**EXAMEN DE CONTROL AUTOMÁTICO**
**PRIMER PARCIAL**
**DICIEMBRE 1 DE 2009**

## PRIMER TEMA: 35 puntos

Considere el siguiente sistema con realimentación negativa en donde:

$$Gp(s) = \frac{(s+6)}{s(s+10)} \quad ; \quad Gc(s) \quad ; \quad H(s) = 1$$

Determine la mejor estrategia de control entre:

$$a). \quad PI: \quad Gc(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

$$b). \quad PD: \quad Gc(s) = K_P + sK_D$$

para que el sistema cumpla con los siguientes requerimientos para la respuesta al escalón:

- Sobre-nivel Porcentual = 5%
- Tiempo de Estabilización = 4 segundos
  a. (15 puntos) Determine de las dos alternativas cuál sería la opción que nos permita cumplir con las especificaciones pedidas.
  b. (20 puntos) Aplicando el método del “Criterio de Magnitud y Fase” determine los parámetros del controlador.

## SEGUNDO TEMA: 30 puntos

El diagrama muestra el circuito de control de un sistema de calentamiento de agua.

x(t)= f(w,z1,z2).

a. (15 puntos) Encuentre la expresión de la Función de Transferencia:

$$X(s)=T_r.W(s)+T_{d1}.Z_1(s)+T_{d2}.Z_2(s)$$

b. (15 puntos) Si las expresiones de los bloques son:

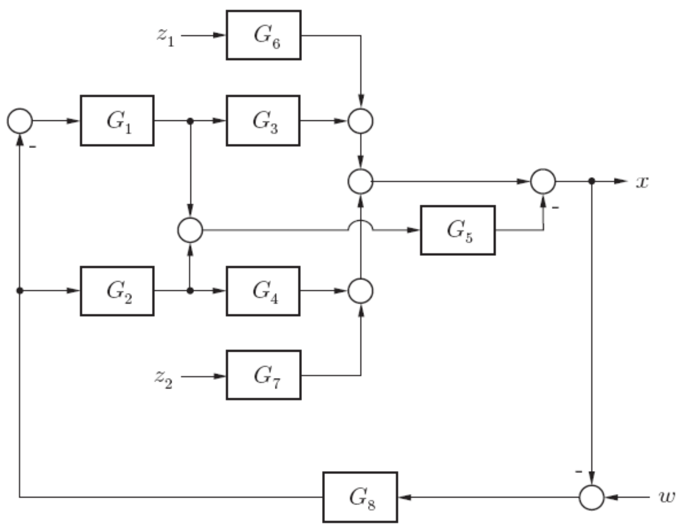
$$G_1(s) = \frac{2}{1+Ts} \quad ; \quad G_2 = \frac{6}{1+2Ts} \quad ; \quad G_3(s) = K_3$$

$$G_4(s) = K_4 \quad ; \quad G_5(s) = K_5 \quad ; \quad G_6(s) = K_6$$

$$G_7(s) = K_7 \quad ; \quad G_8(s) = K_R \frac{1+2Ts}{2Ts}$$

$$Adicionalmente: \quad K_4 - K_5 = K \quad ; \quad K_5 - K_3 = 3K$$

Obtenga la expresión de X(s) en función de las funciones de transferencia de los bloques.




## TERCER TEMA: 35 puntos

Para el siguiente sistema con retroalimentación negativa unitaria, su función de transferencia de lazo es :

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+5)}$$

a. ( 10 puntos) Bosqueje el Lugar Geométrico de sus raíces.
b. ( 10 puntos ) Haga el análisis de estabilidad del sistema.
c. ( 5 puntos ) Determine el valor de K que permita tener 2 polos de lazo cerrado reales e iguales.
d. ( 5 puntos ) Determine la ubicación de los polos de lazo cerrado cuando K = 6 e indique el tipo de dominancia del sistema.
e. ( 5 puntos ) Para el literal (d) calcule el Sobre-Nivel Porcentual y Tiempo de Estabilización de las raíces dominantes.

Solución:

Primer tema:

$Ecuación\_Característica:$

$$1+Gc(s)\cdot Gp(s)\cdot H(s)=0 \quad\rightarrow\quad 1+Gc(s)\frac{s+6}{s(s+10)}=0$$

1. $Por\_variación\_de\_parámetros:$

$$a)\quad Gc(s)=PI \quad ; \quad 1+\frac{sK_P+K_I}{s}\,\frac{s+6}{s(s+10)}=0 \quad\rightarrow\quad s^3+(10+K_P)s^2+(K_I+6K_P)s+6K_I=0$$

$$0\le K_P\le\infty \quad ; \quad 0\le K_I\le\infty \quad\rightarrow\quad 1+K_P\frac{(s+6)s}{s^3+10s^2+sK_I+6K_I}=0$$

$$a1)\quad 0\le K_P\le\infty \quad ; \quad K_I=0$$

$$s^3+10s^2+s(s+6)K_P=0 \quad\rightarrow\quad 1+K_P\frac{s+6}{s(s+10)}=0$$

$$a2)\quad K_P=K_{P1} \quad ; \quad 0\le K_I\le\infty \quad\rightarrow\quad 1+K_I\frac{(s+6)}{s(s^2+(10+K_{P1})s+6K_{P1})}=0$$

$$b)\quad Gc(s)=PD \quad ; \quad 1+(K_P+sK_D)\frac{s+6}{s(s+10)}=0 \quad\rightarrow\quad (1+K_D)s^2+(10+K_P+K_D)s+6K_P=0$$

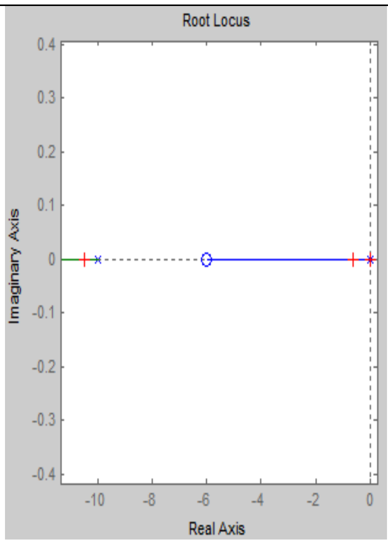
$$0\le K_P\le\infty \quad ; \quad 0\le K_D\le\infty \quad\rightarrow\quad 1+K_P\frac{(s+6)}{(1+K_D)s^2+(10+K_D)s}=0$$

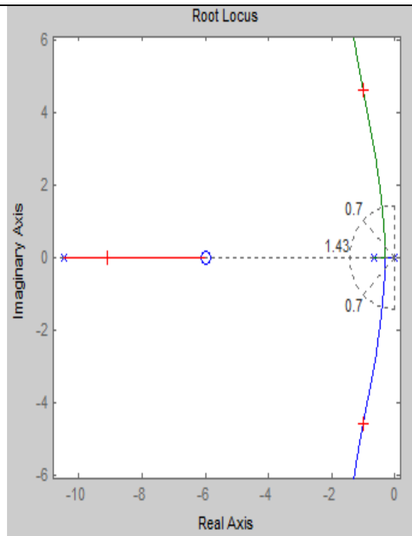
$$b1)\quad 0\le K_P\le\infty \quad ; \quad K_D=0$$

$$s^3+10s^2+s(s+6)K_P=0 \quad\rightarrow\quad 1+K_P\frac{s+6}{s(s+10)}=0$$

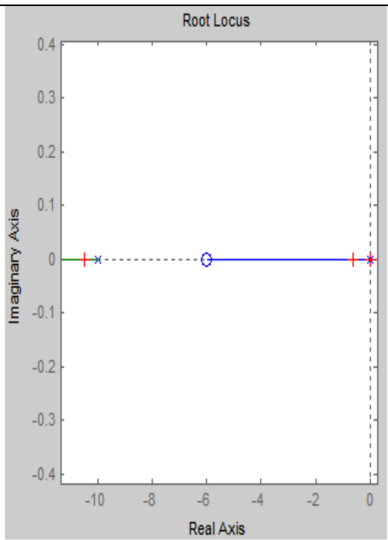
$$b2)\quad K_P=K_{P1} \quad ; \quad 0\le K_D\le\infty \quad\rightarrow\quad 1+K_D\frac{s(s+6)}{s^2+(10+K_{P1})s+6K_{P1}}=0$$

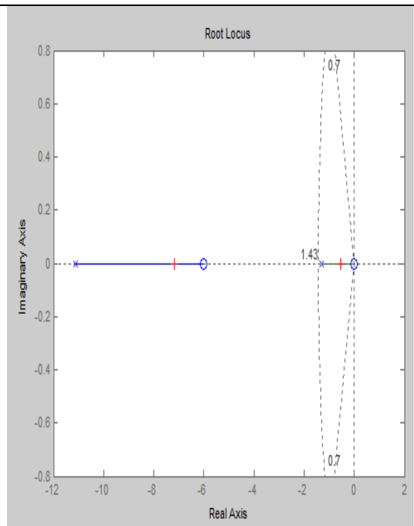
```
%   Parameter Design
%   Ajuste de "P" primero
%   luego se ajusta "I"
%
clear, clc
%   Especificaciones
zeta=0.7;
wn=1.43;
%   a)
%   0<P<inf
%   I=0
Ki=0
F=tf([1 6],[1 10 0]);
rlocus(F)
[Kp1,poles]=rlocfind(F)
figure
%   b)
%   0<I<inf
%   Kp=Kp1
F=tf([1 6],[1 (10+Kp1) 6*Kp1 0]);
rlocus(F)
sgrid(zeta,wn)
[Ki,poles]=rlocfind(F)
```



```
%   Parameter Design
%   Ajuste de "P" primero
%   luejo se ajusta "D"
%
clear, clc
%   Especificaciones
zeta=0.7;
wn=1.43;
%   a)
%   0<P<inf
%   I=0
Kd=0
F=tf([1 6 ],[1 10 0]);
rlocus(F)
[Kp1,poles]=rlocfind(F)
figure
%   b)
%   0<I<inf
%   Kp=Kp1
F=tf([1 6 0],[1 (10+Kp1) 6*Kp1]);
rlocus(F)
sgrid(zeta,wn)
[Kd,poles]=rlocfind(F)
```




Se observa del bosquejo del lugar geométrico que la acción del controlador PI puede lograr ajustar las raíces de lazo cerrado para que cumplan con las especificaciones solicitadas: en cambio, para el caso del controlador PD no es posible.

$$Gp(s)=\frac{(s+6)}{s(s+10)} \quad ; \quad Gc(s) \quad ; \quad H(s)=1$$

2. $Aplicando\_el\_criterio\_de\_Magnitud\_y\_Fase$

$Hay\_solución\_únicamente\_con\_controlador\_PI$

$$Gp(s)=\frac{(s+6)}{s(s+10)} \quad ; \quad Gc(s)=K_P\frac{(s+K_I/K_P)}{s}=K_P\frac{(s+z)}{s} \quad \rightarrow \quad z=\frac{K_I}{K_P}$$

$$SP=5\% \quad \rightarrow \quad \zeta=\sqrt{\frac{(\log(0.01\cdot SP))^2}{pi^2+(\log(0.01\cdot SP))^2}}=0.7$$

$$Ts=4 \quad ; \quad T_s=\frac{4}{\zeta\omega_n} \quad \rightarrow \quad \zeta\omega_n=\frac{4}{T_s}=1 \quad ; \quad \omega_n=\frac{1}{\zeta}=1.43$$

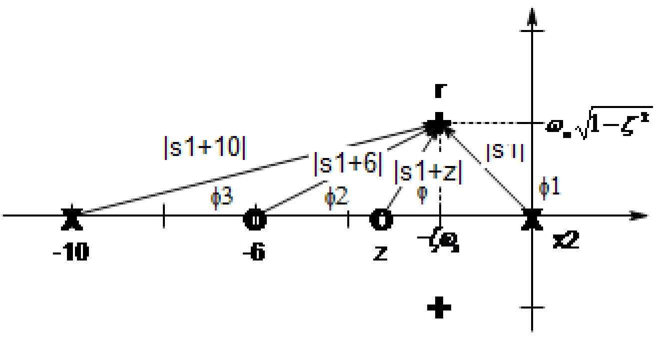
$$Las\_raíces\_deseadas: \quad s_1,s_2=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-1\pm1.02j$$

2.a $Aplicando\_Criterio\_de\_ángulo:$

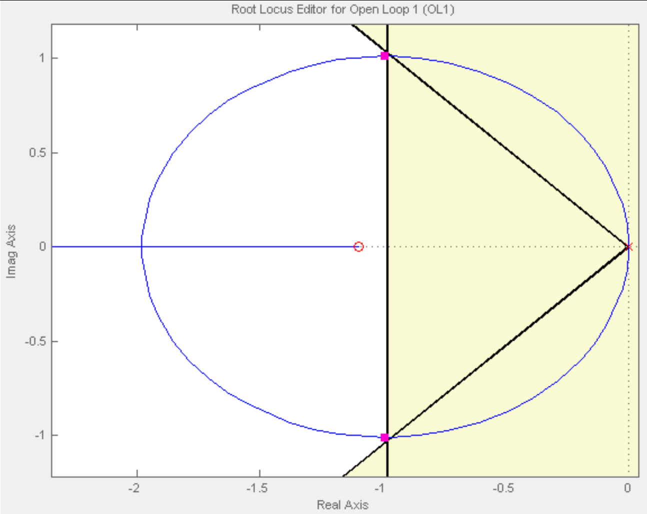
$$\Phi=2\Phi_1-\Phi_2+\Phi_3+180 \quad \rightarrow \quad z=1.1$$

2.b $Aplicando\_Criterio\_de\_magnitud:$

$$K=-\frac{|s|^2|s+10|}{|s+6||s+z|}=3.6$$



Utilizando SISOTOOL para el caso con controlador PI
Se observa que se cumple con las dos especificaciones:
esto es, S.P. = 5% y Ts = 4 seg.
Ubico el cero en: z = -1.1
La ganancia: Kp = 3.6
z = Kp/Ki,   Ki = 1.Kp = 3.96




## Segundo Tema:

$a)$ *Aplicando_Mason:*

*Caminos_directos   4*

*Lazos   4*

*Lazos_distintos   0*

$$X(s)=\frac{1}{\Delta}\left[(P_1\Delta_1+P_2\Delta_2+P_3\Delta_3+P_4\Delta_4)W(s)+G_6(s)Z_1(s)+G_7(s)Z_2(s)\right]$$

$$\Delta_1=1 \quad ; \quad \Delta_2=1 \quad ; \quad \Delta_3=1 \quad ; \quad \Delta_4=1$$

$$\Delta=1-G_8(s)G_1(s)G_3(s)+G_8(s)G_1(s)G_5(s)-G_8(s)G_2(s)G_5(s)+G_8(s)G_2(s)G_4(s)$$

$$\Delta=1+G_8(s)\left[G_1(s)(G_5(s)-G_3(s))+G_2(s)(G_4(s)-G_5(s))\right]$$

$$P_1=-G_8(s)G_1(s)G_3(s) \quad ; \quad P_2=G_8(s)G_1(s)G_5(s) \quad ; \quad P_3=-G_8(s)G_2(s)G_5(s) \quad ; \quad P_4=G_8(s)G_2(s)G_4(s)$$

$$X(s)=\frac{G_8(s)\left[G_1(s)(G_5(s)-G_3(s))+G_2(s)(G_4(s)-G_5(s))\right]W(s)+G_6(s)Z_1(s)+G_7(s)Z_2(s)}{1+G_8(s)\left[G_1(s)(G_5(s)-G_3(s))+G_2(s)(G_4(s)-G_5(s))\right]}$$

$b)$

$$G_1(s)=\frac{2}{1+Ts} \quad ; \quad G_2=\frac{6}{1+2Ts} \quad ; \quad G_3(s)=K_3$$

$$G_4(s)=K_4 \quad ; \quad G_5(s)=K_5 \quad ; \quad G_6(s)=K_6$$

$$G_7(s)=K_7 \quad ; \quad G_8(s)=K_R\frac{1+2Ts}{2Ts}$$

*Adicionalmente:* $K_4-K_5=K \quad ; \quad K_5-K_3=3K$

$$\Delta=1+K_R\frac{1+2Ts}{2Ts}\left[\frac{2}{1+Ts}(K_5-K_3)+\frac{6}{1+2Ts}(K_4-K_5)\right]=1+K_R\frac{1+2Ts}{2Ts}\left[\frac{6K}{1+Ts}+\frac{6K}{1+2Ts}\right]$$

$$\Delta=1+K_R\frac{1+2Ts}{2Ts}\left[\frac{6K(1+2Ts)+6K(1+Ts)}{(1+Ts)(1+2Ts)}\right]=1+\frac{3KK_R}{T}\frac{2+3Ts}{s(1+Ts)}$$

$$X(s)=\frac{\dfrac{3KK_R}{T}\dfrac{2+3Ts}{s(1+Ts)}W(s)+K_6Z_1(s)+K_7Z_2(s)}{1+\dfrac{3KK_R}{T}\dfrac{2+3Ts}{s(1+Ts)}}=\frac{3KK_R(2+3Ts)W(s)+sT(1+Ts)(K_6Z_1(s)+K_7Z_2(s))}{Ts+T^2s^2+3KK_R(2+3Ts)}$$

**Tercer tema:**

$a,b) \quad G(s) = \dfrac{K}{s(s+2)(s+5)}$

Según el gráfico del Lugar Geométrico de las raíces el sistema es "condicionalmente estable".
Su ecuación característica es:

$$s(s+2)(s+5) + K = s^3 + 7s^2 + 10s + K = 0$$

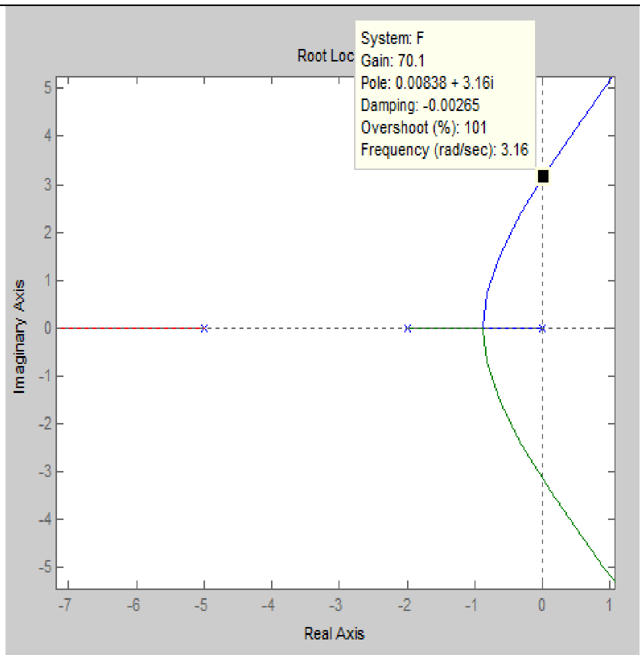
$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 7 & K \\ s^1 & \dfrac{70-K}{7} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

$$\frac{70-K}{7} \geq 0 \quad \rightarrow \quad Kcrit \leq 70$$

$$Rango\_de\_Estabilidad: \quad 0 \leq K \leq 70$$

$$Ecuaciónauxiliar: \quad 7s^2 + K = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 = -10$$

$$s_{1,2} = \pm j3.16$$



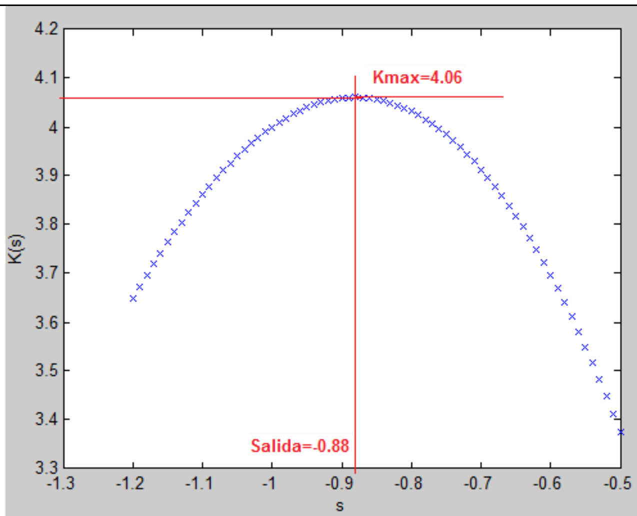

$c)$

$$s = \sigma + j\omega \quad ; \quad j\omega = 0 \quad \rightarrow \quad s = \sigma$$

$$K = -\sigma(\sigma^2 + 7\sigma + 10) \quad ; \quad 0 < \sigma < -2$$

$$K = -\sigma^3 - 7\sigma^2 - 10\sigma$$

```
clc,clear
%   Grafica de K(s)
s=-1.2:0.01:-0.5;
K=-(s.^3+7*s.^2+10*s);
plot(s,K,'x')
[Kmax,I]=max(K);
Kmax
salida=s(I)
xlabel('s')
ylabel('K(s)')
```




$d) \quad K = 6 \quad ;$

$$E.C. \quad \rightarrow \quad q(s) = s^3 + 7s^2 + 10s + K = 0$$

$$roots(q) = -5.337 : -0.83 \pm j0.65$$

Debido a que la raíz real está 6,4 veces mas a la izquierda que la parte real del par de raíces complejas conjugadas; entonces, el sistema tiene "dominancia de segundo orden".

$e) \quad K = 6 \quad ;$

$$E.C. \quad \rightarrow \quad q(s) = s^3 + 7s^2 + 10s + 6 = 0$$

$$q(s) = (s + 5.337)(s + 0.83 + j0.65)(s + 0.83 - j0.65)$$

$$q(s) = (s + 5.337)(s^2 + 1.66s + 1.124)$$

$$s^2 + 1.66s + 1.124 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\begin{cases} \omega_n^2 = 1.124 & \rightarrow \quad \omega_n = 1.06 \\ 2\zeta\omega_n = 1.66 & \rightarrow \quad \zeta = \dfrac{1.66}{2\omega_n} = 0.78 \end{cases}$$

$$Ts = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4.84 \quad ; \quad SP = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 2\%$$