1.1. Revisión de mru y mruv.

El movimiento rectilíneo uniforme (mru) es un movimiento que se realiza con velocidad constante, y la ecuación que permite representar ese movimiento es

$$\Delta x = v_x t \qquad (1)$$

La ecuación anterior puede ser expresada también como función de las posiciones inicial y final

$$x = x_0 + vt \qquad (2)$$

Los gráficos posición versus tiempo y velocidad versus tiempo son muy útiles a la hora de determinar ciertos datos.

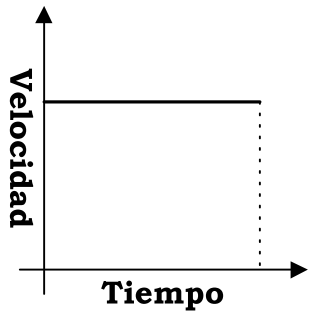


Figura 1

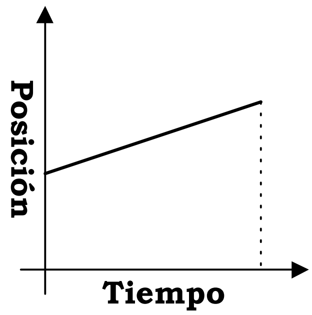


Figura 2

En el gráfico velocidad versus tiempo podemos calcular el desplazamiento a partir del cálculo del área debajo de dicha curva.

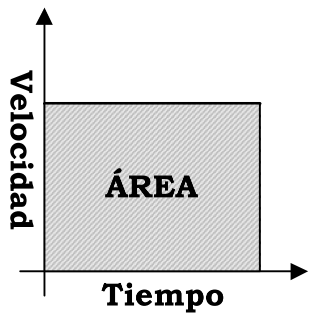


Figura 3

Para el gráfico posición versus tiempo, la representación es una recta que puede estar inclinada hacia la derecha (como en el caso de la figura 2), puede estar inclinada hacia la izquierda, o puede estar en forma horizontal. Para el caso expuesto en la figura 2, la partícula se está moviendo a favor del sistema de referencia, porque está aumentando la posición en los valores positivos, por lo tanto su velocidad tendrá también la misma dirección, esto es, en la dirección positiva. Para el caso en que la recta esté inclinada hacia la izquierda, la velocidad será negativa porque está disminuyendo la posición, y finalmente para el caso en que la recta sea horizontal la velocidad será cero porque no ha cambiado la posición, y por lo tanto el desplazamiento será cero y consecuentemente, la velocidad será cero.

Matemáticamente, la inclinación de la recta se denomina **pendiente**, y se la determina mediante la ecuación

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1}$$

donde y_2 representa el valor final de la cantidad física que está en el eje y, en este caso la posición final, y_1 representa el valor inicial de la cantidad física que está en el eje y, en este caso la posición inicial, de igual manera x_2 y x_1 representan los valores inicial y final de la cantidad física que existe en el eje x, en este caso el tiempo.

El movimiento rectilíneo uniformemente variado es un movimiento en el que la aceleración permanece constante, de manera que la rapidez cambia de forma constante. Eso expresado matemáticamente es

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{t} = \frac{\vec{v} - \overrightarrow{v_0}}{t}$$
$$at = v - v_0$$
$$v = v_0 + at \qquad (1)$$

Si hacemos uso del criterio anterior, el área debajo de la curva velocidad versus tiempo da como resultado el desplazamiento podemos deducir las ecuaciones que ayudan a analizar este movimiento. Además, se sabe que el área de un trapecio (en este caso trapezoide) es el producto de la semisuma de las bases por la altura del mismo.

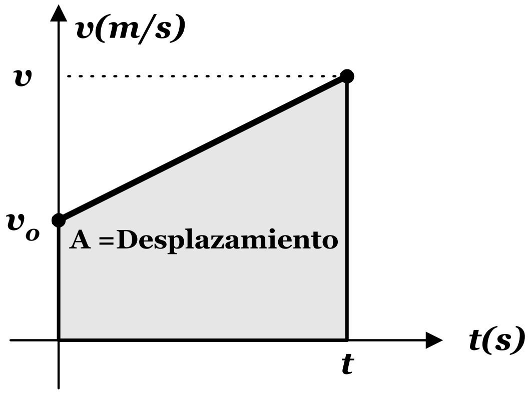


Figura 4

$$A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \times h$$
$$\Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2}\right) t \qquad (2)$$

Si reemplazamos la ecuación (1) en la ecuación (2) tendremos

$$\Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2}\right) t \quad (2)$$
$$v = v_0 + at \qquad (1)$$
$$\Delta x = \left[\frac{(v_0 + at) + v_0}{2}\right] t$$
$$\Delta x = \left[\frac{2v_0 + at}{2}\right] t = \frac{2v_0 t + at^2}{2}$$
$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \qquad (3)$$

Si ahora reemplazamos la ecuación (1) en la ecuación (2), pero con el tiempo despejado tendremos

$$v = v_0 + at$$
$$v - v_0 = at$$
$$t = \frac{v - v_0}{a} \quad (1)$$
$$\Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t \quad (2)$$

$$\Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \frac{(v + v_0)(v - v_0)}{2a}$$
$$2a\Delta x = v^2 - v_0^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \quad (4)$$

Recuerde que en este caso $\Delta x = x - x_0$

Estas cuatro ecuaciones nos ayudarán a resolver los ejercicios que se presenten para estos movimientos.

Además, se define la velocidad media como la razón de cambio del desplazamiento, que expresado en ecuaciones es

$$\overrightarrow{v_{med}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

En cambio, la rapidez media es la razón de cambio de la distancia

$$Rap_{med} = \frac{d}{\Delta t}$$

Para una partícula que se encuentra cayendo (o subiendo), el movimiento es mruv, sólo que aquí el valor de la aceleración es $g = 9.8\ m/s^2$, y dependiendo del sistema de referencia puede ser positivo o negativo.

El movimiento parabólico es aquel en el que se combinan los movimientos mru en el eje de las x y mruv en e el eje de las y.

1.1.1. Ejercicios resueltos

1. Encuentre la velocidad media y la rapidez media de la pelota que está amarrada a la cuerda, y que sale del punto P y llega al punto Q, si demora 0.60 s en el recorrido.

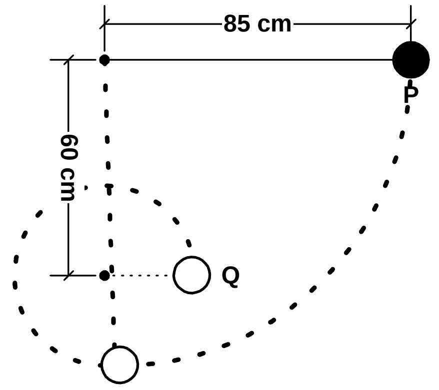


Figura 5

SOLUCIÓN

La velocidad media es la razón entre el desplazamiento y el tiempo. En la figura 6 se muestra con la flecha PQ el desplazamiento, y con línea curva PQ la distancia recorrida por la partícula.

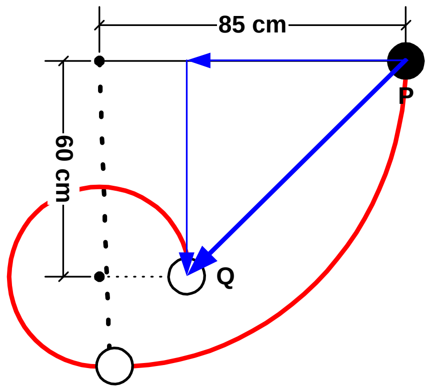


Figura 6

El desplazamiento de la partícula es $\overrightarrow{\Delta r} = \left(-0.60\hat{i} - 0.60\hat{j}\right)m$, por tanto la velocidad media será $\overrightarrow{Vm} = \dfrac{\left(-0.60\hat{i} - 0.60\hat{j}\right)m}{0.60s}$ $= \overrightarrow{Vm} = \left(-\hat{i} - \hat{j}\right)m/s$, y la magnitud de la velocidad media es, por tanto

$$\left|\overrightarrow{Vm}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2}\ m/s$$

$$\left|\overrightarrow{Vm}\right| = 1.41\,m/s$$

La distancia recorrida por la partícula está compuesta de dos trayectorias circulares, la una es la cuarta parte de la longitud de la circunferencia que tiene por radio r_1 = 0.85 cm, y la otra parte de la trayectoria curvilínea son las tres cuartas partes de una circunferencia de radio r_2 = 0.25 cm.

$$d_{TOTAL} = d_1 + d_2$$

$$d_{TOTAL} = \frac{2\pi r_1}{4} + \frac{3(2\pi r_2)}{4}$$

$$d_{TOTAL} = \frac{2\pi(0.85m)}{4} + \frac{3(2\pi(0.25m))}{4}$$

$$d_{TOTAL} = 2.51m$$

Por tanto la rapidez media será

$$Rapm = \frac{2.51}{0.60} m/s$$
$$Rapm = 4.183 m/s$$

2. Dos partículas se encuentran separadas 100 m, y se dirigen la una hacia la otra con velocidades constantes de 5 m/s y – 3 m/s. Encuentre la distancia, a partir de la ubicación de la partícula que se mueve a 5 m/s, en que ocurre el encuentro.

SOLUCIÓN
La figura 7 muestra la situación presentada en el enunciado del problema anterior.
En este caso estamos considerando nuestro sistema de referencia como positivo hacia la derecha. Recuerde

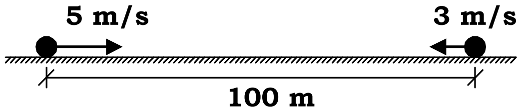


Figura 7

que el signo en la velocidad solamente indica la dirección del movimiento, por lo tanto la partícula que se mueve en la dirección positiva (hacia la derecha) es la partícula que tiene velocidad + 5 m/s, y la partícula que se mueve hacia en la dirección negativa (hacia la izquierda) es la que tiene la velocidad – 3 m/s.

En la figura 8 mostramos el desplazamiento realizado por cada partícula.

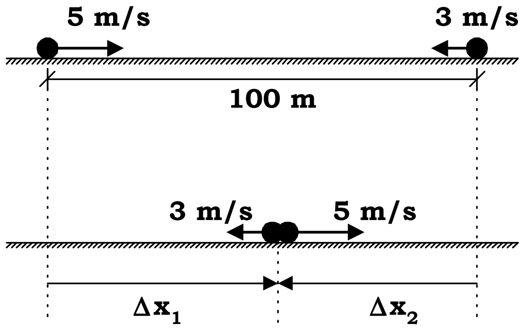


Figura 8

Note que el desplazamiento de la partícula 1 es positivo, mientras que el desplazamiento de la partícula 2 es negativo. Además, recuerde que si una partícula no cambia la dirección del movimiento, la distancia recorrida es igual a la magnitud del desplazamiento, o sea, la distancia recorrida por la partícula 1 es igual a la magnitud del desplazamiento 1, y la distancia recorrida por la partícula 2 es igual a la magnitud del desplazamiento 2. Fíjese también que de la figura 4 se puede concluir que la distancia recorrida por la partícula 1 más la distancia recorrida por la partícula 2 es igual a 100 m, en ecuaciones esto es,

$$d_1 + d_2 = 100 \text{ m}$$

pero recuerde que la distancia 1 es la magnitud del desplazamiento 1, y la distancia 2 es la magnitud del desplazamiento 2, o sea,

$$|\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 100 \text{ m}$$

pero recordemos que en el movimiento rectilíneo uniforme (con velocidad constante) el desplazamiento es igual al producto de la velocidad por el tiempo transcurrido.

$$|v_1 t| + |v_2 t| = 100 \text{ m}$$
$$|(5 \text{ m/s})t| + |(-3 \text{ m/s})t| = 100 \text{ m}$$
$$(5 \text{ m/s})t + (3 \text{ m/s})t = 100 \text{ m}$$
$$(8 \text{ m/s})t = 100 \text{ m}$$

$$t = 12.5 \text{ s}$$

Este tiempo es el tiempo en el que se encuentran las dos partículas, luego, la distancia a partir de la ubicación de la partícula que se mueve a + 5 m/s es

$$d_1 = |\Delta x_1| = |v_1 t| = |(5\ m/s)(12.5\ m/s)|$$
$$d_1 = 62.5\ m$$

3. Dos vehículos A y B se encuentran en la misma posición al tiempo t = 0. Ambos se mueven en línea recta, A se mueve con velocidad constante de 20 m/s, dos segundos después sale B desde el reposo y en la misma dirección. Determine la aceleración, en m/s², que deberá imprimir B para alcanzar al móvil A a una distancia de 200 m desde el punto de partida.

SOLUCIÓN
La figura 9 muestra la situación que se presenta en el enunciado del ejercicio.

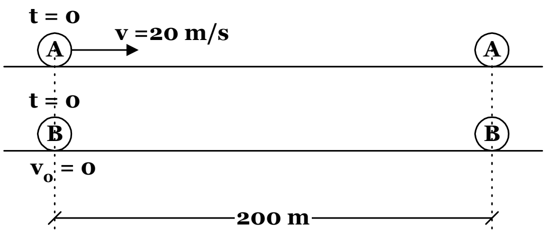


Figura 9

Se puede apreciar que si las partículas salen del mismo punto y llegan al mismo lugar, el desplazamiento es el mismo para ambas partículas, o sea,

$$\Delta x_A = \Delta x_B \qquad (1)$$

Puesto que la partícula A se mueve con velocidad constante utilizamos la ecuación

$$\Delta x = vt \qquad (2)$$

Donde v = 20 m/s, y el tiempo de movimiento es t. El tiempo ya se lo puede calcular sabiendo que el desplazamiento es 200 m.

$$200\ m = (20\ m/s)t$$
$$\frac{200m}{20\frac{m}{s}} = t$$
$$t = 10s$$

Para la partícula B el movimiento es uniformemente variado, en el que utilizamos la ecuación

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3)$$

Aquí V0 = 0 y el tiempo es t – 2, puesto que salió dos segundos después que la partícula A, por lo tanto tiene dos segundos menos moviéndose. Al reemplazar las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1), tenemos

$$200m = 0 + \frac{1}{2}a(8s)^2$$
$$200m = 0 + \frac{1}{2}a(64s^2)$$
$$\frac{200m}{32s^2} = a$$
$$a = 6.25m/s^2$$

4. Desde la terraza de un edificio de 50 m de altura se lanza verticalmente y hacia arriba un objeto con una velocidad de 20 m/s. Al mismo instante y desde la calle se lanza otro objeto en forma vertical con una velocidad de 30 m/s. Encuentre el tiempo en que los objetos se encontrarán.

SOLUCIÓN

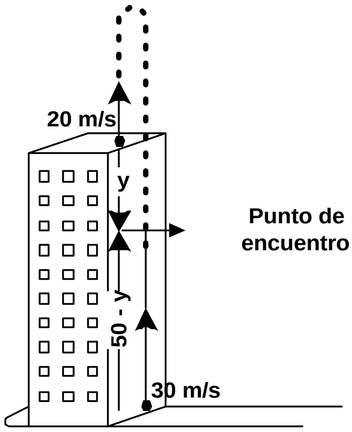


Figura 10

Realizamos un gráfico en el que representemos todos los datos dados. De acuerdo a los datos presentados podemos utilizar la ecuación de desplazamiento. Además note que el desplazamiento de la partícula que parte desde la terraza del edificio es negativo, mientras que el desplazamiento de la partícula que parte desde el nivel de la calle es positivo, de acuerdo a la referencia normal del eje y, que es positiva hacia arriba y negativa hacia abajo.

$$\Delta y = v_0 t + \tfrac{1}{2} a_y t^2$$

$$y = -20t + 4.9\, t^2$$

(1) $\quad -y = 20t + \tfrac{1}{2}(-9.8)t^2$

(2) $\quad 50 - y = 30t - 4.9\, t^2$

Si sumamos las dos ecuaciones tenemos

$$50 = 10t \Rightarrow t = 5s$$

5. Una caja cae desde el reposo y desde una altura de 20 m. Justo en el instante antes de tocar el suelo, un objeto se lanza desde la caja verticalmente y hacia arriba con una velocidad de 25 m/s (con respecto a la caja). Determine el tiempo que el objeto tardará en volver al suelo. Use g = 10 m/s^2.

SOLUCIÓN

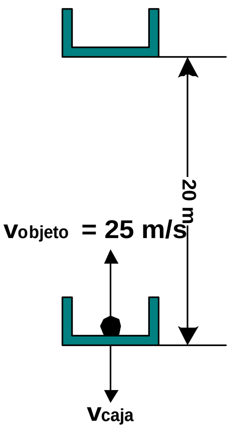


Figura 11

La gráfica adjunta muestra la situación inicial y final de la caja junto con el objeto que va en su interior. Mientras el objeto vaya dentro de la caja, lleva la misma velocidad que ésta, por tanto la velocidad con que sale el objeto de la caja es la suma vectorial de las velocidades. Calcularemos primero la velocidad con que cae la caja.

$v^2 = v_0^2 + 2a_y\Delta y$
$v^2 = 0 + 2(-10)(-20)$
$v = -20$ m/s (es negativa por tener dirección opuesta a la referencia positiva)

La velocidad de la caja respecto de la tierra es

$\mathbf{V}_{\mathbf{CAJA}} + \mathbf{V}_{\mathbf{OBJETO}} = 25 + (-20) = 5$ m/s

El gráfico siguiente muestra al objeto en caída libre (a = -10 m/s^2). Recuerde que para un objeto en caída libre, en posiciones iguales la magnitud de la velocidad es la misma, pero de sentido opuesto.

$v = v_0 + a_y t$
$-5 = 5 - 10t$
$-10 = -10t$
$t = 1$ s

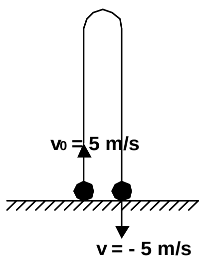


Figura 12

6. Una piedra se deja caer en un pozo y se oye el ruido producido al chocar con el agua 3.2 s después. Calcule la profundidad del pozo hasta donde comienza el nivel del agua. Velocidad del sonido 340 m/s.

SOLUCIÓN

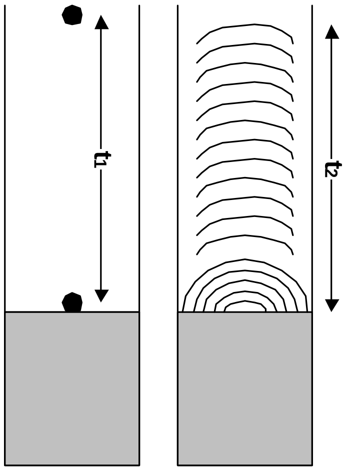


Figura 13

Los 3.2 s es el tiempo total, desde que la piedra cae y choca con el agua, hasta que el sonido llega hasta fuera del pozo.

$3.2 = t_1 + t_2$

El movimiento de la piedra es en caída libre, mientras que el del sonido es rectilíneo uniforme.

$\Delta y_{PIEDRA} = v_0t + \frac{1}{2} at^2$

$-y = 0 - 4.9\, t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{y}{4.9}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{4.9}}$

$\Delta y_{SONIDO} = vt$

$y = 340\, t_2 \Rightarrow t_2 = y/340$

Reemplazando en la primera ecuación tenemos

$$3.2 = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{4.9}} + \frac{y}{340}$$

$$3.2 = \frac{h}{\sqrt{4.9}} + \frac{h^2}{340}$$

Haremos un cambio de variable para facilitar la solución de la ecuación. Dejaremos $h = \sqrt{y}$, y $h^2 = y$, y luego eliminamos los denominadores.

$2408.39 = 340h + 2.21h^2$

$2.21h^2 + 340h - 2408.39 = 0$

$$h = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 + 4(2.21)(2408.39)}}{4.42}$$

$h_1 = 6.78 \qquad \Rightarrow y_1 = 46$ m

$h_2 = -160.63 \qquad \Rightarrow y_2 = 25802$ m

Debido a que la profundidad del pozo no puede ser 25802 m, la respuesta es 46 m.

7. Un globo asciende con velocidad constante de 20 m/s. A los 5 s de su partida se lanza desde el globo un objeto horizontalmente con una velocidad de 10 m/s. Encuentre el tiempo que tardará el objeto en llegar al suelo desde el instante en que fue lanzado.

SOLUCIÓN

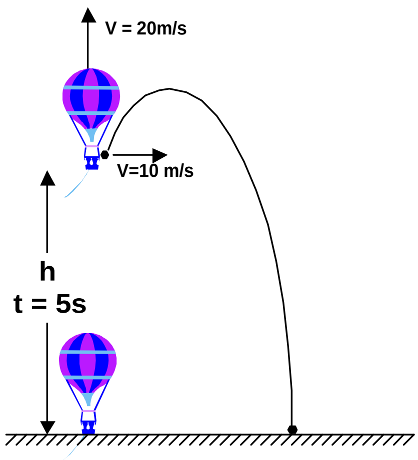


Figura 14

Según se ve en el gráfico. La partícula **no sale horizontalmente**, porque también lleva una velocidad vertical, la que es igual a la que lleva el globo. La partícula parte desde la altura h, que es la altura a la que ha ascendido el globo en movimiento rectilíneo uniforme (velocidad constante) durante los 5s. Esta altura la calculamos como sigue

$y = v_yt$

$y = (20\text{ m/s})(5\text{s})$

$y = 100$ m

El movimiento del objeto es de caída libre una vez que sale del globo, debido a que sólo se ve afectado por la aceleración de la gravedad. El tiempo de caída del objeto lo calculamos mediante la ecuación

$y = v_{oY}t + \frac{1}{2} a_Yt^2$

$-100 = 20t - 4.9t^2$

Al reordenar la ecuación, nos queda la ecuación cuadrática

$$4.9t^2 - 20t - 100 = 0$$

Por tanto t es igual a

$$t = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(4.9)(-100)}}{2(4.9)}$$

$$t = 7.0s$$

8. Un proyectil se dispara desde la cumbre de una pendiente, que hace un ángulo de 22º con la horizontal con una velocidad horizontal inicial de 52 m/s. ¿En cuántos segundos el proyectil toca el suelo de la pendiente?

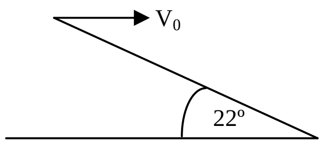


Figura 15

SOLUCIÓN

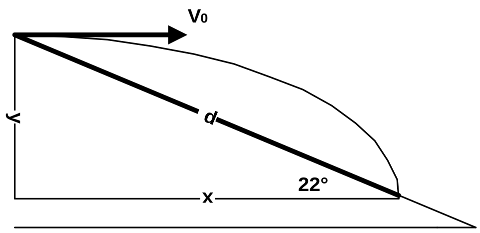


Figura 16

En el gráfico que se muestra, podemos ver que la distancia d que recorre la partícula sobre la pendiente es posible relacionarla con los desplazamientos en los ejes X y Y, por medio de las funciones trigonométricas.

$x = d\cos 22°$
$y = d\,\text{sen}22°$

Podemos ahora aplicar las ecuaciones de movimiento de cada eje.

$x = v_x t$
$d\cos 22° = v_0 t$
$d = \frac{v_0 t}{\cos 22°}$ (1)

$y = v_{0Y}t + ½ a_Y t^2$
$-d\,\text{sen}22° = -4.9t^2$
$d\,\text{sen}22° = 4.9t^2$ (2)

Reemplazamos la ecuación (1) en la ecuación (2)

$$\left(\frac{v_0 t}{\cos 22°}\right)(\text{sen } 22°) = 4.9t^2$$

$$Tan22° v_0 t = 4.9t^2$$

$$t = \frac{tan22°(52m/s)}{4.9m/s^2}$$

$$t = 4.29\ s$$

9. Un objeto se lanza horizontalmente con una velocidad de 20 m/s desde una altura de 10 m, como se indica en la figura 17, ¿qué aceleración debería imprimir el carrito para que el objeto caiga en él?, asumiendo que parten al mismo tiempo.

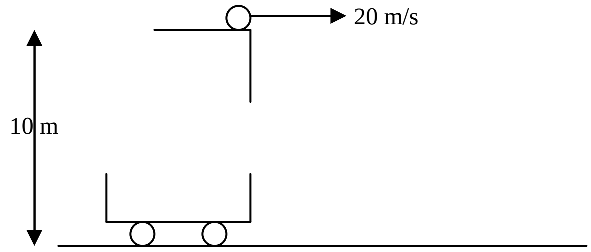


Figura 17

SOLUCIÓN

Debido a que tanto el carrito como el objeto salen al mismo tiempo, el tiempo del movimiento es el mismo para ambas partículas. Además, si el objeto cae en el carrito, la distancia que recorre el carrito es la misma que recorre el objeto horizontalmente. Con este análisis planteamos las ecuaciones necesarias.

ANÁLISIS PARA EL OBJETO

$y = v_{oY}t + \frac{1}{2} a_Y t^2$

$-10 = -4.9t^2$

$t = 1.43$ s

$x = v_X t$

$x = 20(1.43)$

$x = 28.6$

ANÁLISIS PARA EL CARRITO

$x = v_{oX}t + \frac{1}{2} a_X t^2$

$28.6 = \frac{1}{2} a_X (1.43)^2$

$a_X = 28$ m/s²

10. Se lanzan tres piedras A, B y C, desde el filo de una terraza con la misma rapidez inicial, como se muestra en la figura 18. La rapidez con la que cada piedra llega al suelo está relacionada por:
   a) $V_A = V_B = V_C$
   b) $V_A < V_B < V_C$
   c) $V_A > V_B > V_C$
   d) $V_A = V_C > V_B$
   e) $V_A = V_C < V_B$

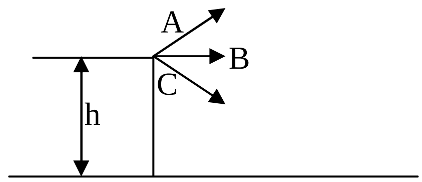


Figura 18

SOLUCIÓN

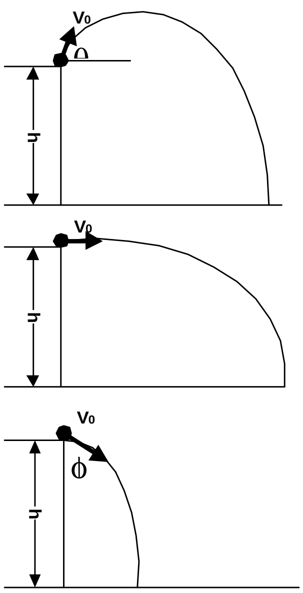


Figura 19

Las tres parten desde el mismo punto por tanto la altura desde la que caen es la misma, por tanto la velocidad con la que llegarán al piso es la misma.
La demostración matemática se da a continuación.

$$Vy^2 = V_{0y}^2 - 2gy \qquad Vx = V_0 Cos\theta$$

$$Vy^2 = V_0^2 Sen^2\theta - 2gy \qquad V_x^2 = V_0^2 Cos^2\theta$$

Aquí y = - h por la ubicación del sistema de referencia. La velocidad final total de las tres partículas está dada por

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2}$$

$$V = \sqrt{V_0^2 Cos^2\theta + V_0^2 Sen^2\theta + 2gh}$$

Podemos factorizar la última expresión, y luego utilizar la identidad trigonométrica $Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1$

$$V = \sqrt{V_0^2 (Cos^2\theta + Sen^2\theta) + 2gh}$$

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2gh}$$

Resultado que no depende más que de la rapidez con que fue lanzado el objeto y de la altura de donde fue lanzado.

1.1.2. Ejercicios propuestos

1. Un carro cubre la primera mitad de la distancia recorrida entre dos puntos con una rapidez de 10 m/s. Durante la segunda mitad, su rapidez es 40 m/s. ¿Cuál es la velocidad media del carro durante todo el recorrido? (Deber 1, I término 2005 – 2006).
   Respuesta: 16 m/s.

2. Un coche lleva una velocidad de 72 km/h y los frenos que posee son capaces de producirle una desaceleración máxima de 6 m/s^2. El conductor tarda 0.8 s en reaccionar desde que ve un obstáculo hasta que logra frenar. ¿A qué distancia ha de estar el obstáculo para que el conductor pueda evitar el choque? (Deber 1, I término 2004 – 2005).
   Respuesta: 49 m.

3. Una pelota rueda por una pendiente desde el reposo, y con aceleración constante, recorriendo 150 m en 5 s. ¿Qué distancia recorrió durante el quinto segundo de su movimiento? (Deber 1, I término 2004 – 2005).
   Respuesta: 54 m.

4. Un tren subterráneo acelera a 1.20 m/s^2 desde el reposo entre dos estaciones que están separadas 1100 m. Cuando llega a la mitad de esta separación desacelera a 1.20 m/s^2 hasta llegar al final. Encuentre el tiempo que se mueve entre las estaciones y la máxima rapidez alcanzada por el tren. (Deber 2, I término 2000 – 2001).
   Respuesta: 60.6 s, 36.3 m/s.

5. Un objeto cae al vacío desde la azotea de un edificio y recorre una distancia h hasta llegar a la acera. En el último segundo de su caída recorre una distancia de h/4. Encuentre la altura del edificio. (Deber 1, I término 2004 – 2005).
   Respuesta: 273 m.

6. Un globo asciende con una rapidez de 12 m/s a una altura de 80 m sobre el suelo cuando suelta un paquete. ¿Qué tiempo tarda el paquete en llegar al suelo? (Deber 2, I término 2000 – 2001).
   Respuesta: 5.4 s.

7. Un helicóptero desciende verticalmente con una rapidez constante de 10 m/s, al llegar a una altura de 1500 m sobre el terreno se deja caer un paquete desde una de sus ventanas.
   a) ¿Cuánto tiempo tarda el paquete en llegar al suelo?
   b) ¿Con qué velocidad llega el paquete al suelo?
   (Examen final de Física A, 2 de septiembre de 2005).
   Respuesta: a) 18.5 s; b) – 191.7 m/s

8. Una partícula que se mueve en el plano XY con aceleración constante $\vec{a} = (4\hat{i} + 3\hat{j})m/s^2$. En el instante inicial se encuentra en el punto de coordenadas (4,3) y su velocidad en dicho instante es $\vec{v} = (2\hat{i} - 9\hat{j})m/s$.
   Encuentre:
   a) La posición de la partícula a los 4 s.
   b) La velocidad de la partícula a los 4 s.
   (Examen parcial de Física A, I término 2005).
   Respuesta: a) $\vec{x} = (44\hat{i} - 9\hat{j})m$; b) $\vec{v} = (18\hat{i} + 3\hat{j})m/s$

9. Se deja caer una piedra desde una altura de 120 m. ¿Qué distancia recorre en el último segundo antes de tocar el suelo? (Examen parcial de Física I, Invierno 2005).
   Respuesta: 43.6 m

10. La rapidez total de un proyectil en su altura máxima es v_1 y es igual a $\sqrt{6/7}$ de la rapidez total v_2, cuando está a la mitad de la altura máxima. Demuestre que el ángulo de elevación del proyectil es 30°.
    (Deber 1, II término, 2002 – 2003).

11. Una mujer lanza un globo lleno de agua a 50° sobre la horizontal con una rapidez de 12 m/s. La componente horizontal de la velocidad se dirige hacia un auto que avanza hacia la mujer a 8 m/s. Para que el globo golpee al auto, ¿a qué distancia máxima de la chica puede estar éste en el instante del lanzamiento? Ignore la resistencia del aire. (Deber 1, I término, 2005 – 2006).
    Respuesta: 29.5 m

12. Un niño lanza una pelota sobre el tejado plano de una casa de 3.2 m de altura y 7.4 m de ancho, de manera que libra justamente los extremos de ambos lados, como se muestra en la figura 20. Si el niño está parado a 2.1 m de la pared, ¿cuál es la velocidad inicial de la pelota y el ángulo de lanzamiento? Suponga que la pelota se lanza desde el nivel del suelo. (I término, 2001 – 2002).
Respuesta: 61.7° y 11.7 m/s.

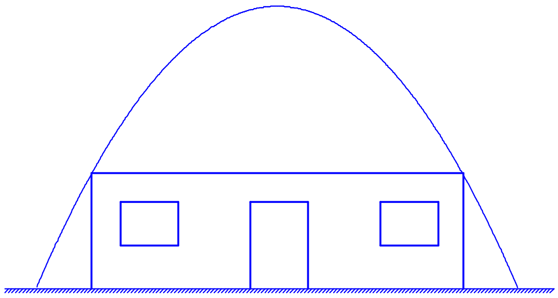


Figura 20

13. Un corredor de 100 metros hizo un tiempo de 10.25 s, pero justamente al cruzar la línea de meta fue alcanzado por el proyectil disparado al dar la salida a los corredores. Encuentre el ángulo con que se efectuó el disparo. Use g = 9.81 m/s². (Examen de mejoramiento, I término 2004 – 2005).
Respuesta: 79°

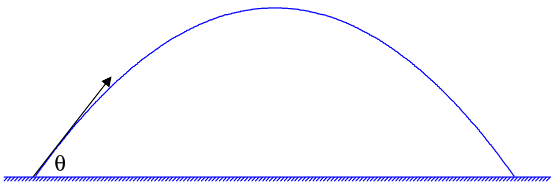


Figura 21

14. Una pelota de baseball se lanza hacia un jugador con una velocidad inicial de 20 m/s y forma un ángulo de 45° con la horizontal. En el momento de lanzar la pelota el jugador está a 50 m del lanzador. ¿A qué velocidad constante deberá correr el jugador para coger a la pelota a la misma altura desde donde se lanzó? Use g = 10 m/s². (Examen parcial, I término 2003 – 2004).
Respuesta: 3.53 m/s

15. Desde el filo de la terraza de un edificio de 50 m de altura se lanza una pelota con una velocidad $\vec{v} = \left(20\hat{i} + 25\hat{j}\right) m/s$. Después de 1.0 s parte del pie del edificio una persona que corre con aceleración constante durante 3 s y luego continúa con velocidad constante, hasta agarrar la pelota justo antes de que toque el suelo. ¿Cuál fue la aceleración de la persona? (Examen parcial, I término 1999 – 2000).
Respuesta: 10.7 m/s².

1.2. Uso del cálculo en cinemática.

El cálculo diferencial e integral es una herramienta poderosa a la hora de analizar ejercicios de cinemática en los que los movimientos se dan con aceleración variada.

Se define a la velocidad como a la derivada de la posición con respecto al tiempo, esto es,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Y a la aceleración como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

A continuación presentamos la tabla de derivadas que nos ayudarán a resolver ejercicios en los que se involucren estas

1. $\frac{d(constante)}{dt} = 0$ Derivada de cualquier constante es cero

2. $\frac{dt}{dt} = 1$ Derivada del tiempo es la unidad

3. $\frac{d(t^n)}{dt} = nt^{n-1}$ Derivada de una potencia es el producto del exponente por la variable disminuida en uno el exponente

4. $\frac{d(f+g)}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}$ Derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas

5. $\frac{d(fg)}{dt} = f\left(\frac{dg}{dt}\right) + g\left(\frac{df}{dt}\right)$ Derivada de un producto es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda función, más el producto de la segunda función por la derivada de la primera función.

6. $\frac{d}{dt}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\left(\frac{df}{dt}\right) - f\left(\frac{dg}{dt}\right)}{g^2}$ Derivada de un cociente es igual a producto de la función del denominador por la derivada de la función del numerador, menos el producto de la función del numerador por la derivada de la función del denominador, todo lo anterior dividido entre el cuadrado del denominador.

También será de utilidad una tabla de integrales para los ejercicios en los que haya que utilizarlas.

1. $\int dt = t$ Integral de la unidad es igual a la variable que se analiza.

2. $\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$ Integral de una potencia es igual a la potencia aumentada en la unidad dividido entre el exponente aumentado.

3. $\int cf(t)dt = c\int f(t)$ integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

4. $\int (f+g)dt = \int fdt + \int gdt$ Integral de una suma es igual a la suma de las integrales

5. $\int \frac{1}{t}dt = ln\,t + C$

1.2.1. Ejercicios resueltos.

1. El movimiento de una partícula se define por la relación $x = 2t^3 - 9t^2 + 12$, donde x se expresa en metros y t en segundos. Calcular el tiempo, la posición y aceleración cuando $v = 0$. (Tomado del libro Mecánica vectorial para ingenieros de Beer – Jonhston)

SOLUCIÓN

La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo, por lo tanto derivamos primero la función de posición con respecto al tiempo y luego determinamos el tiempo en el que se hace cero la velocidad.

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{d\left(2t^3 - 9t^2 + 12\right)}{dt}$$

$$v = \frac{d\left(2t^3\right)}{dt} - \frac{d\left(9t^2\right)}{dt} + \frac{d(12)}{dt}$$ La derivada de la suma es igual a la suma de las derivadas.

$$v = 3\left(2t^{3-1}\right) - 2\left(9t^{2-1}\right) + 0$$ Derivada de una potencia y derivada de una constante.

$$v = 6t^2 - 18t$$

$$0 = 6t^2 - 18t$$ Averiguamos en qué tiempo la velocidad es cero.

$$0 = 6t(t-3)$$

$$6t = 0 \vee t - 3 = 0$$

$$t = 0 \vee t = 3$$

Con estos tiempos calculamos las posiciones donde se encuentra la partícula

$$x = 2(0)^3 - 9(0)^2 + 12$$

$$x = 12m$$

La posición para el tiempo t = 0 es x = 120 m.

$$x = 2(3)^3 - 9(3)^2 + 12$$

$$x = -15m$$

La posición para el tiempo t = 3 s es x = - 15 m.

La aceleración es la derivada de la velocidad. Primero derivamos la expresión de la velocidad y luego evaluamos en los tiempos encontrados.

$$a = \frac{d\left(6t^2 - 18t\right)}{dt}$$

$$a = \frac{d\left(6t^2\right)}{dt} - \frac{d(18t)}{dt}$$

$$a = 2\left(6t^{2-1}\right) - 1\left(18t^{1-1}\right)$$

$$a = 12t - 18$$

$$a = 12(0) - 18$$

$$a = -18\, m/s^2$$

Cuando el tiempo es cero la aceleración es – 18 m/s².

$$a = 12(3) - 18$$

$$a = 18\, m/s^2$$

Cuando el tiempo es tres segundos la aceleración es 18 m/s².

2. El movimiento de una partícula se define por la relación $x = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$, donde x se expresa en metros y t en segundos. Calcular:
   a) El instante en que la velocidad es cero.
   b) La posición y la distancia recorrida cuando la aceleración es cero.
   (Tomado del libro Mecánica vectorial para ingenieros de Beer – Jonhston).

SOLUCIÓN

a) La velocidad es la derivada de la función de posición, por lo tanto, primeros derivamos y luego evaluamos para cuando la velocidad sea cero.

$$v = \frac{dx}{dt}$$
$$v = \frac{d\left(\frac{1}{3}t^3\right)}{dt} - \frac{d\left(3t^2\right)}{dt} + \frac{d(8t)}{dt} + \frac{d(2)}{dt}$$
$$v = t^2 - 6t + 8$$

Evaluamos el(los) instante(s) en que la velocidad es cero

$$0 = t^2 - 6t + 8$$
$$0 = (t-4)(t-2)$$
$$t = 4 \vee t = 2$$

La velocidad es cero en dos instantes, a los dos segundos de comenzar el análisis del movimiento, y a los cuatro segundos de iniciado el análisis. Estos tiempos indican los instantes en los que la partícula cambia la dirección del movimiento.

b) Calculamos la aceleración como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo

$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$a = \frac{d\left(t^2 - 6t + 8\right)}{dt}$$
$$a = \frac{d\left(t^2\right)}{dt} - \frac{d(6t)}{dt} + \frac{d(8)}{dt}$$
$$a = 2t - 6$$

De la ecuación obtenida encontramos el tiempo en el que la aceleración es cero.

$$0 = 2(t-3)$$
$$t - 3 = 0$$
$$t = 3$$

Averiguamos primero en qué posición estaba la partícula a los cero segundos, luego a los dos segundos, que fue el tiempo en el que realizó el primer cambio en la dirección del movimiento, y, finalmente a los tres segundos para calcular la distancia total recorrida.

$$x = \frac{1}{3}(0)^3 - 3(0)^2 + 8(0) + 2$$
$$x = 2m$$

Posición de la partícula a t = 0 s

$$x = \frac{1}{3}(2)^3 - 3(2)^2 + 8(2) + 2$$
$$x = (26/3)m$$

Posición de la partícula a t = 2 s

$$x = \frac{1}{3}(3)^3 - 3(3)^2 + 8(3) + 2$$ Posición de la partícula a t = 3 s

$$x = 8m$$

La primera distancia recorrida fue $\left|\frac{26}{3}m - 2m\right| = \frac{20}{3}m$

La segunda distancia recorrida fue $\left|8m - \frac{26}{3}m\right| = \frac{2}{3}m$

Por lo tanto, la distancia total recorrida fue 22/3 m, que aproximadamente es 7.3 m, y la posición a los tres segundos es 8 m.

3. La posición de una partícula a lo largo de una trayectoria recta se define como $x(t) = (t^3 - 6t^2 - 15t + 7)pies$, donde *t* está en segundos. Halle, a partir de la ecuación dada:
   a) Expresiones para la velocidad y la aceleración en función del tiempo.
   b) La distancia total recorrida cuando t = 10 s.
   c) La velocidad media en ese instante.
   (Tomado del deber # 1 de Física I, I Término 2003 – 2004).

SOLUCIÓN

a) La velocidad está dada por la derivada de la posición con respecto al tiempo

$$v(t) = \frac{d(t^3 - 6t^2 - 15t + 7)}{dt}$$
$$v(t) = (3t^2 - 12t - 15)pies/s$$

Aquí *v(t)* significa que la velocidad está en función del tiempo.

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo

$$a = \frac{d(3t^2 - 12t - 15)}{dt}$$
$$a = (6t - 12)pies/s^2$$

b) Para calcular distancia recorrida debemos de averiguar los tiempos en los que ocurren los cambios en la dirección del movimiento; y esto ocurre cuando la velocidad es cero.

$$0 = 3t^2 - 12t - 15$$
$$0 = t^2 - 4t - 5$$
$$0 = (t - 5)(t + 1)$$
$$t = 5 \vee t = -1$$

Puesto que no existe la posibilidad de tener tiempos negativos, la partícula cambia la dirección del movimiento solo una vez, y esto ocurre a los cinco segundos. A partir de esto calculamos las posiciones a t =0, t = 5 s y t = 10 s.

$$x(0) = ((0)^3 - 6(0)^2 - 15(0) + 7)pies$$ Posición de la partícula a t = 0
$$x(0) = 7\,pies$$

$$x(5) = ((5)^3 - 6(5)^2 - 15(5) + 7)pies$$ Posición de la partícula a t = 5 s
$$x(0) = -93\,pies$$

$$x(10) = ((10)^3 - 6(10)^2 - 15(10) + 7)pies$$ Posición de la partícula a t = 10 s
$$x(10) = 257\,pies$$

La primera distancia recorrida fue $|-93 - 7| = 100\,pies$

La segunda distancia recorrida fue $|257 - (-93)| = 350\,pies$

Por lo tanto la distancia total recorrida fue 450 pies

c) La velocidad media es el desplazamiento realizado en ese tiempo

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
$$v_m = \frac{257\,pies - 7\,pies}{10s}$$
$$v_m = 25\,pies/s$$

4. Un punto se mueve según las ecuaciones de movimiento $x(t) = 5t^2 + 2t^3$, $y(t) = 5t^2 - t^4$ y $z(t) = 25t - t^3$, donde x, y, z están expresadas en centímetros y t en segundos. Encuentre:
   a) Las componentes de la velocidad y de la aceleración en el tiempo t = 2 s.
   b) La distancia entre el punto y el origen cuando t = 2 s.
   (Tomado del deber # 1 de Física A, I Término 2005 – 2006).

SOLUCIÓN

a) La velocidad es la derivada de la posición en cada uno de los ejes.

$$v(t) = \frac{d[x(t)]}{dt}\hat{i} + \frac{d[y(t)]}{dt}\hat{j} + \frac{d[z(t)]}{dt}\hat{k}$$
$$v(t) = \frac{d(5t^2 + 2t^3)}{dt}\hat{i} + \frac{d(5t^2 - t^4)}{dt}\hat{j} + \frac{d(25t - t^3)}{dt}\hat{k}$$
$$v(t) = \left[(10t + 6t^2)\hat{i} + (10t - 4t^3)\hat{j} + (25 - 3t^2)\hat{k}\right]cm/s$$

Ahora calculamos el valor de la velocidad para t = 2 s

$$v(2) = \left\{\left[10(2) + 6(2)^2\right]\hat{i} + \left[10(2) - 4(2)^3\right]\hat{j} + \left[25 - 3(2)^2\right]\hat{k}\right\}cm/s$$
$$v(2) = \left(44\hat{i} - 12\hat{j} + 13\hat{k}\right)cm/s$$

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

$$a(t) = \frac{d[v_x(t)]}{dt}\hat{i} + \frac{d[v_y(t)]}{dt}\hat{j} + \frac{d[v_z(t)]}{dt}\hat{k}$$
$$a(t) = \frac{d(10t + 6t^2)}{dt}\hat{i} + \frac{d(10t - 4t^3)}{dt}\hat{j} + \frac{d(25 - 3t^2)}{dt}\hat{k}$$
$$a(t) = \left[(10 + 12t)\hat{i} + (10 - 12t^2)\hat{j} - (6t)\hat{k}\right]cm/s^2$$

De la ecuación obtenida encontramos la aceleración a t = 2s.

$$a(2) = [10 + 12(2)]\hat{i} + \left[10 - 12(2)^2\right]\hat{j} - [6(2)]\hat{k}$$
$$a(2) = \left(34\hat{i} - 38\hat{j} - 12\hat{k}\right)cm/s^2$$

b) La distancia solicitada es la magnitud del vector posición en ese instante.

$$x(2) = 5(2)^2 + 2(2)^3 \qquad y(2) = 5(2)^2 - (2)^4 \qquad z(2) = 25(2) - (2)^3$$
$$x(2) = 36cm \qquad y(2) = 4cm \qquad z(2) = 42cm$$

El vector posición está dado por

$$r(t) = \left(36\hat{i} + 4\hat{j} + 42\hat{k}\right)cm$$

La magnitud de este vector es

$$|r(t)| = \sqrt{36^2 + 4^2 + 42^2}$$
$$|r(t)| = 55.46\ cm$$

5. La aceleración de una partícula se define como $a = 18 - 6t^2$. La partícula parte de x = 100 m en t = 0 con v = 0. Determinar:
   a) El tiempo en el cual la velocidad de nuevo es cero.
   b) La posición y velocidad cuando t = 4 s.
   c) La distancia recorrida a t = 4 s.
   (Tomado del libro Mecánica vectorial para ingenieros de Beer – Jonhston).

SOLUCIÓN

a) Para calcular la velocidad a partir de la función de aceleración, utilizamos la definición

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Lo que se conoce de la ecuación anterior es la función de la aceleración, por tanto de aquí despejamos la velocidad.

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ adt &= dv \end{aligned}$$

Para eliminar el diferencial de tiempo dt y el diferencial de velocidad dv, integramos

$$\begin{aligned} &(18 - 6t^2)dt = dv \\ &\int (18 - 6t^2)dt = \int dv \\ &\int 18dt - \int 6t^2 dt = \int dv \\ &18t - \frac{6t^{2+1}}{2+1} = v - v_0 \\ &v = v_0 + 18t - 2t^3 \end{aligned}$$

En esta última ecuación reemplazamos los valores (también llamados condiciones) iniciales que da el enunciado del ejercicio

$$\begin{aligned} v &= v_0 + 18t - 2t^3 \\ 0 &= v_0 + 18(0) - 2(0)^3 \\ v_0 &= 0 \end{aligned}$$

Este último resultado sirve para dejar la ecuación de velocidad expresada de manera completa

$$v = 18t - 2t^3$$

Aquí podemos ya resolverla para cuando v = 0, y poder calcular el tiempo en el que nuevamente será cero

$$\begin{aligned} 0 &= 18t - 2t^3 \\ 0 &= 2t(9 - t^2) \\ 0 &= 2t(3 - t)(3 + t) \\ t &= 0 \vee t = 3 \vee t = -3 \end{aligned}$$

De lo último podemos concluir que la velocidad será nuevamente cero a t = 3 s.

b) Para determinar el valor de la posición de la partícula usamos la definición de velocidad

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Igual que en la ecuación de aceleración, despejamos la posición pasando el diferencial de tiempo al miembro izquierdo de la ecuación y luego se integra.

$$v = \frac{dx}{dt}$$
$$\left(18t - 2t^3\right)dt = dx$$
$$\int \left(18t - 2t^3\right)dt = \int dx$$
$$\int (18t)dt - \int \left(2t^3\right)dt = \int dx$$
$$\frac{18t^{1+1}}{1+1} - \frac{2t^{3+1}}{3+1} = x - x_0$$
$$x = x_0 + 9t^2 - 0.5t^4$$

En esta última ecuación reemplazamos las condiciones iniciales del enunciado

$$x = x_0 + 9t^2 - 0.5t^4$$
$$100 = x_0 + 9(0)^2 - 0.5(0)^4$$
$$x_0 = 100$$

Por lo tanto, la ecuación de posición queda definida como

$$x = 100 + 9t^2 - 0.5t^4$$

La posición de la partícula a los cuatro segundos es, entonces

$$x(4) = 100 + 9(4)^2 - 0.5(4)^4$$
$$x(4) = 116m$$

La velocidad a t = 4 s la calculamos con la ecuación deducida en el literal anterior

$$v = 18t - 2t^3$$
$$v(4) = 18(4) - 2(4)^3$$
$$v(4) = -56m/s$$

c) La distancia recorrida la calculamos con la posición a t = 0, t = 3 s (donde cambia la dirección del movimiento) y t = 4 s.

$$x = 100 + 9t^2 - 0.5t^4$$
$$x(0) = 100 + 9(0)^2 - 0.5(0)^4 = 100m$$
$$x(3) = 100 + 9(3)^2 - 0.5(3)^4 = 140.5m$$
$$x(4) = 116m$$

Distancia recorrida 1 = $|140.5 - 100| = 40.5m$

Distancia recorrida 2 = $|116 - 140.5| = 24.5m$

Distancia total recorrida = 65 m

6. En el mismo instante, dos carros A y B parten desde el reposo en una meta. El carro A tiene una aceleración constante a_A = 8 m/s², mientras que el carro B tiene una aceleración a_B = $\left(2t^{3/2}\right)m/s^2$, donde t se mide en segundos. Determine la distancia entre los dos carros cuando A alcanza la rapidez v_A = 120 km/h. (Tomado del libro Mecánica para ingenieros, R. C. Hibbeler).

SOLUCIÓN

Para encontrar la separación entre los autos debemos de averiguar el tiempo en el que el auto A alcance la rapidez 120 km/h, y en este tiempo averiguar la posición de cada uno de los autos. La partícula A tiene un movimiento rectilíneo uniformemente variado, de manera que es posible calcular el tiempo con las ecuaciones de cinemática con aceleración constante

$$v = v_0 + at$$
$$120km/h = 0 + \left(8m/s^2\right)t$$
$$t = \frac{33.3m/s}{8m/s^2}$$
$$t = 4.17s$$

La posición de la partícula A está dada por

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$
$$x = 0 + 0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(8m/s^2\right)(4.17s)^2$$
$$x = 69.4m$$

Para B primero encontramos la ecuación de la velocidad

$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$adt = dv$$
$$2t^{3/2}dt = dv$$
$$\int \left(2t^{3/2}\right)dt = \int dv$$
$$\frac{2t^{3/2+1}}{3/2+1} = v - v_0$$
$$v = v_0 + \frac{4}{5}t^{5/2}$$

Evaluamos la velocidad para t = 0.

$$0 = v_0 + \frac{4}{5}(0)^{5/2}$$
$$v_0 = 0$$

Con esta ecuación encontramos la ecuación de posición para la partícula B

$$v = \frac{dx}{dt}$$
$$vdt = dx$$
$$\frac{4}{5}t^{5/2}dt = dx$$
$$\int \frac{4}{5}t^{5/2}dt = \int dx$$
$$\frac{4}{5}\frac{t^{5/2+1}}{\frac{5}{2}+1} = x - x_0$$
$$x = x_0 + \frac{8}{35}t^{7/2}$$

Evaluamos para t = 0 y obtenemos la ecuación

$$0 = x_0 + \frac{8}{35}(0)^{7/2}$$
$$x_0 = 0$$

Con esta ecuación obtenemos la posición para el tiempo en que A alcanzó la velocidad de 120 km/h.

$$x = \frac{8}{35}(4.17s)^{7/2}$$
$$x = 33.8m$$

Por lo tanto la distancia que separa a los dos vehículos es d = 69.4m – 33.8 m = 35.6 m.

7. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria recta con una aceleración $a = (kt^3 + 4)mm/s^2$, donde t se mide en segundos. Determine la constante k y calcule la velocidad de la partícula cuando t = 3 s, sabiendo que v = 120 mm/s, cuando t = 1 s y que v = - 100 mm/s cuando t = 2 s. La dirección positiva se mide hacia la derecha. (Tomado del libro Mecánica para ingenieros, R. C. Hibbeler).

SOLUCIÓN

Obtenemos la ecuación de la velocidad a partir de la definición de la aceleración.

$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$(kt^3 + 4)dt = dv$$
$$\int (kt^3 + 4)dt = \int dv$$
$$\frac{kt^4}{4} + 4t = v - v_0$$
$$v = v_0 + \frac{kt^4}{4} + 4t$$

En la ecuación dada reemplazamos las condiciones iniciales presentadas en el enunciado del problema.

$$\begin{cases} 120 = v_0 + \dfrac{k(1)^4}{4} + 4(1) \\ -100 = v_0 + \dfrac{k(2)^4}{4} + 4(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 480 = 4v_0 + k + 16 \\ -400 = 4v_0 + 16k + 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 464 = 4v_0 + k \\ 432 = -4v_0 - 16k \end{cases}$$

$$k = -59.7 mm/s^5$$

Con este valor encontramos v_o.

$$464 = 4v_0 - 59.7$$
$$v_0 = 131 mm/s$$

Utilizamos este resultado para encontrar el valor de la velocidad a t = 3 s.

$$v = 131 - 14.93t^4 + 4t$$
$$v = 131 - 14.93(3)^4 + 4(3)$$
$$v = -1066.33 mm/s$$
$$v = -1.07 m/s$$

8. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria recta con una aceleración $a = \left(\frac{5}{x}\right) m/s^2$, donde x se mide en metros. Determine la velocidad de la partícula cuando x = 2 m si inicialmente se soltó desde el reposo cuando x = 1 m. (Tomado del libro Mecánica para ingenieros, R. C. Hibbeler).

SOLUCIÓN

La ecuación de aceleración está en función de la posición por lo tanto utilizaremos las dos definiciones, la de aceleración, y la de velocidad.

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

De estas ecuaciones despejamos el diferencial de tiempo y luego igualamos las ecuaciones.

$$dt = \frac{dv}{a} \qquad dt = \frac{dx}{v}$$

$$\frac{dv}{a} = \frac{dx}{v}$$
$$vdv = adx$$
$$vdv = \left(\frac{5}{x}\right)dx$$
$$\int vdv = \int \left(\frac{5}{x}\right)dx$$
$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = 5(ln\, x - ln\, x_0)$$
$$0.1v^2 = 0.1v_0^2 + ln\, x - ln\, x_0$$

En la ecuación que se ha obtenido se reemplazan los valores de las condiciones iniciales del ejercicio.

$$0.1(0)^2 = 0.1v_0^2 + ln 1 - ln\, x_0$$
$$ln\, x_0 = 0.1v_0^2$$

Al reemplazar este último resultado en la ecuación anterior tenemos

$$0.1v^2 = \ln x_0 + \ln x - \ln x_0$$
$$0.1v^2 = \ln x$$

En esta última ecuación encontramos el valor de la velocidad para cuando x = 2 m.

$$0.1v^2 = \ln 2$$
$$v = \sqrt{10 \ln 2}$$
$$v = 2.63 m/s$$

9. Cuando un cuerpo se lanza a gran altura arriba de la superficie terrestre, debe tomarse en cuenta la variación de la aceleración de la gravedad con respecto a la altura y sobre la superficie. Despreciando la resistencia del aire, esta aceleración se determina a partir de la fórmula $a = -g_0\left[R^2/(R+y)^2\right]$, donde g_0 es la aceleración de la gravedad constante a nivel del mar, R es el radio de la Tierra y la dirección positiva se mide hacia arriba. Si g_0 = 9.81 m/s² y R = 6356 km, determine la mínima velocidad inicial (velocidad de escape) a la cual debería lanzarse un proyectil verticalmente a partir de la superficie de la Tierra, de tal manera que no caiga de nuevo sobre ésta. *Sugerencia*: Esto requiere que v = 0 cuando y → ∞. (Tomado del libro Mecánica para ingenieros, R. C. Hibbeler).

SOLUCIÓN

Usamos el mismo criterio que en el ejercicio anterior, esto es, despejamos el diferencial de tiempo de las definiciones de aceleración y de velocidad y luego las igualamos.

$$\frac{dv}{a} = \frac{dy}{v}$$
$$vdv = ady$$
$$\int vdv = \int -g_0\left[\frac{R^2}{(R+y)^2}\right]dy$$
$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -g_0R^2\int\frac{dy}{(R+y)^2}$$

Podemos hacer un cambio de variable para resolver la integral de una manera más sencilla. La ecuación quedaría del siguiente modo

$$u = R + y$$
$$du = dy$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -g_0R^2\int\frac{du}{u^2}$$
$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -g_0R^2\int u^{-2}du$$
$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -g_0R^2\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)$$
$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = g_0R^2\left(\frac{1}{u}\right)$$
$$v^2 - v_0^2 = \frac{2g_0R^2}{R+y} - \frac{2g_0R^2}{R+y_0}$$

Reemplazamos las condiciones iniciales del ejercicio en la ecuación deducida.

$$0 - v_0^2 = \frac{2g_0R^2}{R+\infty} - \frac{2g_0R^2}{R+y_0}$$
$$v_0^2 = \frac{2g_0R^2}{R+y_0}$$

Aquí y_0 debe ser la posición inicial desde la que se lanza el cuerpo, el mismo que sería cero, puesto que la referencia es justamente la superficie de la Tierra.

$$v_0^2 = \frac{2g_0R^2}{R}$$
$$v_0 = \sqrt{2g_0R}$$
$$v_0 = \sqrt{2\left(9.81m/s^2\right)\left(6356000m\right)}$$
$$v_0 = 11167.13m/s$$
$$v_0 = 11.17km/s$$

10. Una partícula puntual se mueve en dirección del eje vertical (Y) con una aceleración $a_Y = 2t$. En el tiempo t = 0 su posición es – 1 m y en t = 1 s su posición es + 1 m. Encuentre la ecuación del movimiento de la partícula en función del tiempo y(t). (Examen parcial de Física A, I término 2005 – 2006)

SOLUCIÓN
Usamos la definición de aceleración

$$a_Y = \frac{dv_Y}{dt}$$
$$a_Y dt = dv_Y$$
$$\int 2tdt = \int dv_Y$$
$$t^2 = v_Y - v_{0Y}$$
$$v_Y = v_{0Y} + t^2$$

Con esta ecuación determinamos la ecuación de posición

$$v_Y = \frac{dy}{dt}$$
$$v_Y dt = dy$$
$$\int \left(v_{0Y} + t^2\right)dt = \int dy$$
$$v_{0Y}t + \frac{t^3}{3} = y - y_0$$

Utilizamos los datos de las condiciones iniciales para determinar v_{OY} y y_o.

$$v_{0Y}(0) + \frac{0^3}{3} = -1 - y_0$$
$$y_0 = -1m$$

$$v_{0Y}(1) + \frac{1^3}{3} = 1 - (-1)$$
$$v_{0Y} = 2 - \frac{1}{3}$$
$$v_{0Y} = \frac{5}{3}m/s$$

La ecuación de posición queda entonces

$$y = -1 + \frac{5}{3}t + \frac{1}{3}t^3$$

1.2.2. Ejercicios propuestos

1. La posición de la partícula que se mueve a lo largo del eje de las x varía en el tiempo de acuerdo con la expresión x = (3 m/s^2)t^2, donde x está en metros y t en segundos. Determine la velocidad de la partícula a t = 3 s. (Deber 1, II término 2002 – 2003). Respuesta: 18 m/s.

2. La posición de una partícula que se mueve en línea recta está dada por $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$, en la que x está en pies y t en segundos. Encuentre:
   a) El tiempo para el cual la velocidad será cero.
   b) La posición y la distancia recorrida por la partícula en el tiempo encontrado en a).
   c) La aceleración de la partícula en ese instante.
   d) La distancia recorrida desde t = 4 s hasta t = 6s
   (Deber 1, II término 2002 – 2003).
   Respuesta: a) t = 5s; b) – 60 pies; 100 pies; c) a = 18 pies/s^2; d) 18 pies.

3. La posición de una partícula que se mueve en el plano xy está dada por $r = (2t^3 - 5t)\hat{i} + (6 + 7t^4)\hat{j}$, donde r está en metros y t en segundos. Calcule el vector posición, el vector velocidad y el vector aceleración cuando t = 2 s. (Deber 1, II término 2002 – 2003).
   Respuesta: $r = (6\hat{i} + 118\hat{j})m$; $v = (19\hat{i} + 224\hat{j})m/s$; $a = (24\hat{i} + 336\hat{j})m/s^2$

4. El vector de posición de una partícula en movimiento está dada por $r = [(4t^2)\hat{i} + (2t^2 - t)\hat{j} + 5\hat{k}]m$.
   a) ¿Cuál es la velocidad de la partícula después de 5 s de iniciado el movimiento?
   b) ¿Cuál es la aceleración de la partícula a los doce segundos?
   c) ¿Cuál es el desplazamiento entre t = 5 s y t = 12 s?
   d) Encuentre la ecuación de la trayectoria.
   (Primera lección, Física I, I término 2003 – 2004)
   Respuesta: a) $v(5) = (40\hat{i} + 19\hat{j})m/s$; b) $a(12) = (8\hat{i} + 4\hat{j})m/s^2$; c) $\Delta r = (476\hat{i} + 231\hat{j})m$; d) $y = \frac{1}{2}(2x - \sqrt{x})$

5. La posición de un objeto sobre el eje x está dada por $x = (3 - 2.5t + 0.9t^2)cm$, donde t está en segundos. Encuentre la velocidad y la aceleración del objeto para t = 7 s. (Deber # 1, Física A, I término 2005 – 2006).
   Respuesta: 10.1 cm/s; 1.8 cm/s^2.

6. Un vehículo se mueve en línea recta de tal modo que su velocidad está definida por $v = (9t^2 + 2t)m/s$ donde t está en segundos, si a t = 0 la posición es 3 m, determine a t = 3 s su posición y su aceleración. (Deber # 1, Física A, I término 2005 – 2006).
   Respuesta: 93m; 56m/s^2.

7. El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por $v = [(3t - 2)\hat{i} + (6t^2 - 5)\hat{j}]m/s$. Si la posición de la partícula a t = 1 s es $r = (3\hat{i} - 2\hat{j})m$, calcular:
   a) El vector posición para cualquier instante.
   b) El vector aceleración.
   (Primera lección, Física I, I término 2001 – 2002)
   Respuesta: a) $r = \left[\left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{2}\right)\hat{i} + (2t^3 - 5t + 1)\hat{j}\right]m$; b) $a = (3\hat{i} + 12t\hat{j})m/s^2$

8. Una partícula se mueve en el plano xy de acuerdo con la expresión $a_x = 0$; $a_Y = 4cos(2t)m/s^2$. En el instante t = 0 la partícula se halla en x = 0, y = - 1 m, y tenía velocidad v_x = 2 m/s y v_y = 0. Encuentre las expresiones para r(t) y v(t). *Sugerencia*: Use $\int sentdt = -cos\,t \wedge \int cos\,tdt = sent$, además puede usar un cambio de variable para 2t. (Primera lección, Física I, II término 2003 – 2004)
   Respuesta: $r(t) = [(2t)\hat{i} - cos(2t)\hat{j}]m$; $v(t) = [2\hat{i} + 2sen(2t)\hat{j}]m/s$.

9. La velocidad de una partícula que se mueve en el plano XY viene dada por la ecuación $v = [(4t - 1)\hat{i} + 2\hat{j}]m/s$. Se conoce que en el instante t = 1 s la partícula se encuentra en la posición $r = (3\hat{i} + 4\hat{j})m$. Obtenga la ecuación de la trayectoria. (Primera lección, Física I, I término 2001 – 2002)
   Respuesta: 2x = y^2 – 5y + 10

10. Una partícula se mueve según la ecuación $v = \beta\sqrt{x}$, donde β es una constante positiva. Si la partícula comienza a moverse desde el origen, calcular:
    a) La posición en función del tiempo.
    b) La velocidad en función del tiempo.
    c) La aceleración en función del tiempo.
    d) La velocidad media entre x = 0 y x = s.
    (Primera lección, Física I, II término 2001 – 2002)
    Respuesta: a) $x = \frac{\beta^2 t^2}{4}$; b) $v = \frac{\beta^2 t}{2}$; c) $a = \frac{\beta^2}{2}$; d) $v_m = \frac{\beta\sqrt{s}}{2}$

11. El vector aceleración de un móvil es $a = \left[(2t)\hat{i} - 4\hat{k}\right]m/s^2$ y se sabe que para t=2 la velocidad es nula y para t=1 el móvil está en el origen de coordenadas. Podemos establecer que:
    a) $r = \left[\left(\frac{t^3}{3} - 4t + \frac{13}{3}\right)\hat{i} + \left(-2t^2 + 8t - 6\right)\hat{k}\right]m$
    b) $v = \left[\left(t^2 + 4\right)\hat{i} + \left(-4t + 8\right)\hat{k}\right]m/s$
    c) Su velocidad sólo tiene componente en el eje OX.
    d) $r = \left[\left(t^3 - 4t + \frac{11}{3}\right)\hat{i} + \left(-2t^2 + 8t - 6\right)\hat{k}\right]m$
    (Primera lección, Física I, II término 2001 – 2002)
    Respuesta: d)

12. Para un móvil con velocidad $v = \left(t^2 + t - 1\right)m/s$, que parte del origen de coordenadas cuando t = 2 s, se cumple que:
    a) Su trayectoria es una parábola.
    b) Es un movimiento uniformemente acelerado.
    c) $r = \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t - \frac{8}{3}\right)m$
    d) A los 5 s lleva una aceleración de 31 m/s².
    (Primera lección, Física A, I Término 2005 – 2006)
    Respuesta: c)

1.3. Movimiento Circular.

La partícula realiza su recorrido en una trayectoria circular, de manera que la rapidez con la que realiza el recorrido puede ser constante o no. Al estar cambiando en forma permanente la dirección de la velocidad se genera una aceleración, la que tiene una dirección hacia el centro de la trayectoria circular. A esta aceleración se la denomina aceleración centrípeta, aceleración normal o aceleración radial.

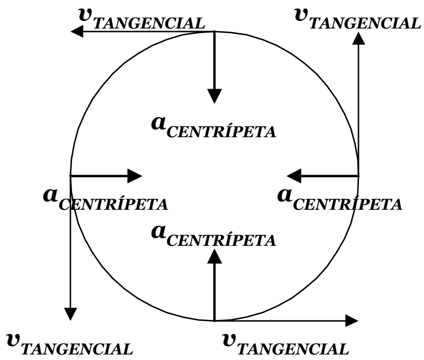


Figura 22

También puede estar acelerada o desacelerada la partícula, de manera que se genera una aceleración que puede estar en la misma dirección o en la dirección opuesta a la velocidad instantánea. A esta aceleración se la denomina aceleración tangencial. La combinación de estas dos aceleraciones genera lo que se conoce como aceleración total. Observe en la figura 23 que la aceleración centrípeta y la aceleración tangencial suman vectorialmente a la aceleración total, y su magnitud puede ser calculada por el Teorema de Pitágoras.

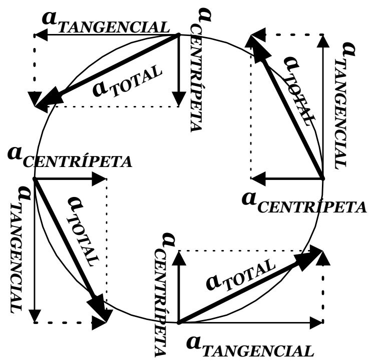


Figura 23

El recorrido en sí mismo de la partícula genera una serie de ángulos en cada posición de la misma, la que genera una velocidad angular, ω, la que para tiempos muy pequeños (t tiende a cero) se define como la derivada de la posición angular, θ.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

y para tiempos no pequeños se define como la razón de cambio del desplazamiento.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

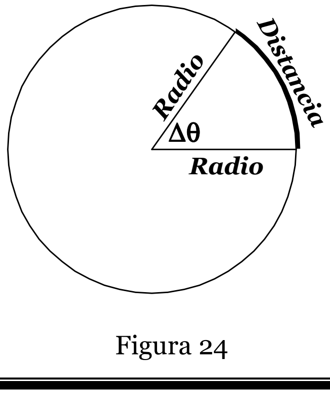


Figura 24

En la figura 24 se muestra el desplazamiento angular realizado por una partícula, y al mismo tiempo la distancia recorrida. La relación entre el desplazamiento angular y la distancia recorrida está dada por

$$d = R\Delta\theta$$

Donde $\Delta\theta$ está medido en radianes.

Si reemplazamos esta última resultado en la ecuación precedente tendremos

$$\omega = \frac{d}{R\Delta t}$$
$$\omega R = \frac{d}{\Delta t}$$
$$\omega R = v_{TANGENCIAL}$$

En esta ecuación se puede observar la relación que existe entre las cantidades lineales y angulares. De la misma forma se puede relacionar la aceleración angular, α, con la aceleración tangencial.

$$a_{TANGENCIAL} = \alpha R$$

La relación vectorial está dada por el producto vectorial entre las cantidades angulares y lineales, de modo que la velocidad angular y la velocidad tangencial están relacionadas por

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$
$$\overrightarrow{a_{TAN}} = \vec{\alpha} \times \vec{R}$$

Si existe una aceleración angular constante las ecuaciones del movimiento circular son las mismas que en el movimiento rectilíneo uniformemente variado pero para cantidades angulares, esto es

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\Delta\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)t$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

Además de estas relaciones, también existen las relaciones de la velocidad angular con el tiempo necesario en completar una vuelta o revolución por parte de la partícula analizada, o también de la relación entre la velocidad angular con el número de vueltas en un intervalo de tiempo determinado. La frecuencia se mide en revoluciones por unidad de tiempo o en Hertz (Hz).

$$\omega = 2\pi f$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$f = \frac{1}{T}$$

1.3.1. Ejercicios resueltos

1. La figura 25 representa, en un instante dado, la aceleración total de una partícula que se mueve en sentido horario en un círculo de 2.50 m de radio. En este instante de tiempo, encuentre
   a) la aceleración centrípeta,
   b) la velocidad de la partícula, y,
   c) su aceleración tangencial
   (Examen parcial de Física I, I término 2000 – 2001)

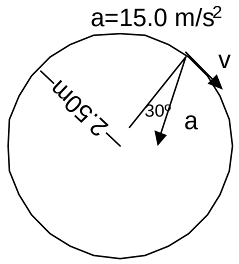


Figura 25

SOLUCIÓN

La aceleración total, **a**, está dada por **a = a$_T$ + a$_c$**, donde **a$_T$** y **a$_c$** son las componentes rectangulares de la aceleración total, por lo tanto, la magnitud de la aceleración centrípeta es

a)
$$a_C = a\cos 30^o$$
$$a_C = (15.0 m/s^2)(\cos 30^o)$$
$$a_C = 13.0 m/s^2$$

b) Debido a que el movimiento es circular uniforme, podemos usa la ecuación $a_c = \frac{v^2}{R}$ para calcular la velocidad de la partícula, esto es,

$$v = \sqrt{a_c * R}$$
$$v = \sqrt{(13.0 m/s^2)(2.50 m)}$$
$$v = 5.70 m/s$$

c) La aceleración total se relaciona con las aceleraciones tangencial y centrípeta por medio de la ecuación

$$\overrightarrow{a_{TOT}} = \overrightarrow{a_{TAN}} + \overrightarrow{a_{CEN}}$$

Ecuación vectorial que nos indica que las aceleraciones tangencial y centrípeta son las componentes rectangulares de la aceleración total, de tal modo que su módulo es obtenido a partir del teorema de Pitágoras, o sea,

$$a^2 = (a_t)^2 + (a_c)^2$$

de lo que se obtiene que

$$(a_t)^2 = (a)^2 - (a_c)^2$$
$$a_t = \sqrt{(15m/s^2)^2 - (13m/s^2)^2}$$
$$a_t = 7.48 m/s^2$$

2. Un transbordador espacial describe una órbita circular a una altura de 250 km, en donde la aceleración de la gravedad es el 93% del valor dado en la superficie. ¿Cuál es el periodo de su órbita? (Deber # 1, I Término, 2000 – 2001)

SOLUCIÓN

El periodo, T, es el tiempo que demorará el transbordador en dar una vuelta, o sea, 2πR, debido a que la rapidez es constante, tenemos

$$2\pi R = vT$$

además sabemos que el movimiento es circular por lo tanto

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

despejando la velocidad de la primera ecuación y reemplazándola en la segunda tenemos

$$a_c = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

y de esta última ecuación despejamos el periodo, de donde obtenemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{a_c}}$$

además, debemos tener bien en cuenta que R representa el radio de la Tierra más la altura a la que encuentra el transbordador, o sea, R=6400 km + 250 km = 6 650 km, entonces el periodo del transbordador será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{6.65x10^6 m}{(9.8m/s^2)(0.93)}}$$

$$T = 5367 seg$$
$$T \approx 89 min 30 s$$

3. Los electrones de un cinescopio de televisión experimentan una deflexión en un ángulo de 55º como se indica en la figura 26. Durante la deflexión los electrones viajan a velocidad constante en una trayectoria circular de radio 4.30 cm. Si experimentan una aceleración de 3.35 x 10^{17}m/s², ¿cuánto tarda la deflexión? (Tomado del libro Física para Ciencias e Ingeniería de Wolfson – Pasachoff).

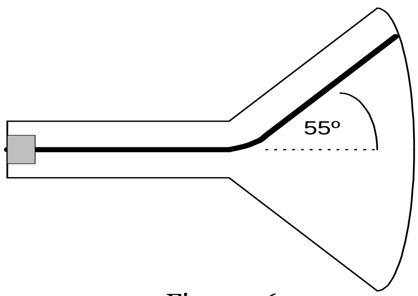


Figura 26

SOLUCIÓN

El problema realmente pide encontrar el tiempo que los electrones permanecen en la trayectoria circular. Debido a que el recorrido realizado por los electrones es hecho con rapidez constante, podemos utilizar la ecuación s = vt, donde s es el arco que recorren los electrones, por lo que también conocemos que el arco s es igual a s = θr, donde θ está en radianes, por lo que tendríamos

$$s = vt = \theta r$$

aquí despejamos t, o sea, t =θr/v, pero la velocidad tangencial la encontramos con la ecuación de aceleración centrípeta, debido a que el movimiento de los electrones es circular uniforme, o sea,

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

de aquí despejamos v

$$v = \sqrt{a_c R}$$

finalmente esta ecuación la reemplazamos en la ecuación del tiempo, o sea,

$$t = \frac{\theta R}{\sqrt{a_c R}}$$

$$t = \frac{55(\pi/180)(4.30x10^{-2}\,m)}{\sqrt{3.35x10^{17}\,m/s^2}(4.30x10^{-2}\,m)}$$

$$t = 3.44x10^{-10}\,s$$

$$t = 0.344\text{ns}$$

4. Una rueda de 2 m de radio tiene una aceleración angular constante de 0.5 rad/s². En un cierto instante $\Delta t = 4$s, gira un ángulo $\Delta\theta = 120$ rad. Determine el tiempo que había estado en movimiento antes del intervalo. (Suponga que parte del reposo). (Deber # 1, I Término 2000 – 2001)

SOLUCIÓN

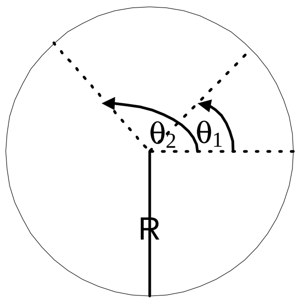


Figura 27

Debido a que nos dan intervalos de tiempo y de posición angular trabajamos con tiempos inicial y final, al igual que con posiciones angulares inicial y final.

$$\theta_1 = \theta_0 + \omega_0 t_1 + \tfrac{1}{2}\alpha t_1^2$$
$$\theta_2 = \theta_0 + \omega_0 t_2 + \tfrac{1}{2}\alpha t_2^2$$

de donde se obtiene $\theta_1 = \tfrac{1}{2}\alpha t_1^2$ y $\theta_2 = \tfrac{1}{2}\alpha t_2^2$ debido a que la rueda parte del reposo y suponemos que parte del origen a $t = 0$. También sabemos que $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, esto es,

$$\Delta\theta = \tfrac{1}{2}\alpha(t_2^2 - t_1^2)$$
$$\Delta\theta = \tfrac{1}{2}\alpha(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)$$

Pero de este último resultado conocemos que $\Delta\theta = 120$ rad y $(t_2 - t_1) = 4$ s, o sea, la ecuación queda como $t_2 + t_1 = 120$, misma que forma un sistema de ecuaciones con $t_2 - t_1 = 4$

$$\begin{cases} t_2 + t_1 = 120 \\ t_2 - t_1 = 4 \end{cases}$$

la solución al sistema de ecuaciones nos brinda la respuesta al problema, esto es $t_1 = 58$ s y $t_2 = 62$ s, por lo tanto, la rueda estuvo 58 segundos en movimiento antes del intervalo.

5. El disco A que aparece en la figura 28, arranca desde el reposo gracias a un motor y comienza a girar con una aceleración angular de 2 rad/s². Determine la velocidad y la aceleración angular del disco B un instante después de que A ha recorrido 10 rev.

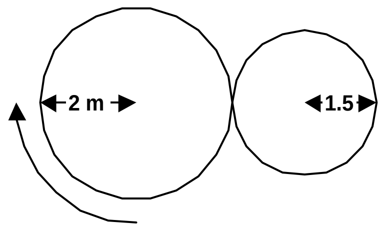


Figura 28

SOLUCIÓN

En el punto de contacto de los discos se produce la misma velocidad tangencial, por lo que se puede encontrar cual es la velocidad tangencial del disco A, para luego encontrar la velocidad angular de B en este intervalo de tiempo.

$$\omega_A^2 = \omega_{oA}^2 + 2\ \alpha_A\theta_A$$

pero sabemos que ω_{oA} es cero porque el disco A arranca desde el reposo, además θ_A = 10 revoluciones, que reducidas a radianes son

$$\theta_A = 10rev\left(\frac{2\pi rad}{1rev}\right) \approx 6.28rad$$

y por lo tanto tenemos

$$\varpi_A = \sqrt{2\alpha_A\theta_A}$$
$$\varpi_A = \sqrt{2(2rad/s^2)(62.8rad)}$$
$$\varpi_A = 15.8rad$$

Con este resultado ya podemos encontrar la velocidad del disco B

$$v_A = \varpi_A R_A$$
$$v_A = 15.8rad(2m)$$
$$v_A = 31.6\ m/s = v_B$$

una vez que obtuvimos el resultado de la velocidad tangencial, podemos calcular el valor de la velocidad angular de B por medio de la ecuación $v = \omega R$

$$\omega_A R_A = \omega_B R_B$$
$$\omega_B = \frac{\omega_A R_A}{R_B}$$
$$\omega_B = \frac{(15.8\ rad/s)(2m)}{1.5m}$$

$$\omega\text{=21.07rad}$$

Ahora necesitamos calcular la aceleración angular del disco B, aceleración que la calculamos por medio de la ecuación $a_t = \alpha R$

$$\alpha_A R_A = \alpha_B R_B$$
$$\alpha_B = \frac{\alpha_A R_A}{R_B}$$
$$\alpha_B = \frac{(2\ rad/s^2)(2m)}{(1.5m)}$$

$$\alpha_B = 2.67\ \text{rad}/^2$$

6. En el lanzamiento olímpico del martillo, los concursantes hacen girar una esfera de 7.3 kg al extremo de un alambre de acero que mide 1.2 m antes de lanzarlo. En determinado lanzamiento, el martillo viaja horizontalmente, a partir de un punto situado a 2.4 m de alto, 84 m antes de tocar el suelo. ¿Cuál es su aceleración radial antes de lanzarlo? (Deber # 1, I Término 2000 – 2001)

SOLUCIÓN
Primero realizamos un gráfico ilustrativo de la situación. Por lo que se observa, el movimiento del martillo una vez que sale de las manos del atleta

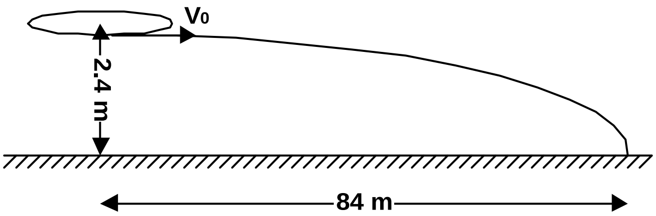


Figura 29

Para calcular la aceleración radial necesitamos calcular la velocidad tangencial con la que salió la esfera

$$X = V_X t \;\; y \;\; Y = V_{oY}t - ½at^2$$

Despejando t en la primera ecuación y reemplazando en la segunda ecuación tenemos

$$v_x = x\sqrt{-\frac{g}{2y}}$$

al reemplazar esta ecuación en la ecuación de aceleración centrípeta tenemos

$$a_c = -\frac{gx^2}{2y}$$

$$a_c = -\frac{9.8\,m/s^2}{2(-2.4\,m)}$$

$a_C = 1.2x10^4\ m/s^2$

7. En cierto instante una partícula que se mueve en sentido antihorario, en una circunferencia cuyo radio es 2m, tiene una rapidez de 8 m/s y su aceleración total está dirigida como se muestra en la figura 30. En ese instante determine:

a) la aceleración centrípeta de la partícula
b) La aceleración tangencial, y
c) La magnitud de la aceleración total.

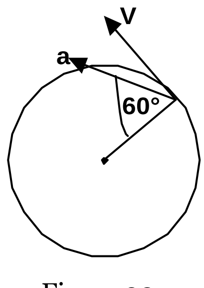


Figura 30

SOLUCIÓN
En el gráfico adjunto se presentan las aceleraciones centrípeta y tangencial.

a) La aceleración centrípeta la calculamos por medio de

$$a_C = \frac{v^2}{R}$$

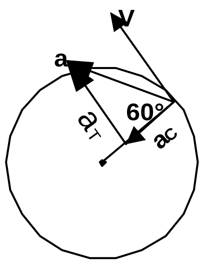


Figura 31

$$a_C = \frac{64\frac{m^2}{s^2}}{2m} = 32m/s^2$$

b) Debido a que se forma un triángulo rectángulo entre las aceleraciones centrípeta, tangencial y total, podemos calcular la aceleración tangencial por medio de funciones trigonométricas.

$$a_{TAN} = a_C Tan60°$$

$$a_{TAN} = 55.42\ m/s^2$$

c) La magnitud de la aceleración total la podemos calcular por medio del teorema de Pitágoras.

$$a_{TOTAL} = \sqrt{a_{TAN}^2 + a_C^2}$$
$$a_{TOTAL} = \sqrt{32^2 + 55.42^2}$$
$$a_{TOTAL} = 64m/s^2$$

8. Un estudiante une una pelota el extremo de una cuerda de 0.600 m de largo y luego la balancea en un círculo vertical. La velocidad de la pelota es 4.30 m/s en el punto más alto y 6.50 m/s en el punto más bajo. Determine su aceleración en:
   a) su punto más alto, y
   b) su punto más bajo.
   (Lección de Física I, I término 2002 – 2003)

SOLUCIÓN

Si consideramos que la aceleración tangencial de la partícula es constante, esta tiene un valor de

$$v^2 = v_0^2 + 2ad$$

$$6.50^2 = 4.30^2 + 2a(\pi R)$$

El valor de d es la mitad de la longitud de una circunferencia, porque al pasar del punto más alto al más bajo recorre la mitad de ella, y este valor está dado por $2\pi R/2 = \pi R$.

$$a_{TAN} = 6.3\ m/s^2$$

La aceleración centrípeta en el punto más alto es

$$a_C = 4.3^2/0.6 = 30.82\ m/s^2$$

y en el punto más bajo es

$$a_C = 6.5^2/0.6 = 70.42\ m/s^2$$

Por lo tanto la aceleración total en el punto más alto es

$$a_{TOTAL} = \sqrt{a_{TAN}^2 + a_C^2}$$
$$a_{TOTAL} = \sqrt{6.3^2 + 30.82^2}$$

$$a_{TOTAL} = 31.46\ m/s^2$$

y en el punto más bajo

$$a_{TOTAL} = \sqrt{a_{TAN}^2 + a_C^2}$$
$$a_{TOTAL} = \sqrt{6.3^2 + 70.42^2}$$
$$a_{TOTAL} = 70.7\ m/s^2$$

9. Cierta polea gira 90 rev en 15 s, su rapidez angular al fin del periodo es de 10 rev/s.
   a) ¿Cuál era la rapidez angular de la polea al iniciarse el intervalo de 15 s, suponiendo una aceleración angular constante?
   b) ¿qué tiempo debió transcurrir desde que la polea estaba en reposo hasta el principio del intervalo de los 15s en referencia?

   (Lección de Física I, I término 2002 – 2003)

SOLUCIÓN

a) Como la aceleración angular permanece constante podemos aplicar la ecuación siguiente para calcular la rapidez angular al iniciar el intervalo de 15s.

$$\Delta\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)\Delta t$$

$$90 = \left(\frac{10 + \omega_0}{2}\right)15$$

$$12 = 10 + \omega_0$$

$$\omega_0 = 2 \text{ rev/s}$$

b) El tiempo previo al inicio del intervalo de los 15s podemos calcularlo calculando primero la aceleración angular, y posteriormente el tiempo.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$10 = 2 + \alpha(15)$$

$$8 = 15\,\alpha$$

$$\alpha = 8/15 \text{ rev/s}^2$$

$$0.533 \text{ rev/s}^2$$

Con la misma ecuación podemos hacer el cálculo del tiempo previo al intervalo de los 15s.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$2 = 0 + (8/15)t$$

$$t = 3.75\text{s}$$

10. Una bicicleta con ruedas de 75 cm de diámetro viaja a una velocidad de 12 m/s. ¿Cuál es la velocidad angular de las ruedas de esta bicicleta? (I aporte, 1990)
    a) 8 rad/s
    b) 16 rad/s
    c) 32 rad/s
    d) 64 rad/s

SOLUCIÓN

La velocidad tangencial de una partícula está dada por $v = \omega R$, por lo tanto $\omega = v/R = 2v/D$

$\omega = 2(12)/0.75$

$\omega = 32$ rad/s

Respuesta: c

11. Un cuerpo que se encuentra en estado de reposo comienza a girar con aceleración constante, efectuando 3600 rev durante los primeros 2 minutos. Calcular el valor de la aceleración angular del cuerpo.
   a) π rad/s²
   b) 2 rad/s²
   c) 0.3π rad/s²
   d) 1 rad/s²
   (Examen parcial de Física I, II Término 2003 – 2004)

SOLUCIÓN

Podemos aplicar la ecuación $\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$$3600rev \times \frac{2\pi rad}{1rev} = 0 + \frac{1}{2}\alpha(120)^2$$
$$7200\pi = 7200\alpha$$
$$\alpha = \pi$$

Respuesta: a

12. Desde el mismo punto de una trayectoria circular parten 2 móviles, en sentido opuesto, con rapidez constante. Uno de ellos recorre la circunferencia en 2 horas y el otro traza un arco de 6° en 1 minuto. ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse?
   a) 40 minutos
   b) 60 minutos
   c) 20 minutos
   d) 10 minutos
   (Examen parcial de Física I, II Término 2003 – 2004)

SOLUCIÓN

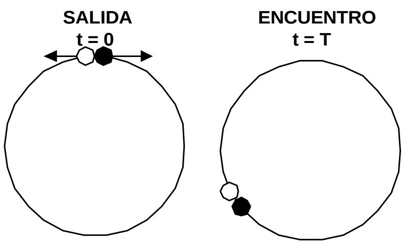


Figura 32

Al indicar en el enunciado cuanto tiempo se demora una de las partículas en dar una vuelta, y cuanto tiempo se demora la otra en recorrer un pequeño ángulo, nos está indicando cuanto es la rapidez angular de cada partícula, o sea,

$\omega_1 = \Delta\theta_1/t = 2\pi/7200 = \pi/3600$ rad/s

$$\omega_2 = \Delta\theta_2/t = \frac{\left(6° \times \frac{\pi rad}{180°}\right)}{60s} = \frac{\pi}{1800} rad/s$$

Si una de las partículas recorre θ rad, la otra recorre 2π - θ rad. Planteando las ecuaciones para el movimiento circular uniforme, para ambas partículas, tendríamos

$\Delta\theta = \omega t$

(1) $\theta = (\pi/1800)t$
(2) $2\pi - \theta = (\pi/3600)t$

Reemplazamos la ecuación (1) en la ecuación (2)

$2\pi - (\pi/1800)t = (\pi/3600)t$

$2\pi = (\pi/3600)t + (\pi/1800)t$

$2\pi = (\pi/1200)t$

$t = 2400$ s = 40 minutos

Respuesta: a

13. Un volante gira 60 RPM en un instante inicial, al cabo de 5s posee una velocidad angular de 37.68 rad/s. ¿Cuántas vueltas dio el volante en ese tiempo? Suponga que el movimiento es uniformemente variado.
    a) 10.5 vueltas
    b) 12.5 vueltas
    c) 15.5 vueltas
    d) 17.5 vueltas
    (Examen parcial de Física I, II Término 2003 – 2004)

SOLUCIÓN

Debido a que la respuesta se presenta en vueltas (o en revoluciones) dejaremos los datos dados expresados en rev/s.

$$60\frac{rev}{min}\times\frac{1min}{60s}=1rev/s$$

$$37.68\frac{rad}{s}\times\frac{1rev}{2\pi rad}=6rev/s$$

Al ser constante la aceleración angular, podemos aplicar la ecuación

$$\Delta\theta=\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}\right)t$$

$$\Delta\theta=\left(\frac{1+6}{2}\right)5$$

$$\Delta\theta=17.5rev$$

Respuesta: d

1.3.2. Ejercicios propuestos

1. Un punto en la periferia de una rueda de un automóvil, con radio 0.3 m, se mueve con rapidez de 54 km/h.
   a) ¿Cuál es su velocidad angular?
   b) ¿Cuál es el periodo de movimiento?
   c) ¿Cuál es su aceleración?
   (Lección # 1 Física I, I Término 2002 – 2003)
   Respuesta: a) 50 rad/s; b) 0.126 s; c) 750 m/s²

2. Calcule las velocidades angular y lineal y la aceleración centrípeta de la Tierra, sabiendo que da una vuelta completa alrededor del Sol en 365 días y que su distancia media al Sol es 148 x 10^6 km. (Lección # 1 Física I, I Término 2002 – 2003).
   Respuesta: $2.00\times10^{-7}\,rad/s$; $2.95\times10^{4}\,m/s$; $5.89\times10^{-3}\,m/s^2$

3. Una rueda de 2 m de radio está girando horizontalmente con una rapidez angular constante de 2.5 rad/s. Sobre la rueda se encuentra un objeto que no está fijo a ella. En un instante determinado se golpea a la rueda verticalmente con una velocidad de 12 m/s. Encuentre el alcance horizontal del objeto si la rueda se encuentra a 1.2 de altura. . (Lección # 1 Física I, I Término 2002 – 2003).
   Respuesta: 12.7 m

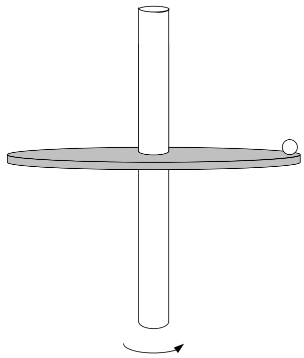


Figura 33

4. Un disco que tiene un agujero a 30 cm de su eje de rotación, gira con velocidad angular constante en un plano horizontal en torno a un eje vertical. Desde una altura h = 1.5 m se deja caer una pequeña bola en el instante en que la bola y el agujero están alineados verticalmente. Encuentre la mínima velocidad angular del disco de manera que la bola pase por el agujero libremente. (Examen parcial del Física A, I Término 2005 – 2006)

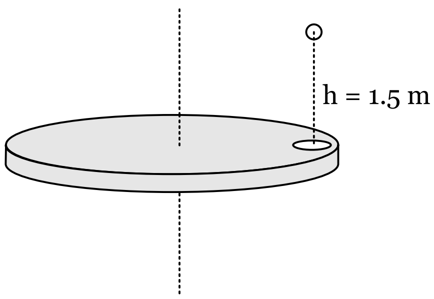


Figura 34

   Respuesta: 5.7 rad/s

5. Un tren frena cuando libra una curva pronunciada, reduciendo su velocidad de 90 km/h a 50 km/h en 15 s que tarda en recorrerla. El radio de la curva es 150 m. Calcule la aceleración en el momento en que la velocidad del tren es 50 km/h. Asuma que el tren desacelera uniformemente sobre la curva. (Lección 1 de Física A, I Término 2005 – 2006)
   Respuesta: 1.48 m/s² y a un ángulo de 29.94º con respecto al radio.

6. La ecuación del movimiento de una partícula está dada por $\theta = -2 + 2t + 1.5t^2$,donde θ está en radianes y t en segundos. ¿Cuál es la posición angular de la partícula en el instante en que triplica el valor de su velocidad angular? (Lección del primer parcial de Física I, I Término 2002 – 2003).
   Respuesta: (10/3) rad

7. La rueda dentada A que tiene N_A dientes parte del reposo y aumenta su velocidad angular uniformemente a razón de α_A. A la vez ésta transmite movimiento mediante la cadena C a la rueda dentada B de N_B dientes.
   a) Obtenga una relación entre las aceleraciones α y el número de dientes N de las dos ruedas.
   b) Si se conoce que $\alpha = 0.4\ \pi$ rad/s², N_A = 18 dientes y N_B = 45 dientes determine el tiempo necesario para que la rueda B alcance una frecuencia de 300 rpm.
   (Lección del primer parcial de Física I, I Término 2002 – 2003)

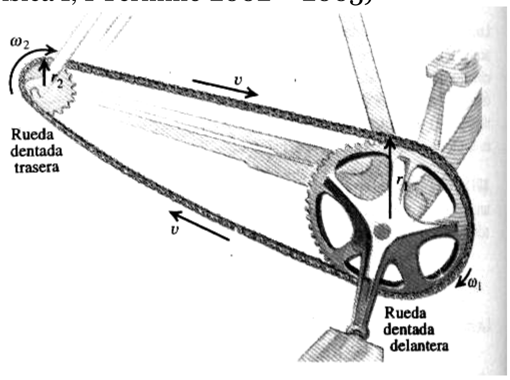


Figura 35

8. Una rueda de amolar tiene una velocidad de 24 rad/s en t = 0 y una aceleración constante de 60 rad/s² hasta que se dispara un disyuntor en t = 2 s. A partir de ese momento, la rueda gira 432 rad con una aceleración constante hasta parar.
   a) ¿Qué ángulo total giró la rueda entre t = 0 y el instante en que se detuvo?
   b) ¿En qué tiempo se detuvo?
   c) ¿Qué aceleración tenía al frenarse?
   (Deber # 1, Física A I Término 2005 – 2006)
   Respuesta: a) 600 rad; b) 8 s; c) – 24 rad/s².

9. Un cilindro de 30 cm de radio, está rodando sin deslizar sobre un plano horizontal hasta detenerse después de recorrer una distancia de 25 m. Si inicialmente el cilindro tiene una frecuencia de 2 rev/s, encuentre la desaceleración de la rueda y el número de revoluciones que efectúa antes de detenerse. (Deber # 1, Física A I Término 2005 – 2006)
   Respuesta:13.26 rev; - 0.95 rad/s².

10. Un punto se mueve por una circunferencia de radio R = 2 cm. La relación del camino recorrido y el tiempo viene expresado por la ecuación $S = Ct^3$, donde C es igual a 0.1 cm/s³. Hallar las aceleraciones normal y tangencial en el instante en que la velocidad lineal del mismo es 0.3 m/s. (Deber # 1, Física A I Término 2005 – 2006).
    Respuesta: a_N = 4.50 m/s²; a_{TAN} = 6 cm/s².

11. Un vehículo se mueve en una trayectoria circular de tal modo que su velocidad angular está definida por $\omega = (9t^2 + 2t) rad/s$ donde t está en segundos. Si a t = 0 la posición es 3 rad, determine a t = 3 s
    a) Su posición
    b) Su aceleración.
    (Deber # 1, Física A I Término 2005 – 2006)
    Respuesta: a) 93 rad; 56 rad/s².

12. Dos partículas A y B pasan por el origen de una trayectoria circular de radio 5 m y en direcciones opuestas con rapidez constante de 0.7 y 1.5 m/s respectivamente. Encuentre el tiempo de colisión y la magnitud de la aceleración de B un instante antes de que ocurra el choque. (Deber # 1, Física I, I Término 2003 – 2004).
    Respuesta: 14.3 s; 0.45 m/s².

1.4. Movimiento Relativo.

El análisis del movimiento relativo se fundamenta en las Transformadas de Galileo de un sistema de referencia en reposo y otro que se está moviendo a una cierta velocidad constante.

Transformaciones de Galileo

Supongamos dos sistemas de referencia k y k'. El sistema k' en reposo y el sistema k moviéndose con velocidad constante v (v<<c) con respecto a k'.

El eje x de k desliza sobre x' de k' y los ejes y y z de ambos sistemas se mantienen paralelos.

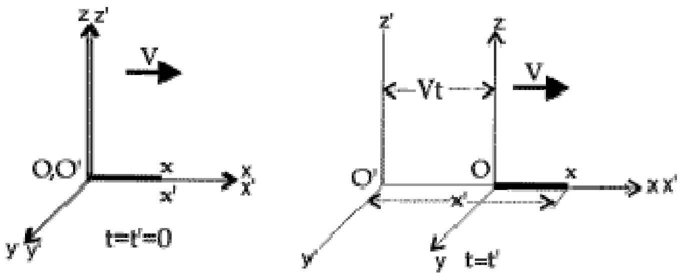


Figura 36

En este tipo de sistemas en los que v<<c el tiempo y la longitud se conservan en ambos sistemas. Es decir si en un reloj situado en k' han pasado 25 segundos, en otro reloj situado en k y sincronizado con el anterior también habrán pasado 25 segundos a pesar de que un sistema se desplace con respecto al otro (o por lo menos la diferencia es tan pequeña que se puede despreciar). Lo mismo podemos decir para la longitud.

Como observas en las figuras. Si tenemos un punto situado a una distancia x (sobre el eje x del sistema k), en el sistema k' las coordenadas de ese punto serán x'=x+vt (vt representa el desplazamiento de O con respecto a O'). Ésto lo podemos resumir en el siguiente sistema conocido como ***transformaciones galileanas:***

$$x' = x + vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Estas transformaciones son válidas siempre que v<<c

(la velocidad con que se mueve un sistema respecto al otro sea mucho menor que la de la luz)

Si derivamos la ecuación que relaciona las posiciones de la partícula en los diferentes sistemas de referencia tenemos

$$v' = u + v$$

Que dicho de otra manera puede ser

$$\overrightarrow{v_{AB}} = \overrightarrow{v_{AC}} + \overrightarrow{v_{CB}}$$

O también por comodidad de los datos que se presenten en los enunciados de los ejercicios

$$\overrightarrow{v_{AB}} = \overrightarrow{v_{AC}} - \overrightarrow{v_{BC}}$$

1.4.1. Ejercicios resueltos

1. Heather en su Corvette acelera a razón de (3.0 i – 2.0 j) m/s², en tanto que Jill en su Jaguar acelera a (1.0 i + 3.0 j) m/s². Ambas parten del reposo en el origen de un sistema de coordenadas xy. Después de 5.0 s, a) ¿cuál es la velocidad de Heather respecto de la Jill?, b) ¿cuál es la distancia que las separa?, y c) ¿cuál es la aceleración de Heather respecto de la de Jill? (Tomado de Física para Ciencias e Ingeniería Raymond Serway)

SOLUCIÓN

a) La **velocidad relativa** de Heather con respecto a Jill está dada por

$$V_{H/J} = V_H - V_J$$

Pero, hay que encontrar las velocidades de cada una de las partículas, mismas que están dadas por

$$V_x = V_{ox} + a_x t$$
$$V_y = V_{oy} + a_y t$$

Velocidad de Heather

$$v_x = 0 + \left[\left(3.0\hat{i}\right)m/s^2\right](5.0s)$$
$$v_x = \left(15\hat{i}\right)m/s$$

$$v_y = 0 + \left[\left(-2.0\hat{j}\right)m/s^2\right](5.0s)$$
$$v_y = \left(-10\hat{j}\right)m/s$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$
$$\vec{v} = (15\hat{i} - 10\hat{j})m/s$$

Velocidad de Jill

$$v_x = 0 + \left[\left(1.0\hat{i}\right)m/s^2\right](5.0s)$$
$$v_x = \left(5.0\hat{i}\right)m/s$$

$$v_y = 0 + \left[\left(3.0\hat{j}\right)m/s^2\right](5.0s)$$
$$v_y = \left(15\hat{j}\right)m/s$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$
$$\vec{v} = (5.0\hat{i} + 15\hat{j})m/s$$

Por tanto, la velocidad relativa de Heather con respecto a Jill es

$$\overrightarrow{v_{H/J}} = \overrightarrow{v_H} - \overrightarrow{v_J}$$
$$\overrightarrow{v_{H/J}} = \left[\left(15\hat{i} - 10\hat{j}\right) - \left(5.0\hat{i} + 15\hat{j}\right)\right]m/s$$
$$\overrightarrow{v_{H/J}} = (10\hat{i} - 25\hat{j})m/s$$

$$V_{H/J} = 26.92 \text{ m/s}$$

b) Igual que en el literal anterior, lo que nos piden es la posición relativa de Heather con respecto a Jill, razón por la que utilizamos las ecuaciones

$$x = V_{ox}t + (½)\, a_x t^2$$
$$y = V_{oy}t + (½)\, a_y t^2$$

Posición para Heather

$$\overrightarrow{x_H} = \left(37.5\hat{i}\right)m$$
$$\overrightarrow{y_H} = \left(-25.0\hat{j}\right)m$$

Posición para Jill

$$\overrightarrow{x_J} = \left(12.5\hat{i}\right)m$$
$$\overrightarrow{y_J} = \left(37.5\hat{j}\right)m$$

$$\overrightarrow{r_{H/J}} = \overrightarrow{r_H} - \overrightarrow{r_J}$$
$$\overrightarrow{r_{H/J}} = \left[\left(37.5\hat{i} - 25.0\hat{j}\right) - \left(12.5\hat{i} + 37.5\hat{j}\right)\right]m$$
$$\overrightarrow{r_{H/J}} = (25\hat{i} - 62.5\hat{j})m$$

$$\mathbf{r} = 67.3 \text{ m}$$

c) Para la aceleración relativa entre Heather y Jill utilizamos el mismo criterio anterior, de donde se obtiene

$$\overrightarrow{a_{H/J}} = \overrightarrow{a_H} - \overrightarrow{a_J}$$
$$\overrightarrow{a_{H/J}} = \left[\left(3.0\hat{i} - 2.0\hat{j}\right) - \left(1.0\hat{i} + 3.0\hat{j}\right)\right]m/s^2$$
$$\overrightarrow{a_{H/J}} = \left(2.0\hat{i} - 5.0\hat{j}\right)m/s^2$$

2. Un río tiene una velocidad estable de 0.500 m/s. Un estudiante nada aguas arriba a una distancia de 1.00 km y regresa al punto de partida. Si el estudiante puede nadar a 1.20 m/s en agua sin corriente, ¿cuánto tiempo dura su recorrido? Compare éste con el tiempo que duraría el recorrido si el agua estuviera quieta. (Tomado de Física para Ciencias e Ingeniería Raymond Serway)

SOLUCIÓN

El tiempo que demora el recorrido es igual al tiempo del nadador en contra de la corriente más el tiempo del nadador a favor de la corriente, o sea,

$t = t_i + t_r$, donde t_i es el tiempo de ida y t_r es el tiempo de regreso.

Cuando el nadador se dirige contra la corriente la velocidad relativa a tierra será la del nadador menos la de la corriente del río, debido a que las velocidades tienen direcciones opuestas, y estamos considerando la referencia positiva según la dirección del movimiento del nadador, o sea,

$V = V_n - V_r$, donde V_n es la velocidad del nadador y V_r es la velocidad del río.

Cuando el nadador se dirige a favor de la corriente la velocidad relativa a tierra será la del nadador más la de la corriente del río, o sea,

$V = V_n + V_r$, donde V_n es la velocidad del nadador y V_r es la velocidad del río.

Por MRU sabemos que $x_i = v_i t_i$ y que $x_r = v_r t_r$, por lo tanto se tiene que

$$t_T = t_i + t_r$$

$$t_T = \frac{x_i}{v_i} + \frac{x_i}{v_i}$$

$$t_T = \frac{x}{v_n - v_r} + \frac{x}{v_n + v_r}$$

$$t_T = \frac{xv_n + xv_r + xv_n - xv_r}{v_n^{\ 2} - v_r^{\ 2}}$$

$$t_T = \frac{2xv_n}{v_n^{\ 2} - v_r^{\ 2}}$$

$$t_T = \frac{2(1x10^3 m)(1.2\ m/s)}{(1.2\ m/s)^2 - (0.50\ m/s)^2}$$

$$2.02x10^3 s$$

Si no hubiera corriente entonces tendríamos $x_T = V_n t$, despejando t y reemplazando los valores dados encontramos que el tiempo de ida y vuelta es t= 1.7×10^3 seg, comparando los dos resultados tenemos

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2.02x10^3 seg}{1.7x10^3 seg}$$

en términos de porcentaje tendremos

$$\frac{t_1}{t_2} = 121\%$$

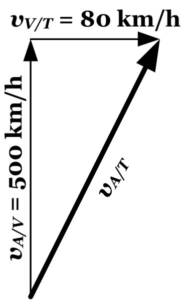
resultado que nos indica que el estudiante se demoraría 21% más tiempo con corriente que sin corriente.

3. Un avión comercial vuela entre Murcia y Zaragoza. Su velocidad de crucero es de 500 Km/h con relación al aire. a) ¿Qué se entiende por velocidad respecto al aire? b) Si durante el vuelo soplan vientos E – O de 80 Km/h ¿cuál es la velocidad respecto al suelo?. c) Si Zaragoza está a 420 km al norte de Murcia sobre el mismo meridiano, ¿qué adelanto, o retraso, tendrá respecto de un viaje en el que no hubiese viento? (Tomado del libro Física General de Fidalgo – Fernández)

SOLUCIÓN

a) La velocidad con respecto al aire es la velocidad que lleva el avión en el aire que le rodea. Otra forma de decirlo es que hay un observador en reposo en el aire y ve cómo se está moviendo el avión en el aire.

b) Si $\overrightarrow{v_{A/V}}$ es la velocidad del avión respecto al aire y $\overrightarrow{v_{V/T}}$ la velocidad del aire respecto a tierra, la velocidad que lleva el avión respecto a tierra será:



$$\overrightarrow{v_{A/T}} = \overrightarrow{v_{A/V}} + \overrightarrow{v_{V/T}}$$

por tanto

$$v = \sqrt{(v_{A/V})^2 + (v_{V/T})^2}$$
$$v = \sqrt{500^2 + 80^2}$$
$$v = 506.36 km/h$$

Figura 37

c) Para mantener el rumbo el avión debe girar un determinado número de grados, de forma que la trayectoria que siga sea la línea recta entre Murcia y Zaragoza. Por tanto la velocidad que llevará en este caso será:

$$v_{A/T} = \sqrt{(v_{A/V})^2 - (v_{V/T})^2}$$
$$v_{A/T} = \sqrt{500^2 - 80^2} = 493.56 km/h$$

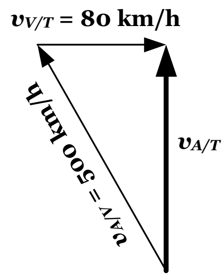


Figura 38

dado que hay 420 Km entre Murcia y Zaragoza, el tiempo que tardará CON VIENTO será entonces:

$$t = \frac{420}{493.56} = 0.85 \text{ horas} = 51.06 \text{ minutos}$$

SIN VIENTO tardaría $t = \frac{420}{500} = 0.84$ horas = 50.40 minutos

La diferencia es t = 0.66 minutos

4. Un hombre en un bote navega corriente arriba por un río y lleva una botella vacía y tapada sobre la popa del bote. Mientras el bote pasa bajo un puente, una ola choca contra la embarcación y la botella cae al agua, sin que el tripulante se dé cuenta. Durante 20 minutos el bote continúa aguas arriba, mientras que la botella flota aguas abajo. Al cabo de los 20 minutos el hombre ve que la botella ha desaparecido, gira el bote (prescindamos del tiempo empleado en la maniobra) y se mueve aguas abajo con la misma velocidad que antes respecto al agua. Coge la botella un kilómetro más abajo del puente. ¿Cuál es la velocidad de la corriente del río? (Examen Parcial Prepolitécnico 2005)

SOLUCIÓN

Llamando 't' al tiempo transcurrido entre el momento que cae la botella y el momento que la recoge, tendremos que 1 km = $v_{río}$ t. Por otra parte, la velocidad del bote con respecto al puente será v_{bote}-$v_{río}$ cuando va contracorriente y v_{bote}+ $v_{río}$ cuando va a favor de corriente, siendo v_{bote} la velocidad del bote respecto al agua. De esta manera tenemos que la distancia que ha recorrido la botella será la que recorre el bote a favor de la corriente menos lo que recorre contra corriente, es decir,

1 km = $v_{río}$ t

$v_{río}$ t = (v_{bote}+$v_{río}$) (t-20) - (v_{bote}-$v_{río}$)20

$v_{río}$t = (v_{bote})(t-20) + ($v_{río}$)(t-20)-(v_{bote})(20) + ($v_{río}$)(20)

$v_{río}$t = (v_{bote})(t-20-20) + ($v_{río}$)(t-20+20)

$v_{río}$t = (v_{bote})(t-40) + ($v_{río}$)(t)

0 = (v_{bote})(t-40)

resolviendo queda: v_{bote}(t-40) = 0 $\vee$ t = 40 min

$$v_{RÍO} = \frac{1km}{40\min \times \frac{1h}{60\min}}$$

$v_{río}$ = 1.5 km/h

5. Un río fluye hacia el Norte con una velocidad de 3 Km/h. Un bote se dirige al Este con una velocidad relativa al agua de 4 Km/h.
   a) Calcular la velocidad del bote con respecto a la Tierra.
   b) Si el río tiene 1 Km de ancho, calcular el tiempo necesario para realizar el cruce.
   c) ¿Cuál es la desviación del bote hacia el Norte cuando llegue al otro lado del río?

   (Examen parcial de Física I, I Término 2003 – 2004)

SOLUCIÓN

a) Teniendo en cuenta que $v_{R/T} = 3km/h$ y $v_{B/R} = 4km/h$, donde $V_{R/T}$ es la velocidad que lleva el agua (corriente del río con respecto a Tierra), y $V_{B/T}$ es la velocidad del bote con respecto al agua, la velocidad que lleva el bote con respecto a tierra será:

$$\overrightarrow{v_{B/T}} = \overrightarrow{v_{B/R}} + \overrightarrow{v_{R/T}}$$

$$v_{B/T} = \sqrt{(v_{B/R})^2 + (v_{R/T})^2}$$
$$v_{B/T} = \sqrt{(4km/h)^2 + (3km/h)^2}$$
$$v_{B/T} = 5km/h$$

b) Podemos realizar el cálculo con la velocidad que lleva el bote en el río

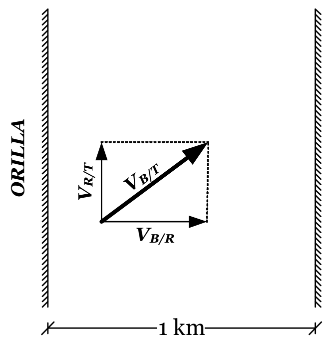


Figura 39

$$\Delta x = v_{B/R}t$$
$$t = \frac{1km}{4km/h}$$
$$t = 0.25h$$
$$t = 15\,min$$

c) La desviación hacia el norte la podemos calcular con la velocidad que lleva el río

$$\Delta y = v_{R/T}t$$
$$\Delta y = (3km/h)(0.25h)$$
$$\Delta y = 0.75km$$

6. Una pequeña lancha pesquera pone rumbo a puerto, que está situado a 32 km al noroeste de su posición inicial. Súbitamente, se ve envuelto en una densa niebla. El capitán mantiene el rumbo al noroeste con una velocidad de 10 km/h relativa al agua. Tres horas más tarde, la niebla se levanta y el capitán observa que se encuentra exactamente a 4 km al sur del puerto.
   (a) ¿Cuál fue la velocidad media de la corriente durante las tres horas?
   (b) ¿En qué dirección debería haber puesto su rumbo la lancha para alcanzar su destino en una trayectoria lineal?
   (c) ¿Si hubiera seguido esa trayectoria lineal, qué tiempo habría necesitado para realizar el viaje?

SOLUCIÓN

a) El ejercicio podemos resolverlo de dos maneras diferentes, utilizando coordenadas rectangulares, o utilizando la ley del seno y/o coseno. Utilizaremos primero el método de las componentes.

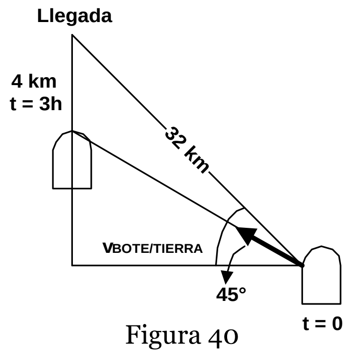


Figura 40

FORMA I

Tomando el origen de coordenadas en el bote cuando se introduce en la niebla, la posición del bote a las tres horas de navegación viene dada por

x = 32 cos 135° y = 32 sen 135° - 4

La velocidad que lleva el bote será la suma de la relativa al agua 10 Km/h en una dirección que forma 135, y la velocidad de la corriente que desconocemos, por tanto el desplazamiento realizado a las tres horas teniendo en cuenta que el movimiento es uniforme será

$$x = x_{LANCHA} + x_{MAR}$$

Donde x_{LANCHA} es el desplazamiento que realiza la lancha con su velocidad respecto al mar, y x_{MAR} es el desplazamiento que genera la velocidad de la corriente, además

$$x_{LANCHA} = (v_{L/M})_X t$$
$$x_{MAR} = (v_{M/T})_X t$$

Donde $(v_{L/M})_X$ es la velocidad de la lancha con respecto al mar en el eje de las x, velocidad que está dada por

$$(v_{L/M})_X = (v_{L/M})cos135^o$$
$$(v_{L/M})_X = (10km/h)cos135^o$$
$$(v_{L/M})_X = -7.07km/h$$

Y $(v_{M/T})_X$ es la velocidad de la corriente con respecto a un observador en Tierra en el eje de las x, velocidad que está dada por

$$(v_{M/T})_X = (v_{M/T})cos\,\alpha$$

Al reemplazar estas dos velocidades en la ecuación de la posición tenemos

$$x = (-7.07)(3) + (v_{M/T}\,cos\,\alpha)(3)$$

En el eje de las y ocurre algo similar

$$(v_{L/M})_Y = (v_{L/M})sen135^o$$
$$(v_{L/M})_Y = (10km/h)sen135^o$$
$$(v_{L/M})_Y = 7.07km/h$$

$$(v_{M/T})_Y = (v_{M/T})sen\alpha$$

$$y = y_{LANCHA} + y_{MAR}$$
$$y = (7.07)(3) + [(v_{M/T})sen\alpha](3)$$

Además la posición de la partícula en el eje de las x debe ser

$$x = 32 \cos 135^o = -22.6 \text{ m}$$

Y en eje de las y.

$$Y = 32sen135^o - 4 = 18.6 \text{ m}$$

Igualando las expresiones tenemos

$$-22.6 = (-7.07)(3) + (v_{M/T} \cos\alpha)(3)$$
$$18.6 = (7.07)(3) + [(v_{M/T})sen\alpha](3)$$

Resolviendo el sistema

$$-1.41 = (v_{M/T} \cos\alpha)(3)$$
$$-2.59 = (v_{M/T} sen\alpha)(3)$$

Dividiendo las ecuaciones tenemos

$$\frac{v_{M/T} sen\alpha}{v_{M/T} \cos\alpha} = \frac{2.59}{1.41}$$
$$Tan\alpha = 1.84$$
$$\alpha = 61.4^o$$

La tangente es positiva en el primer y tercer cuadrante, pero en este caso la velocidad de la corriente no puede estar en el primer cuadrante porque la partícula retrocedió del lugar donde debía llegar. Por tanto, la dirección de la velocidad es 180º + 61.4º = 241.4º. Al reemplazar este dato la velocidad es v = 0.98 Km/h.

<u>FORMA II</u>

Otra forma de resolver es planteando la solución de triángulos no rectángulos, y para ello necesitamos de los datos de la velocidad de la corriente, misma que calculamos a partir de los datos de la ubicación de la lancha a las 3 horas.

La posición de la partícula a las 3 horas es

$$x = 32 \cos 135^o \qquad y = 32 \text{ sen } 135^o - 4$$

Por lo tanto el desplazamiento es

$$\Delta r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\Delta r = \sqrt{(32\cos 135^o)^2 + (32sen135^o - 4)^2}$$
$$\Delta r = 29.3km$$

La velocidad que hizo posible este desplazamiento es la de la corriente sumada a la de la lancha, o sea, la velocidad de la lancha con respecto a la Tierra, y esa velocidad es

$$\Delta r = v_{L/T} t$$
$$29.3km = (v_{L/T})(3h)$$
$$v_{L/T} = 9.77km/h$$

La figura 41 muestra lo mencionado en el párrafo precedente

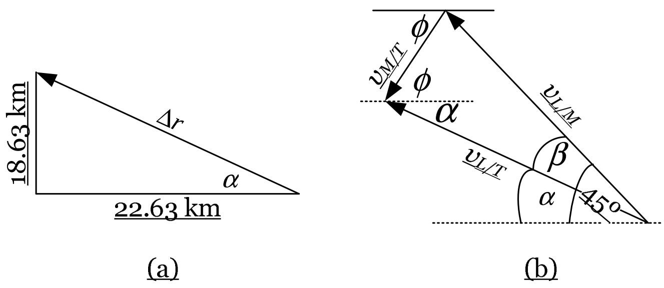


Figura 41

En la figura 41.a se muestra el desplazamiento realizado por la partícula, al calcula el ángulo α podemos calcular el ángulo β y de allí podemos calcular la velocidad de la corriente y el ángulo ϕ.

$$Tan\alpha = \frac{18.63km}{22.63km}$$
$$\alpha = 39.46^o$$

$$\alpha + \beta = 45^o$$
$$\beta = 5.54^o$$

Para calcular la velocidad de la corriente, usamos la ley del coseno

$$(v_{M/T})^2 = (v_{L/M})^2 + (v_{L/T})^2 - 2(v_{L/M})(v_{L/T})cos5.54^o$$
$$v_{M/T} = \sqrt{10^2 + 9.77^2 - 2(10)(9.77)cos5.54^o}$$
$$v_{M/T} = 0.98km/h$$

El ángulo lo podemos calcular por medio de la ley del seno, de manera que se obtiene el mismo resultado que antes.

b) Dado que debe llevar una velocidad en un ángulo de 135º quiere decir que las dos componentes de la velocidad deben de ser iguales porque cos 135º = sen 135º, por tanto si sumamos las dos velocidades e igualamos las componentes tenemos:

$$0.98 \cos 241.3^o + 10 \cos \phi = 0.98 \operatorname{sen} 241.3^o + 10 \operatorname{sen} \phi$$

Resolviendo la ecuación resulta

$\phi = 129.6^o$ ó bien $\phi = 140.4^o$

c) Según está trayectoria lineal la componente x de la velocidad será 10 cos 129.6º = 6.37 y la distancia que debe recorrer será 32 cos 135º = 22.63 por tanto el tiempo que tarda será: $t = \frac{22.63}{6.37}$ =3.55 horas

7. Un avión tiene una velocidad de 600 km/h y viaja entre dos ciudades que están separadas 800 km . Se dirige al norte. ¿Hacia dónde debe volar si se encuentra con un viento constante del oeste de 120 km/h a la misma altura en la que se encuentra el avión?¿Cuál sería su velocidad en Tierra? (Tomado de Física para Ciencias e Ingeniería Raymond Serway).

SOLUCIÓN
En la figura 42 se muestra un gráfico que presenta los datos del enunciado.

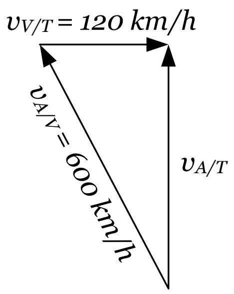


Figura 42

La dirección la calculamos con la función tangente

$$Tan\phi = \frac{120km/h}{600km/h}$$
$$\phi = 11.3^o \text{ al oeste del norte}$$

La velocidad con respecto a Tierra la calculamos por medio del Teorema de Pitágoras.

$$600^2 = 120^2 + (v_{A/T})^2$$
$$v_{A/T} = 588km/h$$

8. El timonel de un barco pone su brújula hacia el oeste y mantiene una velocidad de 15 km/h. Después de media hora de viaje llega a un punto situado a 5 km al oeste y 20 km al sur. Determinar la magnitud y dirección de la velocidad de la corriente. (Lección parcial de Física I, II Término 2003 – 2004).

SOLUCIÓN
Calculamos el desplazamiento de la partícula, y con este desplazamiento encontramos la velocidad del barco con respesto a tierra, $v_{B/T}$, que se muestra en la figura 43

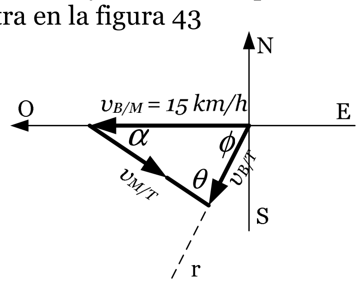


Figura 43

$$\Delta r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\Delta r = \sqrt{5^2 + 20^2}$$
$$\Delta r = 20.6km$$

$$Tan\phi = \frac{y}{x}$$
$$Tan\phi = \frac{20km}{4km}$$
$$\phi = 78.69^o$$

$$v_{B/T} = \frac{\Delta r}{t}$$
$$v_{B/T} = \frac{20.6km}{(1/2)h}$$
$$v_{B/T} = 41.2km/h$$

Con estos resultados podemos calcular la velocidad de la corriente con respecto a tierra, $v_{M/T}$, y el ángulo α que dará la dirección de la corriente.

$$v_{M/T} = \sqrt{41.2^2 + 15^2 - 2(15)(41.2)\cos 78.69}$$
$$v_{M/T} \approx 41km/h$$

$$\frac{sen\alpha}{41.23} = \frac{sen\phi}{41}$$
$$\alpha = 80^o$$

Por lo tanto, la velocidad de la corriente es $\overrightarrow{v_{M/T}} = (41km, 80^o \text{ al sur del este})$

1.4.2. Ejercicios propuestos.

1. Un nadador intenta cruzar perpendicularmente un río nadando a una velocidad de 1.6 m/s respecto al agua tranquila, pero llega a la otra orilla en un punto que está 40 m más abajo en la dirección de la corriente. Sabiendo que el río tiene un ancho de 80 m, ¿cuál es la magnitud de la velocidad del nadador respecto a la orilla? (Examen Final de Física Nivel cero, Verano 2005).
   Respuesta: 1.79 m/s.

2. Una persona desea cruzar un río de 20 m de ancho nadando, de manera que llegue al punto que está en frente del lugar de donde sale. Si el río fluye de este a oeste a una velocidad de 1 m/s y la persona puede nadar a 2 m/s en aguas tranquilas, encuentre el tiempo que demora el nadador en llegar a la otra orilla. (Primera evaluación, Física Nivel cero, Invierno 2007).
   Respuesta: 11.5 s.

3. Si un bote puede viajar con rapidez v sobre el agua en reposo, ¿cuál de los siguientes viajes le tomará el menor tiempo, medido por un observador en Tierra?
   a) Viajar una distancia 2d en agua en reposo.
   b) Viajar una distancia 2d a través (perpendicular) a la corriente del agua.
   c) Viajar una distancia d a favor de la corriente y luego regresar una distancia d contra la corriente.
   d) Viajar una distancia d contra la corriente y luego regresar una distancia d a favor de la corriente.
   e) Todas las de arriba toman el mismo tiempo.
   (Tercera evaluación, Física Nivel cero, Invierno 2007).
   Respuesta: b)

4. El piloto de una avioneta debe mantener un rumbo de 18º al norte del este para que su avión viaje hacia el este con respecto al suelo. La velocidad de la avioneta con respecto al aire es de 260 km/h y su velocidad con respecto al suelo es 280 km/h. Calcule la velocidad del viento. (Examen parcial de Física A, I término 2005 – 2006).

5. El piloto de un avión observa que la brújula indica que va rumbo al oeste. La velocidad del avión relativa al aire es de 150 km/h. Si hay un viento de 30 km/h hacia el norte, encuentre la velocidad del avión respecto al suelo. (Primera lección de Física A, I Término 2006 – 2007).
   Respuesta: 153 km/h, 11.3º al norte del oeste.

6. En el instante que se muestra en la figura 44, los móviles A y B viajan con rapidez de 70 km/h y 45 km/h respectivamente. También en ese instante A experimenta un aumento en su rapidez de 4 m/s² y B una reducción en su rapidez de 4 m/s². Encuentre la velocidad y aceleración de A con respecto a B. (Lección parcial de Física I, I término 2004 – 2005)
   Respuesta: $\overrightarrow{v_{AB}} = (107 km/h; 17.4^o \text{ al oeste del sur})$; $\overrightarrow{a_{AB}} = (8.3 m/s^2; 7.21^o \text{ al norte del este})$

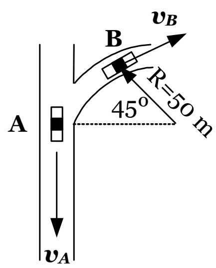


Figura 44

7. En el instante en que se muestra en la figura 45 y en las direcciones mostradas en el sistema de referencia dado, el vehículo A tiene una velocidad de 20 km/h que aumenta a razón de 300 km/h², al entrar a la autopista al mismo instante el vehículo B desacelera a 250 km/h², mientras viaja a 100 km/h. Calcule la velocidad y la aceleración del vehículo A con respecto a B. (Lección parcial de Física I, I término 2004 – 2005)
   Respuesta: $\overrightarrow{v_{AB}} = 120 km \text{ al norte}$; $a_{AB} = (3.3\times10^3 km/h^2; 0.86^o)$

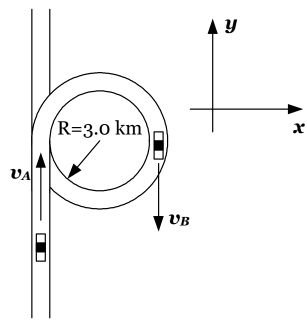


Figura 45

8. Una aeronave puede volar 5 h con el tanque lleno de combustible. Sin viento vuela a una rapidez de 800 km/h. La nave debe efectuar un viaje de ida hacia el oeste y luego regresar hacia el punto de partida en dirección este. Sin embargo, durante el viaje de ida se encuentra con un viento de 200 km/h que sopla de oeste a este, y durante el regreso el viento tiene la misma magnitud de la velocidad, pero esta vez está a 60º en dirección este del norte. Determine la distancia máxima que la nave puede volar hacia el oeste y lograr volver al punto de partida. (Sugerencia: la nave no toma la misma dirección de regreso). (Lección parcial de Física I, II Término 2000 – 2001).
   Respuesta: 1581.3 km.

9. Un nadador a mitad de un río ancho que fluye hacia el este a 2 km/h siente que está cansado. Su velocidad de nado es de 2 km/h en agua tranquila. Si quiere alcanzar la orilla norte del río en el menor tiempo, debería:
   a) Dirigirse al noroeste.
   b) Dirigirse directamente al norte.
   c) Dirigirse al noreste.
   d) Dirigiéndose al noroeste o al norte alcanzará la orilla al mismo tiempo.
   e) Dirigiéndose al cualquier dirección alcanzará la orilla en un mismo tiempo
   (Examen parcial de Física I, II Término 2000 – 2001)
   Respuesta: b)

10. Se cruzan dos trenes que viajan en línea recta y en direcciones opuestas, con rapideces de 80 km/h y 40 km/h. Un viajero del primer tren observa que el segundo tren tarda 3 s en pasar delante de él. ¿Cuál es la longitud del segundo tren?
    (Examen parcial de Física I, II Término 2004 – 2005)
    Respuesta: 360 m.

11. Los motores de un bote lo impulsan con una velocidad de $\vec{v} == \left(3\hat{i} + 7\hat{j}\right) m/s$ respecto al agua. El momento que comienza a cruzar un río de ancho 1 km (punto O) un pasajero deja caer un sombrero al agua. Calcule la posición del bote respecto al sombrero, en función de los unitarios $\hat{i}, \hat{j}\ y\ \hat{k}$, un minuto más tarde, si la corriente lleva una velocidad de: a) $\left(4\hat{i}\right) m/s$; b) $\left(-4\hat{i}\right) m/s$.
    (Lección # 1 de Física I, I Término 2002 – 2003)
    Respuesta: a) $\overrightarrow{r_{B/S}} = \left(180\hat{i} + 420\hat{j}\right) m$; $\overrightarrow{r_{B/S}} = \left(180\hat{i} + 420\hat{j}\right) m$

12. Dos automóviles, A y B, se mueven por rieles que forman entre sí un ángulo de 53º, a 70 km/h y a 90 km/h respectivamente. Encuentre la velocidad relativa de B respecto a A, cuando se mueven:
    a) Uno hacia el otro.
    b) Alejándose entre sí.
    (Lección # 1 de Física A, I Término 2005 – 2006)
    Respuesta: a) 73.6 km/h a 77.57º de A; b) 143.47 km/h a 30.7º de A.