

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES
Docentes: **Elvis Aponte**— Fecha: 28 de marzo de 2025. Horario: 09:00 – 11:00

EXAMEN PRIMER PARCIAL PAE AÑO 2025

COMPROMISO DE HONOR

Yo, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que NO puedo usar calculadora; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA

Tema 1 (20 %) (Rectas y planos)

Dados los puntos A= (1,0, 2), B= (0, 1, 1), C= (1, 1, 0), D= (2, 2, 1):

- i) Determine la distancia entre las rectas L_{AB} y L_{CD} . **(10%)**
- ii) Determine $\pi_{ABC} \cap \pi_{BDC}$ **(10%)**

Solución

- i) Las ecuaciones de las rectas son:
 $L_{AB} := (1, 0, 2) + \alpha(1, -1, 1)$. $L_{CD} := (1, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1)$ (2%)

Ya que $(1, -1, 1) \times (1, 1, 1) = (-2, 0, 2) \neq (0, 0, 0)$. Las rectas no son paralelas. (2%).

El sistema de ecuaciones:

$x = 1 + \alpha = 1 + \lambda$, $y = -\alpha = 1 + \lambda$, $z = 2 + \alpha = \lambda$; indica que las rectas no se intersectan.

Por lo tanto, son alabeadas. (4%).

La distancia pedida es: $d = \frac{|(0,1,-2) \cdot (-2,0,2)|}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$. (2%).

- ii) Las ecuaciones de los planos son:
 $\pi_{ABC}: x + 2y + z = 3$. (3%).

$$\pi_{BDC}: x - 2y + z = 1. (3\%).$$

Luego: $\pi_{ABC} \cap \pi_{BDC} := x = 2 - t; y = t; z = 3t - 1$. (4%).

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño literal			
	Inicial	En Desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante conoce sobre rectas y planos en el espacio tridimensional.	El estudiante obtiene el vector director de las rectas para así expresar las ecuaciones.	El estudiante se da cuenta de que las rectas están alabeadas. Y así obtiene la distancia utilizando la fórmula.	El estudiante obtiene los vectores normales de los planos y expresa las ecuaciones de estos.	El estudiante obtiene la ecuación de la recta intersección entre los planos.
	0-4	5-10	11 - 16	17-20

Tema 2 (20 puntos)

Dada la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \operatorname{sen}(xy)}{y^2 + x^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- Determinar la continuidad de f en el origen $(0, 0)$
- Calcule $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}$ y $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}$.
- ¿ la función f es diferenciable en $(0, 0)$?

Solución

a) 1. $-f(0, 0) = 0$. **(1%)**

$$2.- \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}(xy)}{y^2 + x^2} \stackrel{x = \rho \cos \theta}{y = \rho \sin \theta} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\rho^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen}(\rho \cos \theta \rho \sin \theta)}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \cos^2 \theta \operatorname{sen}(\rho \cos \theta \rho \sin \theta) = 0. \text{ **(4\%)}**}$$

(Pues la función acotada y el radio tiende a cero)

$$3. f(0, 0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

Luego $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$. **(1%)**

b)

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0. \text{ **(2\%)}**}$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0. \text{ **(2\%)}**}$$

$$c) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}(xy)}{(y^2 + x^2)^{3/2}} = 0.$$

$$\text{Por que } \left| \frac{x^2 \operatorname{sen}(xy)}{(y^2 + x^2)^{3/2}} \right| \leq \left| \frac{x^2 \operatorname{sen}(xy)}{(x^2)^{3/2}} \right| = \left| \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} \right| = \left| \frac{y \operatorname{sen}(xy)}{yx} \right| = |y| \left| \frac{\operatorname{sen}(xy)}{yx} \right|. \text{ **(10\%)}**}$$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño literal			
El estudiante debe ser capaz de analizar la continuidad y diferenciability de una función escalar de varias variables.	Inicial	En Desarrollo	Desarrollado	Excelente
	El estudiante plantea el límite que define la	El estudiante calcula las derivadas parciales en el origen. Se da	El estudiante plantea el límite que define la diferenciability en el origen.	El estudiante logra demostrar que el límite que define la diferenciability

	continuidad en el origen, que calcula para obtener que la función es continua.	cuenta de que son cero.		en el origen es cero, y así concluye que la función es diferenciable en el origen.
	0-6	7-10	11 - 12	13-20

Tema 3 (20 puntos)

Describir analíticamente y gráficamente el dominio de la función, además, señale que tipo de superficie es la que limita el dominio.

i) $f(x, y, z) = \sqrt[6]{x^2 + y^2 - z^2 - 2z - 1}$. (10%)

ii) $g(x, y, z) = \sqrt[202]{x^4 - z}$. (10%)

Solución.

- i) Al completar al cuadrado se obtiene que $x^2 + y^2 = (z + 1)^2$ es el borde del dominio, así que el dominio es el interior de esta superficie (5%). Al notar el binomio de circularidad, se obtiene que es un cono como superficie cuadrática de revolución, con eje de giro z , y girando la curva de ecuación $x = z + 1$, o, $y = z + 1$. (5%).
- ii) Al notar que un dominio de una función de tres variables se obtiene que este es la parte interior (5%) de la superficie cilíndrica con directriz $x^4 = z$ y generatrices paralelas al eje y (5%).

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño literal			
	Inicial	En Desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante conoce dominios de funciones en varias variables, también sobre superficies cuadráticas, cilíndricas o de revolución.				
	El estudiante obtiene las condiciones para los dominios y la establece.	El estudiante con ciertos métodos establece la superficie borde del dominio solicitado.	El estudiante nota el tipo de superficie que es el borde del dominio solicitado.	El estudiante describe tal borde, expresando si este es de revolución o cilíndrica.
	0-4	5-10	11 - 16	17-20

Tema 4 (20 puntos) Dada la función $T(x, y) = \ln(\cos^2(x + y) + 1) + xy$.

- i) En el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, en que dirección es la derivada direccional máxima. (11%)
- ii) En la dirección del vector $(3, 4)$ ¿es cierto que la derivada direccional es $\frac{7\pi}{10}$? (9%)

Solución. i) Primero, calculamos las derivadas parciales de $T(x, y)$ y evaluándolas en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ se

obtiene que:

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Entonces, $\nabla T\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. (5%).

Normalizamos $\nabla T\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ para obtener la dirección de máxima derivada direccional:

$$\|\nabla T\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\| = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \text{ (1\%)}.$$

Así, la dirección de máxima derivada direccional es:

$$\mathbf{df}_{\max} = \left(\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}}, \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ (5\%)}.$$

- i) Normalizamos el punto $(3, 4)$ y se tiene la dirección unitaria $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. (1%). Así la derivada direccional es:

$$\nabla T(a, b) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{7\pi}{20}. \text{ Seleccionamos (a, b) tales que } a + b = \frac{\pi}{2} \text{ y además}$$

Que $\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b = \frac{7\pi}{10}$. (4%). Se resuelve y por lo tanto si es posible. (3%). Entonces, es verdadero lo indicado. (1%).

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño literal			
	Inicial	En Desarrollo	Desarrollado	Excelente
El alumno conoce sobre derivadas direccionales, determina la dirección de máxima derivada y además la calcula usando el teorema para derivadas direccionales.				
	El estudiante obtiene evaluando las derivadas parciales, el vector gradiente. El cual lo normaliza.	El estudiante establece el vector dirección de máxima derivada direccional.	El estudiante con el teorema presenta la derivada en dirección del vector $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.	El estudiante expresa un sistema de dos ecuaciones y al resolver concluye que lo indicado es cierto.

	0-6	7-11	11 - 12	13-20
--	-----	------	---------	-------

Tema 5 (20 puntos)

Dadas las funciones siguientes:

$W = w(x, y)$, se tiene que $x = (5t^2)\text{sen}(2s)$, $y = (\cos 2t)(t + s^2)$ y $(s, t) = \left(\pi, \frac{\pi}{4}\right)$. Determine:

- $\frac{\partial w}{\partial s} \left(\pi, \frac{\pi}{4} \right).$
- $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \left(\pi, \frac{\pi}{4} \right).$
- $f_{xy}(x, y)$, para $f(x, y) = 6x \ln(y^6 + 6x^6)$.

Solución.

$$\text{i) } \frac{\partial w}{\partial s} \left(\pi, \frac{\pi}{4} \right) = (w_x x_s + w_y y_s) \left(\pi, \frac{\pi}{4} \right) = \frac{5}{8} \pi^2 w_x. \text{ (5\%)}$$

Por que $x_s \left(\pi, \frac{\pi}{4} \right) = \frac{5}{8} \pi^2$. También; $y_s \left(\pi, \frac{\pi}{4} \right) = 0$.

$$\text{ii) } \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \left(\pi, \frac{\pi}{4} \right) = (w_{sx} x_s + w_{sy} y_s) \left(\pi, \frac{\pi}{4} \right) = \frac{25}{64} \pi^4 w_{xx}. \text{ (10\%)}$$

$$\text{iii) } f_x = 6 \ln(y^6 + 6x^6) + \frac{1}{y^6 + 6x^6} 216x^6.$$

$$f_{xy} = \frac{112y}{y^6 + 6x^6} + 216x^6 6y^5 / (y^6 + 6x^6)^2. \text{ (5\%)}$$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño literal			
	Inicial	En Desarrollo	Desarrollado	Excelente
El alumno sabe obtener las derivadas parciales de funciones en varias variables, lo hace vía regla la cadena y por derivadas de orden superior.				
	El estudiante obtiene la derivada parcial por medio de la regla de la cadena y luego la evalúa en el	El estudiante determina por la regla de la cadena, la expresión que dará la derivada final pedida.	El estudiante expresa correctamente la derivada pedida. La cual evalúa en el punto dado.	El estudiante expresa, usando la regla del producto, la función derivada superior.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS—Materia: CÁLCULO VARIAS VARIABLES
Docentes: **Elvis Aponte**— Fecha: 28 de marzo de 2025. Horario: 09:00 – 11:00

	punto indicado.			
	0-5	6-10	11 - 16	16-20