CAPITULO 3: La Derivada

Ejercicios Propuestos 3.1

1) a) 2.5 b) 2.3 c) 2.1 d) $f'(2)=2$

2) $f'(3)=\dfrac{1}{2}$

3) a) $f'(x)=3$ b) $f'(x)=-2$ c) $f'(x)=2x+2$ d) $f'(x)=-4x+1$

e) $f'(x)=6x^2$ f) $f'(x)=-\frac{3}{2}(3x+2)^{-3/2}$

Ejercicios Propuestos 3.2

1) $f'(1)=2$ 2) No existe 3) No existe 4) $a=6$, $b=-4$

5) $a=3$, $b=-1$ 6) $a=c-2 \ \wedge \ b=3-2c \ \wedge \ c\in R$

Ejercicios Propuestos 3.3

1) a) $f'(x)=\frac{4}{3}x^{-2/3}+\dfrac{2}{x}-3e^x$

b) $f'(x)=5x^4+3x^2+4x$

c) $f'(x)=2x+\cos x(1-x-\cos x)-senx(1+x-senx)$

d) $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2 senx}-\dfrac{\cos x(x^2+1)}{xsen^2x}$

e) $f'(x)=\dfrac{e^x\left[(1+x)(senx+1)-x\cos x\right]}{(senx+1)^2}$

f) $f'(x)=\dfrac{xe^x}{2}\left[(x+2)\ln x+1\right]$

2) $y=4x+1$

3) $y=-3x+\dfrac{13}{4}$

4) $y=2x+1$; $y=-2x+9$

5) $y=12x+81$; $y=12x-44$

6) $P(3,9)$

7) $3\sqrt{5}$

8) $50!$

9) $\dfrac{10}{49}$

Ejercicios Propuestos 3.4

1. a) $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ b) $f'(x)=\dfrac{-x}{(2x-3)^{3/2}}$

c) $f'(x)=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ d) $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^{1/2}(x^2+1)^{3/2}}$

e) $f'(x)=3\left(\dfrac{senx}{\cos 2x}\right)^2\left(\dfrac{\cos x\cos 2x+2senxsen2x}{\cos^2 2x}\right)$

f) $f'(x)=\dfrac{2x}{(x+1)\ln(x+1)}$ g) $f'(x)=\dfrac{8}{x(x^2-4)^2}$

3. $(f\circ g)'(x)=\dfrac{-(\sin 4x)\,e^{\sqrt{1+\cos^2 2x}}}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}$

4. a) 4 b) -8 c) 2 d) -10 e) -6

5. 16

Ejercicios Propuestos 3.5

1. a) $\dfrac{d^4}{dx^4}\left[\cos\left(x^2\right)\right]=48x^2\sin\left(x^2\right)+\left(16x^4-12\right)\cos\left(x^2\right)$

   b) $\dfrac{d^2}{dx^2}\left[\dfrac{xsen^2(\pi x)}{1+x}\right]=\dfrac{2\pi(\sin 2\pi x+\pi x\cos 2\pi x)}{(1+x)^3}$

   c) $\dfrac{d^n}{dx^n}\left[xe^x\right]=ne^x+xe^x$

   d) $D_x{}^n\left(\dfrac{5}{4-x}\right)=\dfrac{5\,(n!)}{(4-x)^{n+1}}$

   e) $D_x{}^n\left[\dfrac{1+x}{1-x}\right]=\dfrac{2(n!)}{(1-x)^{n+1}}$ entonces $D_x{}^{30}\left[\dfrac{1+x}{1-x}\right]=\dfrac{2(30!)}{(1-x)^{31}}$

   f) $\dfrac{d^n}{dx^n}\left[x\sin x\right]=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+1}{2}+1}(n\sin x+x\cos x); & si\ n\ es\ impar\\ (-1)^{\frac{n}{2}+1}(n\cos x-x\sin x) & ;\ si\ n\ es\ par\end{cases}$ entonces

   $\dfrac{d^{35}}{dx^{35}}\left[x\sin nx\right]=-35\sin x-x\cos x$

2. $\dfrac{d}{dx}\left[x\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)\right]=\dfrac{2(1-2x)}{(1+x)^4}$

3. $a_n(n!)$

4. $p(x)=2x^3-3x^2+3x-1$

Ejercicios Propuestos 3.6

1. a) $y'=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$ b) $y'=-\dfrac{y}{x(y+1)}$

   c) $y'=-\dfrac{y^2e^{xy}}{xye^{xy}+1}$ d) $y'=\dfrac{y}{\sec y\tan y+\sec^2 y-x}$

   e) $y'=-\dfrac{2y}{x\left(2+\sqrt{y}\right)}$

3. $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$ 4. $y=x-2$ 5. $y=-x+2$

6. $y=-x+2$ 7. $x=0$ 8. $y=\frac{3}{2}x$

9. $(1,1)$ 10. $y''=\dfrac{48xy^2-9x^4}{64y^3}$ 11. $y''=\dfrac{1}{3x^{4/3}y^{1/3}}$

12. $y''=-3$

Ejercicios Propuestos 3.7

1. a) $y' = \tan(t)$ b) $y' = \dfrac{t+1}{t\left(t^2+1\right)}$

2. $y = x + \frac{4-\pi}{2}a$ 3. $y = 3x - 1$ 4. $y = \frac{3}{8}x + \frac{41}{8}$

5. $y = 5x$ 6. a) $y'' = \cos t$, b) $y''' = \cos t$

Ejercicios Propuestos 3.8

1. $y = 2x - 2$ 2. $y = -\sqrt{3}x + 8$ 3. $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}$

4. $y - \frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{12\sqrt{3}+3}{12-3\sqrt{3}}\left(x - \frac{3}{2}\right)$

Ejercicios Propuestos 3.9

1. $1/16$ 2. $1/5$ 3. $2/3$ 4. 3

5. $x - 5y + 5 = 0$ 6. $x - 11y - 9 = 0$ 7. $2ax + y - 2a(a+1) = 0$ 8. 3

9. a) $y' = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ b) $y' = arctg\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $y' = \dfrac{4}{3\cos x + 5}$ d) $y' = e^{arctg\left(x^3+senx\right)}\left[\dfrac{3x^2+\cos x}{1+\left(x^3+senx\right)^2}\right]$

Ejercicios Propuestos 3.10

1. a) $y' = \dfrac{\sec^5 x\sqrt[3]{tgx+1}}{\sqrt{\csc x^3 - 4}}\left[5tgx + \frac{1}{3}\dfrac{\sec x}{senx+\cos x} + \frac{3}{2}\dfrac{x^2\csc x^3 ctgx^3}{\csc x^3 - 4}\right]$

b) $y' = \sqrt[4]{x^3\cos 4x}\,\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\left(4x-x^3\right)^5}\left[\dfrac{3}{4x} - tg\,4x - \frac{2}{3}\dfrac{x}{1-x^2} - \dfrac{20+15x^3}{4x+x^3}\right]$

c) $y' = \left[\dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{2xe^{x^2}}{arcsen\left(e^{x^2}\right)\sqrt{1-e^{2x^2}}} - \dfrac{2}{3(x+2)} - \dfrac{3}{2(x+3)}\right]\left[\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}\,arcsen\left(e^{x^2}\right)\right]$

d) $y' = x^{3^x}3^x\left[\ln 3\ln x + \dfrac{1}{x}\right]$

e) $y' = x^n n^x\left[\dfrac{n}{x} + \ln n\right]$

f) $y' = y\left\{\left[\dfrac{2\arctan x}{1+x^2}\left[\ln\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos}\right] + 2\arctan^2 x\sin x\cos x\left[\dfrac{1}{\arcsin\left(\sin^2 x\right)\sqrt{1-\sin^4 x}} - \dfrac{1}{\arccos\left(\cos^2 x\right)\sqrt{1-\cos^4 x}}\right]\right]\right\}$

g) $y' = \left(\arcsin\left(1+e^{2x}\right)\right)^{\sec x}\left[\sec x\tan x\ln\left(\arcsin\left(1+e^{2x}\right)\right) + \dfrac{2\sec xe^x}{\arcsin\left(1+e^{2x}\right)\sqrt{-\left(2+e^{2x}\right)}}\right]$

h) $y' = \left[\ln(\sin 3x)\right]^{\arctan(\cos 3x)}\left[\dfrac{3\cos 3x\arctan(\cos 3x)}{\ln(\sin 3x)\sin 3x} - \dfrac{3\sin 3x\ln(\ln(\sin 3x))}{1+\cos^2 3x}\right]$

i) $y' = \dfrac{2x(x+y) - y\left(x^2+y^2\right)}{(x+y)\left(x^2+y^2\right)\ln(x+y) + y\left(x^2+y^2\right) - 2y(x+y)}$

j) $y' = \left(1+x^2\right)^x\left[\ln\left(1+x^2\right) + \dfrac{2x^2}{1+x^2}\right]$

2. $(\ln 2)x - y + 1 = 0$
3. $x + y - 2 = 0$
4. 14

Misceláneos

1. a) V b) V c) F d) V e) V
   f) V g) V h) V i) F j) F
   k) F l) F m) V n) F o) V
   p) F q) F r) F s) F t) V
   u) V v) F w) F

2. a) $y' = \dfrac{\cos y - 2xy^2 + 2x\sin\left(x^2+y^2\right)e^{\cos\left(x^2+y^2\right)}}{2x^2y - 2y\sin\left(x^2+y^2\right)e^{\cos\left(x^2+y^2\right)} + x\sin y}$

   b) $y' = \left(x^2+1\right)^{\ln x}\left[\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} + \dfrac{2x\ln x}{\left(x^2+1\right)}\right]$

   c) $y' = \dfrac{\cos\left(\ln^2\left(\cos x + e^{3x}\right)\right)\ln\left(\cos x + e^{3x}\right)\left(3e^{3x} - \sin x\right)}{\sqrt{\sin\left(\ln^2\left(\cos x + e^{3x}\right)\right)}\left(\cos x + e^{3x}\right)}$

   d) $y' = \dfrac{1}{2\dfrac{x}{y} + \dfrac{y^3}{y^2+1} - y^2\arctan\dfrac{1}{y}}$

   e) $y' = x^{e^x}\left(e^x\ln x + \dfrac{e^x}{x}\right) + e^{x^x}x^x\left(\ln x + 1\right)$

   f) $y' = \dfrac{\cos\sqrt{x+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\left(2\sqrt{x}+1\right)\sin\sqrt{x+\sqrt{x}}}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

   g) $y' = \dfrac{6}{4-9x^2}$

   h) $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+2}\,\sqrt[3]{1+\arctan x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}\left[\dfrac{x}{x^2+2} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+\arctan x}\right)\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)\right]$

   i) $y' = \left(\sin 3x\right)^{\arctan x^2}\left[\dfrac{2x}{1+x^4}\ln\left(\sin 3x\right) + 3\arctan x^2\cot an 3x\right]$

   j) $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} + \dfrac{2\arctan x\, e^{\arctan^2 x}}{1+x^2}$

   k) $y' = \dfrac{x(y-x)}{2x^2+xy+y^2}$

   l) $y' = e^{\tan x}\left(\sec^2 x\tan e^x + e^x\sec^2 e^x\right)$

   m) $y' = \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{y}{x+y}}{\ln(x+y) + \dfrac{y}{x+y}}$

3. $2f(x)f'(x)$
4. $a = 2c \wedge b = 1 \wedge d = c+1 \wedge c \in R$
5. $y = -2x + 2\sqrt{3}$
6. $\left[D_x(g\circ f)\right](1) = \dfrac{e}{2}$
7. $y = x \ \wedge \ y = -x$
8. $y = -6x + 5$

9. f es derivable en $(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$

10. $k=-8 \vee k=3$

11. $\dfrac{d^3y}{dx^3}=-\sqrt{1-t^2}$

12. $\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{t=1}=-\dfrac{1}{8}$

13. $a=-3$, $b=-4$, $c=1$

14. $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

15. $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

16. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$

17. $\dfrac{dy}{dx}=\pi^2-2$

18. $f'(1)=\dfrac{2}{27}$

19. $y=x-2a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$

20. $a=c+1 \wedge b=1 \wedge c\in R$

21 $y=x+1$

22. $y=6x-6$

23. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

24. $y=3x-1$

25. De $F(x)$ tenemos $F'(x)=\cos x\ f(\cos x)-\sin^2 x\ f'(\cos x)$

y como $F'(-x)=\cos(-x)\ f(\cos(-x))-\sin^2(-x)\ f'(\cos(-x))=F(x)$

Por tanto $F'(x)$ es PAR

26. $k=-7$

27. $\dfrac{d^{50}}{dx^{50}}\left[\dfrac{1-x}{1+x}\right]=\dfrac{2(50!)}{(1+x)^{51}}$

28. $y=-x+3$

29. $y=-x-\frac{1}{4}$

30. $\left[\dfrac{d}{dx}f^{-1}\right](4)=\dfrac{1}{15}$