , se cumple que,

$$|\mathcal{F}^C(\psi_h)| \leq \|\mathcal{F}^C\| \|\psi_h\|_{1,\Omega}, \quad (3.57)$$

donde  $\|\mathcal{F}^C\|$  es como se definió en (3.26). De está forma, se tiene que se cumple la versión discreta del *Lema 1*.

### 3.3.2 Análisis de consistencia

De igual forma, como en el caso continuo se escribe la temperatura discreta  $\theta_h$  como  $\theta_h = \theta_{h,0} + \theta_{h,1}$ , donde  $\theta_{h,0} \in H_{h,\Gamma_D} = H_h \cap H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  y  $\theta_{h,1}|_{\Gamma_D} = \theta_{D,h}$  es la extensión discreta de  $\theta_{h,D}$ . Entonces, por la condición *inf-sup* (3.54), se tiene al igual que en el caso continuo, que el problema discreto (3.45) es equivalente a:

Encontrar  $(\mathbf{u}_h, \theta_{h,0}, \varphi_h) \in \mathbf{X}_h \times H_{h,\Gamma_D} \times \widetilde{H}_h$  tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \mathcal{F}^S((\theta_h, \varphi_h); \mathbf{v}_h), \\ \mathcal{A}^T(\theta_{0,h}, \xi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \theta_{0,h}, \xi_h) &= -\mathcal{A}^T(\theta_{1,h}, \xi_h) - \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \theta_{1,h}, \xi_h) \\ \mathcal{A}^C(\varphi_h, \psi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \varphi_h, \psi_h) &= \mathcal{F}^C(\psi_h), \end{aligned} \quad (3.58)$$

para todo  $(\mathbf{v}_h, \xi_h, \psi_h) \in \mathbf{X}_h \times H_{h,\Gamma_D} \times \widetilde{H}_h$ .

A continuación, se establecerán los estimados a priori del problema, para lo cual se enuncia la versión discreta del Teorema 2, como sigue:

**Teorema 4.** *Sea  $(\mathbf{u}_h, \theta_{h,0}, \varphi_h)$  solución de (3.58) entonces existe un  $h_{\delta} > 0$  tal que para  $h \leq h_{\delta}$  se cumplen los siguientes estimados a priori:*

$$\|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \widetilde{r}_1, \quad \|\theta_{0,h}\|_{1,\Omega} \leq \widetilde{r}_2 \quad \text{and} \quad \|\varphi_h\|_{1,\Omega} \leq \widetilde{r}_3 \quad (3.59)$$

donde  $\widetilde{r}_1 = C_1 \left[ \|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega} + \|\mathbf{g}\|_{\infty,\Omega} \left( (C_{FP}^2 + 1) \beta_{\theta} C \delta^{-4} \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D} + \beta_{\varphi} \widetilde{r}_3 \right) \right]$ ,  
 $\widetilde{r}_2 = C_{FP}^2 \left( C \delta^{-4} \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D} \left( 1 + \widetilde{C}_{\mathcal{C}} \|\mathcal{A}^T\|^{-1} \widetilde{r}_1 \right) \right)$  y  $\widetilde{r}_3 = \|\mathcal{F}^C\| (\alpha_{AC})^{-1}$ , son constantes que dependen solamente de datos y son independientes de  $h$ .

**Demostración.** Suponiendo que  $(\mathbf{u}_h, \theta_{h,0}, \varphi_h)$  es solución de (3.58) y tomando a

$(\mathbf{v}_h, \xi_h, \psi_h) = (\mathbf{u}_h, \theta_{h,0}, \varphi_h)$ , entonces tenemos

$$\mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = \mathcal{F}^S((\theta_h, \varphi_h); \mathbf{u}_h),$$

$$\mathcal{A}^T(\theta_{0,h}, \theta_{0,h}) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \theta_{0,h}, \theta_{0,h}) = -\mathcal{A}^T(\theta_{1,h}, \theta_{0,h}) - \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \theta_{1,h}, \theta_{0,h})$$

$$\mathcal{A}^C(\varphi_h, \varphi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \varphi_h, \varphi_h) = \mathcal{F}^C(\varphi_h).$$

Luego, usando las cotas para  $\mathcal{A}^C$ ,  $\mathcal{A}^T$ ,  $\mathcal{A}_h^S$ ,  $\mathcal{F}^S$  y  $\mathcal{F}^C$  dadas en (3.47), (3.48), (3.51), (3.56) y (3.57) y por las propiedades de  $\mathcal{C}$ , se obtiene

$$\|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \leq \tilde{C}_{\mathcal{F}} \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S}^{-1} [\|\mathbf{f}\|_{\infty, \Omega} + \|\mathbf{g}\|_{\infty, \Omega} (\beta_\theta \|\theta_h\|_{1, \Omega} + \beta_\varphi \|\varphi_h\|_{1, \Omega})] \quad (3.60)$$

$$\|\theta_{0,h}\|_{1, \Omega} \leq C_{FP}^2 (\|\theta_{1,h}\|_{1, \Omega} + \tilde{C}_{\mathcal{C}} \|\mathcal{A}^T\|^{-1} \|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\theta_{1,h}\|_{1, \Omega}) \quad (3.61)$$

$$\|\varphi_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \leq \|\mathcal{F}^C\| (\alpha_{AC})^{-1}. \quad (3.62)$$

De esta forma, observe que  $\tilde{r}_3 = \|\mathcal{F}^C\| (\alpha_{AC})^{-1}$ . Además, si  $C_1 = \tilde{C}_{\mathcal{F}} \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S}^{-1}$ , entonces está es una constante  $h$ -independiente. Luego, usando  $\theta_h = \theta_{h,0} + \theta_{1,h}$  y combinado (3.60) con (3.61) y (3.62), obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} &\leq C_1 [\|\mathbf{f}\|_{\infty, \Omega} + \|\mathbf{g}\|_{\infty, \Omega} ((C_{FP}^2 + 1) \beta_\theta \|\theta_{1,h}\|_{1, \Omega} + \beta_\varphi \tilde{r}_3)] \\ &\quad + C_1 \|\mathbf{g}\|_{\infty, \Omega} \beta_\theta C_{FP}^2 \tilde{C}_{\mathcal{C}} \|\mathcal{A}^T\|^{-1} \|\theta_{1,h}\|_{1, \Omega} \|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Finalmente, a partir del *Lema 4.3* dado por Colmenares and Neilan (2016), se tiene para un  $\delta \in (0, 1)$  que existe un  $h_\delta$  y una extensión  $\theta_{1,h}$  de  $\theta_{D,h}$ , tal que para  $h \leq h_\delta$ , se cumple que  $\|\theta_{1,h}\|_{1, \Omega} \leq C\delta^{-4} \|\theta_D\|_{1/2, \Gamma_D}$  donde  $C$  es una constante independiente de  $h$ , de manera que, si se escoge  $\delta$  satisfaciendo

$$C_1 \|\mathbf{g}\|_{\infty, \Omega} \beta_\theta C_{FP}^2 \tilde{C}_{\mathcal{C}} \|\mathcal{A}^T\|^{-1} C\delta^{-4} \|\theta_D\|_{1/2, \Gamma_D} = \frac{1}{2}, \quad (3.64)$$

entonces, se cumple que

$$\|\mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \leq C_1 [\|\mathbf{f}\|_{\infty, \Omega} + \|\mathbf{g}\|_{\infty, \Omega} ((C_{FP}^2 + 1) \beta_\theta C\delta^{-4} \|\theta_D\|_{1/2, \Gamma_D} + \beta_\varphi \tilde{r}_3)]. \quad (3.65)$$

Asimismo, desde que

$$\|\theta_{0,h}\|_{1, \mathcal{T}_h} \leq C_{FP}^2 \left( C\delta^{-4} \|\theta_D\|_{1/2, \Gamma_D} \left( 1 + \tilde{C}_{\mathcal{C}} \|\mathcal{A}^T\|^{-1} \tilde{r}_1 \right) \right). \quad (3.66)$$

Siendo  $\delta$  definido de forma similar que en el caso continuo.  $\square$

Para probar la existencia de soluciones discretas al igual que en el caso continuo, se escribe la versión discreta del problema (3.31), como sigue:

Sea  $(\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h) \in \mathbf{X}_h \times H_{h,\Gamma_D} \times \tilde{H}_h$  dado. Encontrar  $(\mathbf{u}_h, \theta_{0,h}, \varphi_h)$ , tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \mathcal{F}^S((\eta_h, \phi_h); \mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \\ \mathcal{A}^T(\theta_{0,h}, \xi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{w}_h; \theta_{0,h}, \xi_h) &= -\mathcal{A}^T(\theta_{1,h}, \xi_h) - \mathcal{C}(\mathbf{w}_h; \theta_{1,h}, \xi_h) & \forall \xi_h \in H_{h,\Gamma_D}, \\ \mathcal{A}^C(\varphi_h, \psi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{w}_h; \varphi_h, \psi_h) &= \mathcal{F}^C(\psi_h) & \forall \psi_h \in \tilde{H}_h. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Considerando a  $\mathbf{H}_h = \mathbf{X}_h \times H_{h,\Gamma_D} \times \tilde{H}_h$ . Sea  $(\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h) \in \mathbf{H}_h$  dados, se define la forma:

$\mathcal{A}_h : \mathbf{H}_h \times \mathbf{H}_h \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, \theta_h, \varphi_h), (\mathbf{v}_h, \xi_h, \psi_h)) &= \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{A}^T(\theta_h, \xi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{w}_h; \theta_h, \xi_h) \\ &+ \mathcal{A}^C(\varphi_h, \psi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{w}_h; \varphi_h, \psi_h), \end{aligned} \quad (3.68)$$

y el funcional

$\mathcal{F}_h : \mathbf{H}_h \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h((\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h); (\mathbf{v}_h, \xi_h, \psi_h)) &= \mathcal{F}^S((\eta_h, \phi_h); \mathbf{v}_h) - \mathcal{A}^T(\theta_{1,h}, \xi_h) \\ &- \mathcal{C}(\mathbf{w}_h; \theta_{1,h}, \xi_h) + \mathcal{F}^C(\psi_h). \end{aligned} \quad (3.69)$$

De esta forma el problema (3.67), se reescribe como: Dado  $(\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h) \in \mathbf{H}_h$ , encontrar  $(\mathbf{u}_h, \theta_{0,h}, \varphi_h) \in \mathbf{H}_h$  tal que:

$$\mathcal{A}_h(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, \theta_{0,h}, \varphi_h), (\mathbf{v}_h, \xi_h, \psi_h)) = \mathcal{F}_h((\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h); (\mathbf{v}_h, \xi_h, \psi_h)) \quad \forall (\mathbf{v}_h, \xi_h, \psi_h) \in \mathbf{H}_h \quad (3.70)$$

Siguiendo el mismo razonamiento hecho que en el caso continuo, se obtiene usando las propiedades de los operadores  $\mathcal{A}_h^S$ ,  $\mathcal{A}^T$ ,  $\mathcal{A}^C$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F}^S$  y  $\mathcal{F}^C$ , que  $\mathcal{A}_h$  y  $\mathcal{F}_h$ , están acotados por:

$$|\mathcal{A}_h(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, \theta_h, \varphi_h), (\mathbf{v}_h, \xi_h, \psi_h))| \leq \|\mathcal{A}_h\| (\|\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} + 1) \|(\mathbf{u}_h, \theta_h, \varphi_h)\| \|(\mathbf{v}_h, \xi_h, \psi_h)\| \quad (3.71)$$

$$|\mathcal{F}_h((\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h); (\mathbf{v}_h, \xi_h, \psi_h))| \leq \|\mathcal{F}_h\| \|(\mathbf{v}_h, \xi_h, \psi_h)\|. \quad (3.72)$$

Donde  $\|\mathcal{A}\| = \max \{ \tilde{C}_{\mathcal{A}}, \|\mathcal{A}^T\|, \|\mathcal{A}^C\|, \tilde{C}_{\mathcal{C}} \}$   
y  $\|\mathcal{F}_h\| = \left( \|\tilde{\mathcal{F}}^S\| + (\|\mathcal{A}^T\| + \|\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}) \|\theta_{1,h}\|_{1,\Omega} + \|\mathcal{F}^C\| \right)$ .

Dado que la solución al problema (3.70) está en un conjunto cerrado y acotado, como se definirá en (3.75), entonces se obtiene que  $\mathcal{A}_h$ , es continua.

Además, siguiendo el mismo razonamiento que en el caso continuo tenemos que  $\mathcal{A}_h$  es coerciva, en efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, \theta_h, \varphi_h), (\mathbf{v}_h, \xi_h, \psi_h)) &\geq \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}_h} (\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 + \|\xi_h\|_{1,\Omega}^2 + \|\psi_h\|_{1,\Omega}^2) \\ &= \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}_h} \|(\mathbf{v}_h, \xi_h, \psi_h)\|^2, \end{aligned} \quad (3.73)$$

donde  $\tilde{\alpha}_{\mathcal{A}_h} = \min \{ \alpha_{\mathcal{A}^T}, \alpha_{\mathcal{A}^C}, \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S} \}$ .

Así por el teorema de Lax-Milgram existe una única solución al problema (3.70). De esta forma, se define el siguiente operador:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h : \mathbf{H}_h &\longrightarrow \mathbf{H}_h \\ (\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h) &\longmapsto \mathcal{L}_h(\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h) = (\mathbf{u}_h, \theta_{0,h}, \varphi_h), \end{aligned} \quad (3.74)$$

con  $(\mathbf{u}_h, \theta_{0,h}, \varphi_h)$  solución del problema (3.70). De esta forma,  $\mathcal{L}_h$  constituiría la versión discreta del operador (3.38), de donde se sigue que, bajo un argumento similar, este esta bien definido.

Ahora se define el siguiente conjunto

$$\mathbf{B}_h = \left\{ (\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h) \in \mathbf{H}_h / \|\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \tilde{r}_1, \quad \|\eta_h\|_{1,\Omega} \leq \tilde{r}_2, \quad \|\phi_h\|_{1,\Omega} \leq \tilde{r}_3 \right\}, \quad (3.75)$$

siguiendo el mismo procedimiento que para el caso continuo, se obtiene que  $\mathcal{L}_h(\mathbf{B}_h) \subseteq \mathbf{B}_h$ .

Solamente, se necesita probar que  $\mathcal{L}_h$  es Lipschitz continuo en  $\mathbf{B}_h$ , es decir:

**Lema 4.** *El operador  $\mathcal{L}$  localmente lipschitz continuo en  $\mathbf{B}_h$ , esto es*

$$\exists \tilde{C}_{LIP} > 0 / \|\mathcal{L}_h(\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h) - \mathcal{L}_h(\hat{\mathbf{w}}_h, \hat{\eta}_h, \hat{\phi}_h)\| \leq \tilde{C}_{LIP} \|(\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h) - (\hat{\mathbf{w}}_h, \hat{\eta}_h, \hat{\phi}_h)\|. \quad (3.76)$$

**Demostración.** Al igual que en el caso continuo, se empieza tomando a  $(\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h)$  tal que  $\mathcal{L}_h(\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h) = (\mathbf{u}_h, \theta_{0,h}, \varphi_h)$  y a  $(\hat{\mathbf{w}}_h, \hat{\eta}_h, \hat{\phi}_h)$ , para el cual,

$$\mathcal{L}_h(\hat{\mathbf{w}}_h, \hat{\eta}_h, \hat{\phi}_h) = (\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\theta}_{0,h}, \hat{\varphi}_h).$$

Tomando,  $\Psi_h = (\mathbf{u}_h, \theta_{0,h}, \varphi_h)$ ,  $\widehat{\Psi}_h = (\widehat{\mathbf{u}}_h, \widehat{\theta}_{0,h}, \widehat{\varphi}_h)$ ,  $\mathbf{S}_h = (\mathbf{w}_h, \eta_h, \phi_h)$  y  $\widehat{\mathbf{S}}_h = (\widehat{\mathbf{w}}_h, \widehat{\eta}_h, \widehat{\phi}_h)$ , entonces usando el hecho de que  $(\mathbf{u}_h, \theta_{0,h}, \varphi_h)$  y  $(\widehat{\mathbf{u}}_h, \widehat{\theta}_{0,h}, \widehat{\varphi}_h)$  son soluciones de (3.70), obtenemos por la coercividad de  $\mathcal{A}_h$

$$\begin{aligned} \|\widehat{\Psi}_h\|^2 &\leq \mathcal{F}_h(\mathbf{S}_h; \Psi_h - \widehat{\Psi}_h) - \mathcal{A}_h(\mathbf{w}_h; \widehat{\Psi}_h, \Psi_h - \widehat{\Psi}_h) \\ &\quad + \mathcal{A}_h(\widehat{\mathbf{w}}_h; \widehat{\Psi}_h, \Psi_h - \widehat{\Psi}_h) - \mathcal{F}_h(\widehat{\mathbf{S}}_h; \Psi_h - \widehat{\Psi}_h). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Así, por un lado se tiene

$$\begin{aligned} &\left| \mathcal{A}_h(\widehat{\mathbf{w}}_h; \widehat{\Psi}_h, \Psi_h - \widehat{\Psi}_h) - \mathcal{A}_h(\mathbf{w}_h; \widehat{\Psi}_h, \Psi_h - \widehat{\Psi}_h) \right| \\ &\leq \tilde{C}_{\mathcal{C}} \left( \|\widehat{\theta}_{0,h}\|_{1,\Omega} + \|\widehat{\varphi}_h\|_{1,\Omega} \right) \|\mathbf{S}_h - \widehat{\mathbf{S}}_h\| \|\Psi_h - \widehat{\Psi}_h\|. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Ahora observe que

$$\mathcal{F}^S((\eta_h, \phi_h); \mathbf{u}_h - \widehat{\mathbf{u}}_h) - \mathcal{F}^S((\widehat{\eta}_h, \widehat{\phi}_h); \mathbf{u}_h - \widehat{\mathbf{u}}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{g} [\beta_{\theta}(\widehat{\eta}_h - \eta_h) + \beta_{\varphi}(\phi_h - \widehat{\phi}_h)] \cdot (\mathbf{u}_h - \widehat{\mathbf{u}}_h).$$

De donde se deduce

$$\begin{aligned} &\left| \mathcal{F}^S((\eta_h, \phi_h); \mathbf{u}_h - \widehat{\mathbf{u}}_h) - \mathcal{F}^S((\widehat{\eta}_h, \widehat{\phi}_h); \mathbf{u}_h - \widehat{\mathbf{u}}_h) \right| \\ &\leq \tilde{C}_{sob} \|\mathbf{g}\|_{\infty} \|\mathbf{u}_h - \widehat{\mathbf{u}}_h\|_{1,\tau_h} (\beta_{\theta} \|\eta_h - \widehat{\eta}_h\|_{1,\Omega} + \beta_{\varphi} \|\phi_h - \widehat{\phi}_h\|_{1,\Omega}) \\ &\leq \tilde{C}_{sob} \beta \|\mathbf{g}\|_{\infty} \|\mathbf{S}_h - \widehat{\mathbf{S}}_h\| \|\Psi_h - \widehat{\Psi}_h\|, \end{aligned} \quad (3.79)$$

donde  $\beta$  el mismo que se definió en el caso continuo. Además vemos que

$$|\mathcal{C}(\mathbf{w}_h - \widehat{\mathbf{w}}_h, \theta_{1,h}, \theta_{0,h} - \widehat{\theta}_{0,h})| \leq \tilde{C}_{\mathcal{C}} \|\theta_{1,h}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{S}_h - \widehat{\mathbf{S}}_h\| \|\Psi_h - \widehat{\Psi}_h\|. \quad (3.80)$$

De esta forma, juntando (3.79), (3.80), tenemos

$$\begin{aligned} &\left| \mathcal{F}_h(\mathbf{S}_h; \Psi_h - \widehat{\Psi}_h) - \mathcal{F}_h(\widehat{\mathbf{S}}_h; \Psi_h - \widehat{\Psi}_h) \right| \\ &\leq \left| \mathcal{F}^S((\eta_h, \phi_h); \mathbf{u}_h - \widehat{\mathbf{u}}_h) - \mathcal{F}^S((\widehat{\eta}_h, \widehat{\phi}_h); \mathbf{u}_h - \widehat{\mathbf{u}}_h) \right| \\ &\quad + \left| \mathcal{C}(\mathbf{w}_h - \widehat{\mathbf{w}}_h, \theta_{1,h}, \theta_{0,h} - \widehat{\theta}_{0,h}) \right| \\ &\leq \left( \tilde{C}_{\mathcal{C}} \|\theta_{1,h}\|_{1,\Omega} + \tilde{C}_{sob} \beta \|\mathbf{g}\|_{\infty} \right) \|\mathbf{S}_h - \widehat{\mathbf{S}}_h\| \|\Psi_h - \widehat{\Psi}_h\|. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Luego, juntando (3.77), (3.78) y (3.81), se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}_h} \|\Psi_h - \widehat{\Psi}_h\|^2 &\leq \left( \tilde{C}_{\mathcal{C}} \|\theta_{1,h}\|_{1,\Omega} + \tilde{C}_{sob} \beta \|\mathbf{g}\|_{\infty} \right) \|\mathbf{S}_h - \widehat{\mathbf{S}}_h\| \|\Psi_h - \widehat{\Psi}_h\| \\ &\quad + \tilde{C}_{\mathcal{C}} \left( \|\widehat{\theta}_{0,h}\|_{1,\Omega} + \|\widehat{\varphi}_h\|_{1,\Omega} \right) \|\mathbf{S}_h - \widehat{\mathbf{S}}_h\| \|\Psi_h - \widehat{\Psi}_h\| \\ &= \left( \tilde{C}_{\mathcal{C}} \left( \|\widehat{\theta}_{0,h}\|_{1,\Omega} + \|\widehat{\varphi}_h\|_{1,\Omega} + \|\theta_{1,h}\|_{1,\Omega} \right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{C}_{sob} \beta \|\mathbf{g}\|_{\infty} \right) \|\mathbf{S}_h - \widehat{\mathbf{S}}_h\| \|\Psi_h - \widehat{\Psi}_h\|. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Finalmente de (3.82), obtenemos que

$$\|\Psi_h - \widehat{\Psi}_h\| \leq \tilde{\alpha}_{\mathcal{S}_h}^{-1} \left( \tilde{C}_{\mathcal{E}} \left( \|\widehat{\theta}_{0,h}\|_{1,\Omega} + \|\widehat{\varphi}_h\|_{1,\Omega} + \|\theta_{1,h}\|_{1,\Omega} \right) + \tilde{C}_{sob} \beta \|\mathbf{g}\|_{\infty} \right) \|\mathbf{S}_h - \widehat{\mathbf{S}}_h\|. \quad (3.83)$$

Observe que dado que  $\|\widehat{\theta}_{0,h}\|_{1,\Omega} \leq \tilde{r}_2$ ,  $\|\widehat{\varphi}_h\|_{1,\Omega} \leq \tilde{r}_3$ ,  $\|\theta_{1,h}\|_{1,\Omega} \leq C \delta^{-4} \|\theta_D\|_{1/2,\Gamma_D}$ , se tiene que la constante Lipschitz

$\tilde{C}_{LIP} = \tilde{\alpha}_{\mathcal{S}_h}^{-1} \left( \tilde{C}_{\mathcal{E}} \left( \|\widehat{\theta}_{0,h}\|_{1,\Omega} + \|\widehat{\varphi}_h\|_{1,\Omega} + \|\theta_{1,h}\|_{1,\Omega} \right) + \tilde{C}_{sob} \beta \|\mathbf{g}\|_{\infty} \right)$ , depende únicamente de la data del problema y de constantes  $h$ -independientes.  $\square$

De aquí, usando el teorema punto fijo de *Brouwer* enunciado en (Brezis and Brézis, 2011), como :

*Sea  $B$  un subconjunto no vacío y compacto de un espacio normado de dimensión finita, y sea  $\mathcal{L}$  un mapeo continuo de  $B$  en si mismo. Entonces,  $\mathcal{L}$  tiene un punto fijo en  $B$ .*

Se tiene el siguiente teorema que garantiza la existencia de las soluciones de (3.58).

**Teorema 5.** *Existe al menos un  $(\mathbf{u}_h, \theta_{h,0}, \varphi_h) \in B_h$  solución de (3.58) para algún  $h \leq h_{\delta}$ .*

**Demostración.** De igual forma que el caso continuo, cualquier punto fijo de  $\mathcal{L}_h$  es solución del problema (3.58). La existencia de dicho punto fijo en  $B_h$  se sigue de la aplicación del *Lema 4* y la aplicación del teorema de *punto fijo de Brouwer*, de donde se tiene que existe al menos una solución del problema (3.58)  $\square$

Similarmente se obtiene el siguiente resultado para la unicidad de soluciones:

**Teorema 6.** *Si la data es lo suficientemente pequeña de modo que  $\tilde{C}_{LIP} < 1$  entonces la solución a (3.58) es única.*

**Demostración.** La demostración es totalmente análoga al caso continuo.  $\square$

Finalmente, se procederá a analizar la convergencia del método numérico.

### 3.3.3 Análisis de convergencia

En esta sección se establecerá una cota para la diferencia de la solución continua con la solución discreta, con el fin de establecer los ordenes de convergencia. Así, se empieza tomando  $(\mathbf{u}, p, \theta, \varphi)$  solución de (3.27) y  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h, \varphi_h)$  solución de (3.45).

Considere a  $\Pi_h^{\text{BDM}}$  como el operador de interpolación BDM de  $[H^{k+1}(\Omega)]^d$  en  $V_h$  y para  $k > 0$  consideramos las proyecciones dadas por

$$\mathcal{P}_h^{k-1} : L_0^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{Q}_h$$

$$\mathcal{P}_{h,1}^k : H^1(\Omega) \rightarrow H_h$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{h,1}^k : \tilde{H}^1(\Omega) \rightarrow \tilde{H}_h$$

De acuerdo a (Quarteroni and Valli, 2008) estos operadores satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \Pi_h^{\text{BDM}}(\mathbf{u})\|_{2, \mathcal{T}_h} &\leq C h^k \|\mathbf{u}\|_{k+1, \Omega} \\ \|p - \mathcal{P}_h^{k-1}(p)\|_{0, \Omega} &\leq C h^k \|p\|_{k, \Omega} \\ \|\theta - \mathcal{P}_{h,1}^k(\theta)\|_{1, \Omega} &\leq C h^k \|\theta\|_{k+1, \Omega} \\ \|\varphi - \tilde{\mathcal{P}}_{h,1}^k(\varphi)\|_{1, \Omega} &\leq C h^k \|\varphi\|_{k+1, \Omega}. \end{aligned} \tag{3.84}$$

para  $\mathbf{u}, p, \theta$  y  $\varphi$  lo suficientemente regular.

Ahora, sí denotamos por

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{u}} &:= \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, & \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}} &:= \mathbf{u} - \Pi_h^{\text{BDM}}(\mathbf{u}), & \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{u}} &:= \Pi_h^{\text{BDM}}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_h \\ e_p &:= p - p_h, & \boldsymbol{\xi}_p &:= p - \mathcal{P}_h^{k-1}(p), & \boldsymbol{\chi}_p &:= \mathcal{P}_h^{k-1}(p) - p_h \\ e_{\theta} &:= \theta - \theta_h, & \boldsymbol{\xi}_{\theta} &:= \theta - \mathcal{P}_{h,1}^k(\theta), & \boldsymbol{\chi}_{\theta} &:= \mathcal{P}_{h,1}^k(\theta) - \theta_h \\ e_{\varphi} &:= \varphi - \varphi_h, & \boldsymbol{\xi}_{\varphi} &:= \varphi - \tilde{\mathcal{P}}_{h,1}^k(\varphi), & \boldsymbol{\chi}_{\varphi} &:= \tilde{\mathcal{P}}_{h,1}^k(\varphi) - \varphi_h \end{aligned} \tag{3.85}$$

entonces

$$e_{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{u}}, \quad e_p = \boldsymbol{\xi}_p + \boldsymbol{\chi}_p, \quad e_{\theta} = \boldsymbol{\xi}_{\theta} + \boldsymbol{\chi}_{\theta}, \quad e_{\varphi} = \boldsymbol{\xi}_{\varphi} + \boldsymbol{\chi}_{\varphi}. \tag{3.86}$$

Usando la desigualdad de Cauchy Schwarz, la desigualdad inversa de (1.16) junto con las estimaciones (3.84), se tiene

$$\begin{aligned}
\|e_{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{T}_h} &\leq \|\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{T}_h} + \|\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{T}_h} \leq C h^k \|\mathbf{u}\|_{k+1,\Omega} + C \|\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{u}}\|_{1,\mathcal{T}_h} \\
\|e_{\theta}\|_{1,\Omega} &\leq \|\boldsymbol{\xi}_{\theta}\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\chi}_{\theta}\|_{1,\Omega} \leq C h^k \|\theta\|_{k+1,\Omega} + \|\boldsymbol{\chi}_{\theta}\|_{1,\Omega} \\
\|e_{\varphi}\|_{1,\Omega} &\leq \|\boldsymbol{\xi}_{\varphi}\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\chi}_{\varphi}\|_{1,\Omega} \leq C h^k \|\varphi\|_{k+1,\Omega} + \|\boldsymbol{\chi}_{\varphi}\|_{1,\Omega} \\
\|e_p\|_{0,\Omega} &\leq \|\boldsymbol{\xi}_p\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{\chi}_p\|_{0,\Omega} \leq C h^k \|p\|_{k,\Omega} + \|\boldsymbol{\chi}_p\|_{0,\Omega}
\end{aligned} \tag{3.87}$$

De esta forma, estimar los errores  $e_{\mathbf{u}}$ ,  $e_p$ ,  $e_{\theta}$  y  $e_{\varphi}$  se reduce a estimar los errores discretos  $\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{u}}$ ,  $\boldsymbol{\chi}_p$ ,  $\boldsymbol{\chi}_{\theta}$  y  $\boldsymbol{\chi}_{\varphi}$ . Para ello primeramente enunciamos el siguiente teorema:

**Teorema 7.** *Suponga que  $\mathbf{u} \in [H^{k+1}]^d \cap [H_0^1(\Omega)]^d \cap \mathbf{X}$  y  $(p, \theta, \varphi) \in L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega)$  es solución de (3.27), entonces se cumple que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_h^S(e_{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_h) + \mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, e_p) &= \widehat{\mathcal{F}}^S((e_{\theta}, e_{\varphi}); \mathbf{v}_h), \\
\mathcal{B}^S(e_{\mathbf{u}}, q_h) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\mathcal{A}^T(e_{\theta}, \xi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \theta, \xi_h) - \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \theta_h, \xi_h) = 0$$

$$\mathcal{A}^C(e_{\varphi}, \psi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \varphi, \psi_h) - \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \varphi_h, \psi_h) = 0,$$

para todo  $(\mathbf{v}_h, q_h, \xi_h, \psi_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{Q}_h \times H_h \times \tilde{H}_h$ , donde

$$\widehat{\mathcal{F}}^S((e_{\theta}, e_{\varphi}); \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{g} [\beta_{\theta} e_{\theta} + \beta_{\varphi} e_{\varphi}] \cdot \mathbf{v}_h$$

**Demostración.** Observe que procediendo por integración por partes, se tiene que cualquier solución exacta  $(\mathbf{u}, p, \theta, \varphi)$  del problema (3.27) satisface

$$\mathcal{A}^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, p) - \mathcal{F}^S((\theta, \varphi); \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \tag{3.89}$$

y asimismo se satisface que

$$\mathcal{B}^S(\mathbf{u}, q_h) = 0,$$

$$\mathcal{A}^T(\theta, \xi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \theta, \xi_h) = 0 \tag{3.90}$$

$$\mathcal{A}^C(\varphi, \psi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \varphi, \psi_h) = \mathcal{F}^C(\psi_h),$$

para todo  $(q_h, \xi_h, \psi_h) \in \mathbf{Q}_h \times H_h \times \tilde{H}_h$ . Luego, considerando la solución discreta  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h, \varphi_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{Q}_h \times H_h \times \tilde{H}_h$  al problema (3.45), entonces se cumple

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, p_h) &= \mathcal{F}^S((\theta_h, \varphi_h); \mathbf{v}_h), \\ \mathcal{B}^S(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0, \\ \mathcal{A}^T(\theta_h, \xi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \theta_h, \xi_h) &= 0, \\ \mathcal{A}^C(\varphi_h, \psi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \varphi_h, \psi_h) &= \mathcal{F}^C(\psi_h). \end{aligned} \tag{3.91}$$

Finalmente, juntando (3.89) con (3.90) y restando (3.91), se obtiene (3.88).  $\square$

**Teorema 8.** *Suponga que se cumplen las hipótesis de los teoremas 3 y 5 y sean  $(\mathbf{u}, p, \theta, \varphi)$  y  $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h, \varphi_h)$  soluciones a los problemas (3.27) y (3.45), respectivamente. Suponga además que  $\theta \in H^{k+1}(\Omega)$ ,  $\varphi \in H^{k+1}(\Omega)$ ,  $p \in H^k(\Omega)$ ,  $\mathbf{u} \in [H^{k+1}]^d \cap [H_0^1(\Omega)]^d \cap \mathbf{X}$  para  $k \geq 1$ , y que*

$$\tilde{C}_\mathcal{C} (\alpha_{\mathcal{A}^T}^{-1} r_2 + \alpha_{\mathcal{A}^C}^{-1} r_3) \leq \frac{\tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S}}{2}. \tag{3.92}$$

Entonces, existe una constante  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} + \|\theta - \theta_h\|_{1, \Omega} + \|\varphi - \varphi_h\|_{1, \Omega} &\leq C h^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1, \Omega} + \|\theta\|_{k+1, \Omega} + \|\varphi\|_{k+1, \Omega}) \\ \|p - p_h\| &\leq C h^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1, \Omega} + \|\theta\|_{k+1, \Omega} + \|\varphi\|_{k+1, \Omega} + \|p\|_{k, \Omega}) \end{aligned} \tag{3.93}$$

**Demostración.** Para la primera estimación, considerando que  $\mathbf{X}_h \subseteq \mathbf{X}$ , entonces a partir del teorema 7, se obtienen las relaciones

$$A_h^S(e_{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_h) = \widehat{\mathcal{F}}^S((e_\theta, e_\varphi); \mathbf{v}_h), \tag{3.94}$$

$$\mathcal{A}^T(e_\theta, \xi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \theta, \xi_h) - \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \theta_h, \xi_h) = 0 \tag{3.95}$$

$$\mathcal{A}^C(e_\varphi, \psi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \varphi, \psi_h) - \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \varphi_h, \psi_h) = 0, \tag{3.96}$$

para todo  $(\mathbf{v}_h, q_h, \xi_h, \psi_h) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{Q}_h \times H_h \times \tilde{H}_h$ .

A partir de la ecuación (3.94), se tiene que

$$A_h^S(\chi_{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_h) = \widehat{\mathcal{F}}^S((e_\theta, e_\varphi); \mathbf{v}_h) - A_h^S(\xi_{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_h). \tag{3.97}$$

Tomando  $v_h = \chi_u \in \mathbf{X}_h$ , entonces se deduce

$$A_h^S(\chi_u, \chi_u) = \widehat{\mathcal{F}}^S((e_\theta, e_\varphi); \chi_u) - A_h^S(\xi_u, \chi_u).$$

De aquí, usando la propiedades (3.51), se obtiene

$$\tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S} \|\chi_u\|_{1, \mathcal{T}_h}^2 \leq \tilde{C}_{Sob} \beta \|g\|_{0, \Omega} (\|e_\theta\|_{1, \Omega} + \|e_\varphi\|_{1, \Omega}) \|\chi_u\|_{1, \mathcal{T}_h} + \tilde{C}_{\mathcal{A}} \|\xi_u\|_{1, \mathcal{T}_h} \|\chi_u\|_{1, \mathcal{T}_h}$$

De donde se sigue que

$$\tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S} \|\chi_u\|_{1, \mathcal{T}_h} \leq \tilde{C}_{Sob} \beta \|g\|_{0, \Omega} (\|\chi_\theta\|_{1, \Omega} + \|\chi_\varphi\|_{1, \Omega}) + K_1(\xi_\theta, \xi_\varphi), \quad (3.98)$$

siendo

$$K_1(\xi_\theta, \xi_\varphi) = \tilde{C}_{\mathcal{A}} \|\xi_u\|_{1, \mathcal{T}_h} + \tilde{C}_{Sob} \beta \|g\|_{0, \Omega} (\|\xi_\theta\| + \|\xi_\varphi\|).$$

Similarmente usando (3.95), se sigue

$$\mathcal{A}^T(e_\theta, \xi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}; \theta, \xi_h) - \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \theta_h, \xi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \theta, \xi_h) - \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; \theta, \xi_h) = 0.$$

De aquí, se deduce

$$\mathcal{A}^T(e_\theta, \xi_h) + \mathcal{C}(e_u; \theta, \xi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; e_\theta, \xi_h) = 0$$

Luego haciendo  $\xi_h = \chi_\theta$ , se observa que

$$\mathcal{A}^T(\chi_\theta, \chi_\theta) = -\mathcal{C}(\mathbf{u}_h; e_\theta, \chi_\theta) - \mathcal{C}(e_u; \theta, \chi_\theta) - \mathcal{A}^T(\xi_\theta, \xi_\theta)$$

De esta forma, usando las estimaciones (3.48), (3.49), (3.55) y (3.59) junto con el teorema 2, se tiene

$$\alpha_{\mathcal{A}^T} \|\chi_\theta\|_{1, \Omega}^2 \leq \tilde{C}_{\mathcal{C}} (\tilde{r}_1 \|\xi_\theta\|_{1, \Omega} + r_2 \|e_u\|_{1, \mathcal{T}_h}) \|\chi_\theta\|_{1, \Omega}.$$

Así pues,

$$\|\chi_\theta\|_{1, \Omega} \leq K_2(\xi_\theta, \xi_u) + \alpha_{\mathcal{A}^T}^{-1} \tilde{C}_{\mathcal{C}} r_2 \|\chi_u\|_{1, \mathcal{T}_h}, \quad (3.99)$$

donde

$$K_2(\xi_\theta, \xi_u) = \alpha_{\mathcal{A}^T}^{-1} \tilde{C}_{\mathcal{C}} (\tilde{r}_1 \|\xi_\theta\|_{1, \Omega} + r_2 \|\xi_u\|_{1, \mathcal{T}_h})$$

Nuevamente, considerando la ecuación (3.96), se tiene

$$\mathcal{A}^C(e_\varphi, \psi_h) + \mathcal{C}(e_u; \varphi, \psi_h) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_h; e_\varphi, \psi_h) = 0.$$

Siguiendo el mismo razonamiento anterior se deduce

$$\|\chi_\varphi\|_{1,\Omega} \leq K_3(\xi_\varphi, \xi_u) + \alpha_{\mathcal{A}^C}^{-1} \tilde{C}_\varphi r_3 \|\chi_u\|_{1,\mathcal{T}_h}, \quad (3.100)$$

con

$$K_3(\xi_\varphi, \xi_u) = \alpha_{\mathcal{A}^C}^{-1} \tilde{C}_\varphi (\tilde{r}_1 \|\xi_\varphi\|_{1,\Omega} + r_3 \|\xi_u\|_{1,\mathcal{T}_h}).$$

De aquí, juntando (3.98), (3.100) y (3.99), se obtiene:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S} \|\chi_u\|_{1,\mathcal{T}_h} &\leq \tilde{C}_{Sob} \beta \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} (K_2(\xi_\theta, \xi_u) + K_3(\xi_\varphi, \xi_u)) \\ &\quad + K_1(\xi_\theta, \xi_\varphi) + \tilde{C}_\varphi (\alpha_{\mathcal{A}^T}^{-1} r_2 + \alpha_{\mathcal{A}^C}^{-1} r_3) \|\chi_u\|_{1,\mathcal{T}_h}. \end{aligned}$$

Despejando, se deduce

$$\left( \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S} - \tilde{C}_\varphi (\alpha_{\mathcal{A}^T}^{-1} r_2 + \alpha_{\mathcal{A}^C}^{-1} r_3) \right) \|\chi_u\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \tilde{C}_{Sob} \beta \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} (K_2(\xi_\theta, \xi_u) + K_3(\xi_\varphi, \xi_u)) + K_1(\xi_\theta, \xi_\varphi),$$

con lo cuál al usar (3.92), se tiene

$$\|\chi_u\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq 2 \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S}^{-1} \tilde{C}_{Sob} \beta \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} (K_2(\xi_\theta, \xi_u) + K_3(\xi_\varphi, \xi_u)) + 2 \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S}^{-1} K_1(\xi_\theta, \xi_\varphi) \quad (3.101)$$

De esta forma, de (3.99) y (3.100) se obtiene

$$\begin{aligned} \|\chi_\theta\|_{1,\Omega} &\leq \alpha_{\mathcal{A}^T}^{-1} \tilde{C}_\varphi r_2 \left( 2 \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S}^{-1} \tilde{C}_{Sob} \beta \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} (K_2(\xi_\theta, \xi_u) + K_3(\xi_\varphi, \xi_u)) \right. \\ &\quad \left. + 2 \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S}^{-1} K_1(\xi_\theta, \xi_\varphi) \right) + K_2(\xi_\theta, \xi_u), \end{aligned} \quad (3.102)$$

de la misma manera,

$$\begin{aligned} \|\chi_\varphi\|_{1,\Omega} &\leq \alpha_{\mathcal{A}^C}^{-1} \tilde{C}_\varphi r_3 \left( 2 \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S}^{-1} \tilde{C}_{Sob} \beta \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega} (K_2(\xi_\theta, \xi_u) + K_3(\xi_\varphi, \xi_u)) \right. \\ &\quad \left. + 2 \tilde{\alpha}_{\mathcal{A}^S}^{-1} K_1(\xi_\theta, \xi_\varphi) \right) + K_3(\xi_\varphi, \xi_u). \end{aligned} \quad (3.103)$$

Finalmente, reemplazando (3.101), (3.102) y (3.103) en las primeras tres ecuaciones de (3.87), se obtiene la primera desigualdad de (3.93).

Por su parte, para la segunda estimación de error, considerando la condición *inf-sup* (3.54), junto con (3.53), se tiene

$$\begin{aligned} \|\chi_q\|_{0,\Omega} &\leq \tilde{\beta}^{-1} \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V} \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \frac{\mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, \chi_q)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}} \leq \tilde{\beta}^{-1} \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V} \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \frac{\mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, \xi_q)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}} + \tilde{\beta}^{-1} \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V} \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \frac{\mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, -e_q)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}} \\ &\leq \tilde{\beta}^{-1} \tilde{C}_{\mathcal{B}} \|\xi_p\|_{0,\Omega} + \tilde{\beta}^{-1} \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V} \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \frac{\mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, -e_q)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Ahora, para el segundo sumando de la expresión anterior, a partir del teorema 7 se obtiene que

$$\mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, -e_p) = \mathcal{A}_h^S(e_u, \mathbf{v}_h) - \widehat{\mathcal{F}}^S((e_\theta, e_\varphi); \mathbf{v}_h),$$

Tomando valor absoluto junto con la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\mathcal{B}^S(\mathbf{v}_h, -e_p)| \leq \tilde{C}_{\mathcal{A}} \|e_u\|_{2, \mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} + \tilde{C}_{Sob} \beta \|\mathbf{g}\|_{0, \Omega} (\|e_\theta\|_{1, \Omega} + \|e_\varphi\|_{1, \Omega}) \|\mathbf{v}_h\|_{1, \mathcal{T}_h} \quad (3.105)$$

De esta forma, combinando (3.104) con (3.105), se sigue

$$\|\chi_q\|_{0, \Omega} \leq \tilde{\beta}^{-1} \left( \tilde{C}_{\mathcal{B}} \|\xi_p\|_{0, \Omega} + \tilde{C}_{\mathcal{A}} \|e_u\|_{2, \mathcal{T}_h} + \tilde{C}_{Sob} \beta \|\mathbf{g}\|_{0, \Omega} (\|e_\theta\|_{1, \Omega} + \|e_\varphi\|_{1, \Omega}) \right) \quad (3.106)$$

Y así reemplazado la ecuación (3.106), en la última ecuación de (3.87) se obtiene la segunda desigualdad dada en (3.93), lo cuál finaliza la demostración.  $\square$

Este último resultado prueba finalmente que el método converge con un orden  $O(h^k)$  respecto al parámetro de discretización  $k$ .

Con la finalidad de ilustrar el desempeño del método de Galerkin construido en el capítulo anterior, para las soluciones aproximadas del sistema termo-bioconvectivo (3.1) así como confirmar los radios de convergencia (3.93), demostrados en el teorema (8). Se implementará un caso de estudio teórico para el cuál se construirán soluciones exactas manufacturadas, considerando las condiciones de frontera de Dirichlet para la velocidad y temperatura. Además, se considerarán la condición física de masa total sobre la concentración. Una vez se tengas soluciones exactas manufacturadas, se testeará el método de elementos finitos propuesto, para lo cuál se calculará el error y tasas de convergencia.

### 3.4 Implementación computacional

La implementación computacional, se llevo a cabo usando el software **FreeFem++**. Se implementará un método de Picard, como estrategia de punto fijo, sobre una familia de triangulaciones  $\mathcal{T}_h$  sobre el dominio. La implementación de esté método permitirá obtener los errores experimentales y tasas de convergencia para el campo de velocidades, presión, temperatura y concentración. Este proceso de punto fijo finaliza

cuando el error relativo entre dos iteraciones consecutivas es menor que una tolerancia dada. Más precisamente, se debe cumplir

$$\frac{\|\mathbf{coeff}^{m+1} - \mathbf{coeff}^m\|_{\ell^2}}{\|\mathbf{coeff}^{m+1}\|_{\ell^2}} \leq tol$$

donde  $tol$  es la tolerancia para la convergencia y  $\|\cdot\|_{\ell^2}$  es la norma euclidiana estándar  $\ell^2$  en  $\mathbb{R}^N$  siendo  $N$  el número total de grados de libertad definidos por la familia de elementos finitos  $\mathbf{V}_h, H_h, \tilde{H}_h$  y  $\mathbf{Q}_h$  especificados en la sección 3.3.

La implementación computacional para velocidad  $\mathbf{u}$ , presión  $p$ , temperatura  $\theta$  y concentración  $\varphi$ , se ha llevado a cabo en espacios discretos  $\mathbf{BDM}_1, \mathbb{P}_0(\mathcal{T}_h), \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h)$  y  $\mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h)$  respectivamente. Aquí,  $\mathbf{BDM}_1$  representa el espacio de elementos finitos Brezzi-Douglas-Marini de orden 1 y  $\mathbb{P}_0(\mathcal{T}_h), \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h)$  representan los espacios de funciones polinomiales a trozos de primer y segundo orden, respectivamente. Para todos los experimentos, se considerará el parámetro de penalización  $a_0 = 5$ .

Los errores y tasas de convergencia se calcularán de la siguiente forma:

$$e(\mathbf{u}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \mathcal{T}_h}, \quad e(\theta) := \|\theta - \theta_h\|_{1, \Omega}, \quad e(\varphi) := \|\varphi - \varphi_h\|_{1, \Omega}, \quad e(p) := \|p - p_h\|_{1, \Omega}$$

$$r(\mathbf{u}) := \frac{\log(e(\mathbf{u})/e(\mathbf{u}'))}{\log(h/h')}, \quad r(\theta) := \frac{\log(e(\theta)/e(\theta'))}{\log(h/h')},$$

$$r(\varphi) := \frac{\log(e(\varphi)/e(\varphi'))}{\log(h/h')}, \quad r(p) := \frac{\log(e(p)/e(p'))}{\log(h/h')},$$

donde  $h$  y  $h'$  representan el tamaño de dos mallas consecutivas con sus respectivos errores  $e$  y  $e'$ .

En este caso, se trabajará con el dominio  $\Omega = (0, 1)^2$  de frontera  $\Gamma$  y constantes físicas  $\mu = 1, \mu' = 1, \kappa = 1, U = 1, \beta_\theta = 0.250, \beta_\varphi = 0.250, \kappa_\theta = 1, \kappa_\varphi = 1$  y masa promedio  $m = 0.625$ .

Adicionalmente, se manufacturaron las siguientes soluciones;

- El campo de velocidad

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \text{sen}^2(\pi x) \text{sen}^2(\pi y) \cos(\pi y) \\ -\frac{1}{3} \text{sen}(2\pi x) \text{sen}^3(\pi y) \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar que este campo satisface

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma.$$

- El campo de presión

$$p(x, y) = x^4 - y^4,$$

el cual satisface que

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p(x, y) dx dy = 0.$$

- La temperatura

$$\theta(x, y) = y + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(\pi y) \operatorname{cos}(\pi x),$$

la cual es una función positiva para todo  $(x, y) \in \Omega \cup \Gamma$ .

- La concentración

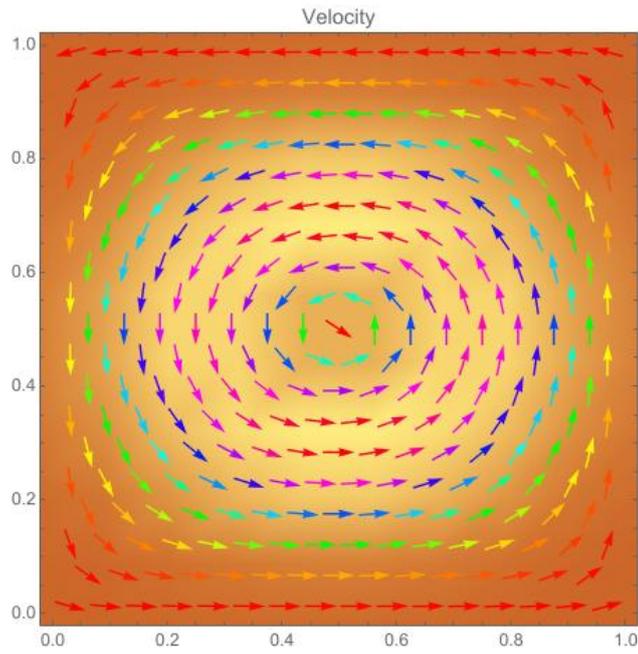
$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{cos}(\pi y) \operatorname{sen}(\pi(x + y)),$$

la cual es una función positiva para todo  $(x, y) \in \Omega \cup \Gamma$ . Además

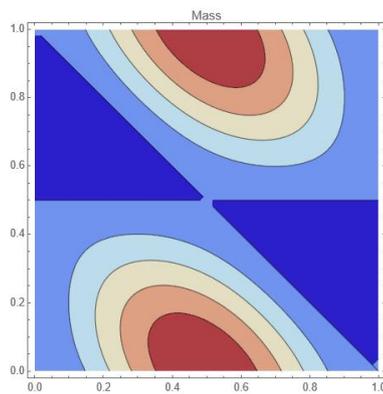
$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi(x, y) dx dy = m = 1.$$

En las figuras (3.1), (3.2) y (3.3) se ilustran la velocidad, temperatura, concentración y presión exactas.

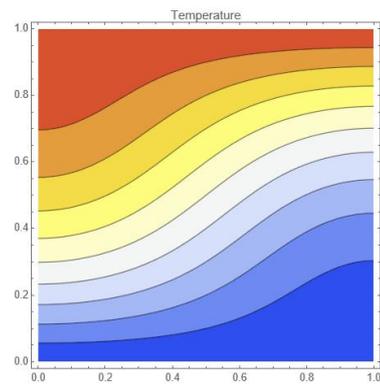
Para la velocidad



**Figura 3.1. Gráfica de la velocidad**



**(a) Concentración**



**(b) Temperatura**

**Figura 3.2. Gráficos de contorno de las funciones test para la concentración y temperatura**

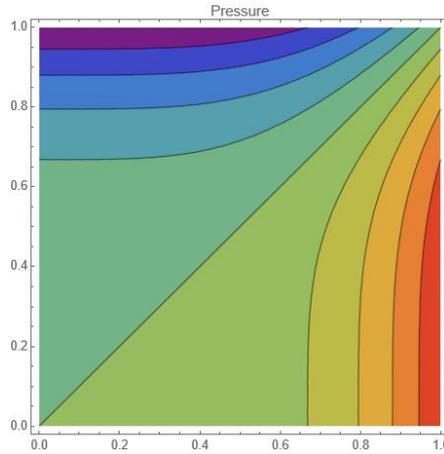


Figura 3.3. Gráfica de contorno de la presión

La siguiente tabla representa los resultados obtenidos para los errores y tasas de convergencia definidos previamente, con una tolerancia para la iteración de Picard de  $tol = 1e - 6$  y 5 refinamientos de malla:

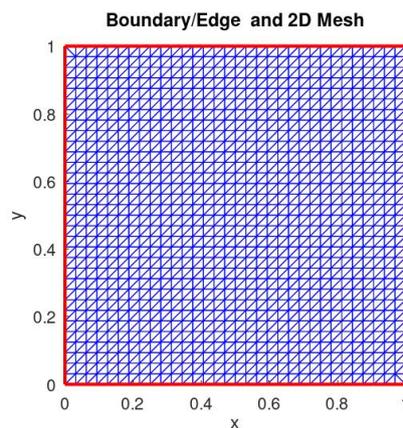
Aproximaciones por método de elementos finitos							
$N$	$h$	$e(\mathbf{u})$	$r(\mathbf{u})$	$e(\theta)$	$r(\theta)$	$e(\varphi)$	$r(\varphi)$
1538	0.1179	0.5543	0.9599	0.0724	0.9945	0.2795	0.9431
2690	0.0883	0.4205	0.9863	0.0544	0.9970	0.2131	0.9694
5954	0.0589	0.2819	0.9978	0.0363	0.9985	0.1438	0.9841
10498	0.0441	0.2116	1.0013	0.0272	0.9992	0.1084	0.9916
23426	0.0295	0.1410		0.0182		0.0725	

Tabla 3.1. Registro de convergencia para el modelo termobio-convectivo con el método  $H-div$  conforme propuesto y orden de aproximación  $k = 1$

$e(p)$	$r(p)$	$\ \text{div}(\mathbf{u}_h)\ _{\infty, \Omega}$	iter
0.3449	0.7750	1.4996e-07	4
0.2759	0.8711	1.3643e-07	4
0.1938	0.9304	1.2342e-07	4
0.1483	0.9626	1.1657e-07	4
0.1004		1.1011e-07	4

**Tabla 3.2.** Registro de convergencia para el modelo termobio-convectivo con el método *H-div* conforme propuesto y orden de aproximación  $k = 1$

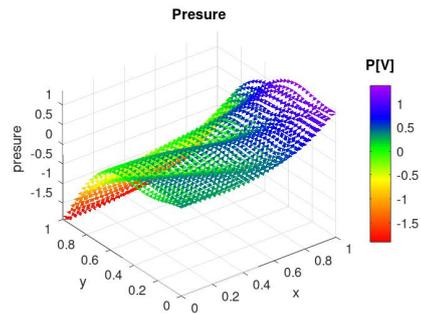
Para las simulaciones numéricas, primero se discretiza el dominio  $\Omega$  en un malla triangular



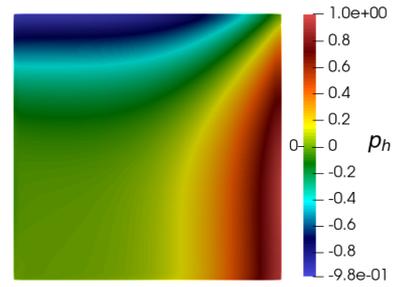
**Figura 3.4.** Triangulación del dominio  $\Omega$  en la malla  $\mathcal{T}_h$

De aquí, se obtuvo la aproximación numérica de las variables, y sus gráficas se muestran en las figuras (3.5), (3.6), (3.7) y (3.8).





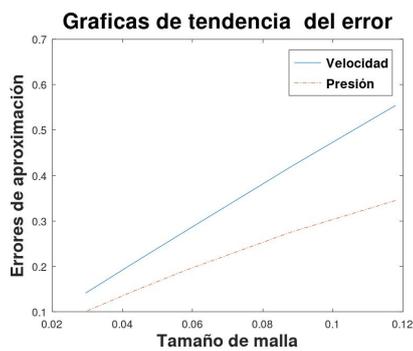
(a) Gráfica de la concentración 3D



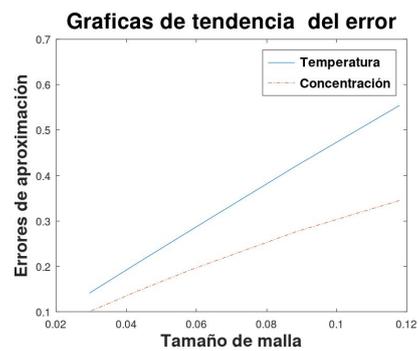
(b) Gráfica de contorno para la concentración

**Figura 3.8. Gráfica de las soluciones numéricas para la concentración**

Adicionalmente, se obtuvieron las gráficas sobre el decrecimiento del error de aproximación, así como la tasa de convergencia en relación al tamaño de malla  $h$

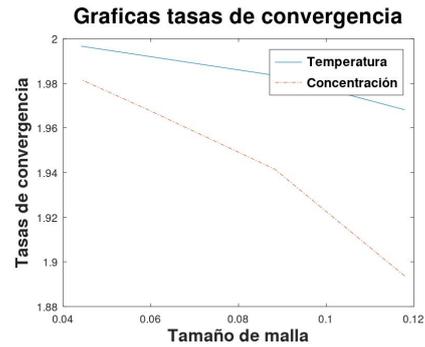
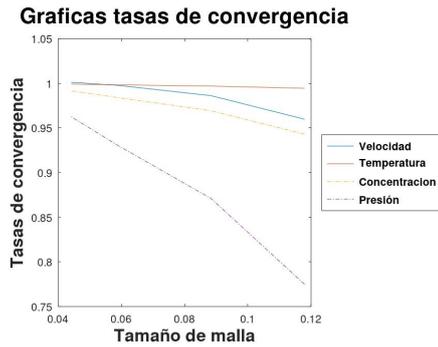


(a) Gráfica de tendencia del error para la velocidad y la presión



(b) Gráfica de tendencia del error para la temperatura y la concentración

**Figura 3.9. Gráficas de la tendencia del error con respecto al parámetro  $h$**



(a) Gráfica de las tasas de convergencia para las variables de interés (b) Gráfica de las tasas de convergencia para la temperatura y la concentración

**Figura 3.10. Gráficas de las tasas de convergencia con respecto al parámetro  $h$**

Las aproximaciones obtenidas de forma visual, tienen mucha similitud a las exactas, como se puede constatar contrastando las figuras (3.5), (3.6), (3.7) y (3.8) con (3.1), (3.2b), (3.2a) y (3.3) respectivamente. Por otra parte, las tablas (3.1) y (3.2) confirman los resultados teóricos obtenidos en el análisis de error, realizado en secciones anteriores. En estas tablas, se puede constatar que las tasas de convergencia para las incógnitas de interés son de orden  $O(h)$  en la norma  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  como se esperaba a partir de la elección del parámetro  $k = 1$  y de los espacios de polinomios implementados, adicionalmente para la temperatura y concentración en la norma  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$  se obtuvo un orden de aproximación de  $O(h^2)$ . Finalmente, una revisión de la figura (3.9) muestra el decrecimiento del error conforme se disminuye el parámetro  $h$ , el mismo que es lineal, lo cual, es resultado de los ordenes de aproximación. Asimismo, para la norma en  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$  se obtuvo que las tasas de convergencia conforme disminuye  $h$  tienden a 2, como se observa en la figura (3.10).

# CAPÍTULO 4

## 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### Conclusiones

Se implementó el nuevo método de elementos finitos  $H\text{-div}$  conforme para la simulación numérica del problema de flujo termo-bioconvectivo Darcy-Brinkman, con la propiedad de ser conservativo en masa. Además, el método numérico propuesto produce aproximaciones de orden  $O(h)$  para las variables de interés. Asimismo, los resultados numéricos muestran que se preservan las propiedades de divergencia nula, lo cuál indica que el método numérico propuesto es en definitiva, conservativo en masa.

Se construyó una formulación continua, sobre espacios de Hilbert apropiados, la cual fue analizada desde el punto de vista de su buen planteamiento. En particular se demostró la existencia de soluciones sin restricciones sobre la data del problema, lo cual desde el punto de vista teórico es bueno y se diferencia de los trabajos sobre el fenómeno estudiado en los que si se impone una restricción sobre la data.

Por otro lado, bajo la suposición de una data lo suficientemente pequeña se demostró la unicidad de las solución, lo cuál es teórica y físicamente aceptable.

Se comprobó que el esquema numérico de elementos finitos construido estaba bien planteado. Para lo cuál, se introdujeron términos de penalización estándar en el operador asociado a la velocidad, debido a que para las ecuaciones del fluido se plantea un esquema numérico no conforme. De esta manera, se probó que el método discreto estaba bien planteado y que además es convergente para cualquier familia de subespacios de elementos finitos siempre y cuando se satisfaga la condición *inf-sup* discreta.

Finalmente, se presentó un ejemplo numérico en dos dimensiones para validar lo predicho por la teoría. En esa misma línea, los resultados obtenidos ilustraran que el método de elementos finitos  $H\text{-div}$  conforme construido para el fenómeno termo-bioconvectivo

estudiado, es confiable.

Como trabajo futuro, se puede considerar el modelo generalizado, que involucra el planteamiento de un método totalmente discontinuo, es decir, planteando el mismo enfoque no conforme de la velocidad, a la temperatura y concentración. Consecuentemente, para esta posible generalización la formulación variacional correspondiente preserva la misma estructura que la formulación variacional propuesta en el presente proyecto. Un modelo de este tipo, tendría muchas aplicaciones, como ejemplo se tiene a la microbiología aplicada, puesto que varios fenómenos relacionados con la hidrodinámica de microorganismos se modelan típicamente en términos de ecuaciones diferenciales parciales acoplados que involucran un sistema tipo Navier-Stokes. Es así que, en esta línea científica, el presente método numérico contribuye con el análisis y la simulación numérica de flujos termo-bioconvectivos y fenómenos afines.

### **Recomendaciones**

Para futuras aplicaciones, se deben tener en cuenta las condiciones de frontera que se han supuesto en el presente modelo, puesto que un cambio de las mismas puede conllevar a un análisis completamente diferente al planteado en este proyecto.

Asimismo, los espacios de elementos finitos a considerarse en la construcción del método numérico parte de las ecuaciones del fluido, los cuales deben satisfacer la condición *inf-sup* y preservar las propiedades del modelo continuo.

Es importante tener en cuenta que, los posibles esquemas numéricos que estudien fenómenos como los estudiados en este proyecto o afines, garanticen su estabilidad, consistencia y convergencia sin restricciones sobre la data del propio modelo físico, puesto que este es uno de los aspectos que determina en gran medida la confiabilidad y utilidad a nivel industrial del método numérico que se desee proponer.

Finalmente, podría resultar interesante el planteamiento de un esquema numérico empleando métodos espectrales, puesto que este ofrece más flexibilidad sobre la elección del grado de los polinomios, para la obtención de mejores tasas de convergencia, lo cual conllevaría mejor análisis.

# BIBLIOGRAFÍA

- Adams, R. A. and Fournier, J. J. (2003). *Sobolev spaces*. Elsevier.
- Arnold, D. N. (1982). An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM journal on numerical analysis*, 19(4):742–760.
- Brezis, H. and Brézis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer.
- Burton, T. and Kirk, C. (1998). A fixed point theorem of krasnoselskii-schaefer type. *Mathematische Nachrichten*, 189(1):23–31.
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., and Zang, T. A. (2007). *Spectral methods: fundamentals in single domains*. Springer Science & Business Media.
- Cao, Y. and Chen, S. (2014). Analysis and finite element approximation of bioconvection flows with concentration dependent viscosity. *International Journal of Numerical Analysis & Modeling*, 11(1).
- Cisneros, L. H., Kessler, J. O., Ganguly, S., and Goldstein, R. E. (2011). Dynamics of swimming bacteria: transition to directional order at high concentration. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 83 6 Pt 1:061907.
- Cockburn, B., Kanschat, G., and Schötzau, D. (2005). A locally conservative Idg method for the incompressible navier-stokes equations. *Mathematics of computation*, 74(251):1067–1095.
- Cockburn, B., Kanschat, G., and Schötzau, D. (2007). A note on discontinuous galerkin divergence-free solutions of the navier–stokes equations. *Journal of Scientific Computing*, 31(1):61–73.

- Colmenares, E., Gatica, G. N., and Miranda, W. (2021). Analysis of an augmented fully-mixed finite element method for a bioconvective flows model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 393:113504.
- Colmenares, E. and Neilan, M. (2016). Dual-mixed finite element methods for the stationary boussinesq problem. *Computers & Mathematics with Applications*, 72(7):1828–1850.
- Di Pietro, D. and Ern, A. (2012). *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*, volume 69.
- Girault, V. and Raviart, P.-A. (2012). *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*, volume 5. Springer Science & Business Media.
- Hansbo, P. and Larson, M. G. (2002). Discontinuous galerkin methods for incompressible and nearly incompressible elasticity by nitsche's method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(17-18):1895–1908.
- Hopkins, M. M. and Fauci, L. J. (2002). A computational model of the collective fluid dynamics of motile micro-organisms. *Journal of Fluid Mechanics*, 455:149–174.
- Jamuna, B. and Balla, C. S. (2021). Bioconvection in a porous square cavity containing gyrotactic microorganisms under the effects of heat generation/absorption. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, 235(5):1534–1544.
- Kuznetsov, A. (2006). Thermo-bio-convection in porous media. *Journal of Porous Media - J Porous Media*, 9:581–589.
- Kuznetsov, A. and Jiang, N. (2001). Numerical investigation of bioconvection of gravitactic microorganisms in an isotropic porous medium. *International communications in heat and mass transfer*, 28(7):877–886.
- Nguyen-Quang, T., Le Palec, G., et al. (2008). Gravitactic bioconvection in a fluid-saturated porous medium with double diffusion. *Journal of Porous Media*, 11(8).

- Oyarzúa, R., Qin, T., and Schoetzau, D. (2014). An exactly divergence-free finite element method for a generalized boussinesq problem. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 34:1104–1135.
- Quarteroni, A. (2017). *Numerical Models for Differential Problems*.
- Quarteroni, A. and Valli, A. (2008). *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 23. Springer Science & Business Media.
- Sohail, A., Noor, M., Ellahi, R., and Sait, S. M. (2021). Concentration gradients of turbulent flows of viscous fluid in a multi-chambered reactor: Application of solar energy system in oil industry. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, 45:101140.
- Zhao, M., Wang, S., Wang, H., and Mahabaleshwar, U. (2019). Darcy–brinkman bio-thermal convection in a suspension of gyrotactic microorganisms in a porous medium. *Neural Computing and Applications*, 31:7.